

**“Численное решение смешанной краевой задачи
неявным методом сеток”**

Методическая разработка по курсу “Численные методы”

1. Постановка задачи

Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности. Будем рассматривать одномерное нестационарное неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + e^x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - e^x(u + 1);$$

с краевыми условиями первого рода

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1.7182, \quad t \geq 0;$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

В терминах теории теплообмена функция $u = u(x, t)$ представляет распределение температуры в теплоизолированном по боковой поверхности стержне единичной длины (радиус стержня много меньше его длины). Это распределение температуры по стержню изменяется во времени, начиная от начального состояния, определяемого начальным условием, а на торцах стержня температура задается в соответствии с краевыми условиями. Для данной задачи это постоянные значения в любой момент времени.

2. Математическая модель

Нанесем на пространственно-временную область $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ конечно-разностную сетку:

$$G = \left\{ (x_j; t^k) \left| \begin{array}{l} x_j = jh, j = \overline{0; J} \\ t^k = k\tau; k = \overline{0; K} \end{array} \right. \right\}$$

с пространственным шагом $h = \frac{l}{J}$ и шагом по времени $\tau = \frac{T}{K}$. Здесь появляется временной интервал T , который вводится чисто формально; он может определяться в процессе решения задачи, например из условия выхода решения на асимптотическое значение с заданной точностью.

Рассмотрим два временных слоя: “нижний” для которого $t^k = k\tau$ и на котором распределение сеточной функции $u_j^k, j = 0, 1, \dots, J$ уже известно (при $k=0$ распределение определяется начальным условием) и “верхний” временной слой, отстоящий от известного на величину временного шага, т.е.

для $t^{k+1}=(k+1)\tau$ и на котором распределение сеточной функции u_j^{k+1} , $j=0,1,\dots,J$ подлежит определению. С этой целью исходное дифференциальное уравнение рассматривается в произвольном внутреннем узле (x_j, t^k) и производные заменяются (аппроксимируются) конечно-разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{k+1} = \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2h} + O(h),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau).$$

Отметим, что пространственные производные аппроксимируются по значениям искомой функции на неизвестном слое, что приводит после подстановки аппроксимаций в исходное дифференциальное уравнение к *неявной конечно-разностной схеме*:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = (1 + e^{x(j)}) \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{h^2} - \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2h} - e^{x(j)}(u_j^{k+1} + 1) + O(\tau + h^2);$$

$j=1, \dots, J-1; k=0, \dots, K-1.$

Схема является неявной, поскольку разностные уравнения связывают несколько неизвестных значений искомой функции на слое t^k . Аппроксимация краевых и начальных условий замыкают систему разностных уравнений:

$$u_0^k = 0; \quad u_J^k = 1.7182; \quad k=0, \dots, K;$$

$$u_j^0 = 0; \quad j=0, \dots, J.$$

Полученную неявную разностную схему называют также схемой с опережением в силу того, что пространственные производные аппроксимируются на неизвестном слое. Это приводит к тому, что разностные уравнения для одного слоя связывают все неизвестные значения искомой функции “верхнего” слоя с известными, полученными на предыдущем этапе расчета значениями на “нижнем” слое. Таким образом, для определения нового $(k+1)$ -го слоя (u_j^{k+1}) надо решить отдельную систему алгебраических уравнений с $(J-1)$ -м неизвестными (для внутренних точек очередного слоя), причем эта система имеет определенную специфику – трехдиагональную матрицу коэффициентов. Запишем эту СЛАУ в форме, пригодной для использования метода прогонки:

$$\begin{cases} b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1; j=1 \\ a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j; j=2; \overline{J-2} \\ a_{J-1} u_{J-2}^{k+1} + b_{J-1} u_{J-1}^{k+1} = d_{J-1}; j=J-1 \end{cases}$$

$$\text{где } a_j = \left(\frac{(1+e^{x(j)})}{h^2} + \frac{1}{2h} \right) \quad j=2, \dots, J-1;$$

$$b_j = -\left(2 \frac{(1+e^{x(j)})}{h^2} + e^{x(j)} + \frac{1}{\tau} \right) \quad j=1, \dots, J-1;$$

$$c_j = \left(\frac{(1+e^{x(j)})}{h^2} - \frac{1}{2h} \right) \quad j=1, \dots, J-2;$$

