*Г.К. Измайлов*

# “Численное решение смешанной краевой задачи явным методом сеток”

*Методическая разработка по курсу “Численные методы”*

## 1. Постановка задачи

Решить методом сеток смешанную краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \frac{\partial u}{\partial x} + u \sin x + \sin x - 1, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0, t) = 0,$$
$$u(\pi/2, t) = 1, \quad t \geq 0,$$

и с начальным условием

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

## 2. Математическая модель

Разобьем отрезок $[0, \pi/2]$ на $n$ частей длиной $hx = (\pi/2)/n$ и введем шаг по времени $ht$.

Совокупность точек $(x_i, t_j)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, называемых узлами, образуют сетку. Рассмотрим дифференциальное уравнение в отдельно взятом внутреннем узле сетки. В этом узле все функции уравнения (1) можно вычислить для соответствующих значений независимых переменных, а производные аппроксимируем с помощью разностных отношений, причем отношения по координате $x$ запишем через значения искомой функции на известном временном слое – $t_j$.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{hx^2} + O(hx^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2hx} + O(hx^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{ht} + O(ht).$$

Подставляя производные в опорном узле в виде разностных отношений в исходное уравнение и отбрасывая погрешности аппроксимации, получим разностную формулу, связывающую значение искомой функции на новом временном слое (на ($j$+1)-м) со значениями функций на предыдущем (известном) $j$-м слое. Выражая это единственное значение на новом слое, получим расчетную формулу для расчета любого значения функции $u(x,t)$ во внутреннем узле сетки:

$$u_i^{j+1} = \left[ \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{hx^2} - \cos(x_i)\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2hx} + u_i^j \sin(x_i) + \sin(x_i) - 1 \right] ht + u_i^j ,$$

$i$=1,…,$n$–1, $j$=0, 1,…,m-1.

где $hx$ – шаг по координате,
$ht$ – шаг по времени,
$n$ – число разбиений по координате,
$m$ – количество шагов по времени ,
$T$ – временной интервал ( $T=ht \cdot m$ ).

Начальные условия определяют начальный временной слой:

$$u_i^0 = 0; \quad i=0,\ldots n.$$

Краевые условия задают значения искомой функции на концах отрезка для любого слоя:

$$u_0^j = 0; \quad u_n^j = 1; \quad j=0,\ldots m.$$

Таким образом, зная начальный слой и краевые условия, можно легко определить последовательно значения первого слоя, затем второго и т.д. Разработанная разностная схема называется явной, поскольку определение значений нового слоя проводится по обычным арифметическим выражениям, что обеспечивает простоту реализации. В то же время этой схеме свойственно жесткое условие, накладываемое на величину временного шага, называемое условием устойчивости

