

Министерство образования и науки Российской Федерации  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

С. Э. Сараджишвили

**СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ  
МНОГОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для обучения студентов высших учебных заведений по направлению подготовки магистров «Системный анализ и управление».

Санкт-Петербург  
2011



УДК 621.301

ББК 32.88

Д14

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент СПбГПУ В.Е. Евдокимов  
Кандидат технических наук, начальник отдела реализации проектов  
ООО «БСС» А.А. Зотов

Сараджишвили, С.Э. **Системы обработки многомерной дискретной информации**: учеб. пособие / С.Э. Сараджишвили. – 2011. – 198 с.

Учебное пособие содержит последовательное изложение теоретических основ построения цифровых многомерных систем обработки дискретной информации. Рассматриваются импульсные и частотные характеристики систем, многомерные Фурье- и z-преобразования для анализа сигналов и систем. Рассмотрены вопросы быстрых алгоритмов фильтрации и построения ортогональных базисных функций, а также особенности построения многомерных КИХ- и БИХ-фильтров.

Учебное пособие предназначено для обучения студентов высших учебных заведений по направлению подготовки магистров «Системный анализ и управление».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Сараджишвили С.Э., 2011

© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2011



## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
Глава 1. МНОГОМЕРНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ.....	9
1.1. Двумерные дискретные сигналы.....	9
1.1.1. Некоторые особые последовательности.....	10
1.1.2. Разделимые последовательности.....	12
1.1.3. Последовательности конечной протяженности.....	13
1.1.4. Периодические последовательности.....	14
1.2. Многомерные системы.....	17
1.2.1. Основные операции над многомерными сигналами.....	18
1.2.2. Линейные системы.....	19
1.2.3. Системы, инвариантные к сдвигу.....	21
1.2.4. Линейные системы, инвариантные к сдвигу.....	21
1.2.5. Последовательное и параллельное соединение систем.....	27
1.2.6. Разделимые системы.....	28
1.2.7. Устойчивые системы.....	30
1.2.8. Опорные области.....	30
1.2.9. Системы с векторными входом и выходом.....	33
1.3. Характеристики сигналов и систем в частотной области.....	34
1.3.1. Частотный отклик двухмерной ЛИС-системы.....	34
1.3.2. Определение импульсного отклика по частотному отклику.....	36
1.3.3. Многомерное преобразование Фурье.....	40
1.4. Дискретизация непрерывных двухмерных сигналов.....	46
1.4.1. Периодическая дискретизация по прямоугольному растру.....	46
1.4.2. Периодическая дискретизация при произвольном растре дискретизации.....	52
1.4.3. Сравнение прямоугольной и гексагональной дискретизации.....	58
Глава 2. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И АДАМАРА..	64
2.1. Быстрое преобразование Фурье (БПФ).....	64
2.1.1. Общее описание БПФ.....	66
2.1.2. Стандартная форма БПФ.....	67
2.2. Функции ортонормированные.....	71
2.3. Функции Уолша. Преобразование Адамара. Быстрое преобразование Адамара БПА.....	74
Глава 3. МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ.....	78
3.1. Методы фильтрации высокочастотных шумов.....	78

3.1.1. Метод пороговой фильтрации.....	78
3.1.2. Метод анизотропной фильтрации.....	78
3.1.3. Метод рекуррентной фильтрации.....	80
3.1.4. Метод статистической фильтрации.....	81
3.1.5. Метод сплайн-фильтрации.....	82
3.1.6. Восстановление контуров сечений выпуклого объекта по набору теневых проекций.....	84
Глава 4. СИНТЕЗ И РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХМЕРНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ.....	91
4.1. КИХ-фильтры.....	91
4.2. Реализация КИХ-фильтров.....	92
4.2.1. Прямая свертка.....	92
4.2.2. Реализация КИХ-фильтров с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ).....	93
4.2.3. Секционированная свертка.....	94
4.3. Синтез КИХ-фильтров с использованием окон.....	98
4.3.1. Описание метода.....	98
4.3.2. Выбор функции окна.....	99
4.4. Синтез оптимальных КИХ-фильтров.....	106
4.4.1. Синтез методом наименьших квадратов.....	110
4.4.2. Синтез КИХ-фильтров с нулевой фазой и равновеликими пульсациями.....	113
Глава 5. МНОГОМЕРНЫЕ РЕКУРСИВНЫЕ СИСТЕМЫ.....	115
5.1. Разностные уравнения конечного порядка.....	115
5.1.1. Реализация ЛИС-систем с помощью разностных уравнений.....	116
5.1.2. Рекурсивная вычислимость.....	117
5.1.3. Граничные условия.....	124
5.1.4. Упорядочивание вычислений выходных отсчетов.....	128
5.2. Многомерное Z-преобразование.....	131
5.2.1. Передаточная функция.....	132
5.2.2. Z-преобразование.....	133
5.2.3. Свойства двухмерного z-преобразования.....	144
5.2.4. Передаточные функции систем, описываемых разностными уравнениями.....	149
5.2.5. Обратное Z-преобразование.....	152
5.2.6. Двухмерные направленные графы.....	154
5.3. Устойчивость рекурсивных систем.....	158
5.3.1. Теоремы об устойчивости.....	159

5.3.2. Проверка устойчивости.....	163
5.3.3. Влияние полинома-числителя на устойчивость.....	168
Глава 6. СИНТЕЗ И РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХМЕРНЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ.....	171
6.1. Классические схемы двумерных БИХ-фильтров.....	171
6.1.1. Прямые формы реализации.....	172
6.1.2. Каскадная и параллельная реализация.....	175
6.2. Итерационные методы реализации двумерных БИХ-фильтров.....	180
6.2.1. Базовая итерационная схема.....	180
6.2.2. Обобщения итерационной схемы.....	186
6.2.3. Усечение, граничные условия и ограничения сигнала.....	191
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	198

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для подготовки магистров по направлению: «Системный анализ и управление». Может использоваться в качестве учебного пособия для направлений подготовки магистров по направлениям «Информатика и вычислительная техника», «Автоматизация и управление», «Информационные системы», и написано на основе курса лекций, читаемых в течение ряда лет на факультете технической кибернетики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Пособие написано в связи с необходимостью обеспечения подготовки специалистов учебной литературой и обеспечивает возможность более глубокого изучения материала. Большое количество статей и проводимых конференций по цифровой обработке сигналов и особенно многомерных говорит о бурном развитии этой области знаний. Однако, учебной литературы систематически излагающей материал по многомерной обработке сигналов, катастрофически не хватает. Наиболее полно излагающие материал источники, приведенные в списке литературы, изданы малыми тиражами и на сегодня стали библиографической редкостью. Кроме того, уровень изложения и объем материала в этих изданиях слишком велик и недоступен для его освоения студентами в течение одного семестра. Существующий государственный стандарт по указанным направлениям не предусматривает большего объема времени для освоения материала. При этом к специалистам в области обработки и передачи информации, наиболее продвинутые фирмы предъявляют определенные требования к уровню знаний в области дискретной многомерной математики, обладающей отличиями на качественном уровне по сравнению с одномерной обработкой сигналов. В данном учебном пособии аккумулированы и адаптированы основные знания, изложенные в литературных источниках, приведенных в списке литературы, а так же оригинальные достижения автора в этой области.

Пособие предназначено для углубления знаний, полученных на занятиях, в области разработки многомерных цифровых систем и многомерного кодирования информации. Оно позволяет понять корни возникающих проблем при создании различных цифровых систем и понять природу недостатков, связанных с использованием дискретных принципов и устройств обработки информации. В нем содержатся сведения, которые позволяют студентам понять реальные возможности дискретных систем и реальное место цифровых подходов к решению различных задач обработки сигналов. Изложенный материал позволит подготовить слушателей к восприятию таких фундаментальных проблем, как понимание нелинейности окружающих пространств, управления объектами в нелинейных многомерных пространствах и построения систем влияющих на эти пространства. Ограниченность объема не позволяет углубиться в эти вопросы, однако на сегодня они актуальны для фундаментальной науки. Опираясь на полученные здесь знания, слушатели в будущем могут углубить свои знания в этой области и при желании посвятить себя изучению этих интереснейших проблем.

Перейдем теперь непосредственно к вопросам дискретной обработки информации. Сигнал – это некоторое средство для передачи информации, а целью обработки сигналов является извлечение этой информации.

Обычно обработка сигналов включает в себя перенос информации с одного сигнала на другой. Например, в результате сканирования фотографии можно получить набор цифр в памяти ЦВМ.

Цифровая обработка не может увеличить объем информации. Она призвана преобразовать ее в такую форму, которая удобна для расшифровки наблюдателем.

Независимо от своей физической сущности сигналы представляют интерес только благодаря содержащейся в них информации.

Обработка сигналов включает в себя две основные задачи:

1. Преобразование способа представления информации в сигнале;

2. Сокращение объема информации с целью выделения необходимой.

Цифровая обработка сигналов – это обработка информации, представленной в виде последовательности чисел, а цифровая обработка многомерных сигналов – обработка информации, представленной в виде многомерных массивов чисел. Преобразование непрерывных носителей информации в цифровые позволяет использовать для их обработки цифровые процессоры и описывать операторы устройств обработки, как алгоритмы или процедуры.

Обработка многомерных сигналов имеет существенные отличия от обработки одномерных и это связано не только с увеличением объема информации. Математические описания многомерных систем не отличаются той завершенностью, которая характерна для математических методов описания одномерных систем. Многомерные системы обладают большим числом степеней свободы, в результате чего проектирование приобретает гибкость, несвойственную одномерным системам. Так, все рекурсивные цифровые фильтры реализуются с помощью разностных уравнений, но в одномерном случае эти уравнения упорядочены полностью, а в многомерном случае – лишь частично, и эту дополнительную гибкость можно использовать.

Такие существенные различия возникают при переходе от обработки сигналов с размерностью 1 к обработке сигналов с размерностью большей или равной 2, поскольку дальнейшее повышение размерности не приводит к качественным отличиям, а лишь повышает сложность вычислений.

Поэтому целесообразно рассматривать двухмерные задачи, а те случаи, когда увеличение размерности имеет особенности, рассматривать отдельно.

## Глава 1. МНОГОМЕРНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

Многомерный сигнал можно описать функцией  $N$  переменных, где  $N \geq 2$ . Он может быть непрерывным, дискретным и смешанным.

Непрерывный сигнал описывается функцией независимых переменных, принимающих непрерывное множество значений. Например,  $F(x, y)$  – яркость изображения.

Дискретный сигнал описывается функцией, определенной только на множестве точек, например, на множестве целых чисел.

Смешанный сигнал описывается функцией некоторого количества непрерывных переменных и некоторого количества дискретных. Примером может служить телевизионное изображение.

Здесь мы будем рассматривать многомерные дискретные сигналы, а также системы, выполняющие их преобразование.

### 1.1. Двумерные дискретные сигналы

Двумерный дискретный сигнал – это функция, определенная на совокупности упорядоченных пар целых чисел:

$$x = x(n_1, n_2), -\infty < n_1, n_2 < +\infty \quad (1.1)$$

Отдельные элементы последовательности будем называть отсчетами. Отсчеты могут быть вещественными или комплексными. Если  $(n_1, n_2)$  считать переменными, то  $x(n_1, n_2)$  – обозначение последовательности.

Иногда может оказаться полезным рассматривать сигнал  $x(n_1, n_2)$  не просто как функцию, определенную на множестве целочисленных значений ее аргументов, а как совокупность отсчетов. При такой интерпретации не возникает соблазна определить  $x(n_1, n_2)$  для значений  $(n_1, n_2)$ , не являющихся целыми числами.

На практике сигналы имеют ограниченную область определения для  $n_1$  и  $n_2$ , поэтому удобно считать, что значения за пределами определенной области равны нулю. Такое доопределение является произвольным и далеко не всегда верным и во многих задачах используют другие подходы, например, доопределение четным продолжением, не дающее разрывов в значениях сигнала на краях области или плавное изменение сигнала от границы к нулю с использованием сплайн-полиномов и так далее.

### ***1.1.1. Некоторые особые последовательности***

Эти последовательности используются в дальнейшем для синтеза и анализа сигналов и систем как некоторые первичные кирпичики.

К ним относится единичный импульс  $\delta(n_1, n_2)$ , называется также единичным отсчетом. Он определяется следующим образом:

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Одномерный аналог – одномерный единичный импульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \neq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Опираясь на него, двумерный единичный импульс можно записать в виде поэлементного произведения двух одномерных единичных импульсов

$$\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1) \cdot \delta(n_2). \quad (1.4)$$

Двумерный линейный импульс – это последовательность, имеющая постоянное значение в одном направлении и единичный импульс в другом:

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \delta(n_1), \\ y(n_1, n_2) &= \delta(n_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для N-мерного случая можно определить N-мерные единичные импульсы, линейные, плоскостные и т.д.

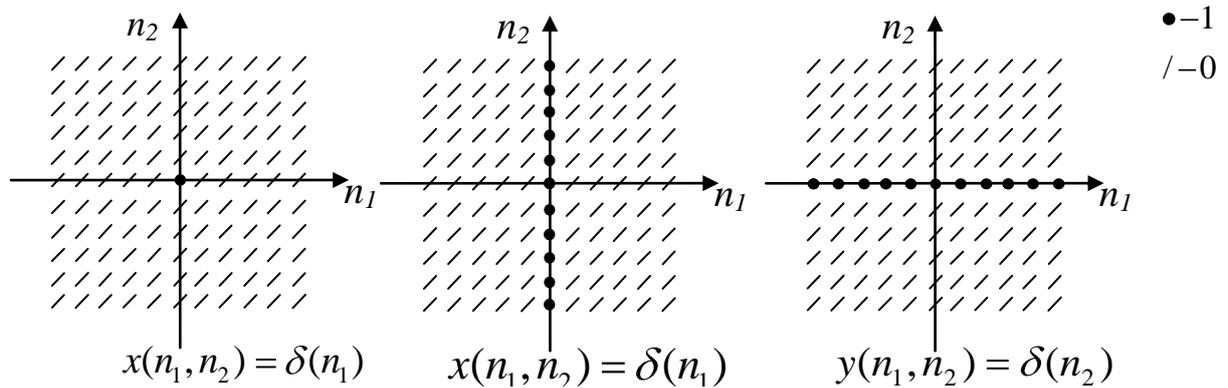


Рис. 1.1. Двухмерный  $\delta(n_1, n_2)$  и одномерные  $\delta(n_1)$  и  $\delta(n_2)$  сигналы

Двумерная единичная ступенька  $u(n_1, n_2)$  определяется:

$$u(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.6)$$

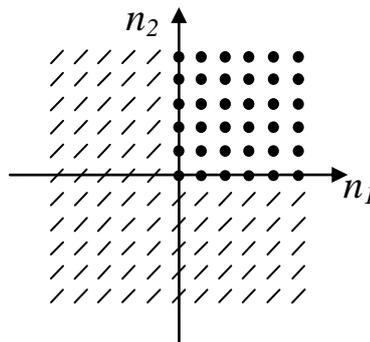


Рис. 1.2. Двухмерный сигнал  $u(n_1, n_2)$

Можно рассматривать  $u(n_1, n_2)$  как поэлементное произведение:

$$u(n_1, n_2) = u(n_1) \cdot u(n_2), \quad (1.7)$$

в котором

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0, \\ 0 & n < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

представляет собой одномерную единичную ступеньку.

Экспоненциальные последовательности – определяются следующим образом:

$$x(n_1, n_2) = a^{n_1} \cdot b^{n_2}, \quad -\infty < n_1, n_2 < +\infty, \quad (1.9)$$

где  $a, b$  - комплексные числа. Если абсолютные значения  $a$  и  $b$  равны единице, их можно записать

$$a = \exp(j\omega_1), \quad (1.10)$$

$$b = \exp(j\omega_2). \quad (1.11)$$

В этом случае:

$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) = \\ &= \cos(\omega_1 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_2) + j \cdot \sin(\omega_1 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Экспоненциальные последовательности представляют особый интерес, так как они, являются собственными функциями двумерных линейных систем, инвариантных к сдвигу.

### **1.1.2. Разделимые последовательности**

Все описанные до сих пор особые последовательности можно представить в виде:

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1) \cdot x_2(n_2). \quad (1.13)$$

Любую последовательность, которую можно представить таким образом (в виде произведения одномерных последовательностей) называются разделимыми. Хотя такие сигналы на практике встречаются редко, любое двумерное множество с конечным числом ненулевых

отсчетов можно записать в виде суммы конечного числа разделимых последовательностей

$$x(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^N x_{i1}(n_1) \cdot x_{i2}(n_2), \quad (1.14)$$

где  $N$  – число ненулевых отсчетов

Простейшее представление такого рода можно получить, выразив  $x$  в виде отдельных строк последовательности. Для этого надо принять  $x_{i1}(n_1) = x(n_1, i)$ ,  $x_{i2}(n_2) = \delta(n_2 - i)$ . Возможны и другие разложения такого рода. Иногда они оказываются и чрезвычайно полезными.

Они используются в качестве тестовых входных сигналов при оценке характеристик и настройке экспериментальных систем.

### 1.1.3. Последовательности конечной протяженности

Конечная протяженность означает, что эти сигналы равны нулю вне области конечной протяженности в  $(n_1, n_2)$  - плоскости. Эта область называется опорной областью сигнала.

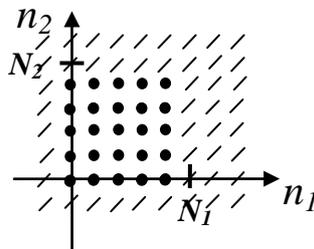


Рис. 1.3. Последовательность конечной протяженности

Одна из типичных последовательностей конечной протяженности, изображенная на рисунке, отлична от нуля только внутри прямоугольника  $0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2$ .

Опорная область может иметь не только прямоугольную форму. Часто удается упростить представление последовательности с опорной областью неправильной формы, а также операции над ней, если

включить ее опорную область внутрь прямоугольной области с некоторым количеством нулевых отсчетов.

### 1.1.4. Периодические последовательности

Двухмерную периодическую последовательность можно рассматривать как сигнал, регулярно повторяющийся в пространстве. Однако двухмерный сигнал должен повторяться сразу в двух направлениях. Поэтому формальное определение периодической двухмерной последовательности оказывается сложнее одномерной последовательности.

Рассмотрим частный случай. Имеем последовательность  $\tilde{x}(n_1, n_2)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n_1, n_2 + N_2) &= \tilde{x}(n_1, n_2), \\ \tilde{x}(n_1 + N_1, n_2) &= \tilde{x}(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Эта последовательность обладает двойной периодичностью.

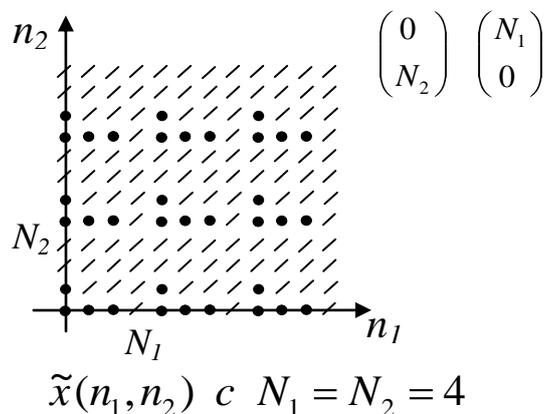


Рис. 1.4. Периодическая последовательность с направлениями периодичности, совпадающими с осями координат

Величины  $N_1$  и  $N_2$  представляют минимальные положительные целые числа, для которых справедливы выражения (1.15). Назовем их горизонтальным и вертикальным интервалами периодичности последовательности  $\tilde{x}$ .

Из всех отсчетов последовательности  $\tilde{x}$  только  $N_1 \cdot N_2$  оказываются независимыми; остальные определяются условиями периодичности.

Определение. Будем называть периодом последовательности  $\tilde{x}$  любую связную область плоскости  $(n_1, n_2)$ , содержащую точно  $N_1 \cdot N_2$  отсчетов, если значения этих отсчетов независимы.

Часто удобно использовать период прямоугольной формы, однако имеются и другие возможности (рис. 1.5).

Теперь рассмотрим двумерную последовательность  $\tilde{x}(n_1, n_2)$ , которая удовлетворяет более общим условиям периодичности:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n_1 + N_{11}, n_2 + N_{21}) &= \tilde{x}(n_1, n_2), \\ \tilde{x}(n_1 + N_{12}, n_2 + N_{22}) &= \tilde{x}(n_1, n_2).\end{aligned}\tag{1.16}$$

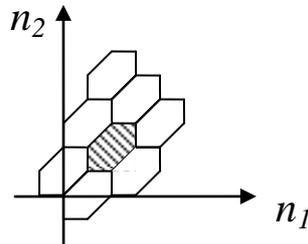


Рис. 1.5. Периодическая последовательность с непрямоугольной периодичностью

Векторы периодичности:

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{pmatrix}\tag{1.17}$$

где для  $N_{ij}$ :  $j$  – номер вектора,  $i$  – номер оси координат.

Причем

$$D = N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21} \neq 0.\tag{1.18}$$

Упорядоченные пары  $(N_{11}, N_{21})'$  и  $(N_{12}, N_{22})'$  можно рассматривать как векторы  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$ , представляющие собой смещения от любого отсчета к соответствующим отсчетам двух других периодов (штрих обозначает операцию транспонирования, преобразующую упорядоченную пару в вектор-столбец). Один период такой последовательности заключен в области, имеющей форму параллелограмма, смежные стороны которого образованы векторами  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$ . Предлагается доказать, что число отсчетов в этой области равно  $|D|$ .