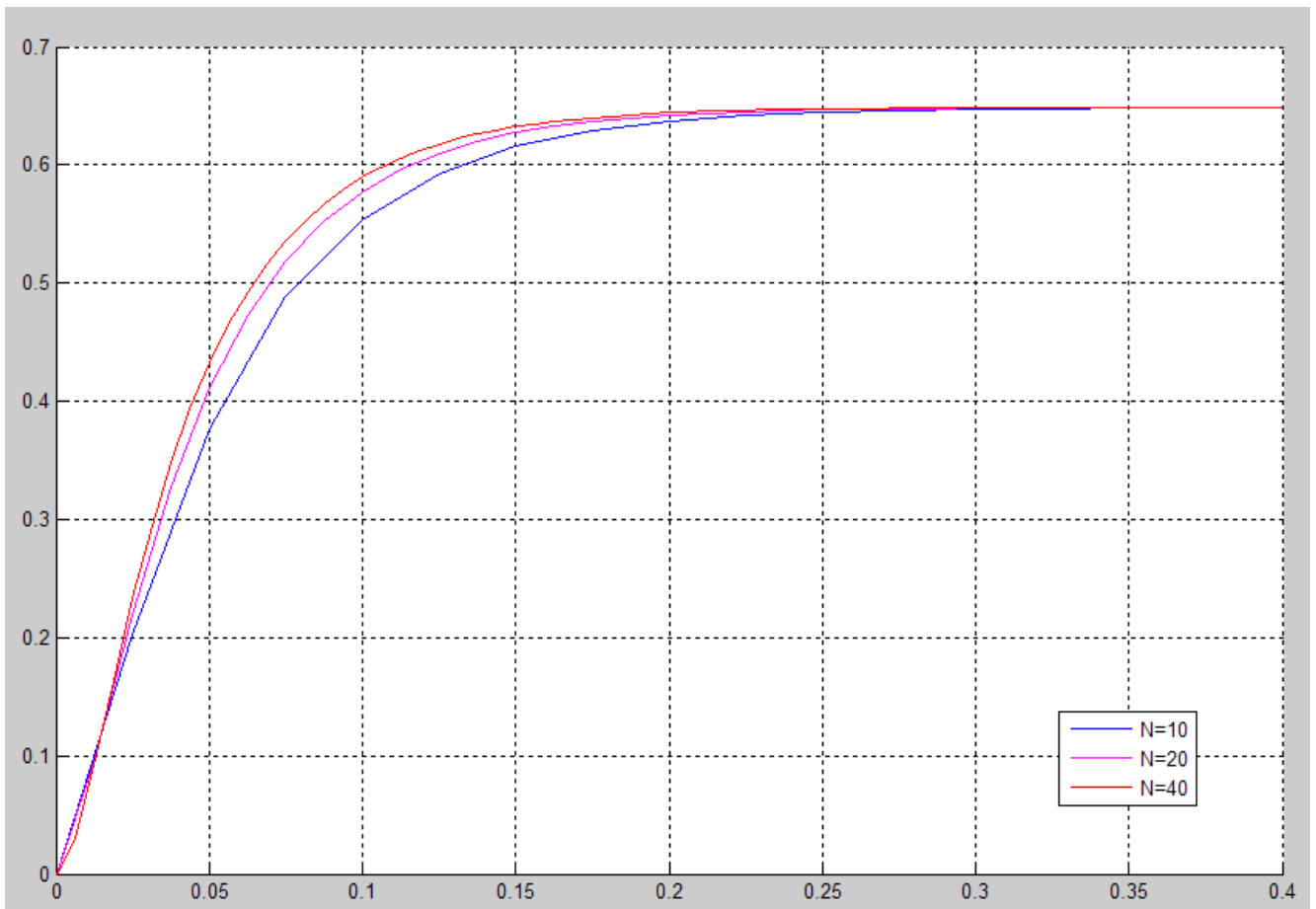
$$d_j = -\frac{u_j^k}{\tau} + e^{x(j)} \quad j=2, \dots, J-2;$$

$$d_1 = -\frac{u_1^k}{\tau} + e^{x(1)} - \left(\frac{(1+e^{x(1)})}{h^2} + \frac{1}{2h} \right) u_0^{k+1};$$

$$d_{J-1} = -\frac{u_{J-1}^k}{\tau} + e^{x(J-1)} - \left(\frac{(1+e^{x(J-1)})}{h^2} - \frac{1}{2h} \right) u_J^{k+1}.$$

3. Результаты исследования

Влияние количества разбиений N промежутка единичной длины на точность решения представлено на следующем рисунке:



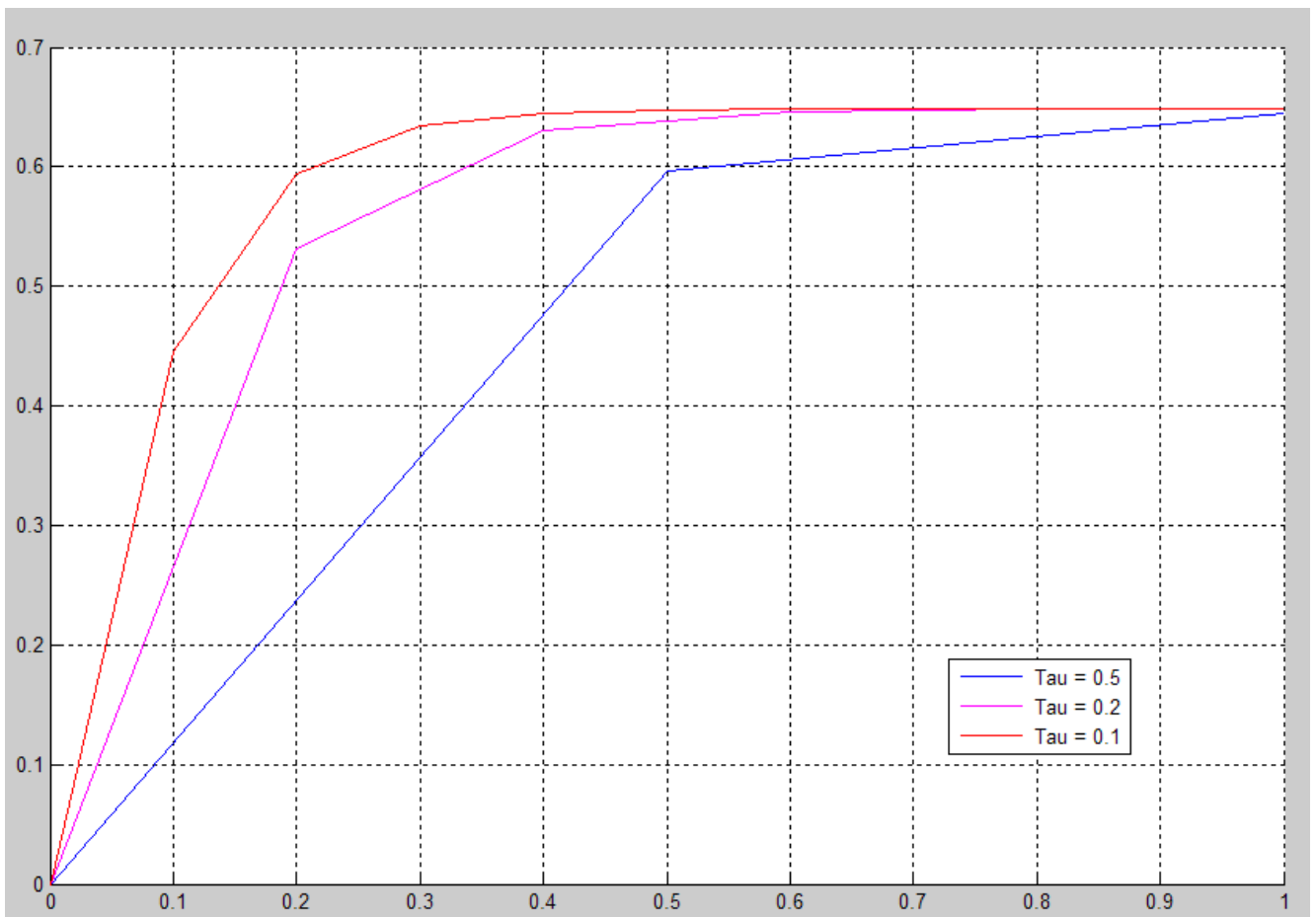
Рассматривается поведение решения для середины интервала (для $x=0.5$) в зависимости от времени – от начального нулевого значения до другого постоянного значения – установившегося или стационарного, обусловленного краевыми условиями и дифференциальным уравнением. Расчет проведен для трех разбиений $N=10$, 20 и 40. Разность между решениями с ростом числа разбиений уменьшается, что говорит о сходимости процесса. Отметим, что чем грубее сетка, тем более замедлен выход на асимптотическое значение – это связано с погрешностью аппроксимации по пространственной переменной.