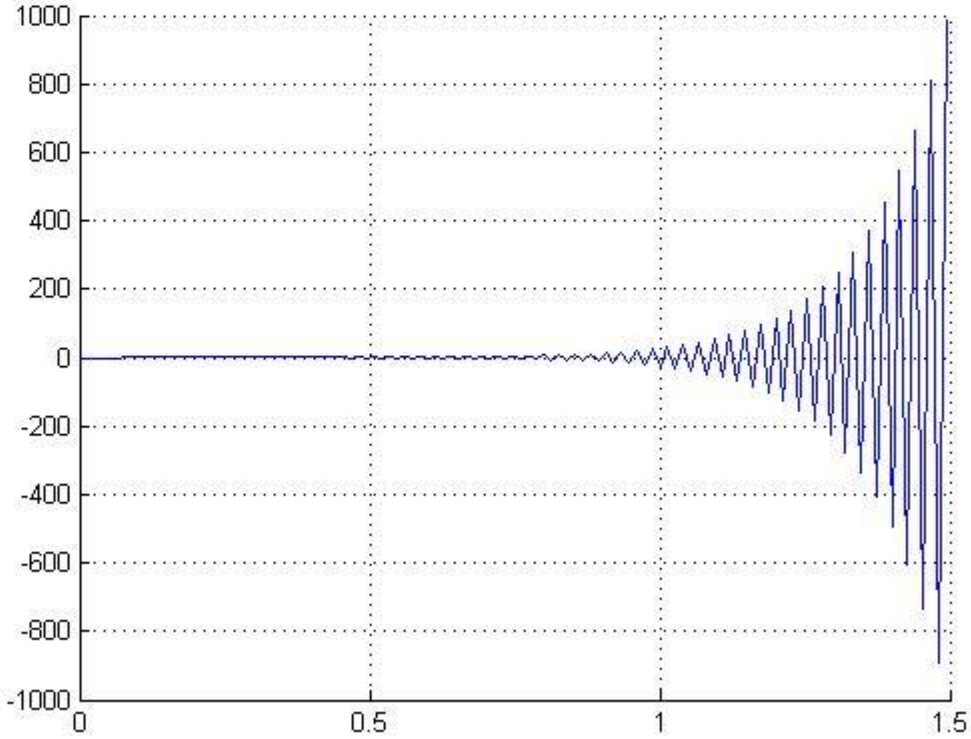
$$ht \le \frac{hx^2}{2 \cdot k},$$

где $k$ – максимальное значение коэффициента при старшей производной в исходном уравнении. В данной задаче $k$=1. Когда в условии выполняется равенство, то этот временной шаг называется предельно допустимым или просто предельным.

## 3. *Результаты исследования*

### 3.1 Варьирование временного шага

Проверим справедливость условия устойчивости. С этой целью зададим приращение предельному шагу в виде добавки величиной 0.001: $ht = (h^2/2) + 0.001$ ($n$ =10). Результаты расчета на такой сетке до $T$=1.5 представлены на следующем рисунке:

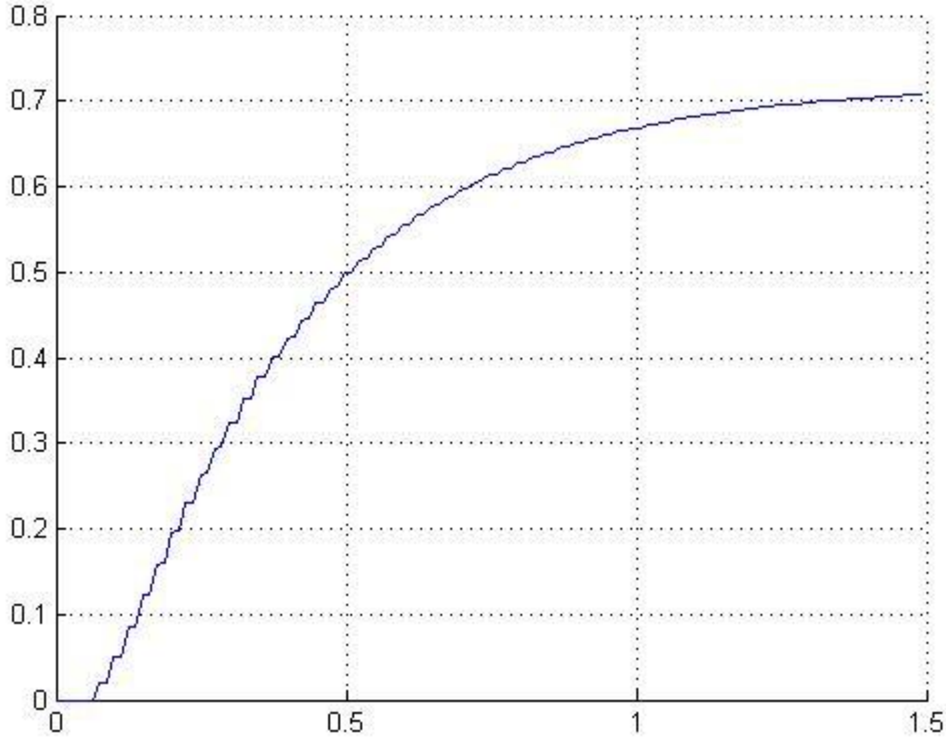



Здесь показано изменение значения для середины интервала искомой функции $u(\pi/4, t)$ в зависимости от времени. Отчетливо видно, как происходит раскачка решения, в результате чего оно стремится к бесконечности, т.е. при невыполнении условия устойчивости разностное решение расходится.