Понятие периодичности легко обобщается на случай  $N$ -мерных сигналов. Для простоты обозначим через  $n$  упорядоченную группу из  $N$  целочисленных переменных  $(n_1, n_2, \dots, n_M)'$ . Тогда  $\tilde{x}(n)$  представляет собой  $N$ -мерную периодическую последовательность при условии, что существует  $N$  таких линейно-независимых  $N$ -мерных целочисленных векторов  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_M$ , что

$$\tilde{x}(\mathbf{n} + \mathbf{N}_i) = \tilde{x}(\mathbf{n}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.19)$$

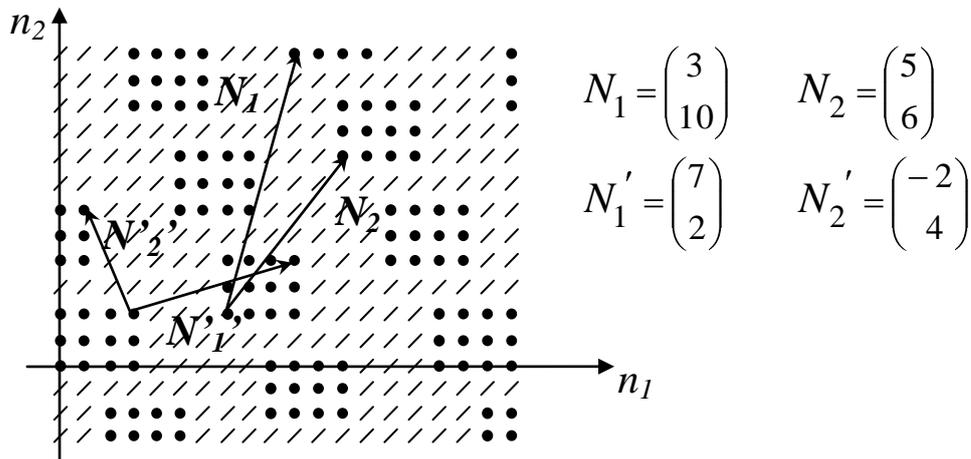


Рис. 1.6. Периодические последовательности с векторами периодичности  $(7, 2)'$  и  $(-2, 4)'$  или  $(3, 10)$  и  $(5, 6)$

$\mathbf{N}_i$  – векторы периодичности, их можно рассматривать в качестве столбцов матрицы  $\mathbf{N}$  размерности  $N \times N$ , называемой матрицей периодичности

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 | \mathbf{N}_2 | \dots | \mathbf{N}_M]. \quad (1.20)$$

Требование линейной независимости векторов периодичности эквивалентно требованию наличия у матрицы  $\mathbf{N}$  ненулевого определителя. В частном случае, когда  $\mathbf{N}$  – диагональная матрица, можно сказать, что последовательность  $\tilde{x}(\mathbf{n})$  прямоугольно периодична.

Если  $\tilde{x}(\mathbf{n})$  периодична с матрицей  $\mathbf{N}$ , то для любого целочисленного вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\tilde{x}(\mathbf{n} + \mathbf{N}\mathbf{r}) = \tilde{x}(\mathbf{n}). \quad (1.21)$$

Отсюда, если  $\mathbf{P}$  – целочисленная матрица, то  $\mathbf{NP}$  также будет матрицей периодичности для  $\tilde{x}(\mathbf{n})$ .

## 1.2. Многомерные системы

Системы служат для преобразования сигналов.

**Определению:** Формально система – это оператор, отображающий один (входной) сигнал на другой (выходной).

$y = T \{x\}$ , где  $T \{ \}$  – оператор, воплощенный в этой системе.

$T \{ \}$  – правило или набор правил, по которым происходит отображение входного сигнала на выходной, или даже таблицу соответствия выходных сигналов различным входным.



Рис. 1.7. Графическое изображение системы:

$x$  – входная,  $y$  – выходная переменные

### 1.2.1. Основные операции над многомерными сигналами

Сигналы можно объединять или изменять с помощью множества операций. Приведем основные операции, которые выступают в качестве «кирпичиков» при разработке более сложных систем.

Пусть  $W$  и  $X$  - двумерные дискретные сигналы. Эти сигналы можно сложить и получить третий сигнал  $y$ .

1. **Сложение.** Выполняется поэлементно, так что значение каждого отсчета  $y(n_1, n_2)$  получается путем сложения двух соответствующих отсчетов  $w(n_1, n_2)$  и  $x(n_1, n_2)$ .

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + w(n_1, n_2). \quad (1.22)$$

2. **Умножение на константу.** Если  $C$  – константа, мы можем образовать двумерную последовательность  $y(n_1, n_2)$  из скаляра  $C$  и двухмерной последовательности  $x(n_1, n_2)$ , умножив значение каждого отсчета  $x$  на  $C$ :

$$y(n_1, n_2) = C \cdot x(n_1, n_2). \quad (1.23)$$

3. **Линейный сдвиг.** Двумерную последовательность  $x(n_1, n_2)$  можно подвергнуть линейному сдвигу, что приведет к образованию новой последовательности  $y(n_1, n_2)$ :

$$y(n_1, n_2) = x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (1.24)$$

где  $(m_1, m_2)$  – величина сдвига.

Используя перечисленные базовые операции можно разложить любую двумерную последовательность на сумму взвешенных и сдвинутых двумерных импульсов:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) \cdot \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (1.25)$$

Здесь  $\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  представляет собой единичный импульс, сдвинутый так, что его ненулевой отсчет находится в точке  $(k_1, k_2)$ ; значение  $x(k_1, k_2)$  можно рассматривать как скалярные множители для соответствующих единичных импульсов.

4. **Пространственное маскирование.** Его можно рассматривать как обобщение скалярного умножения.

Каждое значение  $x(n_1, n_2)$  умножается на число  $C(n_1, n_2)$ , значение которого зависит от положения соответствующего отсчета

$$y(n_1, n_2) = C(n_1, n_2) \cdot x(n_1, n_2), \quad (1.26)$$

что можно рассматривать как поэлементное произведение двух последовательностей.

Последовательности могут подвергаться также действию нелинейных операторов. Безынерционная нелинейность характеризуется независимым воздействием на значение каждого отсчета двумерной последовательности. Рассмотрим последовательность  $y(n_1, n_2)$ , полученную возведением в квадрат каждого отсчета последовательности  $x(n_1, n_2)$ :

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2)^2. \quad (1.27)$$

Операция возведения в квадрат является безынерционным нелинейным преобразованием, поскольку вычисление каждого выходного значения в точке  $(n_1, n_2)$  зависит от единственного входного значения в это же точке.

### 1.2.2. Линейные системы

Систему называют линейной в том и только в том случае, она удовлетворяет следующим условиям:

1. входной сигнал является суммой двух последовательностей, то выходной сигнал является суммой двух соответствующих выходных последовательностей;

2. пропорциональное изменение входного сигнала приводит к пропорциональному изменению выходного сигнала.

$L$  — линейный оператор, описывающий действие линейной системы.

Если  $y_1 = L[x_1]$ ,  $y_2 = L[x_2]$ , то  $a \cdot y_1 + b \cdot y_2 = L[a \cdot x_1 + b \cdot x_2]$  для всех сигналов  $x_1$  и  $x_2$  и любых комплексных чисел  $a$  и  $b$ .

Например, в соотношении (1.25) произвольная двумерная последовательность представлена линейной комбинацией сдвинутых единичных импульсов. Если использовать ее в качестве входной для двумерной дискретной линейной системы  $L$ , то выходная последовательность будет иметь вид:

$$y(n_1, n_2) = L \left[ \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) \cdot \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \right]. \quad (1.28)$$

Поскольку система линейна:

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) \cdot L[\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)] = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) \cdot h_{k_1 k_2}(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (1.29)$$

где  $h_{k_1 k_2}(n_1, n_2)$  - отклик системы на единичный импульс, расположенный в точке  $(k_1, k_2)$ . Если для каждой точки  $(k_1, k_2)$  известен  $h_{k_1 k_2}(n_1, n_2)$ , то отклик системы на любой входной сигнал можно найти с помощью суперпозиции.

### 1.2.3. Системы, инвариантные к сдвигу

Система называется инвариантной к сдвигу, если

$$y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)], \quad (1.30)$$

то выполняется

$$y(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = T[x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)] \quad (1.31)$$

для всех входных последовательностей  $x$  и для всех целочисленных сдвигов  $(m_1, m_2)$ .

Линейность и инвариантность к сдвигу являются независимыми свойствами системы; ни одно из этих свойств не подразумевает обязательного наличия другого.

Например, маскирование  $L[x(n_1, n_2)] = C(n_1, n_2) \cdot x(n_1, n_2)$  линейно, но не инвариантно к сдвигу, а  $T[x(n_1, n_2)] = x^2(n_1, n_2)$  инвариантно к сдвигу, но не линейно.

### 1.2.4. Линейные системы, инвариантные к сдвигу

Для облегчения изучения многомерных систем необходимо ограничиться определенными классами операторов, обладающих определенными общими свойствами.

Линейные инвариантные к сдвигу системы (ЛИС-системы) – наиболее часто изучаемый класс систем для обработки дискретных сигналов любой размерности. Они отличаются сравнительной простотой при разработке и анализ, обладая достаточно широкими возможностями для решения практических задач. Поведение ЛИС-систем во многих случаях можно изучать безотносительно к конкретным характеристикам входного сигнала. ЛИС-системы могут служить хорошей отправной точкой для изучения систем.

Ранее было получено выражение (1.29) для выходной последовательности линейной системы при входном сигнале  $x$ . Если система инвариантна к сдвигу, можно сделать дальнейшие упрощения.

Импульсный отклик на произвольно расположенный входной импульс:

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = L[\delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2)]. \quad (1.32)$$

Для частного случая  $k_1 = k_2 = 0$ :

$$h_{00}(n_1, n_2) = L[\delta(n_1, n_2)]. \quad (1.33)$$

Используя инвариантность:

$$h_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = h_{00}(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (1.34)$$

Таким образом, импульсный отклик на произвольно расположенный входной импульс равен сдвинутому импульсному отклику на входной импульс, расположенный в начале координат.

Обозначим:

$$h(n_1, n_2) = h_{00}(n_1, n_2). \quad (1.35)$$

Тогда выходная последовательность:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) \cdot h(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (1.36)$$

Это (1.36) соотношение известно как двумерная дискретная свертка. Т.е. выполняется разложение входной последовательности  $x(n_1, n_2)$  на взвешенную сумму сдвинутых импульсов соответствии с равенством (1.25).

ЛИС-система преобразует каждый импульс в сдвинутую копию импульсного отклика  $h(n_1, n_2)$ . Суперпозиция этих взвешенных и сдвинутых импульсных откликов образует выходную последовательность, причем весовыми коэффициентами являются значения отсчетов входной последовательности  $x(n_1, n_2)$ . Равенство (1.36) записано в предположении, что ЛИС-системы полностью характеризуются своим импульсным откликом  $h(n_1, n_2)$ .

Свертка коммутативна:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{+\infty} h(l_1, l_2) \cdot x(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (1.37)$$

Обозначения:

**\*\*** – двумерная свертка    **\*** – одномерная свертка

Отсюда видно, что свертка – это коммутативная операция.

Тогда (1.36) и (1.37) запишутся

$$y = x ** h = h ** x. \quad (1.38)$$

С помощью векторных обозначений выходную последовательность М-мерной ЛИС-системы можно представить как М-мерную свертку входной последовательности и импульсного отклика

$$y(n) = \sum_k x(k) \cdot h(n - k). \quad (1.39)$$

Двухмерная свертка принципиально не отличается от ее одномерного аналога. Как и в одномерном случае возможна следующая вычислительная интерпретация операции свертки.

**Пример**

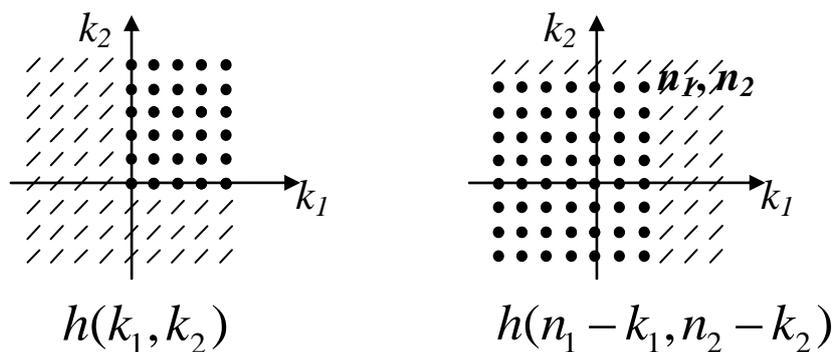


Рис. 1.8 Импульсный отклик системы прямой и отраженный  $h(k_1, k_2)$  и  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  как функции  $k_1$  и  $k_2$ . Чтобы получить  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  из  $h(k_1, k_2)$ , надо ее отразить относи-

тельно осей  $k_1, k_2$ , получив  $h(-k_1, -k_2)$ , а затем сдвинуть в точку  $(n_1, n_2)$ .

Последовательность-произведение  $x(k_1, k_2) \cdot h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$

Для нахождения  $y(n_1, n_2)$  необходимо их просуммировать.

Пусть имеется ЛИС-система, выходной отсчет которой в точке  $(n_1, n_2)$  характеризует вклад значений входных отсчетов ниже и левее точки, т. е. двумерная единичная ступенька.

Пусть  $x(n_1, n_2)$  – двумерная последовательность, значения отсчетов которой равны 1 в области  $0 \leq n_1 \leq N_1; 0 \leq n_2 \leq N_2$ . Последовательности  $x(n_1, n_2)$  и  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  перекрываются в различной степени в зависимости от  $(n_1, n_2)$ . Возможно 5 случаев.

Случай 1.  $n_1 < 0, n_2 < 0$ , следовательно, все  $x(k_1, k_2) \cdot h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = 0$ , поскольку  $x(k_1, k_2)$  и  $h(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  не перекрываются.

Случай 2.  $0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2$ .

Имеет место частичное перекрытие областей

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 1 = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1).$$

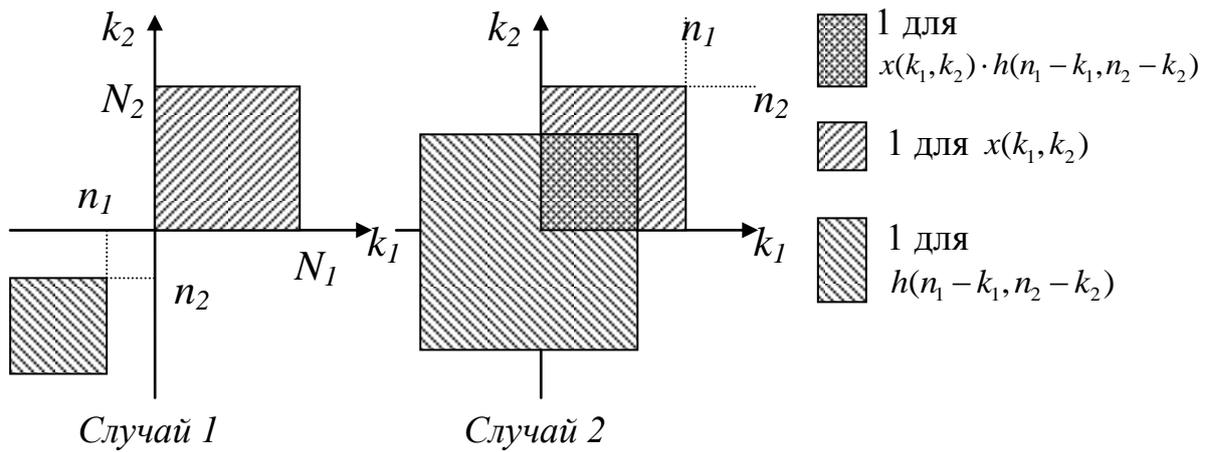


Рис. 1.9 Иллюстрация первых двух случаев

Случай 3.  $n_1 \geq N_1$ ,  $0 \leq n_2 < N_2$

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1+1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 1 = (n_2 + 1) \cdot (N_1 + 1)$$

Случай 4.  $0 \leq n_1 < N_1$ ,  $n_2 \geq N_2$ . По аналогии с 3

$$y(n_1, n_2) = (n_1 + 1) \cdot (N_2 + 1)$$

Случай 5.  $n_1 \geq N_1$ ,  $n_2 \geq N_2$

$$y(n_1, n_2) = (N_1 + 1) \cdot (N_2 + 1)$$

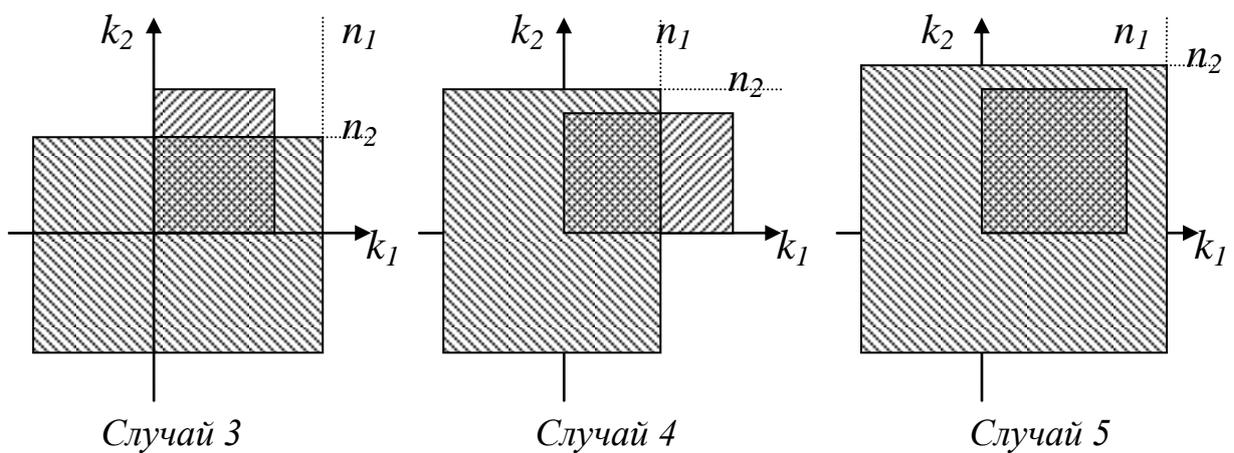
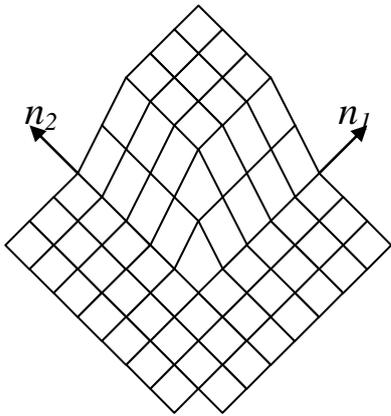


Рис. 1.10 Иллюстрация случаев 3, 4 и 5

Тогда:

$$y(n_1, n_2) = \begin{cases} 0 & n_1 < 0 \text{ или } n_2 < 0 \\ (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) & 0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2 \\ (n_2 + 1) \cdot (N_1 + 1) & n_1 \geq N_1, 0 \leq n_2 < N_2 \\ (n_1 + 1) \cdot (N_2 + 1) & 0 \leq n_1 < N_1, n_2 \geq N_2 \\ (N_1 + 1) \cdot (N_2 + 1) & n_1 \geq N_1, n_2 \geq N_2 \end{cases} .$$



$y(n_1, n_2)$

Рис. 1.11 Выходной сигнал двумерного цифрового интегратора

Отсюда видно, что система представляет собой один из видов двумерного цифрового интегратора.

$x$  и  $h$  – разделимые последовательности, поэтому их свертка тоже разделима:

$$y(n_1, n_2) = y(n_1) \cdot y(n_2), \text{ где}$$

$$y_1(n_1) = \begin{cases} 0 & n_1 < 0 \\ n_1 + 1 & 0 \leq n_1 < N_1 \\ N_1 + 1 & n_1 \geq N_1 \end{cases},$$

$$y_2(n_2) = \begin{cases} 0 & n_2 < 0 \\ n_2 + 1 & 0 \leq n_2 < N_2 \\ N_2 + 1 & n_2 \geq N_2 \end{cases} .$$

Это общее свойство. Свертка двух разделимых последовательностей – разделима.

### 1.2.5. Последовательное и параллельное соединение систем

Достоинством ЛИС-систем является простота их соединения друг с другом. Частично это связано со свойствами оператора свертки.

1. Коммутативность  $x ** h = h ** x$ .
2. Ассоциативность  $(x ** h) ** g = x ** (h ** g)$ .
3. Дистрибутивность свертки по отношению к операции сложения:  
 $x ** (h + g) = (x ** h) + (x ** g)$ .

Последовательным (каскадным) соединением систем называется такое соединение, когда выходной сигнал предыдущей системы служит входным сигналом последующей.

Пусть имеем две ЛИС-системы с  $h(n_1, n_2)$  и  $g(n_1, n_2)$  (рис. 1.12).

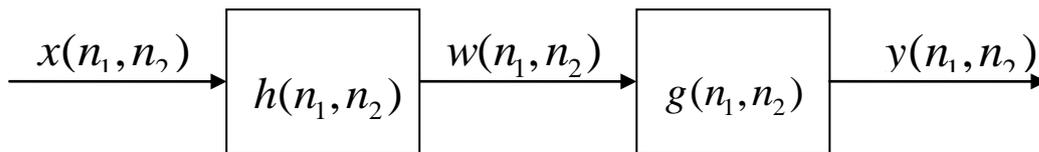


Рис. 1.12 Последовательное соединение систем

$$w = x ** h$$

$$y = w ** g = (x ** h) ** g$$

учитывая ассоциативность свертки:

$$y = x ** (h ** g)$$

Отсюда  $h_{эКВ} = h ** g$ , а используя коммутативность:

$$y = x ** (g ** h) = x ** g ** h,$$

т. е. для ЛИС-систем их порядок не меняет отклика каскада.

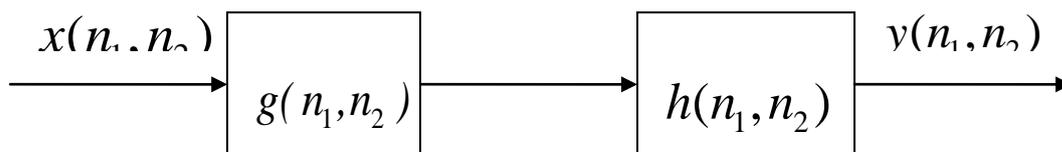


Рис. 1.13 Соединение систем с измененным порядком следования

Аналогично для  $N$  систем справедливы эти выводы.

Параллельным соединением систем называется такое соединение, когда две системы имеют один и тот же входной сигнал, а выходной сигнал образуется путем суммирования выходных сигналов подсистем.

Причем, если подсистемы ЛИС-системы, то и вся система в целом ЛИС-система (рис. 1.14).

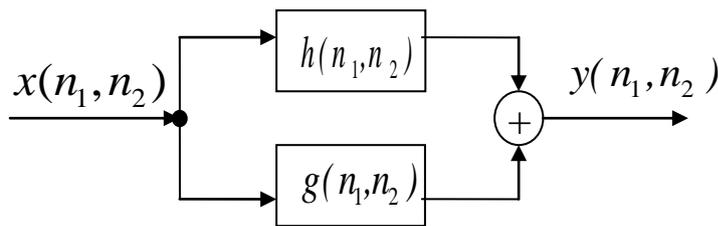


Рис. 1.14 Параллельное соединение систем

$$y = (x ** h) + (x ** g) .$$

Используя дистрибутивность

$$y = x ** (h + g) ,$$

отклик можно дробить на части,  
отсюда

$$h_{э\kappa\beta} = h + g .$$

Это правило справедливо и для  $N$  параллельно соединенных ЛИС-систем.

Полученное свойство полезно, когда отклик системы  $h$  имеет сложную форму опорной области и его можно дробить на несколько простых, а результаты получить рассматривая как их параллельное соединение более простых.