Изменение числа разбиений не влияет на установившееся решение. Оценим различие решений в зависимости от числа разбиений на этапе установления. В момент времени $t=0.1$, при числе разбиений $N=10$ температура принимает значение 0.5542; при числе разбиений $N=20$ температура принимает значение 0.5777; при числе разбиений $N=40$ температура принимает значение 0.5895.

$$\Delta_{20\ 40} = |U_{20} - U_{40}| = 0.0118; \quad \Delta_{10\ 20} = |U_{10} - U_{20}| = 0.0235; \quad \delta = \frac{\Delta_{20\ 40}}{\Delta_{10\ 20}} = 0.502.$$

Таким образом, при изменении числа разбиений, соответствующая разность значений сеточных решений уменьшилась на 50% по сравнению с предыдущей разностью. Увеличение числа разбиений до $N=80$ приводит к тому, что разность между решениями становится настолько малой, что не отображается на рисунке.

Как известно, главным достоинством неявной схемы является ее безусловная устойчивость, поэтому выбор временного шага определяется только желаемой точностью расчета. Влияние временного шага τ на точность решения представлено на следующем рисунке:



В момент времени $T=1$ при $\tau=0.2$ температура принимает значение 0.6487; при $\tau=0.5$ температура получается равной 0.6452.

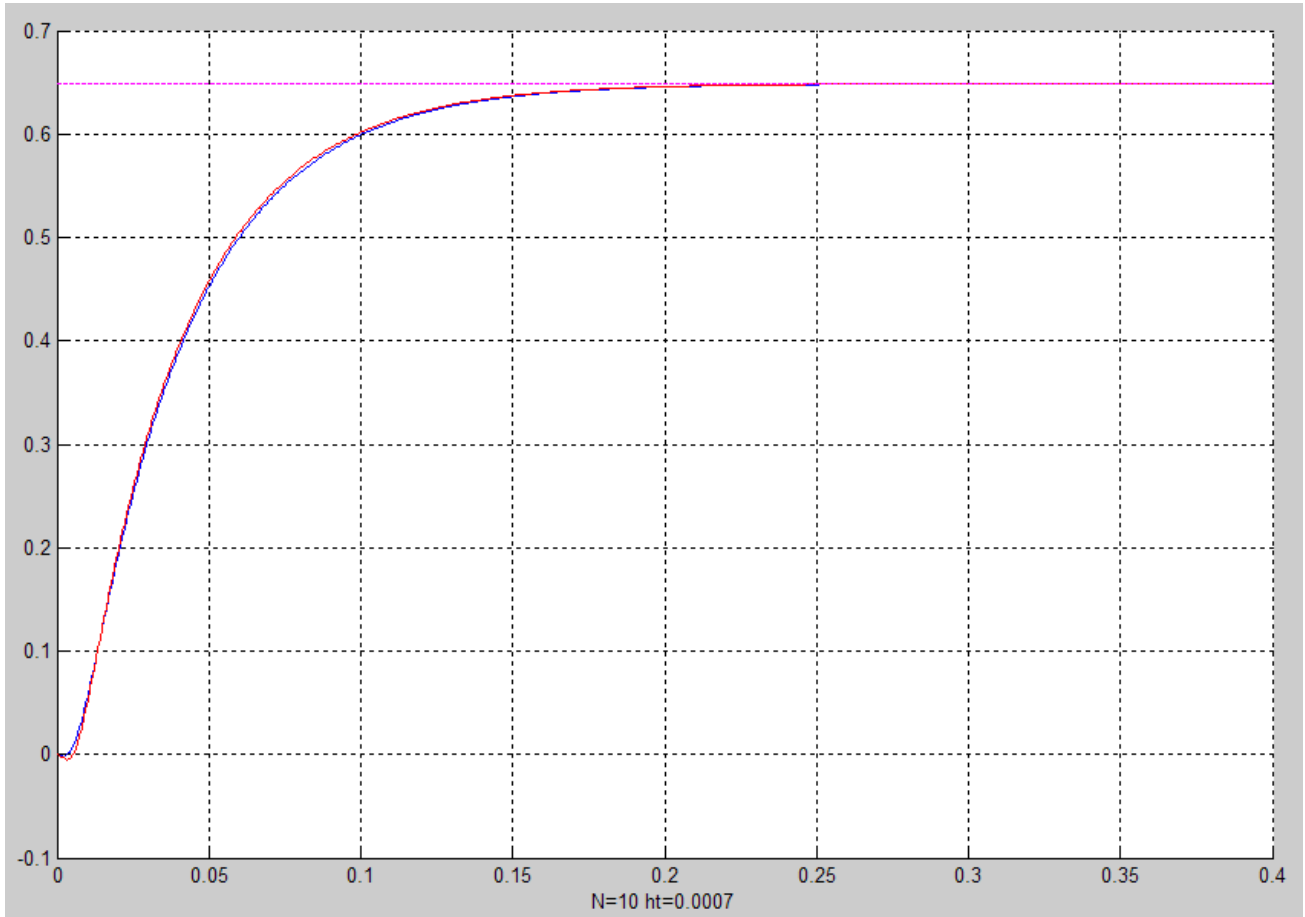
$$\Delta = |U_{0.2} - U_{0.5}| = 0.0035; \quad \delta = \frac{\Delta}{U_{0.2}} = 0.0053;$$