Если приращение к предельному шагу уменьшить до величины 0.000001:

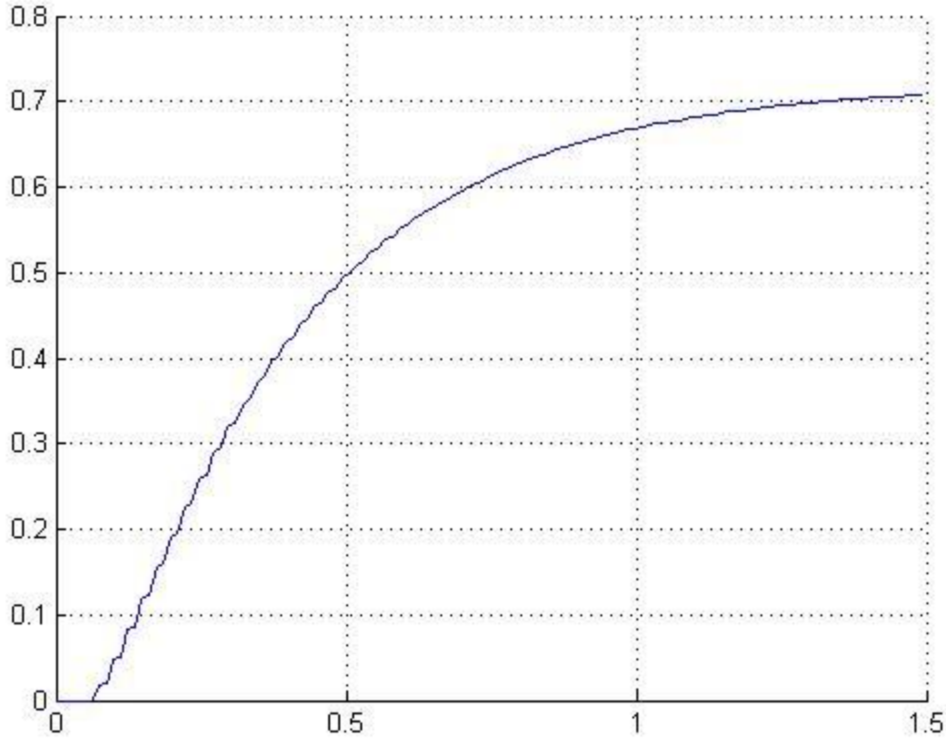
$$ht = (h^2/2) + 0.000001 \quad (n = 10),$$

то уже на начальном периоде установления появляется характерная рябь, которая затухает при выходе на асимптотический режим и только по истечении определенного периода происходит раскачка решения:



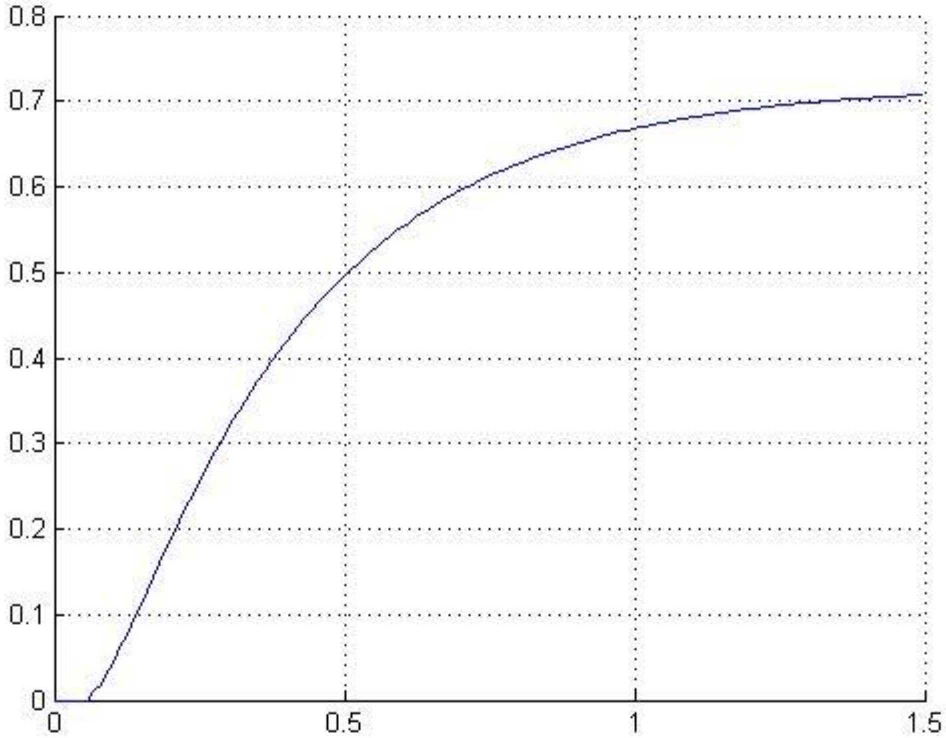

Такая же рябь только меньшей амплитуды может сопутствовать решению и для точного значения предельно допустимого временного шага:

$$ht = h^2/2 \quad (n = 10)$$



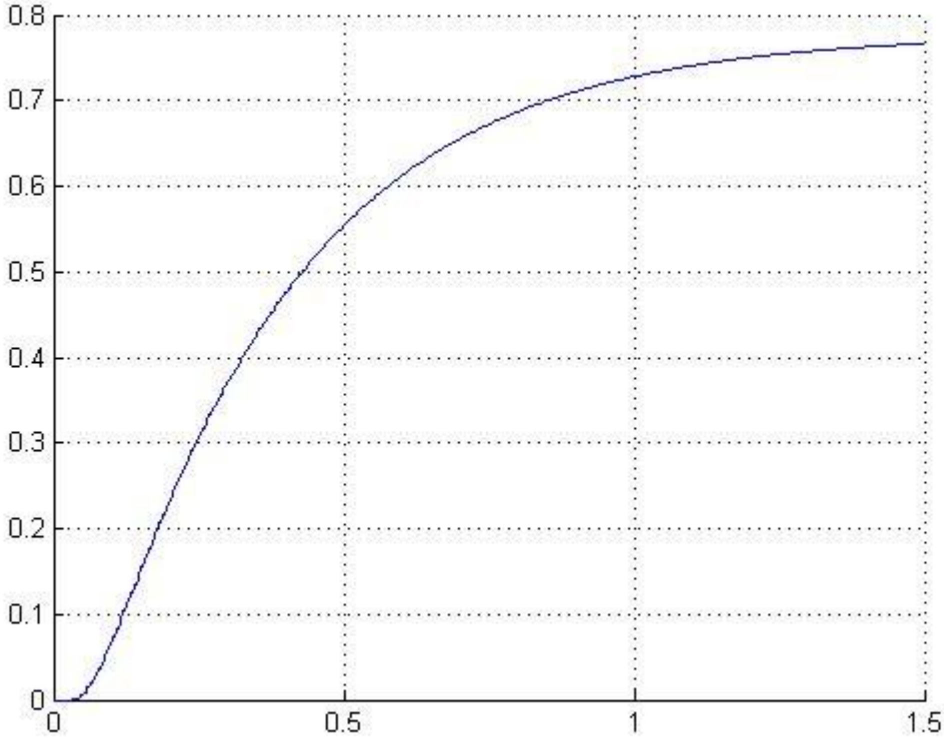

Практически эта рябь исчезает, когда временной шаг уменьшается:

$$ht = (h^2/2) - 0.001 \quad (n = 10)$$

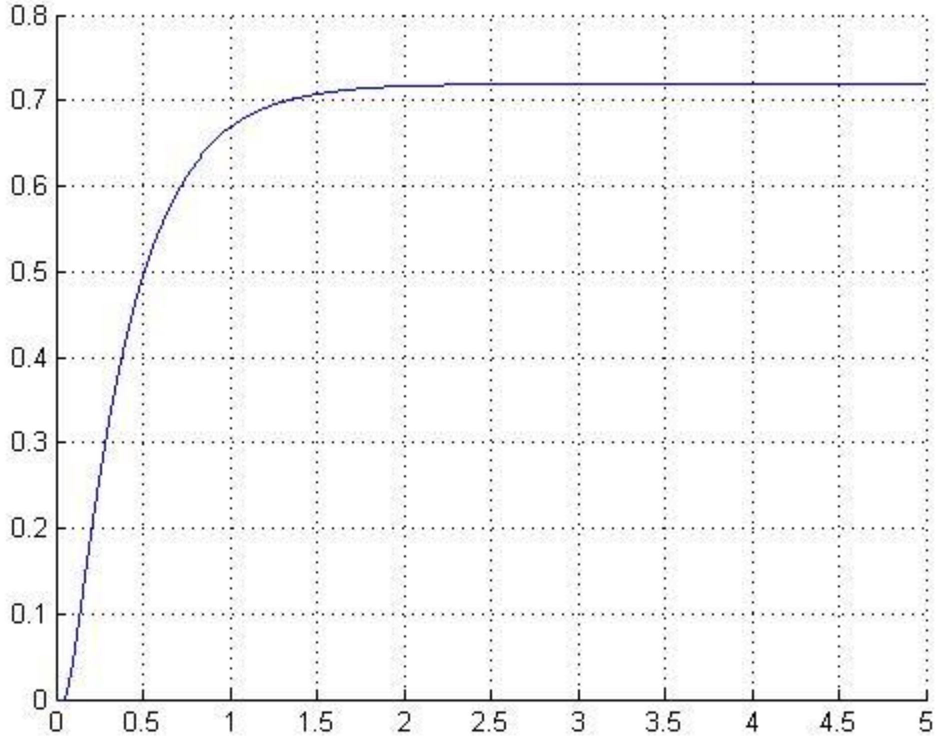



Увеличение числа разбиений по $x$ приводит к увеличению точности расчета – асимптотическое значение получается гораздо ближе к точному решению стационарной задачи, при этом сам процесс установления происходит быстрее. Помимо этого даже при предельном временном шаге флуктуации на решении не наблюдаются в силу малости этого шага. Эти свойства схемы отражаются на следующем графике, полученном при

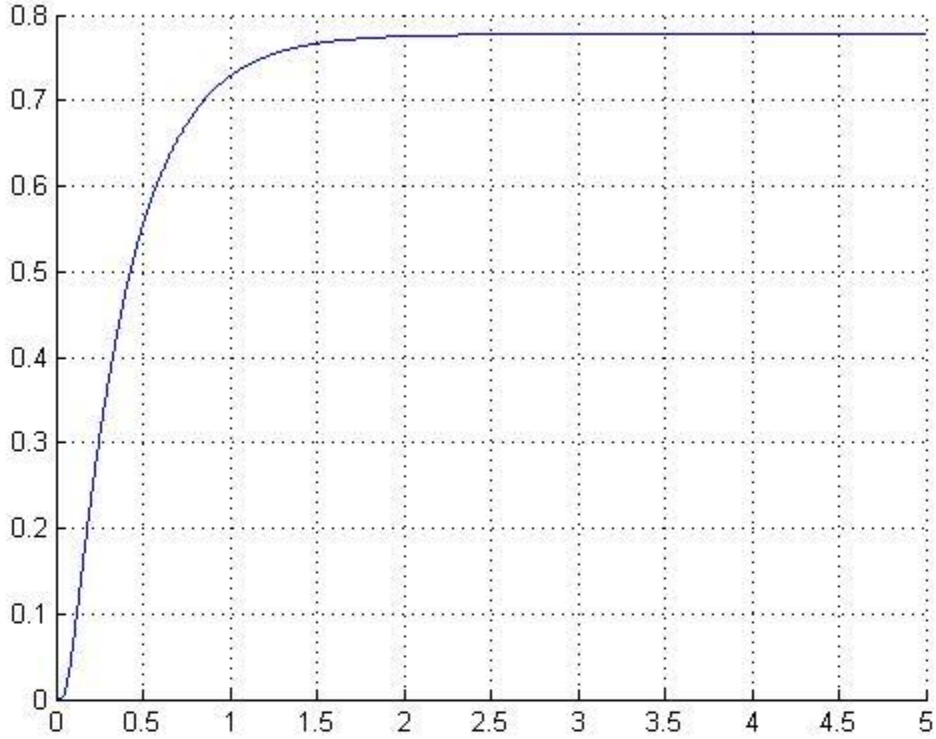
$$n = 20, \quad ht = h^2/2:$$



Сравним два варианта расчета на более протяженном интервале по времени $T$=5; первый из последующих графиков получен при числе разбиений $n$ =10, второй – при $n$=20.$n$ =10




$n$ =20



Время установления в обоих вариантах одинаково $T_\infty = 2.5$. Установившееся решение при n=10 равно 0.7195, а при n=20 равно 0.7776, разница составляет 7.5 %; при количестве шагов n=40 установившееся решение достигает 0.7979, что на 2.3 % больше чем при n=20.

Отсюда мы можем сделать вывод, что последовательность разностных решений, получаемых на сетках с возрастающим числом разбиений, сходится. Чем больше число разбиений, тем точнее решение, т.к. уменьшаются погрешности аппроксимации как по координате, так и по времени, поскольку в соответствии с условием устойчивости временной шаг привязан к шагу по $x$. Заметим также, что количество временных шагов при удвоении числа разбиений возрастает в четыре раза