### 1.2.6. Разделимые системы

Разделимой системой называется ЛИС-система, импульсный отклик которой является разделимой последовательностью. Причем выходной сигнал будет не обязательно разделимым. Выходной сигнал

получается путем двумерной дискретной свертки входного сигнала и импульсного отклика системы. Однако в случае разделимой системы свертка факторизуется:

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1) \cdot h_2(n_2), \quad (1.40)$$

тогда

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \cdot h_1(k_1) \cdot h_2(k_2) = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \cdot h_2(k_2). \end{aligned}$$

Внутренняя сумма представляет собой двумерный массив чисел. Если определить  $g(n_1, n_2)$  в виде

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2 - k_2) \cdot h_2(k_2) \quad \text{по столбцам,}$$

тогда

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h_1(k_1) \cdot g(n_1 - k_1, n_2) \quad \text{по строкам.}$$

Массив  $g(n_1, n_2)$  можно вычислить, выполняя одномерную свертку каждого столбца  $x$  при  $(n_1 = \text{const})$  с одномерной последовательностью  $h_2$ . Тогда выходной массив  $y$  вычисляется путем свертки каждой строки  $g$  ( $n_2 = \text{const}$ ) с одномерной последовательностью  $h_1$ . Если производить свертку сначала по строкам, а затем по столбцам, то результат будет тот же.

Важно то, что выходной сигнал можно получить посредством нескольких одномерных сверток.

$M$ -мерный случай мало отличается от двумерного.

### 1.2.7. Устойчивые системы

Интерес для практики представляют устойчивые системы. Системы, дающие для ограниченной входной последовательности, ограниченную выходную называются системами с ограниченным входом и выходом (ОВВ-системы). Для таких систем при  $|x(n_1, n_2)| \leq B$  должно существовать такое  $B'$ , что  $|y(n_1, n_2)| \leq B'$  для всех  $(n_1, n_2)$ .

Необходимым и достаточным условием принадлежности ЛИС-системы к классу ОВВ-систем является абсолютная суммируемость ее импульсного отклика.

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |h(n_1, n_2)| = S_1 < \infty. \quad (1.41)$$

Более слабой формой устойчивости является среднеквадратичная устойчивость. ЛИС-система устойчива в среднеквадратичном смысле, если

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |h(n_1, n_2)|^2 = S_2 < \infty. \quad (1.42)$$

ОВВ-система является устойчивой и в среднеквадратичном смысле, но обратное утверждение не обязательно справедливо. В дальнейшем под устойчивыми системами будем подразумевать ОВВ-системы.

### 1.2.8. Опорные области

Рассматривать будем физически реализуемые (казуальные) системы, т.е. такие у которых выходной сигнал не может предшествовать входному. Для большинства двумерных систем независимые переменные не связаны со временем, и казуальность не является естественным ограничением для таких систем. Однако требуется обратиться к понятию и его обобщению – физически реализуемая система.

Импульсный отклик  $h(n)$  физически реализуемой одномерной ЛИС-системы равен нулю при  $n < 0$ . Соответственным обобщением понятия физической реализуемости может быть требование, чтобы импульсный отклик был равен нулю вне некоторой опорной области. Последовательности, отличные от нуля только в одном квадранте плоскости  $(n_1, n_2)$ , представляют собой важный (частный) случай. О таких последовательностях можно сказать, что они имеют опорную область в виде квадранта. Понятие опоры на квадрант можно обобщить включением опорных областей в виде сектора, если она имеет ненулевые значения в пределах сектора, ограниченного двумя прямыми, исходящими из начала координат и при условии, что угол между прямыми строго меньше  $180^\circ$ .

Любую последовательность (рис. 1.15), опирающуюся на сектор, можно отобразить в последовательность, опирающуюся на квадрант, путем линейного преобразования переменных. Например, предположим, что векторы

$$\mathbf{N}_1 = (N_{11}, N_{21})', \quad \mathbf{N}_2 = (N_{12}, N_{22})'$$

расположены вдоль границ секторной области  $N$  ( $N_{11}, N_{21}, N_{12}, N_{22}$  - целые числа).

Пример такой последовательности: представлен на рис. 1.15

Предположим далее, что пары чисел  $N_{11}$  и  $N_{21}$ , а также  $N_{11}$  и  $N_{22}$  не имеют общих множителей. Поскольку  $N_1$  и  $N_2$  не коллинеарны, то

$$D = N_{11} \cdot N_{22} - N_{12} \cdot N_{21} \neq 0.$$

Тогда замена переменных

$$m_1 = N_{22} \cdot n_1 - N_{12} \cdot n_2, \quad m_2 = -N_{21} \cdot n_1 + N_{11} \cdot n_2$$

отобразит наш сектор на первый квадрант.

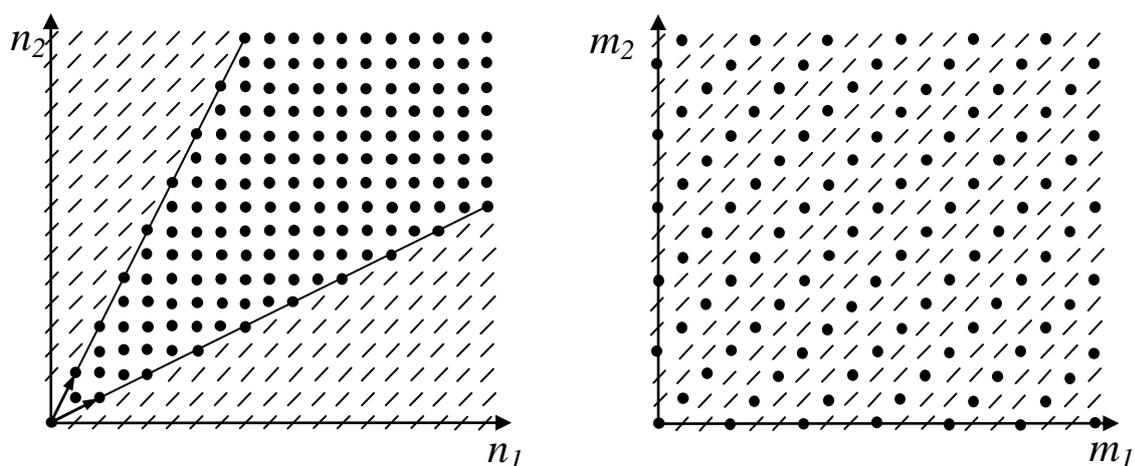


Рис. 1.15. Последовательность, опирающаяся на сектор и соответствующая ей последовательность, опирающаяся на первый квадрант

Приведенное преобразование не является единственным. В данном случае вектор  $\mathbf{N}_1$  отображается на  $(D,0)'$ , а вектор  $\mathbf{N}_2$  – на  $(0,D)$ .

На рис. 1.15 происходит отображение вектора на квадрант с векторами  $\mathbf{N}_1 = (2,1)$  и  $\mathbf{N}_2 = (1,2)$ ; с  $D = 3$   $\mathbf{N}_2' = (2,-1)$  и  $\mathbf{N}_1' = (1,1)$ . При этом, в плоскости  $(m_1, m_2)$  будут иметься отсчеты, на которые не получит отображения ни один отсчет из плоскости  $(n_1, n_2)$ . Это – следствие использования дискретных сигналов. Отображаем целочисленный вектор  $(n_1, n_2)'$  на целочисленный вектор  $(m_1, m_2)$ . Необходимым и достаточным условием того, что каждая целочисленная упорядоченная пара из первого квадранта  $(m_1, m_2)$  лежала в области линейного преобразования, является условием  $|D| = 1$ .

### 1.2.9. Системы с векторными входом и выходом

В некоторых приложениях весьма важны системы с несколькими входами и/или несколькими выходами. Кратко остановимся на них и на том, как они связаны с многомерными ЛИС-системами.

Рассмотрим систему для обработки сигналов, поступающих от совокупности датчиков, расположенных равномерно вдоль прямой. От произвольного  $i$ -ого датчика в систему поступает одномерный дискретный по времени сигнал, возбуждающий некоторое число одномерных дискретных по времени выходных сигналов.  $i$ -й входной сигнал  $x_i(n)$ , а  $j$ -й выходной сигнал  $y_j(n)$ . Пусть система ЛИС,  $t$ -отражаемому  $n$ . Если  $x_i(n) = \delta(n)$ , а все остальные входные сигналы равны нулю, то  $j$ -й  $y_j(n)$  будет  $h_{ij}(n)$ . Поскольку на каждом входе системы будут действовать произвольные дискретные по времени сигналы, то  $j$  выходной сигнал будет иметь вид:

$$y_j(n) = \sum_i \sum_m h_{ij}(m) \cdot x_i(n-m).$$

Это уравнение можно соотнести с двухмерной сверткой. для этого необходимо определить двухмерные последовательности:

$$p(i, m) = x_i(m); \quad q(j, n) = y_j(n).$$

Предположим, что  $p$  и  $q$  связаны двухмерной цифровой сверткой

$$q(j, n) = \sum_i \sum_m f(i, m) \cdot p(i-j, n-m).$$

Выполнив замену переменных, получим

$$q(j, n) = \sum_i \sum_m f(i-j, m) \cdot p(i, n-m).$$

Сравнивая с первоначальным выражением видно, что ЛИС по времени систему с векторным входом и выходом можно рассматривать как двумерную ЛИС-систему, если

$$h_{ij}(m) = f(i - j, m). \quad (1.43)$$

Это условие существенным образом предполагает инвариантность к сдвигу по переменным, соответствующим индексам входа и выхода.

Если (1.40) не выполняется, то система с векторными входом и выходом по-прежнему может рассматриваться как линейная система, а не как двумерная ЛИС-система.

### **1.3. Характеристики сигналов и систем в частотной области**

Ранее было показано, что для получения отклика двумерной ЛИС-системы на входной сигнал необходимо выполнить операцию свертки входного сигнала с импульсным откликом системы. Если входной сигнал представить в виде суперпозиции сдвинутых импульсов, то и входной сигнал можно представить, как суперпозицию сдвинутых импульсных откликов.

Представление ЛИС-системы в частотной области также использует принцип суперпозиции, однако в этом случае элементарные последовательности являются комплексными синусоидами.

#### ***1.3.1. Частотный отклик двумерной ЛИС-системы***

Рассмотрим отклик ЛИС-системы на синусоидальные входные сигналы. Пусть имеется ЛИС-система с  $h(n_1, n_2)$  и входным сигналом в виде комплексной синусоиды вида

$$x(n_1, n_2) = \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2), \quad (1.44)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - действительные числа, называемые горизонтальной и вертикальной пространственными частотами. Выходной сигнал можно получить с помощью свертки:

$$\begin{aligned}
y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \exp(j \cdot \omega_1 \cdot (n_1 - k_1) + j \cdot \omega_2 \cdot (n_2 - k_2)) \cdot h(k_1, k_2) \\
&= \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot \\
&\quad \cdot \left[ \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1, k_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot k_1 - j \cdot \omega_2 \cdot k_2) \right] = \\
&= \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot H(\omega_1, \omega_2).
\end{aligned}$$

Таким образом, выходной сигнал представляет собой комплексную синусоиду с теми же частотами, что и у входного сигнала, но с измененными амплитудой и фазой за счет комплексного множителя  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Множитель  $H(\omega_1, \omega_2)$  носит название частотного отклика (частотной характеристики) системы и описывается выражением:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1 - j \cdot \omega_2 \cdot n_2). \quad (1.45)$$

Следовательно, ЛИС-системы обладают частотной избирательностью по отношению к входным синусоидальным сигналам. Если для конкретной пары  $(\omega_1, \omega_2)$  значение  $|H(\omega_1, \omega_2)|$  равно 1 (близко к ней), то такие сигналы будут проходить через систему без ослабления, а если для некоторой пары  $(\omega_1, \omega_2) - |H(\omega_1, \omega_2)|$  близко к нулю, то сигналы синусоидальные этой частоты будут подавляться системой.  $H(\omega_1, \omega_2)$  периодичен по горизонтальной и вертикальной частотам с периодом  $2\pi$ :

$$\begin{aligned}
H(\omega_1 + 2\pi, \omega_2) &= H(\omega_1, \omega_2), \\
H(\omega_1, \omega_2 + 2\pi) &= H(\omega_1, \omega_2).
\end{aligned}$$

### **Разделимость частотного отклика**

Система, обладающая разделимым импульсным откликом, обладает тем свойством, что ее частотный отклик является разделимой функцией.

Если  $h(n_1, n_2) = f(n_1) \cdot g(n_2)$ , то

$$H(\omega_1, \omega_2) = F(\omega_1) \cdot G(\omega_2), \text{ где}$$

$$F(\omega_1) = \sum_{n_1} f(n_1) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1),$$

$$G(\omega_2) = \sum_{n_2} g(n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_2 \cdot n_2).$$

#### **1.3.2. Определение импульсного отклика по частотному отклику**

Как следует из определения (1.42), для  $H(\omega_1, \omega_2)$  частотный отклик дискретной ЛИС-системы в общем случае представляет собой непрерывную двумерную периодическую функцию, которую можно выразить в виде линейной комбинации гармонически связанных комплексных синусоид. Это соотношение описывает разложение  $H(\omega_1, \omega_2)$  в двумерный ряд Фурье. Коэффициентами служат значения  $h(n_1, n_2)$ . Поэтому импульсный отклик ЛИС-системы можно получить из частотного.

Умножим обе части (1.42) на комплексную синусоиду и проинтегрируем в пределах квадратной частотной области.

Поскольку известно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j \cdot \omega \cdot (n - k)) \cdot d\omega = \delta(n - k),$$

можно получить выражение для определения импульсного отклика ЛИС-системы по частотному отклику

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot k_1 + j \cdot \omega_2 \cdot k_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2 = \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1 - j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot \\
& \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot k_1 + j \cdot \omega_2 \cdot k_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2 = \\
& = \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot (n_1 - k_1)) \cdot d\omega_1 \right] \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-j \cdot \omega_2 \cdot (n_2 - k_2)) \cdot d\omega_2 \right] = \\
& = \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) \cdot \delta(n_1 - k_1) \cdot \delta(n_2 - k_2) = h(k_1, k_2).
\end{aligned}$$

Перепишав это выражение с  $(n_1, n_2)$  вместо менее привычных  $(k_1, k_2)$ , получим:

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2. \quad (1.46)$$

Область интегрирования совпадает с одним периодом функции  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Хотя мы рассматриваем период вокруг начала координат, можно с успехом использовать любой другой период. Рассмотрим два интересных примера.

### **Пример 1**

Найти  $h(n_1, n_2)$ , если

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } : |\omega_1| \leq a < \pi, |\omega_2| \leq b < \pi \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

т. е. идеальный фильтр низких частот (рис. 1.16).

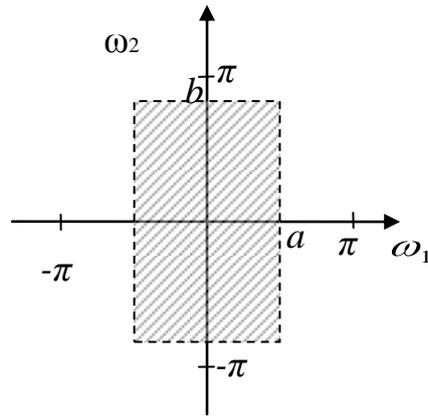


Рис. 1.16 Идеальный фильтр низких частот

Система разделима, поэтому

$$\begin{aligned}
 h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1) \cdot d\omega_1 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \exp(j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_2 = \\
 &= \frac{\sin(a \cdot n_1)}{\pi \cdot n_1} \cdot \frac{\sin(b \cdot n_2)}{\pi \cdot n_2}.
 \end{aligned}$$

### Пример 2

Надо найти  $h(n_1, n_2)$  если

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, \text{если } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq R^2 < \pi^2 \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_A \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2.$$

(Система неразделима)

$A$  – круговая область интегрирования.

Введем для упрощения полярные координаты.

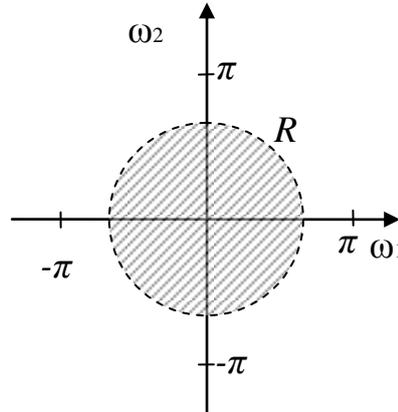


Рис. 1.17 Идеальный фильтр низких частот с круговой областью определения

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \theta = \arctg \frac{n_2}{n_1}$$

$$\begin{aligned} & \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) = \\ & = \exp(j \cdot \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \cos \varphi \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos \theta + j \cdot \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \\ & \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \sin \theta) = \\ & = \exp \left[ \cdot \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot (\cos \varphi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \sin \theta) \right] \\ & = \exp \left[ \cdot \omega \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos(\theta - \varphi) \right] \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \omega \cdot \exp \left[ \cdot \omega \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos(\theta - \varphi) \right] \cdot d\varphi \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^R \omega \cdot J_0(\omega \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2}) \cdot d\omega = \frac{R}{2\pi} \cdot \frac{J_1(R \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, \end{aligned}$$

где  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  – функции Бесселя 1-го рода, 0-го и 1-го порядка соответственно.

Полученный  $h(n_1, n_2)$  является дискретной функцией с круговой симметрией, ее сечение вдоль оси  $n_1$  имеет вид

$$h(n_1, 0) = \frac{R}{2\pi \cdot n_1} \cdot J_1(R \cdot n_1),$$

иллюстрируемый на рис. 1.18.

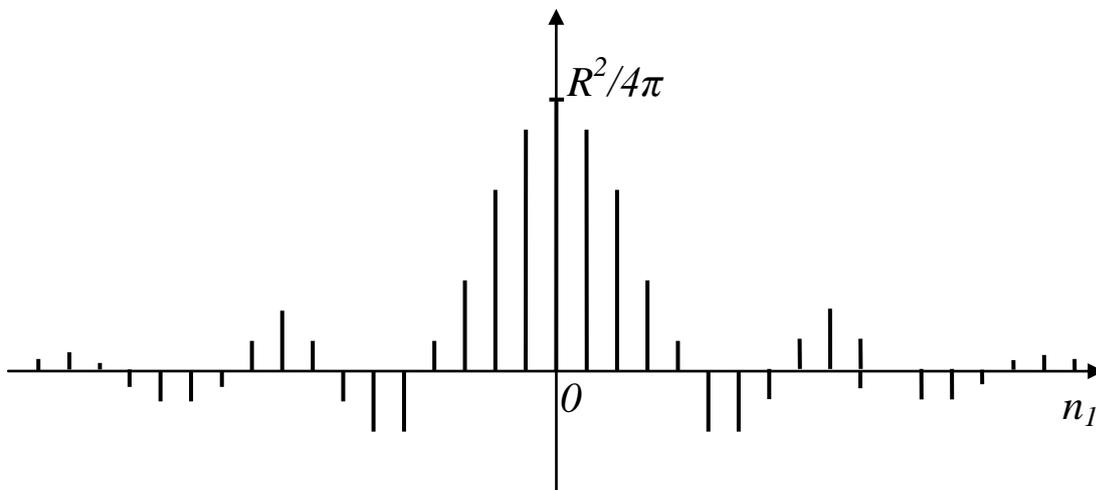


Рис. 1.18 Импульсный отклик системы для фильтра рис. 1.17

### 1.3.3. Многомерное преобразование Фурье

Произвольная двумерная последовательность может быть выражена в виде суммы взвешенных и сдвинутых импульсов. ЛИС-система отзывается на каждый импульс в соответствии с импульсным откликом, взвешенным соответствующим образом. Выходная последовательность является суперпозицией взвешенных и сдвинутых импульсных откликов.

Покажем, что двумерная последовательность в большинстве практических случаев может быть представлена взвешенной суммой комплексных синусоид в соответствии с многомерным преобразованием Фурье. Отклик ЛИС-системы на синусоидальный входной сиг-

нал известен, то выходную последовательность можно представить как суперпозицию синусоидальных откликов ЛИС-системы.

Если внимательно посмотреть на оператор (1.42), можно заметить, что он дает представление последовательности  $h$  как суперпозиции комплексных синусоид. Используем аналогичное представление для входной последовательности

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2. \quad (1.47)$$

Комплексная функция  $X(\omega_1, \omega_2)$ , известная как двухмерное преобразование Фурье функции  $x(n_1, n_2)$ , определяется следующим образом:

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1 - j \cdot \omega_2 \cdot n_2). \quad (1.48)$$

Видно, что частотный отклик ЛИС-системы представляет собой преобразование Фурье импульсного отклика системы (1.42).

Пусть дана двумерная ЛИС-система  $L \llbracket$  с импульсным откликом  $h(n_1, n_2)$  и частотным откликом  $H(\omega_1, \omega_2)$ . Известно, что

$$\begin{aligned} L \llbracket \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \bar{\quad} \\ = H(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2). \end{aligned}$$

Используя свойство линейности и (1.44) получаем выражение для  $y(n_1, n_2)$ , учитывая, что  $X(\omega_1, \omega_2)$  и  $H(\omega_1, \omega_2)$  определены так, что можно менять порядок операций интегрирования и выполнения оператора  $L \llbracket$  на противоположный.

Это выражение дает нам новый способ описания выходной последовательности ЛИС-системы:

$$\begin{aligned}
y(n_1, n_2) &= L \left[ x(n_1, n_2) \right] \\
&= L \left[ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2 \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot L \left[ \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \right] d\omega_1 \cdot d\omega_2 = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot H(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2.
\end{aligned}$$

Выходную последовательность можно записать с помощью ее преобразования Фурье:

$$y(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_1, \omega_2) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2$$

Следовательно:

$$Y(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2), \quad (1.49)$$

если  $y = h^{**}x$ .

**Теорема о свертке.** Преобразование Фурье свертки двух двумерных последовательностей равно произведению преобразований Фурье этих последовательностей.

Преобразование Фурье  $X(\omega_1, \omega_2)$  последовательности  $x(n_1, n_2)$  существует, если последовательность  $x(n_1, n_2)$  абсолютно суммируема:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |x(n_1, n_2)| = S_1 < \infty.$$

Если преобразование Фурье существует, то оно непрерывно и аналитично. Это означает, что частотный отклик ЛИС-системы существует, если система устойчива.

Однако такая система как идеальный фильтр нижних частот имеет  $H(\omega_1, \omega_2)$  не отвечающий условию непрерывности и  $h(n_1, n_2)$  абсолютной суммируемости. Хотя он отвечает не менее жесткому требованию:

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |h(n_1, n_2)|^2 = S_2 < \infty.$$

Последовательности подобного типа могут не иметь непрерывного преобразования Фурье, но последние вполне определены всюду, за исключением точек разрыва.

### ***Свойства двумерного преобразования Фурье***

Введем обозначение  $x \leftrightarrow X$ , указывающее на то, что  $x(n_1, n_2)$  и  $X(\omega_1, \omega_2)$  – пара функций, связанных преобразованием Фурье.