Таким образом, расхождение значения искомой функции, рассчитанной с шагом по времени, равным половине всего расчетного интервала, в момент времени $T=1$ составляет всего около 0.5% от установившегося решения. Отметим также, что уже на первом шаге расчета неявная схема дает значение искомой функции, отличающееся всего на 10 % от стационарного (считаем, что при $T=0.5$ точное решение выходит на стационарный режим). Такое

отклонение обусловлено первым порядком точности разностной схемы по времени.

Уменьшение временного шага приводит лишь к сглаживанию решения в начальные моменты времени, однако не влияет на установившееся решение.

Сравним решения, полученные с помощью явной и неявной конечно-разностных схем:



Момент времени	Данные, полученные по явной схеме	Данные, полученные по неявной схеме	$\Delta = U_t^{\text{exp}} - U_t^{\text{imp}} $	$\delta = \frac{U_{\text{ycm}} - U_t}{U_{\text{ycm}}}$
$t_1 = 0.2$	$U(t_1)=0.4891$	$U(t_1)=0.4888$	0.0003	$\delta_{\text{exp}} = 0.549 \%$ $\delta_{\text{imp}} = 0.610 \%$
$t_2 = 0.25$	$U(t_2)=0.4912$	$U(t_2)=0.4911$	0.0001	$\delta_{\text{exp}} = 0.122 \%$ $\delta_{\text{imp}} = 0.142 \%$
$t_3 = t_{\text{ycm}}$	$t_{\text{ycm}}^{\text{exp}} = 0.3247$ $U(t_3)=0.4918$	$t_{\text{ycm}}^{\text{imp}} = 0.3307$ $U(t_3)=0.4918$	0	$\delta_{\text{exp}} = 0\%$ $\delta_{\text{exp}} = 0\%$

Время установления решения (т.е. время выхода на стационарный режим) по явной схеме составляет величину 0.3247, этот результат меньше чем время установления решения по неявной схеме – 0.3307. Также из таблицы видно, что расхождение полученных решений с установившимся решением составляет 0.6 % в момент времени $t_1=0.2$ и 0.1 % в момент времени $t_2=0.25$.

Явная конечно-разностная схема, обладает тем безусловным достоинством, что решение на “верхнем” временном слое получается расчетом поочередно всех значений слоя по алгебраическим формулам (без решения СЛАУ) с использованием значений сеточных функций на “нижнем” временном слое, где решение известно (при $k=0$ значения сеточной функции задаются начальным условием). Но эта схема обладает существенным недостатком, заключающимся в том, что она является условно устойчивой с условием $\frac{A \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, которое накладывает жесткое ограничение на величину временного шага τ (здесь A – коэффициент при старшей производной в исходном дифференциальном уравнении). В нашем случае коэффициент A является функцией аргумента x , поэтому для правильного выбора временного шага надо взять $\max_{0 \leq x \leq 1} [A(x)] = 1 + e$, тогда условие устойчивости явной схемы выражается неравенством $\tau \leq \frac{h^2}{2(1+e)}$. Если задать $h=0.1$, то предельный шаг по времени будет $\tau \approx 0.001$.

С другой стороны, неявная конечно-разностная схема приводит к необходимости решать на каждом временном слое СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Однако в силу этого обстоятельства, когда все значения на неизвестном слое завязаны со значениями на известном слое, неявная схема абсолютно устойчива, что позволяет задавать временной шаг, руководствуясь только соображениями приемлемой точности решения.

Общее число операций в методе прогонки равно $9n$, где n - число уравнений. В нашем случае число уравнений $n=9$, и число операций для получения очередного слоя равно 81. Если $h=0.1$ и $\tau=0.05$, то общее число операций для неявной схемы составит 648 ($T=0.4$). В то же время, предполагая, что количество операций для получения очередного слоя по явной схеме примерно такое же – 81, количество же временных слоев для такого же временного интервала должно быть 400, т.е. общее число операций составит 32100, на два порядка больше. Естественно, что при увеличении временного интервала разница будет еще более значительна.

Таким образом, по крайней мере с учетом специфики данной задачи, жесткое условие устойчивости приводит к тому, что главное преимущество явной схемы – простота реализации, перекрывается экономичностью неявной схемы. Особенно эта разница ощутима в задачах с многомерными уравнениями.