#### ***Теорема о свертке***

$$y = h ** x \leftrightarrow Y = H \cdot X.$$

***Линейность*** Если  $x_1 \leftrightarrow X_1$  и  $x_2 \leftrightarrow X_2$ , то для любых комплексных чисел  $a$  и  $b$ :

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \leftrightarrow a \cdot X_1 + b \cdot X_2.$$

***Пространственный сдвг*** Если  $x(n_1, n_2) \leftrightarrow X(\omega_1, \omega_2)$ , то

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \leftrightarrow \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot m_1 - j \cdot \omega_2 \cdot m_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2),$$

т.е. сдвиг последовательности  $x(n_1, n_2)$  на величину  $(m_1, m_2)$  соответствует умножению  $X(\omega_1, \omega_2)$  на множитель с линейной фазой  $\exp(-j \cdot \omega_1 \cdot m_1 - j \cdot \omega_2 \cdot m_2)$ .

#### ***Модуляция***

$$x(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \theta_1 \cdot m_1 - j \cdot \theta_2 \cdot m_2) \leftrightarrow X(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2).$$

Умножение последовательности на комплексную синусоидальную последовательность (соответствует) (приводит к) сдвигу ее преобразования Фурье.

**Умножение** Перемножение двух последовательностей приводит к свертке их Фурье преобразований. Свойство модуляции можно рассматривать как частный случай перемножения двух последовательностей.

$$C(n_1, n_2) \cdot x(n_1, n_2) \leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta_1, \theta_2) \cdot C(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2) \cdot d\theta_1 \cdot d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1 - \theta_1, \omega_2 - \theta_2) \cdot C(\theta_1, \theta_2) \cdot d\theta_1 \cdot d\theta_2.$$

**Дифференцирование преобразования Фурье** Осуществляется следующим образом:

$$-j \cdot n_1 \cdot x(n_1, n_2) \leftrightarrow \frac{\partial X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1},$$

$$-j \cdot n_2 \cdot x(n_1, n_2) \leftrightarrow \frac{\partial X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2},$$

$$-n_1 \cdot n_2 \cdot x(n_1, n_2) \leftrightarrow \frac{\partial^2 X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \cdot \partial \omega_2}.$$

**Транспортирование** Характеризуется соотношением

$$x(n_2, n_1) \leftrightarrow X(\omega_2, \omega_1).$$

**Зеркальное отражение** Его описывают соотношения:

$$x(-n_1, n_2) \leftrightarrow X(-\omega_1, \omega_2),$$

$$x(n_1, -n_2) \leftrightarrow X(\omega_1, -\omega_2),$$

$$x(-n_1, -n_2) \leftrightarrow X(-\omega_1, -\omega_2).$$

### Комплексное сопряжение

$$x^*(n_1, n_2) \leftrightarrow X^*(-\omega_1, -\omega_2).$$

### Вещественная и мнимая части

$$\operatorname{Re} \{x(n_1, n_2)\} \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega_1, \omega_2) + X^*(-\omega_1, -\omega_2)],$$

$$j \cdot \operatorname{Im} \{x(n_1, n_2)\} \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega_1, \omega_2) - X^*(-\omega_1, -\omega_2)],$$

$$\frac{1}{2} [x(n_1, n_2) + x^*(-n_1, -n_2)] \leftrightarrow \operatorname{Re} \{X(\omega_1, \omega_2)\},$$

$$\frac{1}{2} [x(n_1, n_2) - x^*(-n_1, -n_2)] \leftrightarrow j \cdot \operatorname{Im} \{X(\omega_1, \omega_2)\}.$$

Если  $x(n_1, n_2)$  – вещественная, то из вышеприведенных выражений следует:

$$X(\omega_1, \omega_2) = X^*(-\omega_1, -\omega_2),$$

$$\operatorname{Re} \{X(\omega_1, \omega_2)\} = \operatorname{Re} \{X(-\omega_1, -\omega_2)\} \text{ – четность,}$$

$$\operatorname{Im} \{X(\omega_1, \omega_2)\} = -\operatorname{Im} \{X(-\omega_1, -\omega_2)\} \text{ – нечетность.}$$

### Теорема Парсеваля

Если  $x(n_1, n_2) \leftrightarrow X(\omega_1, \omega_2)$  и  $w(n_1, n_2) \leftrightarrow W(\omega_1, \omega_2)$ , то

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \cdot w^*(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_1, \omega_2) \cdot W^*(\omega_1, \omega_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2.$$

Это замечательное соотношение говорит о том, что скалярное произведение инвариантно относительно операции преобразования Фурье, поскольку слева – скалярное произведение двух двумерных последовательностей, а справа – скалярное произведение их преобразований Фурье.

Это равенство сводится к теореме о свертке, если  $w(n_1, n_2)$  принимается равным  $h^*(m_1 - n_1, m_2 - n_2)$ .

Другой важный частный случай, когда  $w(n_1, n_2) = x(n_1, n_2)$ :

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |x(n_1, n_2)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega_1, \omega_2)|^2 \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2.$$

Левая часть представляет собой полную энергию сигнала дискретного  $x(n_1, n_2)$ . Функция  $|X(\omega_1, \omega_2)|^2$  определяет спектральную плотность энергии, поскольку интеграл от этой функции равен полной энергии сигнала.

#### **1.4. Дискретизация непрерывных двумерных сигналов**

Почти все дискретные последовательности получаются как результат представления некоторых реальных непрерывных сигналов, например, разложение в ряды Фурье и Тейлора, разложение по нетригонометрическим ортогональным функциям (например, Уолша) и т.д. Однако, на практике, чаще всего используется периодическая дискретизация. Причина этого – простота реализации. Здесь рассмотрим взаимосвязь характеристик непрерывных сигналов и получаемых из них путем периодической дискретизации дискретных последовательностей. Сначала для простоты рассмотрим прямоугольный растр, а затем более общий случай использования других растров дискретизации.

##### ***1.4.1. Периодическая дискретизация по прямоугольному растру***

Если  $x_a(t_1, t_2)$  – двумерный непрерывный сигнал, то дискретный сигнал  $x(n_1, n_2)$ , получаемый из него путем прямоугольной дискретизации имеет вид:

$$x(n_1, n_2) = x_a(n_1 \cdot T_1, n_2 \cdot T_2), \quad (1.50)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – положительные вещественные константы, называемые горизонтальный и вертикальный интервалы дискретизации.

Необходимо знать: можно ли по значениям  $x(n_1, n_2)$  восстановить сигнал  $x_a(t_1, t_2)$  и как связаны Фурье-преобразования сигналов  $X$  и  $X_a$ .

Фурье-преобразование для непрерывных сигналов запишется следующим образом:

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t_1, t_2) \cdot \exp(-j \cdot \Omega_1 \cdot t_1 - j \cdot \Omega_2 \cdot t_2) \cdot dt_1 \cdot dt_2,$$

$$x_a(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \cdot \exp(j \cdot \Omega_1 \cdot t_1 + j \cdot \Omega_2 \cdot t_2) \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2$$

Поскольку  $x(n_1, n_2) = x_a(n_1 \cdot T_1, n_2 \cdot T_2)$ , то запишем:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \cdot \exp(j \cdot \Omega_1 \cdot n_1 \cdot T_1 + j \cdot \Omega_2 \cdot n_2 \cdot T_2) \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2$$

Преобразуем это выражение, чтобы получить обратное преобразование Фурье для дискретных сигналов.

Проведем сначала подстановку:  $\omega_1 = \Omega_1 \cdot T_1$ ,  $\omega_2 = \Omega_2 \cdot T_2$

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1 \cdot T_2} X_a\left(\frac{\omega_1}{T_1}, \frac{\omega_2}{T_2}\right) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2$$

Поскольку  $d\Omega_1 = \frac{1}{T_1} \cdot d\omega_1$ ,  $d\Omega_2 = \frac{1}{T_2} \cdot d\omega_2$

Интеграл по всей плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$  можно разложить на бесконечную последовательность интегралов, каждый из которых имеет квадратную область интегрирования площадью  $4\pi^2$ .

Это следует из периодичности частотного отклика ЛИС-системы с периодом  $2\pi$ .

Пусть  $SQ(k_1, k_2)$  представляет собой квадратную область  $-\pi + 2\pi \cdot k_1 \leq \omega_1 < \pi + 2\pi \cdot k_1$ ,  $-\pi + 2\pi \cdot k_2 \leq \omega_2 < \pi + 2\pi \cdot k_2$ , тогда

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \iint_{SQ(k_1, k_2)} \frac{1}{T_1 \cdot T_2} X_a\left(\frac{\omega_1}{T_1}, \frac{\omega_2}{T_2}\right) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2$$

Заменяя  $\omega_1$  на  $\omega_1 - 2\pi \cdot k_1$  и  $\omega_2$  на  $\omega_2 - 2\pi \cdot k_2$ , можно устранить зависимость пределов интегрирования от  $k_1, k_2$ :

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X_a\left(\frac{\omega_1 - 2\pi \cdot k_1}{T_1}, \frac{\omega_2 - 2\pi \cdot k_2}{T_2}\right) \cdot \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot k_1 \cdot n_1 - j \cdot 2\pi \cdot k_2 \cdot n_2) \right] d\omega_1 \cdot d\omega_2 \quad (1.51)$$

Причем второй множитель равен 1 при всех целых  $n_1, k_1, n_2, k_2$ . Последнее выражение представляет собой обратное преобразование Фурье, следовательно,

$$X(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X_a\left(\frac{\omega_1 - 2\pi \cdot k_1}{T_1}, \frac{\omega_2 - 2\pi \cdot k_2}{T_2}\right).$$

или иначе

$$X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2) = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} X_a\left(\Omega_1 - \frac{2\pi \cdot k_1}{T_1}, \Omega_2 - \frac{2\pi \cdot k_2}{T_2}\right). \quad (1.52)$$

Выражение (1.52) дает нам искомую взаимосвязь между преобразованием Фурье непрерывного и дискретного сигналов. Правую часть этого выражения можно рассматривать как периодическое про-

должение, или дополнение функции  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$ , дающее периодическую функцию  $X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2)$ .

Если непрерывный сигнал  $x_a(t_1, t_2)$  имеет ограниченный спектр, то выражение (1.52) можно упростить. Преобразование Фурье такого сигнала имеет нулевое значение вне некоторой конечной области на плоскости  $(\Omega_1, \Omega_2)$ .

Предположим, что периоды  $T_1$  и  $T_2$  выбраны достаточно малыми, так что

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \text{ для } |\Omega_1| \geq \frac{\pi}{T_1}, |\Omega_2| \geq \frac{\pi}{T_2}, \quad (1.53)$$

Тогда

$$X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2) = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} \cdot X_a(\Omega_1, \Omega_2) \quad (1.54)$$

при  $|\Omega_1| \leq \frac{\pi}{T_1}$  и  $|\Omega_2| \leq \frac{\pi}{T_2}$ .

Значения  $X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2)$  вне этой области определяются периодичностью  $X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2)$ .

Пока  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$  удовлетворяет уравнению (1.54) его можно восстановить по  $X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2)$ :

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} T_1 \cdot T_2 \cdot X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2) \text{ при } |\Omega_1| < \frac{\pi}{T_1}, |\Omega_2| < \frac{\pi}{T_2} \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.55)$$

Следовательно, в данном случае непрерывный сигнал  $x_a(t_1, t_2)$  можно восстановить по дискретному сигналу.

Выразим его через преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
 x_a(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} X_a(\Omega_1, \Omega_2) \cdot \exp(j \cdot \Omega_1 \cdot t_1 + j \cdot \Omega_2 \cdot t_2) \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} T_1 \cdot T_2 \cdot X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2) \cdot \\
 &\cdot \exp(j \cdot \Omega_1 \cdot t_1 + j \cdot \Omega_2 \cdot t_2) \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2,
 \end{aligned}$$

где для удобства  $W_1 = \frac{\pi}{T_1}$  и  $W_2 = \frac{\pi}{T_2}$ .

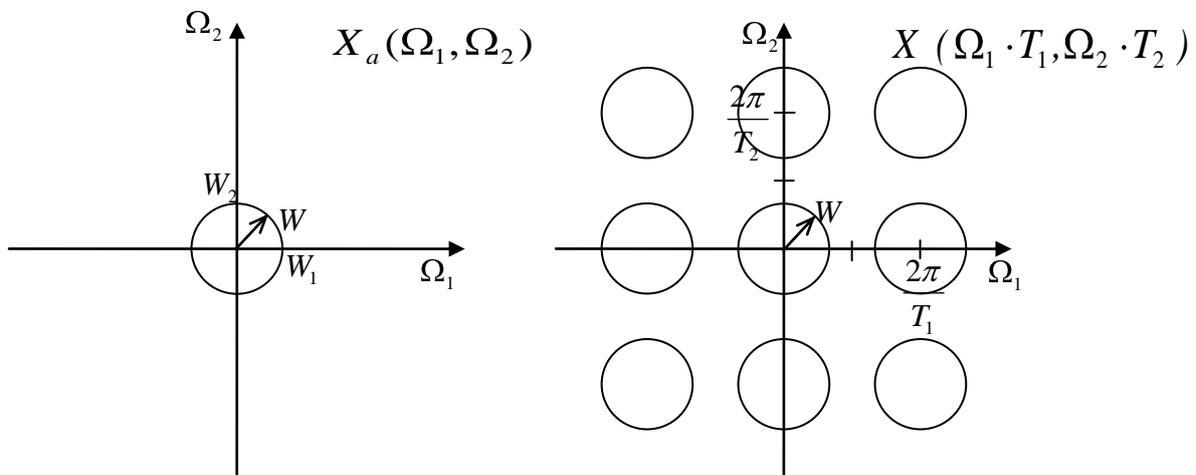


Рис. 1.19 Спектры непрерывного и дискретного сигнала

Выразим теперь  $X(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2)$  через  $x(n_1, n_2)$

Выражения (1.50), (1.55), (1.56) образуют основу двумерной теоремы отсчетов (рис. 1.19).

$$\begin{aligned}
x_a(t_1, t_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} T_1 \cdot T_2 \cdot \left[ \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \Omega_1 \cdot T_1 \cdot n_1 - j \cdot \Omega_2 \cdot T_2 \cdot n_2) \right] \cdot \\
&\cdot \exp(j \cdot \Omega_1 \cdot t_1 + j \cdot \Omega_2 \cdot t_2) \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 = \frac{T_1 \cdot T_2}{4\pi^2} \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \cdot \\
&\cdot \int_{-W_1}^{W_1} \int_{-W_2}^{W_2} \exp \left[ j \cdot \Omega_1 \cdot (t_1 - n_1 \cdot T_1) + j \cdot \Omega_2 \cdot (t_2 - n_2 \cdot T_2) \right] d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 = \\
&= \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \cdot \frac{\sin \left[ W_1 (t_1 - n_1 \cdot T_1) \right]}{W_1 (t_1 - n_1 \cdot T_1)} \cdot \frac{\sin \left[ W_2 (t_2 - n_2 \cdot T_2) \right]}{W_2 (t_2 - n_2 \cdot T_2)}, \\
x_a(t_1, t_2) &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} x(n_1, n_2) \cdot \frac{\sin \left[ W_1 (t_1 - n_1 \cdot T_1) \right]}{W_1 (t_1 - n_1 \cdot T_1)} \cdot \frac{\sin \left[ W_2 (t_2 - n_2 \cdot T_2) \right]}{W_2 (t_2 - n_2 \cdot T_2)} \quad (1.56)
\end{aligned}$$

**Теорема отсчетов.** Непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен по значениям его отсчетов. При этом должно выполняться условие для  $W_1$  и  $W_2$  таким образом, что  $\frac{2\pi}{T_1} > 2 \cdot W_{1\max}$  и  $\frac{2\pi}{T_2} > 2 \cdot W_{2\max}$ , т.е. период дискретизации должен обеспечивать частоту считывания непрерывного сигнала более чем в два раза выше, чем максимальная частота спектра непрерывного сигнала.

Непрерывный сигнал с неограниченным частотным спектром также можно подвергнуть дискретизации. Однако в этом случае выражения (1.54) и (1.55) несправедливы, так как при периодическом повторении (1.52) в область  $|\Omega_1 \cdot T_1| < \pi$  и  $|\Omega_2 \cdot T_2| < \pi$  будут вносить свой вклад и другие корни  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$ . Это явление носит название эффекта наложения, поскольку высокочастотные компонен-

ты  $X_a(\Omega_1, \Omega_2)$  будут “маскироваться” под низкочастотные компоненты  $X_a(\Omega_1 \cdot T_1, \Omega_2 \cdot T_2)$ .

#### **1.4.2. Периодическая дискретизация при произвольном растре дискретизации**

Понятие прямоугольной дискретизации легко обобщить. Определив два линейно независимых вектора  $\mathbf{V}_1(v_{11}, v_{21})'$  и  $\mathbf{V}_2(v_{12}, v_{22})'$  (штрих обозначает операцию транспонирования)

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix},$$

можно описать расположение двухмерного периодического множества отсчетов на плоскости  $(t_1, t_2)$  следующим образом:

$$t_1 = v_{11} \cdot n_1 + v_{12} \cdot n_2,$$

$$t_2 = v_{21} \cdot n_1 + v_{22} \cdot n_2.$$

С использованием векторных обозначений эти соотношения примут вид:

$$\mathbf{t} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n},$$

$$\text{где } \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$D = v_{11} \cdot v_{22} - v_{12} \cdot v_{21} \neq 0.$$

Поскольку условились, что  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  линейно независимы, определитель матрицы  $\mathbf{V}$  не равен нулю,  $\mathbf{V}$  – матрица дискретизации. Дискретизация непрерывного сигнала  $x_a(\mathbf{t})$  образует дискретный сигнал

$$x(\mathbf{n}) = x_a(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}).$$

По-прежнему интересен вопрос о связи преобразования Фурье сигналов  $x(\mathbf{n})$  и  $x_a(\mathbf{t})$  и при каких условиях можно реконструировать  $x_a(\mathbf{t})$  по значениям отсчетов  $x(\mathbf{n})$ ?

Определим двухмерное преобразование Фурье  $x_a(\mathbf{t})$ :

$$X_a(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} x_a(\mathbf{t}) \cdot \exp(-j \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{t}) \cdot d\mathbf{t} \quad (1.57)$$

и отмечая, что

$$x_a(\mathbf{t}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} X_a(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \exp(j \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{t}) \cdot d\boldsymbol{\Omega}, \quad (1.58)$$

где вектор частот  $\boldsymbol{\Omega}$  задается  $(\Omega_1, \Omega_2)'$ .

Преобразование Фурье сигнала  $x(\mathbf{n})$  в векторных обозначениях имеет вид

$$X(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{n}} x(\mathbf{n}) \cdot \exp(-j \cdot \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}), \quad \text{где } \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)', \quad (1.59)$$

тогда

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} X(\boldsymbol{\omega}) \cdot \exp(j \cdot \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\omega}. \quad (1.60)$$

Поскольку  $x(\mathbf{n})$  получается из  $x_a(\mathbf{t})$  дискретизацией, то

$$x(\mathbf{n}) = x_a(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\boldsymbol{\Omega}) \cdot \exp(j \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\Omega}.$$

Подстановка

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

приводит к выражению:

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} \cdot X_a(\mathbf{V}'^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \exp(j \cdot \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\omega}.$$

Интегрирование на плоскости  $\boldsymbol{\omega}$  представляется как бесконечная сумма интегралов по квадратным областям, как и в (1.51):

$$x(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} \cdot \sum_{\mathbf{k}} X_a(\mathbf{V}'^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} - 2\pi \cdot \mathbf{k})) \cdot \exp(j \cdot \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{n}) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot \mathbf{k}' \cdot \mathbf{n}) \right] \cdot d\boldsymbol{\omega} \quad (1.61)$$

где  $\mathbf{k}$  – вектор целочисленных значений. Второй экспоненциальный множитель равен 1, поскольку  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$  – целочисленные векторы.

Сравнив (1.60) и (1.61), получим

$$X(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} \sum_{\mathbf{k}} X_a(\mathbf{V}'^{-1} \cdot (\boldsymbol{\omega} - 2\pi \cdot \mathbf{k}))$$

или

$$X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} \sum_{\mathbf{k}} X_a(\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}), \quad (1.62)$$

где  $\mathbf{U}$  – матрица периодичности, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{U}' \cdot \mathbf{V} = 2\pi \cdot \mathbf{I},$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица размера  $2 \times 2$ .

Выражение (1.62) содержит искомую связь между преобразованиями Фурье сигналов  $x(\mathbf{n})$  и  $x_a(\mathbf{t})$ .

В случае прямоугольной дискретизации:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{V} = T_1 \cdot T_2,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot W_1 & 0 \\ 0 & 2 \cdot W_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} \text{ – матрица периодич-}$$

ности и выражение (1.61) сводится к (1.52).

$X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$  можно рассматривать как периодическое продолжение  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$ , но теперь периодичность задается матрицей  $\mathbf{U}$ , которая представляет собой набор из двух векторов периодичности  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$ :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку функция  $X(\boldsymbol{\omega})$  периодична как по  $\boldsymbol{\omega}_1$ , так и по  $\boldsymbol{\omega}_2$  с периодом  $2\pi$ , можно заключить, что  $X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$  периодична по  $\boldsymbol{\Omega}$  с матрицей периодичности  $\mathbf{U}$ :

$$X(\mathbf{V}' \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})) = X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega} + 2\pi \cdot \mathbf{k}) = X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Рассмотрим случай непрерывного сигнала  $x_a(\mathbf{t})$  с ограниченным спектром. Преобразование Фурье  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  тождественно равно нулю вне области конечной протяженности  $B$ , которую мы будем называть полосой частот. Изменяя матрицу  $\mathbf{V}$ , можно матрицу периодичности  $\mathbf{U}$  подобрать так, чтобы не было перекрытий периодически повторяемых копий  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  в правой части выражения (1.61).

Тогда для значений  $\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega}$ , лежащих в квадрате со сторонами

длинной  $2\pi$  и с центром в начале координат, выражение (1.61) упрощается:

$$X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{|\det \mathbf{V}|} X_a(\boldsymbol{\Omega}).$$

Следовательно, функцию  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  можно восстановить по функции  $X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$ , а непрерывный сигнал  $x_a(\mathbf{t})$  – по последовательности  $x(\mathbf{n})$ .

Можно записать:

$$X_a(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{cases} |\det \mathbf{V}| \cdot X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega}), & \boldsymbol{\Omega} \in B \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (1.63)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье левой и правой части и выразив  $X(\mathbf{V}' \cdot \boldsymbol{\Omega})$  через значения отсчетов  $x(n_1, n_2)$ , получим выражение аналогичное (1.56):

$$x_a(\mathbf{t}) = \frac{|\det \mathbf{V}|}{4\pi^2} \sum_{\mathbf{n}} x(\mathbf{n}) \int_B \exp(j \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n})) \bar{d}\boldsymbol{\Omega}. \quad (1.64)$$

Интеграл берется по полосе  $B$  в плоскости частот.

Перепишем выражение (1.64) в виде

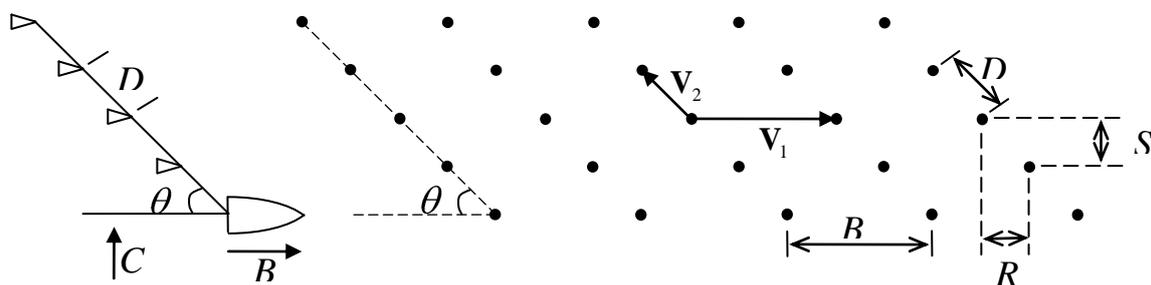
$$x_a(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n}} x(\mathbf{n}) \cdot f(\mathbf{t} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}), \quad (1.65)$$

где 
$$f(\mathbf{t}) = \frac{|\det \mathbf{V}|}{4\pi^2} \int_B \exp(j \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{t}) \cdot d\boldsymbol{\Omega}.$$

Интерполяционная функция  $f(\mathbf{t})$  дает возможность реконструировать значения  $x_a(\mathbf{t})$  в точках, расположенных между отсчетами  $\mathbf{t} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ .

Все приведенные здесь выкладки использовали векторное представление, поэтому они автоматически распространяются на  $M$ -мерный случай. Отличие будет состоять в замене константы  $4\pi^2$  на общую  $(2\pi)^M$ .

**Пример**



a)

$$\text{б) } R = -D; \quad S = D \cdot \sin\theta$$

b)

Рис. 1.20 Практическая реализация гексагонального растра

Скорость судна  $B$ , скорость течения  $C$ , расстояние между датчиками  $D$ , временной интервал  $T$ .

Как происходит дискретизация изучаемого процесса в пространстве?

Датчики остаются расположенными вдоль прямой, но отклоняются на угол  $\theta$ :

$$\theta = \arctg(C/B).$$

Растр показан на рис. 1.20, б). и соответствует матрице

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} B \cdot T & -D \cdot \cos \theta \\ 0 & D \cdot \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \cdot T & -\frac{B \cdot D}{\sqrt{B^2 + C^2}} \\ 0 & \frac{C \cdot D}{\sqrt{B^2 + C^2}} \end{bmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}$$

### 1.4.3. Сравнение прямоугольной и гексагональной дискретизации

Для любого сигнала с ограниченным спектром можно предложить бесконечное количество матриц периодичности  $\mathbf{U}$  и матриц дискретизации  $\mathbf{V}$ .

Однако практически используется прямоугольная и гексагональная дискретизация.

Для прямоугольной дискретизации характерна матрица диагональная:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{V} = T_1 \cdot T_2$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot W_1 & 0 \\ 0 & 2 \cdot W_2 \end{bmatrix}$$

Гексагональная дискретизация дает матрицу:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_1 & T_1 \\ T_2 & -T_2 \end{bmatrix}$$

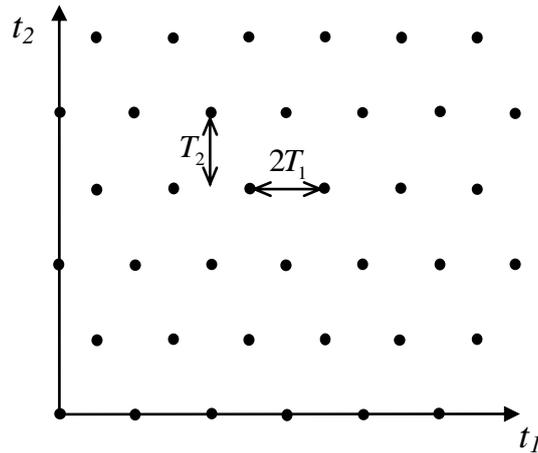


Рис. 1.21. Гексагональный растр

Строчки растра повторяются через одну, при этом нечетные строки сдвинуты относительно четных на пол периода. Термин «гексагональный» используется потому, что при  $T_2 = T_1 \cdot \sqrt{3}$  каждый отсчет будет иметь шесть ближайших соседей.

Матрица периодичности имеет вид

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_1 \\ U_2 & -U_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } U_1 = \frac{\pi}{T_1} \quad U_2 = \frac{\pi}{T_2}.$$

Можно предложить несколько областей различной формы, которые, периодически повторяясь покрывают плоскость  $(\Omega_1, \Omega_2)$  без перекрытий.

Четыре возможных формы периода приведены на рис. 1.22.

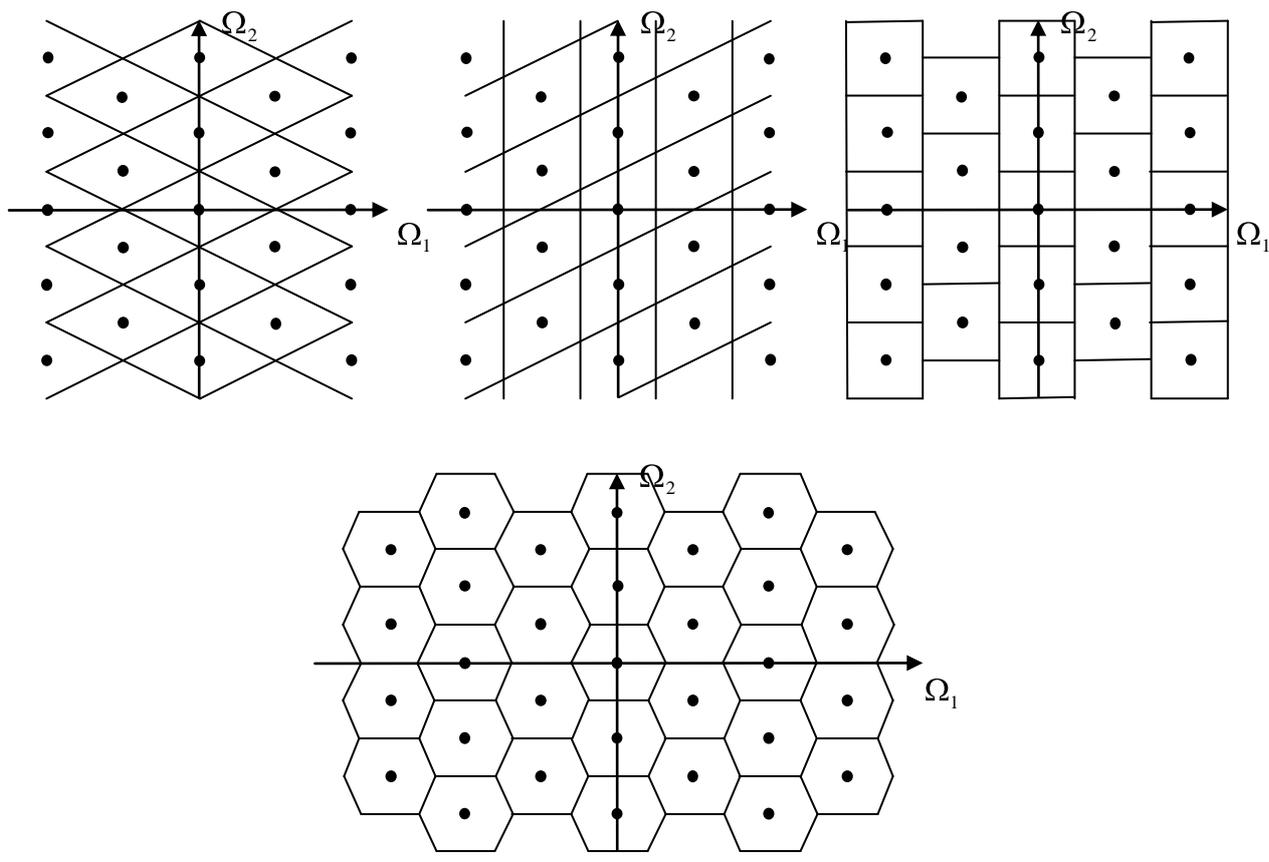


Рис. 1.22 Возможные виды реализации формы периода при гексагональной дискретизации

Особый интерес представляет шестиугольная область с параметрами  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ , изображенная на рис. 1.23.

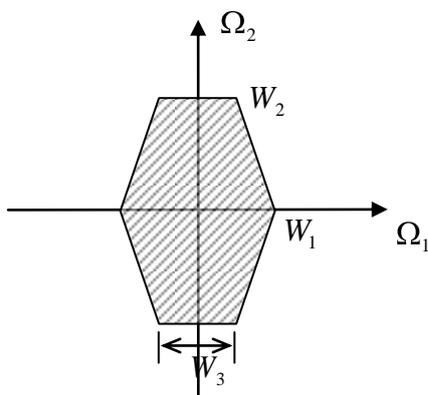


Рис. 1.23 Шестиугольная область с параметрами  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$

Эти параметрами связаны с параметрами периодичности  $U_1$  и  $U_2$  следующим образом:

$$U_1 = W_1 + \frac{1}{2}W_3,$$

$$U_2 = W_2.$$

Сравним относительную эффективность прямоугольного и гексагонального раstra дискретизации двумерного непрерывного сигнала с частотным спектром, ограниченным круговой областью частот.

Двухмерное преобразование Фурье такого сигнала удовлетворяет условию:

$$X_a(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \quad \text{при} \quad \Omega_1^2, \Omega_2^2 \geq W^2.$$

Круговую область можно вписать в квадрат со стороной  $2W$  или в шестиугольник со стороной  $2W/\sqrt{3}$ . Следовательно, частотный диапазон можно считать ограниченным либо квадратным, либо шестиугольным участком частотной области.

Периодическое повторение квадратного участка соответствует дискретизации на прямоугольном растре с матрицей дискретизации:

$$\mathbf{V}_{np} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{W} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{W} \end{bmatrix}, \quad |\det \mathbf{V}_{np}| = \frac{\pi^2}{W^2}.$$

С другой стороны матрица гексагональной дискретизации:

$$\mathbf{V}_{гекс} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{W \cdot \sqrt{3}} & \frac{\pi}{W \cdot \sqrt{3}} \\ \frac{\pi}{W} & -\frac{\pi}{W} \end{bmatrix}, \quad |\det \mathbf{V}_{гекс}| = \frac{\pi^2}{W^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку плотность отсчетов пропорциональна  $\frac{1}{|\det \mathbf{V}|}$  и  $\frac{1}{|\det \mathbf{V}_{np}|} \geq \frac{1}{|\det \mathbf{V}_{гекс}|}$ , видно, что для представления одного и того же сигнала, спектр которого ограничен кругом, гексагональная дискретизация требует % отсчетов по сравнению с прямоугольной.

Таблица 1.1

% отсчетов для гексагональной дискретизации.

М-мерная гексагональная решетка	% по отношению к кубической М-мерной решетке
1	100,0
2	86,6
3	70,5
4	49,9

### Выводы

Если непрерывный сигнал  $x_a(\mathbf{t})$  имеет ограниченный спектр и преобразование Фурье  $X_a(\mathbf{\Omega})$ , которое принимает нулевое значение вне области  $B$  плоскости  $\mathbf{\Omega}$ . Чтобы представить  $x_a(\mathbf{t})$ , необходимо найти такую матрицу дискретизации  $\mathbf{V}$ , которая позволит восстановить  $x_a(\mathbf{t})$  по  $x(\mathbf{n})$  с помощью (1.64).

Преобразование Фурье дискретного сигнала  $x(\mathbf{n})$  дает последовательность взвешенных и периодически повторенных копий  $X_a(\mathbf{\Omega})$ . Матрица периодичности  $\mathbf{U}$  определяет два линейно независимых направления в которых происходит повторение  $X_a(\mathbf{\Omega})$ . У следует выбирать таким образом, чтобы не было перекрытий отдельных копий  $X_a(\mathbf{\Omega})$  и соответственно отсутствовало наложение. В

этом случае  $X_a(\boldsymbol{\Omega})$  удовлетворяет (1.62). Выбор матрицы периодичности  $\mathbf{U}$  определяет матрицу дискретизации  $\mathbf{V}$ . В общем случае выбор  $\mathbf{U}$  неоднозначен, поскольку при соответствующей плотности отсчетов на плоскости  $\mathbf{t}$  любой сигнал с ограниченным спектром можно представить по различным растрам дискретизации. Однако желательно представить  $x_a(\mathbf{t})$  минимальным числом отсчетов.. Можно показать, что плотность отсчетов (число на единицу площади) составляет  $\frac{1}{|\det \mathbf{V}|}$ . Минимизация этой величины эквивалентна минимизации  $|\det \mathbf{U}|$ . Поэтому, желая достичь эффективной формы растра дискретизации сигнала с ограниченным спектром, необходимо выбрать  $\mathbf{U}$  с минимальным  $|\det \mathbf{U}|$ , при котором обеспечивается отсутствие наложения для конкретной формы полосы частот  $B$  нашего сигнала.

## Глава 2. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И АДАМАРА

### 2.1. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Впервые алгоритм БПФ был опубликован Кули и Таки в 1965 году. Он позволял вычислять коэффициенты Фурье с использованием значительно меньшего объема вычислительных операций. Его появление вызвало большие изменения в использовании вычислительных методов, используемых в цифровом спектральном анализе, цифровом моделировании фильтров и некоторых смежных областях.

#### *ДПФ (Дискретное преобразование Фурье)*

Определим для простоты одномерное дискретное прямое и обратное преобразование Фурье.

ДПФ:

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j \cdot r \cdot k}{N}\right), \quad \text{где } r = 0 \div N-1,$$

$A_r$  -  $r$ -й коэффициент ДПФ,  $X_k$  -  $k$ -й элемент выборки временного или пространственного ряда, состоящего из  $N$  выборок,  $j = \sqrt{-1}$ .

В общем случае  $X_k$  могут быть комплексными числами, в то время как  $A_r$  почти всегда комплексные числа.

Для удобства выражение может быть записано следующим образом:

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot W^{rk}, \quad \text{где } W = \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j}{N}\right) \quad (2.1)$$

Индекс  $r$  иногда называют частотой.

Поскольку для реализации ОПФ надо провести те же операции, что и для ПФ, но с аргументом противоположного знака для exp, то можно записать выражение для ОДПФ:

$$X_l = \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} A_r \cdot W^{-rl}, \quad \text{где } l=0,1,\dots,N-1. \quad (2.2)$$

Произведем подстановку (2.1) в (2.2)

$$X_l = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{X_k}{N} \right) \cdot W^{r(k-l)}. \quad (2.3)$$

Меняя порядок суммирования по индексам  $r$  и  $k$  и используя свойство ортогональности

$$\sum_{r=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi \cdot j \cdot (n-m) \cdot r}{N}\right) = N \quad \text{при } n \equiv m \pmod{N}$$

$$= 0 \quad \text{при прочих } n,$$

получаем, что правая часть выражения (2.3) практически равна  $X_l$ .

Полезно расширить область определения  $A_r$  на все целые числа (положительные и отрицательные).

В пределах этого определения имеем:

$$A_r = A_{r+N} = A_{r+2N} = \dots, \text{ аналогично}$$

$$X_l = X_{l+N} = X_{l+2N} = \dots$$

### 2.1.1. Общее описание БПФ

Как отмечалось ранее, БПФ позволяет вычислять ДПФ и связанные с ним операции значительно быстрее. Приведем в табл. 2.1 эти данные.

Таблица 2.1

Соотношение между количеством операций для ДПФ и БПФ

Операция	Формула	Приблизительное количество операций умножения (верхняя граница)	
		Прямое	БПФ
ДПФ	$\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{-2\pi \cdot j \cdot r \cdot k / N}, r = 0, 1, \dots, N-1$	$N^2$	$N \cdot \log_2 N$
Фильтрация (свертка)	$\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot Y_{U-k}, U = 0, 1, \dots, N-1$	$N^2$	$3N \cdot \log_2 N$
Автокорреляционные функции	$\sum_{k=0}^{N-1-r} X_k \cdot X_{r+k}, r = 0, 1, \dots, N-1$	$\frac{N}{4} \cdot \left( \frac{N}{2} + 3 \right)$	$3N \cdot \log_2 N$
Двумерное преобразование Фурье (распознавание образов)	$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_{k,l} \cdot e^{-2\pi \cdot j \cdot \left( \frac{k \cdot q}{N} + \frac{r \cdot l}{N} \right)};$ $r, q = 0, 1, \dots, N-1$	$N^4$	$2N^2 \cdot \log_2 N$
Двумерная фильтрация	$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_{k,l} \cdot Y_{q-k, r-l}; r, q = 0, 1, \dots, N-1$	$N^4$	$3N^2 \cdot \log_2 N$

Полезно, по-видимому, отметить, что БПФ не только сокращает время вычислений, но и снижает ошибки округления, связанные с этими вычислениями.

### 2.1.2. Стандартная форма БПФ

*Дискретизация во времени.* Обычно применяемый термин ошибочен. Лучше применять термин прореживание во времени. ДПФ и его обращение имеют одну и ту же форму, поэтому для их получения достаточно использовать один и тот же алгоритм с переменной ролей  $X_k$  и  $A_r$ , введением соответствующего масштабного множителя и необходимым изменением знаков. Рассмотрим сейчас основную форму БПФ, предложенную Кули и Таки, а затем укажем на необходимые изменения алгоритма для получения ОБПФ.

Пусть имеется временной ряд рис. 2.1, состоящий из  $N$  отсчетов  $X_k$ ,  $k = 0 \div N - 1$ .

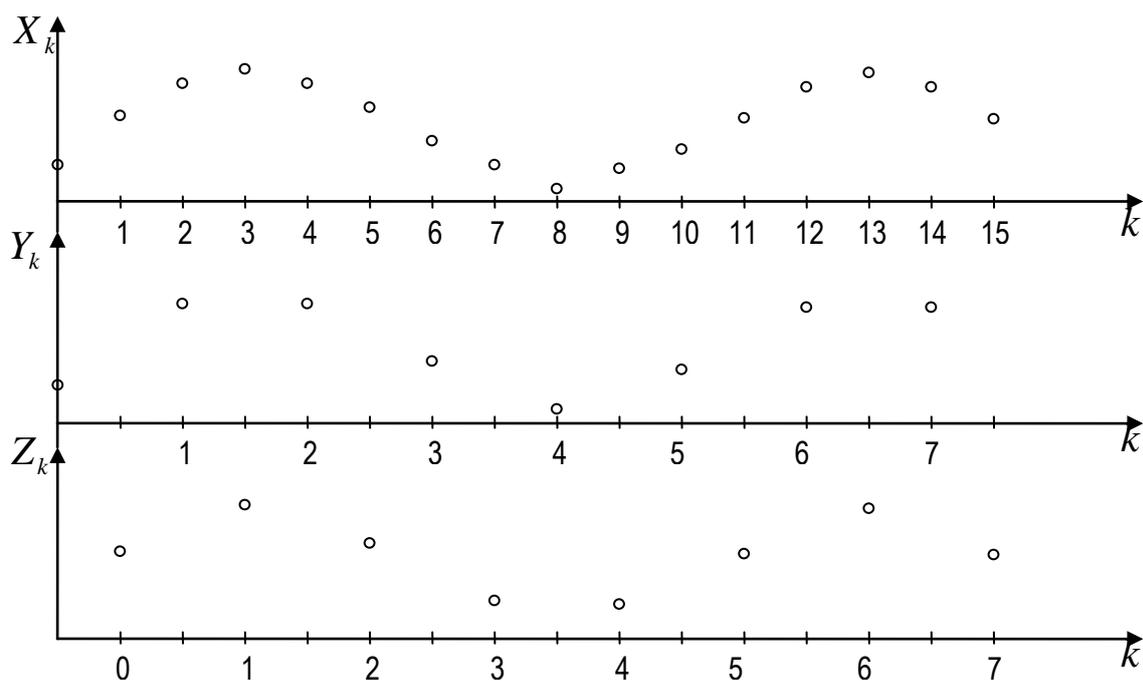


Рис. 2.1 Прореживание исходных отсчетов функции на четные и нечетные

Разделим его на две функции  $Y_k$  и  $Z_k$ , каждая из которых состоит только из половины исходных данных точек -  $\frac{N}{2}$ . Пусть  $Y_k$

составлена четно пронумерованными точками  $X_{2k}, k = 0 \div \frac{N}{2} - 1$ ,

а  $Z_k$  - нечетно пронумерованными точками  $X_{2k+1}, k = 0 \div \frac{N}{2} - 1$ , т.е.

$$\begin{cases} Y_k = X_{2k} \\ Z_k = X_{2k+1} \end{cases} \quad k = 0 \div \frac{N}{2} - 1.$$

Для функций  $Y_k$  и  $Z_k$  дискретные преобразования Фурье имеют вид:

Дискретное преобразование Фурье исходного ряда можно записать:

$$A_r = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left\{ Y_k \cdot \exp\left(-\frac{4\pi \cdot j \cdot r \cdot k}{N}\right) + Z_k \cdot \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j \cdot r}{N} \cdot (2k+1)\right) \right\},$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1$$

или

$$A_r = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} Y_k \cdot \exp\left(-\frac{4\pi \cdot j \cdot r \cdot k}{N}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j \cdot r}{N}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} Z_k \cdot \exp\left(-\frac{4\pi \cdot j \cdot r \cdot k}{N}\right),$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1$$

в результате получим:

$$A_r = B_r + \left( \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j \cdot r}{N}\right) \right) \cdot C_r \quad 0 \leq r \leq \frac{N}{2} - 1.$$

В соответствии со свойством периодичности при  $r \geq \frac{N}{2}$  значения  $B_r$  и  $C_r$  периодически принимают значения, которые они имели при  $r \leq \frac{N}{2} - 1$ , поэтому

$$A_{r+\frac{N}{2}} = B_r + \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j \cdot \left[r + \frac{N}{2}\right]}{N}\right) \cdot C_r = B_r - \exp\left(-\frac{2\pi \cdot j \cdot r}{N}\right) \cdot C_r,$$

$$r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Отсюда получим формулы:

$$\begin{cases} A_r = B_r + W^r \cdot C_r, \\ A_{r+\frac{N}{2}} = B_r - W^r \cdot C_r \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Полагая, что в нашем распоряжении имеется метод вычисления ДПФ для  $B_r$  и  $C_r$ , получаем  $A_r$  с помощью графа (рис. 2.2).

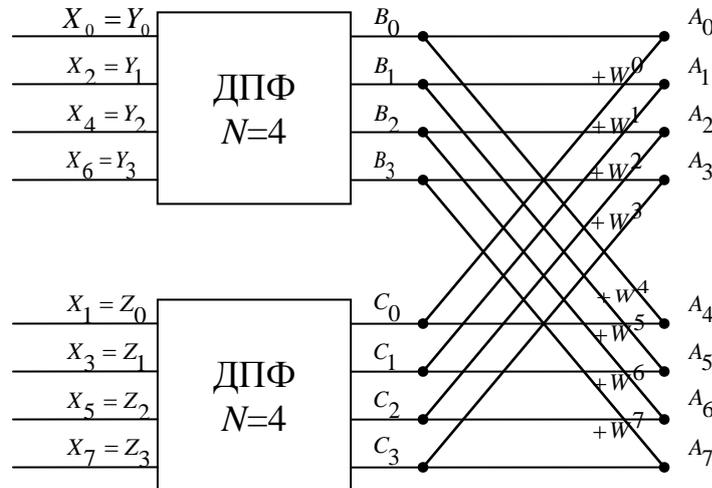


Рис. 2.2 Первая итерация графа БПФ

Аналогичное преобразование можно применить и к  $Y_k$  и  $Z_k$ . При этом получим следующий граф (рис. 2.3).

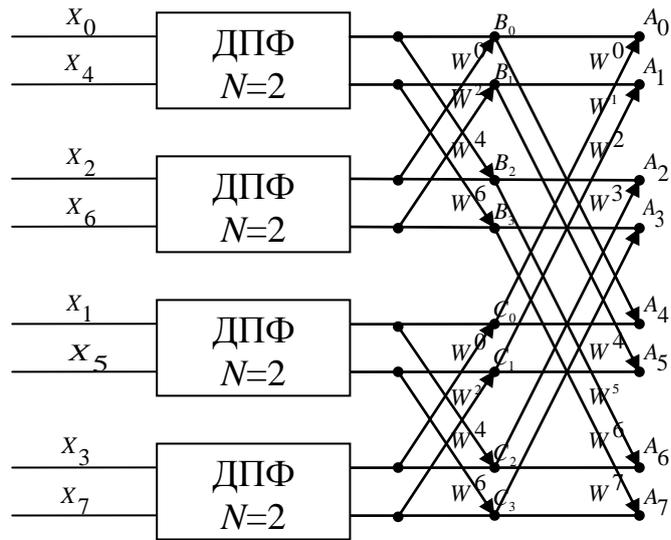


Рис. 2.3 Вторая итерация графа БПФ

Аналогичные операции можно проводить до тех пор, пока функция будет иметь количество выборок, кратное двум. Таким образом, если  $N = 2^n$ , имеется возможность проведения  $n$  таких операций, какие были описаны выше для получения ДПФ очередного уровня:  $A_r; B_r; C_r$ ; и т.д. до функции, содержащей две точки. ДПФ, представленной одной точкой, является сама выборка.

Проведя еще один шаг преобразования, получим окончательный граф БПФ (рис. 2.4). Приведенный граф БПФ удобен для выполнения операция на месте, т.е. необходимый объем ОЗУ составляет  $N$ .

Для получения алгоритма обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ) используется тот же самый алгоритм, однако в качестве  $W$  используется величина  $W^{-1}$ , т.е.

$$W^{-1} = \exp\left(\frac{2\pi \cdot j}{N}\right),$$

а также полученные значения отсчетов помножаются на масштабный коэффициент  $\frac{1}{N}$ , где  $N$  – объем преобразуемой выборки коэффициентов  $A_i, i = 0 \div N - 1$ .

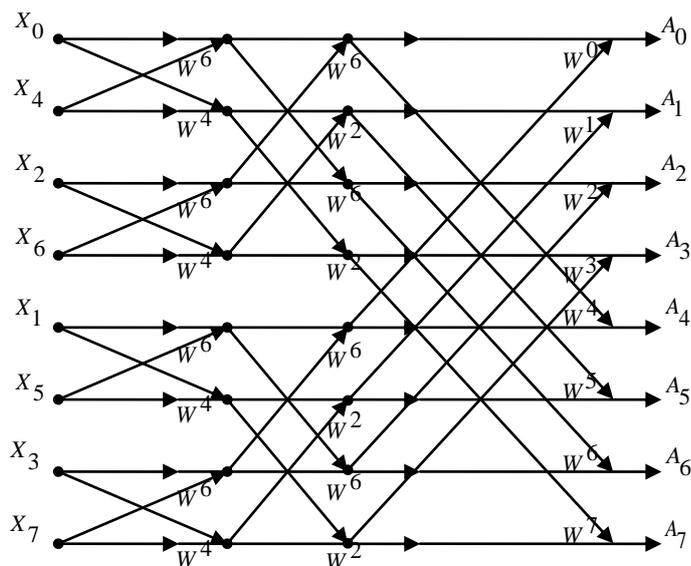


Рис. 2.4 Граф БПФ для  $N=8$

## 2.2. Функции ортонормированные

Преобразование Фурье представляет собой дискретизацию сигнала с помощью базисных функций  $\cos \omega x$  и  $\sin \omega x$  или в экспоненциальной форме  $\exp\left\{-j \cdot \omega \cdot x\right\}$ .

Дискретные формы этих функций  $\cos \frac{2\pi \cdot r \cdot k}{N}$  и  $\sin \frac{2\pi \cdot r \cdot k}{N}$   
или  $\exp\left(-j \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot k}{N}\right)$ .

Эти функции обладают свойством ортогональности.

$$\begin{aligned} \exp\left(j \cdot \frac{2\pi \cdot (n - m) \cdot r}{N}\right) &= 1 && \text{при } n \equiv m \pmod{N} \\ &= 0 && \text{при прочих } n \end{aligned}$$

Что позволяет восстанавливать первоначальный сигнал, дискретизируя его по частотам, с помощью обратного преобразования на основе

базисных функций  $\exp\left(j \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot k}{N}\right)$ . Они также линейно независимы.

Аналогичным образом можно представить себе бесчисленное множество систем ортогональных и линейно независимых функций.

Система  $\{f_r(x)\}$  вещественных и почти всюду отличных от нуля функций ( $r = 0 \div \infty$ ) называется ортогональной на интервале  $x_0 < x < x_1$ , если выполнено следующее условие:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(r, x) \cdot f(k, x) \cdot dx = X_r \cdot \delta_{rk}, \quad \delta_{rk} = \begin{cases} 1, & r = k \\ 0, & r \neq k \end{cases} \quad (2.6)$$

Если  $X_r = 1$ , то функции называются ортогональными и нормированными, а система – ортонормированной системой функций. Если система не нормирована, то ее преобразовать в нормированную:

$\{X_r^{-1/2} \cdot f_r(x)\}$ . Система ортогональных функций является специальным случаем систем линейно-независимых функций. Система  $\{f_r(x)\}$  из  $m$  функций называется линейно-зависимой, если уравнение:

$$\sum_{r=0}^{m-1} C(r) \cdot f(r, x) = 0. \quad (2.7)$$

удовлетворяется для всех значений  $x$ , при этом не все константы  $C(r)$  равны нулю. Если это уравнение не удовлетворяется, то эта система линейно-независима.

Функции ортогональной системы всегда являются линейно-независимыми, так как если уравнение домножить на  $f(k, x)$  и проинтегрировать полученное произведение на интервале  $x_0 < x < x_1$ , то для каждой постоянной  $C(k)$  получим  $C(k) = 0$ .

Система  $f(r, x)$  из  $m$  линейно-независимых функций всегда может быть преобразована в систему  $f(k, x)$  из  $m$  ортогональных функций. Можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} f(0, x) &= C_{00} \cdot g(0, x) \\ f(1, x) &= C_{10} \cdot g(0, x) + C_{11} \cdot g(1, x) \\ f(2, x) &= C_{20} \cdot g(0, x) + C_{21} \cdot g(1, x) + C_{22} \cdot g(2, x) \quad (2.8) \\ &\dots \end{aligned}$$

Подстановка  $f(r, x)$  в формулу (1) дает уравнения, число которых вполне достаточно для нахождения константы  $C_{pq}$ :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f^2(0, x) \cdot dx &= X_0 \\ \int_{x_0}^{x_1} f^2(1, x) \cdot dx &= X_1, \quad \int_{x_0}^{x_1} f(0, x) \cdot f(1, x) \cdot dx = 0 \\ \int_{x_0}^{x_1} f^2(2, x) \cdot dx &= X_2, \quad \int_{x_0}^{x_1} f(0, x) \cdot f(2, x) \cdot dx = 0, \quad \int_{x_0}^{x_1} f(1, x) \cdot f(2, x) \cdot dx = 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты  $X_0, X_1, \dots$  являются произвольными. Для нормированной системы функций они равны 1. Из уравнения (2.7) следует, что равенства (2.9) действительно дают значения коэффициентов  $C_{pq}$ , так как им может удовлетворить только система  $\{g(r, x)\}$  из линейно-независимых функций.

### 2.3. Функции Уолша. Преобразование Адамара.

#### Быстрое преобразование Адамара БПА

Кроме разложения по тригонометрическим функциям часто используется разложение по функциям Уолша, которые можно рассматривать как некоторую аппроксимацию синусоидальных и косинусоидальных функций прямоугольными импульсами. Эти функции могут иметь только два значения:  $-1$  и  $+1$ . Обозначаются они как  $wal(i, \theta)$ , где  $i$  – частота, определяемая числом пересечений  $0$ ;  $\theta$  – временной параметр.

Аналогично тригонометрическим функциям различают функции четные и нечетные:

$$\begin{aligned} wal(2i-1, \theta) &= sal(i, \theta), \\ wal(2i, \theta) &= cal(i, \theta). \end{aligned}$$

Эти функции образуют ортогональную систему функций Уолша.

Для построения функций Уолша лучше всего воспользоваться матрицей Адамара, которые называются формирующими матрицами:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

и т.д., но при этом мы получаем расположение функций, не соответствующих возрастанию частот.

Рассмотрим еще один алгоритм построения функций Уолша, в порядке возрастания по частоте.

Алгоритм для удобства изложен в виде табл. 2.2. Аналогичная таблица строится при его реализации.

Таблица 2.2

Формирование функций Уолша

№ образующий	Функция				№ функции	Обозначение				
	+				0	$wal(0, \theta)$				
0	+		-		1	$sal(1, \theta)$				
1	+	-	-	+	2	$cal(1, \theta)$				
0	+	-	+	-	3	$sal(2, \theta)$				
3	+	-	-	+	+	-	-	+	4	$cal(2, \theta)$
2	+	-	-	+	-	+	+	-	5	
1	+	-	+	-	-	+	-	+	6	
0	+	-	+	-	+	-	+	-	7	

Быстрое преобразование Адамара (БПА) или быстрое преобразование Уолша–Фурье имеет следующий алгоритм, дающий коэффи-

циенты преобразования в естественном порядке, т.е. по возрастанию частот (рис. 2.5).

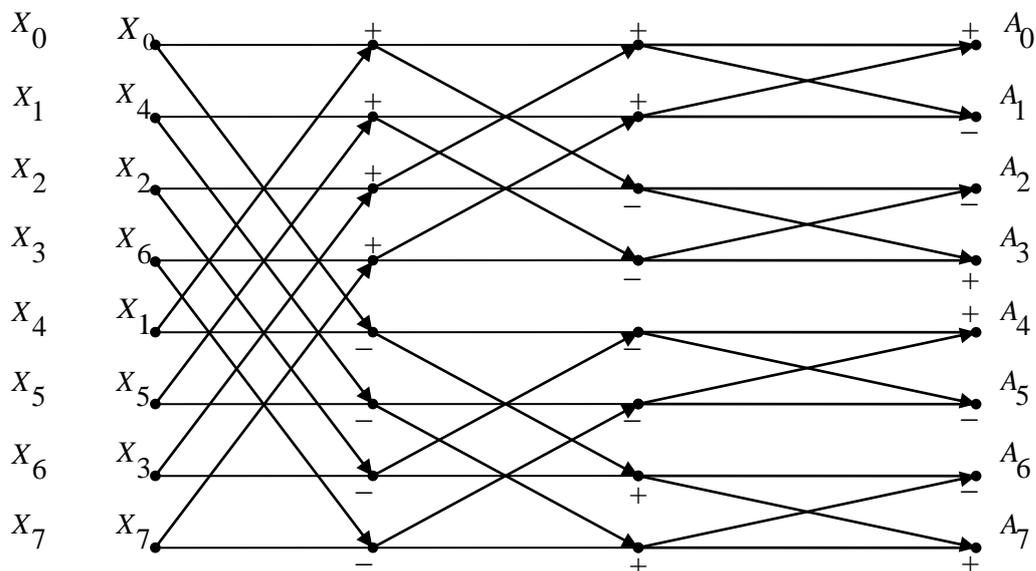


Рис. 2.5 Граф алгоритма БПА для  $N=8$

Аналогичный алгоритм без всяких изменений пригоден и для обратного преобразования Адамара (ОБПА), но полученный результат умножается на  $\frac{1}{N}$ .

В случае использования прямоугольной аппроксимации сигнала, дискретизированного с равномерным шагом по времени или пространству, использование БПА предпочтительнее использования БПФ. Это связано как с объемом вычислений (производящихся в вещественной области), так и с отсутствием паразитных высоких частот, определяемых выбором метода аппроксимации сигнала.

Мы имеем дело с разделимыми системами, то очевидно, что для получения многомерного преобразования как Фурье, так и Адамара, необходимо провести одномерные преобразования последовательно для каждой из осей координат.

Нам известно, что можно построить бесконечное множество ортонормированных систем, то можно получить такое же число различных преобразований.

Более подробную информацию можно найти в соответствующей литературе.

## Глава 3. МЕТОДЫ ФИЛЬТРАЦИИ

### 3.1. Методы фильтрации высокочастотных шумов

#### 3.1.1. Метод пороговой фильтрации

Этот метод заключается в том, что последовательно проверяется цифровое представление яркости всех элементов изображения  $f(x, y)$ , и если яркость элемента  $(i, j) - F(i, j)$  анализируемой группы из  $N \times N$  элементов (где  $N$  – нечетное) превышает среднюю яркость группы  $G_{ij(N)}$ , равную

$$G_{ij(N)} = \frac{\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} f(i+k, j+l)}{N^2}$$

на заданную пороговую величину  $\eta$ , то его яркость заменяется на среднюю яркость группы  $G_{ij(N)}$ . Обычно  $N = 3; 5; 7$ .

Поскольку шум пространственно не коррелирован, его спектр содержит более высокие пространственные частоты, чем спектр изображения. Поэтому и получили распространение методы сглаживания шумов, основанные на низкочастотной пространственной фильтрации. К таким методам относятся рассмотренная нами пороговая фильтрация, а также анизотропная и рекуррентная.

#### 3.1.2. Метод анизотропной фильтрации

Этот метод основан на использовании свертки исходного массива изображения  $f(n_1, n_2)$  размером  $M \times M$  со сглаживающим массивом размером  $N \times N$ . При  $N \ll M$  реализуется программное сканирование массива  $f(n_1, n_2)$  некоторым массивом

$W(m_1, m_2)$  объемом  $N \times N$  и операция свертки на каждом шаге. В результате формируется новый массив  $g(n_1, n_2)$  сглаженного изображения, имеющий размер  $M \times M$ . Такой алгоритм удобен для реализации на ЭВМ. Для каждого элемента  $f(i, j)$  исходного массива  $f(n_1, n_2)$  выполняется преобразование, которое заключается в перемножении обрамляющей его матрицы заданного размера  $N \times N$  с элементами сглаживающей.

Последующее суммирование произведений дает элементы выходного массива

$$g(i, j) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} f(i+k, j+l) \cdot W(k, l)$$

В качестве элементов массивов фигурируют числовые значения, соответствующие яркости. Отдельно стоит остановиться на построении сглаживающего массива.

Качество фильтрации повышается с увеличением  $N$ , однако пропорционально  $N^2$  растет время обработки исходного изображения на ЭВМ, и могут исчезать важные детали самого изображения, имеющие высокочастотную составляющую, поэтому выбор  $N$  является компромиссом и определяется оптимальным качеством изображения. Массив  $W$  должен быть нормирован для получения единичного коэффициента передачи, чтобы при фильтрации не изменялась средняя яркость изображения. Могут применяться сглаживающие массивы  $W$  следующего вида.

Для изотропной фильтрации

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т. п.}$$

Для анизотропной фильтрации

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т. п.}$$

### 3.1.3. Метод рекуррентной фильтрации

Этот вид фильтрации наиболее эффективен и дает экономию объема памяти ЭВМ за счет того, что элементы массива  $g(i, j)$  пишутся как соответствующие места элементов массива  $f(i, j)$ , поскольку при рекуррентной фильтрации используются элементы не только входного массива, но и элементы сглаженного изображения.

Общая формула для рекуррентной фильтрации подобна формуле для анизотропной фильтрации:

$$g(i, j) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} f^*(i+k, j+l) \cdot W_{kl},$$

где  $f^*(i+k, j+l)$  могут быть взяты как из исходного массива  $f(n_1, n_2)$ , так и их выходного  $g(n_1, n_2)$ .

Если сканирование идет слева направо и сверху вниз, то рекуррентная фильтрация

$$g(i, j) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{-1} g(i+k, j+l) \cdot W_{kl} + \sum_{k=+1}^{+\frac{N-1}{2}} \sum_{l=0}^{+\frac{N-1}{2}} g(i+k, j+l) \cdot W_{kl} +$$

$$+ \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^0 \sum_{l=0}^{+\frac{N-1}{2}} f(i+k, j+l) \cdot W_{kl}.$$

Фильтрующие матрицы  $W_{kl}$  аналогичны тем, которые используются при анизотропной фильтрации.

### 3.1.4. Метод статистической фильтрации

Этот метод фильтрации можно назвать методом адаптивной пороговой фильтрации. При его реализации последовательно проверяется цифровое представление яркости всех элементов изображения  $f(x, y) - f(n_1, n_2)$ . Анализируется группа из  $N \times N$  элементов, где  $N \geq 3$  и  $N$  – нечетное.

Значение первого момента для этих элементов:

$$g(i, j) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f(i+k, j+l),$$

а затем второго момента и среднеквадратическое отклонение, величина которого используется для получения порогового значения  $\eta(i, j) = m \cdot \sigma(i, j)$ , где

$$D(i, j) = \frac{1}{N^2 - 1} \cdot \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (f(i+k, j+l) - g(i, j))^2,$$

$$\sigma(i, j) = \sqrt{D(i, j)},$$

$m$  зависит от характера анализируемого изображения, т.е. от значения высокочастотных составляющих в спектре сигнала и от требуемой величины контрастности (на практике  $m$  получается экспериментально при решении конкретной задачи).

Если  $|f(i, j) - g(i, j)| \leq m \cdot \sigma(i, j)$ , то

$f(i, j) = g(i, j)$ , в противном случае

$$f(i, j) = \frac{1}{N^2 - 1} \cdot \left( \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{+\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{-1} f(i+k, j+l) + \sum_{k=+1}^{\frac{N-1}{2}} f(i+k, j) \right) + \left( \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=+1}^{\frac{N-1}{2}} f(i+k, j+l) + \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{-1} f(i+k, j) \right),$$

обычно  $N = 3; 5; 7$ .

### 3.1.5. Метод сплайн-фильтрации

Часто необходимо бывает по набору заданных на плоскости точек построить гладкую кривую. Рассмотрим, как и прежде, двухмерное пространство в плоскости  $XU$ . Наиболее удачным подходом является построение гладких кривых формой В-сплайна. В-сплайн обеспечивает получение более гладких кривых, чем все известные, и выполняется путем построения полинома третьей степени между двумя соседними точками с привлечением еще двух соседних.

Гладкость кривых обеспечивается за счет того, что полученные кривые не проходят через заданные точки.

Математическая гладкость кривых выражается в терминах непрерывности параметрических представлений  $x(t)$  и  $y(t)$  и их производных вплоть до  $x''(t)$  и  $y''(t)$  в точках стыковки двух соседних сегментов кривой, где  $t$  – параметр, изменяющийся  $0 \leq t \leq 1$ .

Любая точка части кривой между точками  $P_i(x_i, y_i)$  и  $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$  будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} x(t) &= (a_3 \cdot t + a_2) \cdot t + a_1 \cdot t + a_0 \\ y(t) &= (b_3 \cdot t + b_2) \cdot t + b_1 \cdot t + b_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где:  $0 \leq t \leq 1$

$$a_3 = \frac{(x_{i-1} + 3 \cdot x_i - 3 \cdot x_{i+1} + x_{i+2})}{6},$$

$$a_2 = \frac{(x_{i-1} - 2 \cdot x_i + x_{i+1})}{2},$$

$$a_1 = \frac{(x_{i-1} + x_{i+1})}{2},$$

$$a_0 = \frac{(x_{i-1} + 4 \cdot x_i + x_{i+1})}{6}.$$

Коэффициенты  $b_3, b_2, b_1, b_0$  вычисляются по  $y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}$  по таким же формулам.

По полученным формулам для полиномов (3.1) можно вычислить любое количество произвольных точек.

**3.1.6. Восстановление контуров сечений выпуклого объекта по набору теневых проекций**

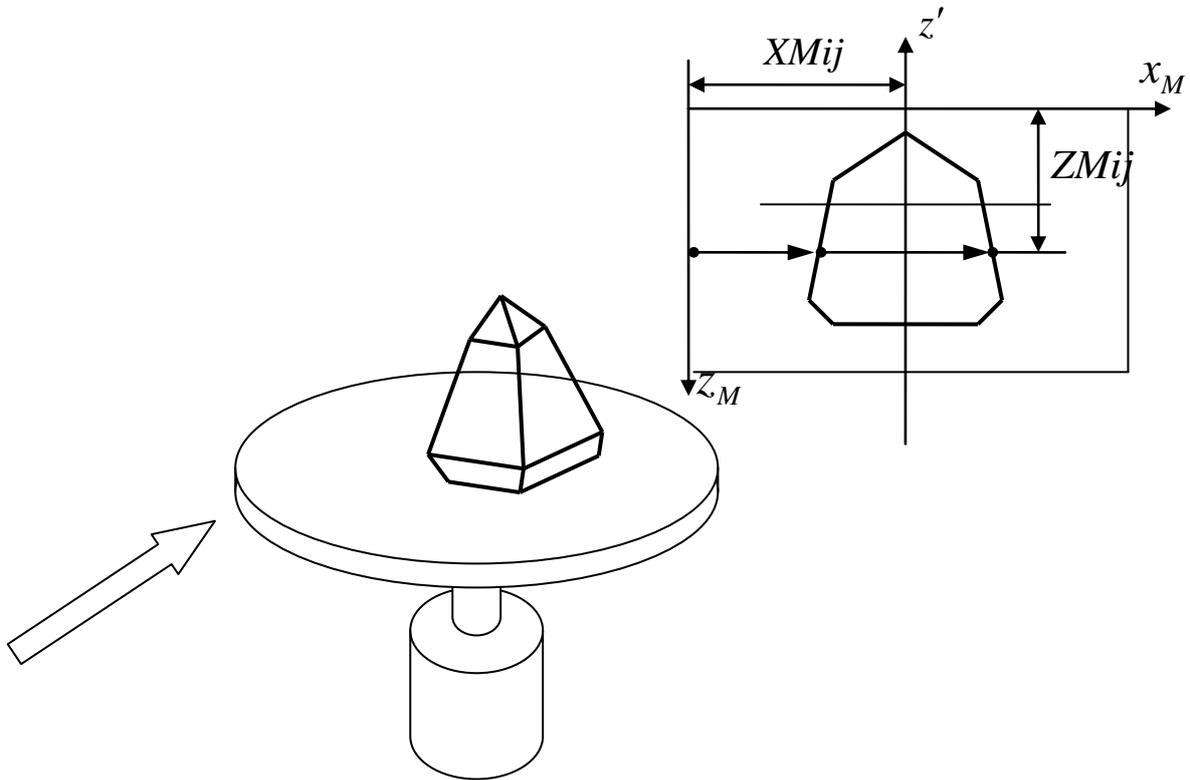


Рис. 3.1. Схема получения теневых проекций

Общее значение координаты оси

$$x_{M0} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\left( \sum_{j=0}^{N_S-1} \frac{x_{M0ij}}{N} \right)}{N},$$

где  $N$  – количество ракурсов (теневых проекций).

$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N}$  – угловое значение шага дискретизации.

Для всех точек контура, расположенных справа от оси  $OZ$ ,

$$x_{Mij} = x''_{Mij} - x_{M0},$$

где  $i$  – номер ракурса  $i = 0 \div N - 1$ ,  $j$  – номер строки  $j = 0 \div N - 1$

Расстояния  $\Delta z$  между соседними сечениями определяются шагом строчной развертки матрицы.

Таким образом, естественно представлять форму поверхности 3D объекта виде контуров сечений этого объекта  $\perp$  оси  $OZ$  и соответствующей строкам  $j$ .

Рассмотрим процесс построения контура в одном из сечений и для простоты опустим индекс  $j$ .

Пусть экспериментально определены все величины:

$$x_{Mi} = P_i, \quad P_i > 0 \quad i = 0 \div N - 1$$

Каждая такая величина определяет луч света, ориентированный относительно координатной системы  $XOY$ . Эта ориентация определяется двумя величинами  $P_i$  и  $\alpha_i$ .

Следовательно, представив луч света в виде прямой, можно записать его траекторию в виде нормального уравнения прямой (рис. 3.2):

$$x \cdot \cos \alpha_i + y \cdot \sin \alpha_i + P_i = 0,$$

где  $P_i$  – параметр прямой

$\alpha_i$  – угол между  $P_i$  и осью  $OX$ .

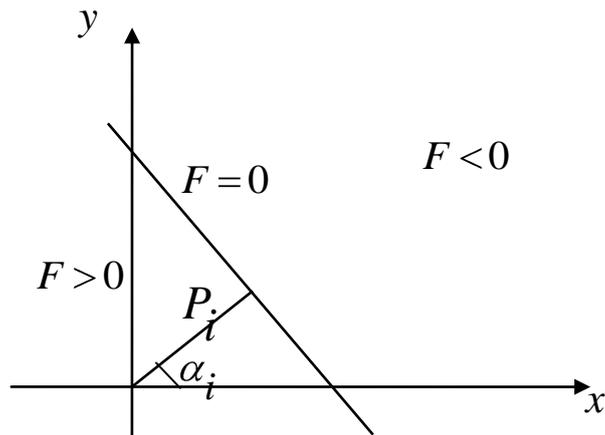


Рис. 3.2 Иллюстрация R-функции для прямой

Каждый луч при съеме данных формирует одну точку контура теневой проекции. При построении контура сечения используется метод обратного проецирования. Сущность его заключается в следующем. Каждая точка теневой проекции рассматривается как источник луча обратного направления, перпендикулярного плоскости проекции. Искомая точка может совпадать с любой точкой луча. Используя всю совокупность ракурсов, определяющих все множество обратных лучей, можно построить искомый контур сечения.

### ***Использование R-функций для построения сечения***

Рвачевым В.Л. (В.Л. Рвачев Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967) предложен метод аналитического описания сложных геометрических образов. Основным понятием в его методе является понятие R-функции. Это функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая в каждой из областей не сохраняет постоянный знак. Над такими функциями можно выполнять логические операции ( $\wedge$ ,  $\vee$  и т.д.), что соответствует построению сложных геометрических образов их простых.

Начнем с простейшей R-функции

$$F = -(x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - P).$$

Эта функция разделяет всю координатную плоскость  $XOY$  на две части. В одной части  $F > 0$ , в другой  $F < 0$ , а на границе, представляющей собой прямую,  $F = 0$ .

Логическая операция  $F_1 \wedge F_2$ , где

$$F_1 = -(x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - P_1),$$

$$F_2 = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + P_2.$$

определяет полосу (рис. 3.3)  $F = F_1 \wedge F_2 > 0$ .

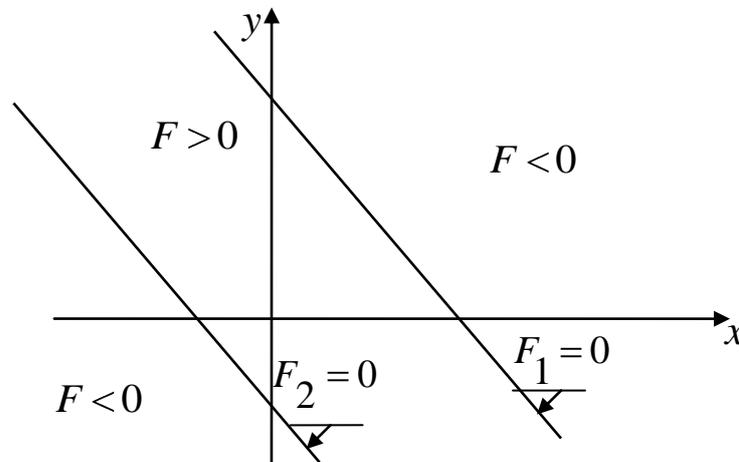


Рис. 3.3 Использование R-функции для ограничения пространства двумя прямыми линиями

Пусть известна вся совокупность лучей  $F_i$

$$F_i = -x \cdot \cos \alpha_i - y \cdot \sin \alpha_i + P_i.$$

Тогда  $F = F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_N$  определяет все точки  $F > 0$  на границе контура и  $F < 0$  вне контура.

### ***Построение огибающей совокупности лучей***

Пусть число лучей бесконечно велико. Тогда семейство лучей задается:

$$F = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - P(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi .$$

Уравнение огибающей можно найти из решения системы уравнений  $F = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ :

$$\begin{cases} F = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - P(\alpha) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha - \frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим координаты точек контура (огибающей):

$$\begin{cases} y = P(\alpha) \cdot \sin \alpha + \frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \cos \alpha, \\ x = P(\alpha) \cdot \cos \alpha - \frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \sin \alpha. \end{cases}$$

Рассмотрим частный случай, когда  $P(\alpha) = \text{const}$ , т.е.  $P$  не зависит от  $\alpha$ .

В этом случае  $\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$  и уравнения примут вид:

$$\begin{cases} y = P \cdot \sin \alpha, \\ x = P \cdot \cos \alpha, \\ x^2 + y^2 = P^2. \end{cases}$$

Т.е. получили уравнение окружности.

### **Случай конечного числа лучей, равного $N$**

Пусть заданы два луча, соответствующие ракурсами  $i$  и  $i+1$ :

$$\begin{cases} y \cdot \sin \alpha_i + x \cdot \cos \alpha_i = P_i \\ y \cdot \sin(\alpha_i + \Delta\alpha) + x \cdot \cos(\alpha_i + \Delta\alpha) = P_{i+1} \end{cases},$$

где  $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N}$ ,  $\alpha_1 = 0$ .

Решая эту систему уравнений, получим совокупность координат точек контура сечения:

$$\begin{cases} x_i = \frac{P_i \cdot \cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\Delta\alpha}{2}} - \frac{P_{i+1} - P_i}{\sin \Delta\alpha} \cdot \sin \alpha_i, \\ y_i = \frac{P_i \cdot \sin\left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\Delta\alpha}{2}} + \frac{P_{i+1} - P_i}{\sin \Delta\alpha} \cdot \cos \alpha_i. \end{cases}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями для непрерывного случая изменения угла  $\alpha$ , получаем отличие, связанное с появлением в

первом слагаемом множителя  $\frac{1}{\cos \frac{\Delta\alpha}{2}}$ .

Появление его связано с тем, что контур наш будет представлять многоугольник и для случая окружности  $P_i = const$  получим:

$$x^2 + y^2 = \frac{P^2}{\cos^2 \frac{\Delta\alpha}{2}},$$

т.е. имеем правильный многоугольник, охватывающий окружность.

Последние выражения для расчета  $x_i$ ,  $y_i$  можно представить в симметричной форме относительно  $P_i$  и  $P_{i+1}$ , что позволяет минимизировать погрешности, связанные с ошибками экспериментального их определения:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2} \cdot \frac{\cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}} - \frac{P_{i+1} - P_i}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \sin\left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}\right), \\ y_i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2} \cdot \frac{\sin\left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}} + \frac{P_{i+1} - P_i}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\alpha_i + \frac{\Delta\alpha}{2}\right). \end{array} \right.$$

## **Глава 4. СИНТЕЗ И РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХМЕРНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ**

Синтез двухмерных цифровых фильтров отличается от синтеза одномерных. В одномерном случае задачи синтеза фильтра и его схемной реализации четко разделены. Сначала выполняется синтез фильтра, а затем с помощью соответствующих преобразований передаточной функции определяются коэффициенты, необходимые для построения конкретной схемной реализации.

В двухмерном случае ситуация совершенно иная из-за того, что многомерные полиномы в общем случае нельзя разложить на множители. Это значит, что нет возможности в общем случае менять форму произвольной передаточной функции для согласования ее с требованиями схемной реализации.

Если мы в состоянии реализовать только передаточные функции, разложимые на множители, то и метод синтеза должен приводить только к фильтрам этого класса.

### **4.1. КИХ-фильтры**

КИХ-фильтр (называется также нерекурсивным) – это фильтр, импульсный отклик которого содержит лишь конечное число ненулевых отсчетов. Такой импульсный отклик всегда абсолютно суммируем, и, следовательно, КИХ-фильтры всегда устойчивы.

Их работу достаточно легко понять как в одномерном, так и в многомерном случае.

БИХ-фильтр (рекурсивный фильтр) – это фильтр, входной и выходной сигналы которого удовлетворяют многомерному разностному уравнению конечного порядка. Такие фильтры могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Во многих случаях такие фильтры оказываются проще в реализации, чем аналогичные КИХ-фильтры. Однако синтез двухмерного рекурсивного фильтра радикально отличается от синтеза одномерного фильтра. Отчасти это связано с обес-

печением устойчивости, поскольку для этого требуются дополнительные меры.

Важное преимущество КИХ-фильтров заключается в возможности реализации их с чисто вещественными частотными откликами. Такие фильтры называются фильтрами с нулевой фазой. Название это условно, так как отклик может содержать отрицательные значения амплитуды на некоторых частотах, а это значит, что его фаза равна  $\pi$ ; к этому выражению надо относиться как к термину, говорящему об отсутствии мнимых составляющих.

Условие нулевой фазы можно записать:

$$H(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1, \omega_2). \quad (4.1)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим

$$h(n_1, n_2) = h^*(-n_1, -n_2). \quad (4.2)$$

КИХ-фильтр удовлетворяет этому условию, если центр его опорной области совпадает с началом координат. Фильтр с нулевой фазой в силу вещественности его частотного отклика упрощает процедуру его синтеза. Симметричность импульсного отклика фильтра можно использовать для уменьшения требуемого числа умножений.

## 4.2. Реализация КИХ-фильтров

### 4.2.1. Прямая свертка

Выходной сигнал любого ЛИС-фильтра можно получить из входного с помощью свертки по формуле скользящего суммирования:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1, k_2) \cdot x(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (4.3)$$

Импульсный отклик КИХ-фильтра содержит лишь конечное число ненулевых отсчетов, и, следовательно, конечны и пределы суммирования.

Пусть теперь опорная область фильтра:

$$(n_1, n_2): \quad 0 \leq n_1 < N_1, \quad 0 \leq n_2 < N_2,$$

тогда

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} h(k_1, k_2) \cdot x(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (4.4)$$

Фильтр с нулевой фазой и вещественным импульсным откликом обладает свойством:

$$h(n_1, n_2) = h(-n_1, -n_2),$$

т.е. симметрией относительно начала координат.

Если опорная область фильтра прямоугольна, а ее центр расположен в начале координат, то

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} h(k_1, k_2) \cdot x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \quad (4.5) \\ &= \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=+1}^{N_2} h(k_1, k_2) \cdot \left[ x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) + x(n_1 + k_1, n_2 + k_2) \right] \\ &+ \sum_{k_1=1}^{N_1} h(k_1, 0) \cdot \left[ x(n_1 - k_1, n_2) + x(n_1 + k_1, n_2) \right] + h(0, 0) \cdot x(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Вторая часть выражения (4.5), обозначенная как (4.6) требует практически в два раза меньше умножений и тот же самый объем сложений и ЗУ.

#### **4.2.2. Реализация КИХ-фильтров**

##### ***с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ)***

Реализация любого КИХ-фильтра возможна также с помощью дискретного преобразования Фурье. Этот подход особенно удобен при реализации фильтров высокого порядка, поскольку имеется ряд алгоритмов БПФ.

Имеем

$$w(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) ** h(n_1, n_2), \quad (4.7)$$

тогда в фурье-области

$$W(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1, \omega_2) \cdot H(\omega_1, \omega_2). \quad (4.8)$$

Пусть проведена дискретизация  $W(\omega_1, \omega_2)$  по прямоугольному растру объемом  $N_1 \times N_2$ :

$$W(k_1, k_2) = W(\omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1 = \frac{2\pi \cdot k_1}{N_1}, \omega_2 = \frac{2\pi \cdot k_2}{N_2}}, \quad (4.9)$$

тогда

$$W(k_1, k_2) = X(k_1, k_2) \cdot H(k_1, k_2). \quad (4.10)$$

Для выполнения  $(N_1 \times N_2)$ -точечных преобразований Фурье последовательностей  $X$  и  $h$  опорные области обеих этих последовательностей должны быть расширены и дополнены отсчетами с нулевыми значениями.

Реализация КИХ-фильтров с помощью ДПФ эффективна с точки зрения вычислений, но требует значительных объемов памяти. Кроме того, надо запомнить отсчеты отклика  $H(k_1, k_2)$  фильтра, что удваивает требуемый объем памяти.

### 4.2.3. Секционированная свертка

Недостаток использования ДПФ связан с необходимостью использования больших объемов ЗУ. Одним из методов снижения требования к объемам ЗУ является метод секционирования свертки. Суть их является в том, что операция свертки выполняется над секциями или блоками данных с использованием ДПФ. Ограничение размера секций уменьшает объем требуемой памяти, а использование ДПФ сохраняет вычислительную эффективность процедуры.

Простейший метод секционирования свертки носит название метода перекрытия с суммированием.

**Метод перекрытия с суммированием**

Разделим двухмерный массив  $x(n_1, n_2)$  на  $(N_1 \times N_2)$ -точечные секции, определив секцию с индексами  $(k_1, k_2)$  следующим образом:

$$x_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = \begin{cases} x(n_1, n_2), & k_1 \cdot N_1 \leq n_1 < (k_1 + 1) \cdot N_1 \\ & k_2 \cdot N_2 \leq n_2 < (k_2 + 1) \cdot N_2 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Опорные области секций не перекрываются, и все вместе покрывают всю опорную область массива  $x(n_1, n_2)$ , поэтому

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x_{k_1 k_2}(n_1, n_2) \quad (4.12)$$

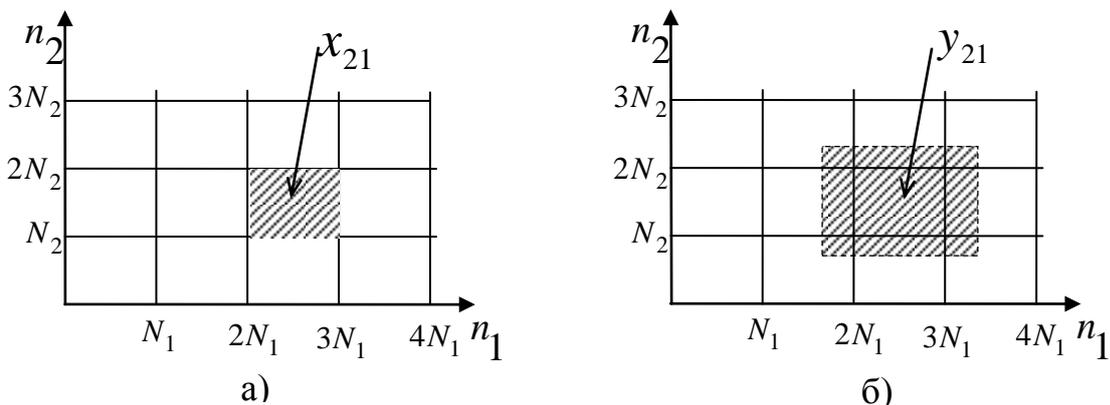


Рис. 4.1. Метод перекрытия с суммированием:

а – секция входной последовательности  $x_{21}(n_1, n_2)$ ,

б – опорная область результата свертки этой секции с  $h(n_1, n_2)$

В силу того, что операция дискретной свертки дистрибутивна:

$$\begin{aligned}
 y(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) ** h(n_1, n_2) = \left\{ \sum_{k_1} \sum_{k_2} x_{k_1 k_2}(n_1, n_2) \right\} ** h(n_1, n_2) = \\
 &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left\{ x_{k_1 k_2}(n_1, n_2) ** h(n_1, n_2) \right\} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} y_{k_1 k_2}(n_1, n_2).
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Выходная секция  $y_{k_1 k_2}(n_1, n_2)$  представляет собой результат свертки  $h(n_1, n_2)$  с секцией  $(k_1, k_2)$  последовательности  $x(n_1, n_2)$ .

Опорная область  $y_{k_1 k_2}(n_1, n_2)$  больше чем опорная область  $x_{k_1 k_2}(n_1, n_2)$ . Выходные секции перекрываются, хотя степень их перекрытия ограничена.

Другой разновидностью секционированной свертки является

### ***Метод перекрытия с накоплением***

Этот метод основан на том, что если размер секции существенно превышает размер опорной области  $h$ , то отсчеты  $Y$  в центре каждой (области) секции не перекрываются отсчетами из соседних секций.

Поэтому если при циклической свертке последовательности  $X$  с другой последовательностью  $h$ , имеющей гораздо меньшую опорную область, то только часть отсчетов циклической свертки будет испытывать эффект пространственного наложения. Остальные отсчеты бу-

дут совпадать с отсчетами линейной свертки. Расположение этих отсчетов на рис. 4.2.

Таким образом, если выполнить циклическую свертку  $(N_1 \times N_2)$ -точечной секции последовательности  $x(n_1, n_2)$  с  $(M_1 \times M_2)$ -точечным импульсным откликом с использованием  $(N_1 \times N_2)$ -точечного ДПФ, то результат этой свертки будет содержать область  $(N_1 - M_1 + 1) \times (N_2 - M_2 + 1)$  отсчетов идентичных линейной свертке  $y$ .

Если входные секции выбрать с перекрытием, то можно добиться того, что области совпадения будут примыкать друг к другу, то есть здесь требуется перекрытие входных областей в отличие от метода перекрытия с суммированием, где перекрываются входные секции.

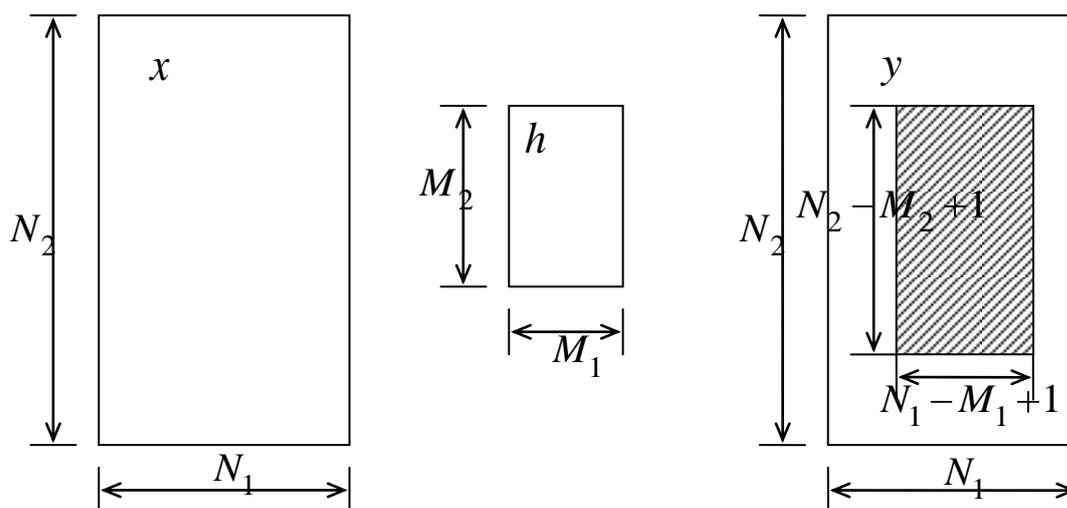


Рис. 4.2. Метод перекрытия с накоплением

Заштрихованная область содержит отсчеты, у которых циклическая свертка с периодом  $N_1 \times N_2$  и линейная свертка для последовательностей  $x$  и  $h$  дают идентичные результаты.

### 4.3. Синтез КИХ-фильтров с использованием окон

#### 4.3.1. Описание метода

Метод окон работает в пространственной области и направлен на аппроксимацию не идеального частотного, а идеального импульсного отклика.

Пусть  $i(n_1, n_2)$  и  $I(\omega_1, \omega_2)$  – импульсный и частотный отклики идеального фильтра, а  $h(n_1, n_2)$  и  $H(\omega_1, \omega_2)$  – импульсный и частотный отклики синтезированного фильтра. Ненулевые отсчеты  $h(n_1, n_2)$  расположены в некоторой опорной области  $R$ .

Метод окон заключается в следующем:

$$h(n_1, n_2) = i(n_1, n_2) \cdot w(n_1, n_2). \quad (4.14)$$

Последовательность  $w(n_1, n_2)$  носит название функции окна.

Ограничив  $w(n_1, n_2)$  некоторой областью  $R$ , мы ограничим  $h(n_1, n_2)$ , которое является произведением (4.14), а  $H(\omega_1, \omega_2)$  связано с  $I(\omega_1, \omega_2)$  соотношением свертки в частотной области:

$$H(\omega_1, \omega_2) = I(\omega_1, \omega_2) * * W(\omega_1, \omega_2),$$

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\Omega_1, \Omega_2) \cdot W(\omega_1 - \Omega_1, \omega_2 - \Omega_2) \cdot d\Omega_1 \cdot d\Omega_2 \quad (4.15)$$

где  $W(\omega_1, \omega_2)$  – фурье-преобразование функции окна,

$H$  – сглаженный идеальный частотный отклик  $I$  за счет  $W$ .

Часто в процессе синтеза фильтра его свойства описываются с помощью  $I(\omega_1, \omega_2)$ , а не  $i(n_1, n_2)$ . В этих случаях надо вычислить  $i(n_1, n_2)$  путем дискретизации  $I(\omega_1, \omega_2)$  и выполнить ОДПФ.

Обычно опорная область  $i(n_1, n_2)$  – бесконечна, поэтому мы получим искаженную  $i(n_1, n_2)$ .

Для уменьшения погрешности наложения необходимо брать опорную область ОДПФ в несколько раз больше, чем  $R$ , где  $R$  – размер окна.

#### 4.3.2. Выбор функции окна

Выбор обуславливается тремя требованиями:

1. Окно должно иметь опорную область  $R$ .
2. Отклик  $H(\omega_1, \omega_2)$  должен хорошо аппроксимировать  $I(\omega_1, \omega_2)$ , а  $W(\omega_1, \omega_2)$  должна хорошо аппроксимировать  $w(n_1, n_2)$ .
3. Если требуется получить отклик  $h(n_1, n_2)$  с нулевой фазой, то окно должно удовлетворять условиям:

$$w(n_1, n_2) = w^*(-n_1, -n_2). \quad (4.16)$$

Все эти требования совпадают с требованиями к одномерным окнам, поэтому одномерные служат основой для выбора двухмерных одним из двух методов.

1. Если окно имеет квадратную или прямоугольную опорную область, то

$$w_R(n_1, n_2) = w_1(n_1) \cdot w_2(n_2). \quad (4.17)$$

2. Окно Хуанга, предусматривает формирование окна с помощью дискретизации поверхности путем вращения вокруг своей оси одномерной непрерывной функции окна

$$w_C(n_1, n_2) = w(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}). \quad (4.18)$$

Формируемые таким образом окна характеризуются почти круговой опорной областью.

Фурье-спектр функции  $W_R$  является произведением фурье-спектров функций  $W_1$  и  $W_2$ :

$$W_R(\omega_1, \omega_2) = W_1(\omega_1) \cdot W_2(\omega_2). \quad (4.19)$$

Фурье-спектр функции  $W_R$  напоминает фурье-спектр, полученный путем вращения вокруг своей оси дискретизации получаемой поверхности одномерного фурье-спектра  $w(t)$ , хотя и зачастую отличается от него в деталях.

Если  $w(t)$ ,  $w_1(n_1)$ ,  $w_2(n_2)$  удовлетворяют всем нашим критериям, то  $W_C$  и  $W_R$  также будут удовлетворять тем же требованиям.

На практике наиболее популярны следующие окна.

1. Прямоугольное окно

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < \tau \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2. Окно Хэннинга

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot t}{\tau} \right) & \text{при } |t| < \tau \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Окно Кайзера

$$w(t) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - (t/\tau)^2})}{I_0(\alpha)} & \text{при } |t| < \tau \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где  $I_0(\alpha)$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; все эти окна являются непрерывными с опорной областью

$\tau, \tau^-$ . На рис. 4.3 представлен фурье-спектр типичного одномерного окна, нормированного в частотной области к единичной площади (интервал  $-\pi, \pi$ ).

Значительная часть энергии окна сосредоточена в низких частотах, а на высоких наблюдаются пульсации. Если окно имеет только нулевую частоту, то окно имеет амплитуду 1 и бесконечную область определения. Чем меньше величины  $\Delta$  и  $\delta$ , тем выше качество окна и тем точнее функция  $H(\omega_1, \omega_2)$  аппроксимирует отклик  $I(\omega_1, \omega_2)$ .

Однако если опорная область ограничена для окна и фиксирована, то уменьшение одной из этих величин будет приводить к увеличению другой. Единственный способ улучшения характеристик – это увеличение количества отсчетов в области  $R$ , т.е. увеличение размера окна.

Параметр  $\alpha$  в выражении для окна Кайзера служит для выбора компромиссного соотношения между  $\Delta$  и  $\delta$ . Наличие этого параметра делает окно Кайзера практически универсальным.

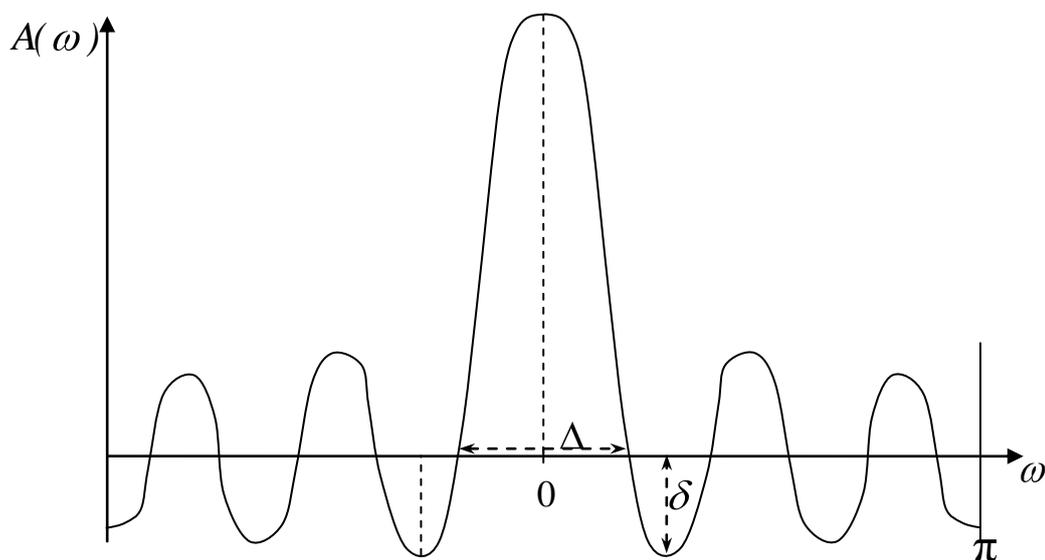


Рис. 4.3. Фурье спектр одномерной функции окна

### Пример синтеза

Требуется синтезировать фильтр (11×11) точек, аппроксимирующий идеальный частотный отклик:

$$I(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq (0,4\pi)^2, \\ 0 & \text{в остальных случаях } -\pi \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi. \end{cases} \quad (4.20)$$

Идеальный отклик чисто вещественный, следовательно, синтезируемый фильтр должен иметь нулевую фазу. Это означает, что начало координат должно быть центром симметрии в области  $R$ .

$$R = (n_1, n_2) : -5 \leq n_1, n_2 \leq 5. \quad (4.21)$$

Возьмем в качестве прототипа окно Кайзера и получим фильтр двухмерный методами (4.17) и (4.18), т.е. перемножением одномерных и вращением одномерного. Для окна, полученного вращением, фактической опорной областью будет круговая подобласть, входящая в  $R$ .

Выполнив обратное преобразование Фурье для  $I(\omega_1, \omega_2)$ , можно получить идеальный импульсный отклик  $i(n_1, n_2)$  (4.22).

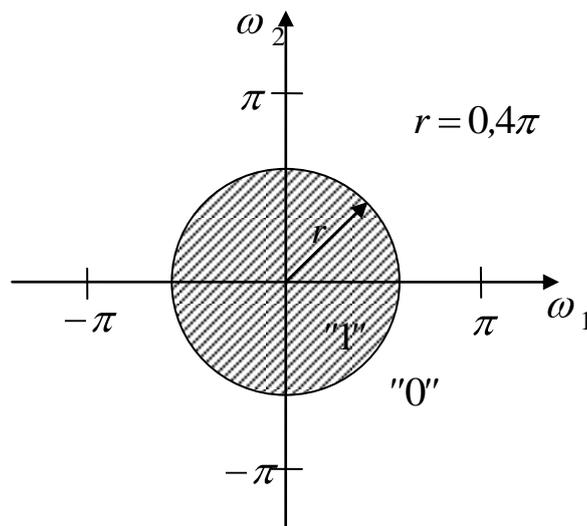


Рис. 4.4. Идеальный частотный отклик, рассматриваемого фильтра

Идеальный частотный отклик (рис. 4.4)

$$i(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{A=\omega_1^2+\omega_2^2 \leq (0,4\pi)^2} \exp(j \cdot \omega_1 \cdot n_1 + j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2 \quad (4.22)$$

Для упрощения вычислений заменим  $\omega_1$  и  $\omega_2$  переменными в полярных координатах, так как  $A$  – круговая область, совпадающая с началом координат.

$$\text{Определим } \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \theta = \arctg \frac{n_2}{n_1},$$

тогда

$$\begin{aligned} i(n_1, n_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \omega \cdot \exp \left[ j \cdot \omega \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot \cos(\theta - \varphi) \right] \cdot d\varphi \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r J_0 \left[ \omega \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \right] \cdot d\omega = \frac{r}{2\pi} \frac{J_1 \left( r \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \right)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  – функции Бесселя 1-го рода 0-го и 1-го порядков. Полученный импульсный отклик является дискретной функцией с круговой симметрией, сечение которой вдоль оси  $n_1$  имеет вид (рис. 4.5)

$$i(n_1, 0) = \frac{r}{2\pi \cdot n_1} J_1(n_1 \cdot r). \quad (4.24)$$

Идеальный импульсный отклик можно найти, выполнив ОПФ функции  $I(\omega_1, \omega_2)$ :

$$i(n_1, n_2) = \frac{0,2 \cdot J_1(0,4\pi \cdot \sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (4.25)$$

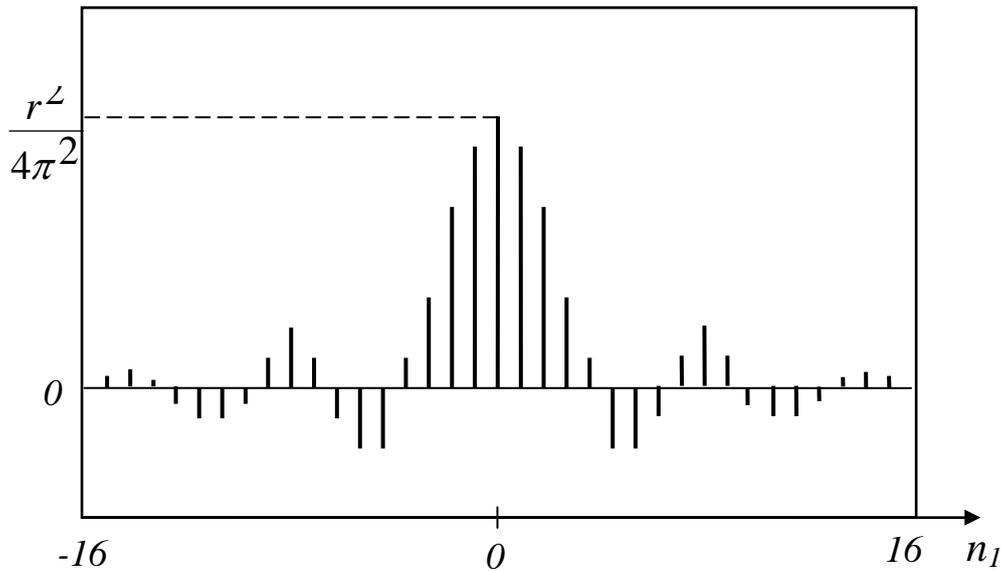


Рис. 4.5. Сечение фильтра  $i(n_1, 0) = \frac{r}{2\pi \cdot n_1} J_1(n_1 \cdot r)$

Выражения для окон будут иметь вид:

$$w_R(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \alpha \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{n_1}{5} \right)^2} \right] \cdot I_0 \left[ \alpha \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{5} \right)^2} \right]}{I_0^2 \left[ \frac{\alpha}{2} \right]}, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\text{при } |n_1| \leq 5, |n_2| \leq 5 \quad (4.26)$$

$$w_C(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \alpha \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{n_1^2 + n_2^2}{25} \right)^2} \right]}{I_0^2 \left[ \frac{\alpha}{2} \right]}, \text{ при } |n_1^2 + n_2^2| \leq 25 \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\text{при } |n_1^2 + n_2^2| \leq 25 \quad (4.27)$$

Умножив (4.25) на (4.26) или на (4.27) получим оба искомого фильтра  $h(n_1, n_2)$ .

Разрез частотного отклика фильтров по  $\omega_1$  изображен на рис. 4.6

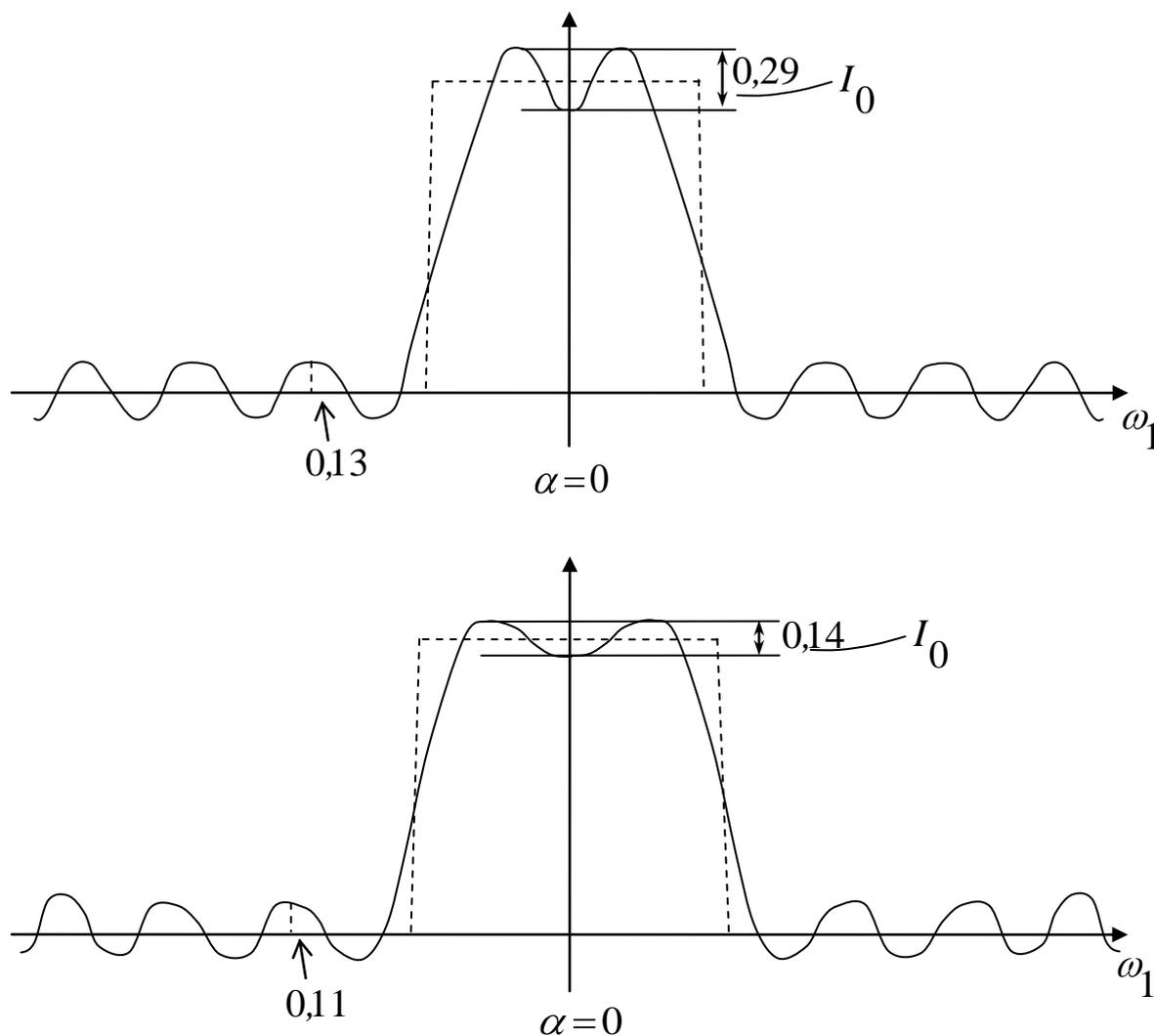


Рис. 4.6. Сечения фильтров,

полученных с использованием окон (4.26) и (4.27)

Частотные отклики синтезированных фильтров отличаются от идеального фильтра двумя признаками:

1. Отклик не является плоским не в полосе пропускания, ни в полосе непропускания.
2. Срез фильтра не является идеально вертикальным.

Первый недостаток обусловлен наличием боковых лепестков в фурье-спектре функции окна.

Второй связан с конечной шириной главного лепестка фурье-спектра.

Изменение параметра  $\alpha$  в выражении для окна Кайзера позволяет находить компромиссное решение для гладкости частотного отклика в полосах пропускания и непропускания и для вертикальности среза.

#### 4.4. Синтез оптимальных КИХ-фильтров

Частотные отклики фильтров с конечной опорной областью могут только приблизительно соответствовать требуемым частотным характеристикам. Обычно реальный частотный отклик отличается от заданного, на ошибку:

$$E(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2). \quad (4.28)$$

Естественно предположить, что оптимизировать  $H(\omega_1, \omega_2)$  можно минимизировав, один из следующих функционалов.

1.  $L_2$  – норма (среднеквадратичное значение):

$$E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)|^2 \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2, \quad (4.29)$$

2.  $L_p$  – норма:

$$E_p = \sqrt[p]{\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)|^p \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2}, \quad (4.30)$$

3.  $L_\infty$  – норма (норма Чебышева):

$$E_\infty = \max_{\omega_1, \omega_2} |E(\omega_1, \omega_2)|. \quad (4.31)$$

Фильтры, построенные с помощью каждого из трех критериев, могут существенно отличаться друг от друга.

Рассмотрим примеры, ограничившись рассмотрением фильтров с нулевой фазой (т.е. с вещественным откликом  $H(\omega_1, \omega_2)$ ).

Частотный отклик КИХ-фильтра с опорной областью  $R$  имеет вид:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in R} \sum h(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1 - j \cdot \omega_2 \cdot n_2). \quad (4.32)$$

Подставив (4.4.5) в (4.4.1) получим

$$E(\omega_1, \omega_2) = \left[ \sum_{(n_1, n_2) \in R} \sum h(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1 - j \cdot \omega_2 \cdot n_2) \right] - I(\omega_1, \omega_2). \quad (4.33)$$

Видно, что ошибка является линейной функцией неизвестных коэффициентов  $h(n_1, n_2)$  фильтра.

Для вещественного фильтра с нулевой фазой величины  $h(n_1, n_2)$  и  $h(-n_1, -n_2)$  равны, что позволяет записать (4.32) так:

$$H(\omega_1, \omega_2) = h(0, 0) + \sum_{(n_1, n_2) \in R'} \sum 2 \cdot h(n_1, n_2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_2) \quad (4.34)$$

где  $R'$  содержит практически вдвое меньше отсчетов, чем  $R$ .

Для выполнения линейной аппроксимации упростим (4.34), записав его в виде

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^F a(i) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2), \quad (4.35)$$

где  $i$  – индекс, определяющий порядок отсчетов  $(n_1, n_2)$  в  $R'$ ;

$F$  – число независимых отсчетов в импульсном отклике, т.е. число степеней свободы аппроксимации; коэффициенты  $a(i)$  – это просто значения  $a(i) = h(n_1, n_2)$  которые требуется найти.

Функции  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  – базисные функции аппроксимации, определяемые как:

$$\varphi_i(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 2 \cdot \cos(\omega_1 \cdot n_1 + \omega_2 \cdot n_2) & \text{при } (n_1, n_2) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{при } (n_1, n_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (4.36)$$

Такая запись позволяет накладывать линейные ограничения на коэффициенты импульсного отклика. Например, если мы хотим, чтобы  $a(i) = a(j)$ , то  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  заменяем в (4.35) на  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2) + \varphi_j(\omega_1, \omega_2)$  и опускаем член, содержащий  $a(j)$ . Это равносильно уменьшению степеней свободы на 1. Аналогично можно ввести ограничения  $a(i) = k$ , заменив  $I(\omega_1, \omega_2)$  на  $I(\omega_1, \omega_2) - k \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  и опустив член  $a(i)$  в сумме, определяющей  $H(\omega_1, \omega_2)$ , что равносильно уменьшению числа степеней свободы на 1. При введении ограничения  $a(i) - a(j) = k$  число степеней свободы уменьшается на 1.

$$a(i) + a(j) = k; \quad k - a(j) = a(i)$$

$$a(i) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) = (k - a(j)) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2)$$

$$a(i) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) + a(j) \cdot \varphi_j(\omega_1, \omega_2) =$$

$$= k \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) - a(j) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) + a(j) \cdot \varphi_j(\omega_1, \omega_2) =$$

$$= k \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) + a(j) \cdot (\varphi_j(\omega_1, \omega_2) - \varphi_i(\omega_1, \omega_2)),$$

тогда  $I(\omega_1, \omega_2)$  можно заменить на  $I(\omega_1, \omega_2) - k \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  и опустить член  $a(i)$  в сумме, определяющей  $H(\omega_1, \omega_2)$ , оставив

там новый член  $a(j) \cdot (\varphi_j - \varphi_i)$ , что равносильно снижению числа степеней свободы на 1.

Аналогично для симметричной ситуации:

$$\begin{aligned} k - a(i) &= a(j), \\ a(j) \cdot \varphi_j(\omega_1, \omega_2) &= (k - a(i)) \cdot \varphi_j(\omega_1, \omega_2) \\ a(i) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) + a(j) \cdot \varphi_j(\omega_1, \omega_2) &= \\ &= k \cdot \varphi_j(\omega_1, \omega_2) + a(i) \cdot (\varphi_i(\omega_1, \omega_2) - \varphi_j(\omega_1, \omega_2)), \end{aligned}$$

тогда  $I(\omega_1, \omega_2)$  можно заменить на  $I(\omega_1, \omega_2) - k \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  и опустить член  $a(j)$  в сумме, определяющей  $H(\omega_1, \omega_2)$ , что равносильно снижению числа степеней свободы на 1.

В качестве примера того, как можно уменьшить число степеней свободы, рассмотрим  $(2 \cdot N + 1) \times (2 \cdot N + 1)$ -точечный КИХ-фильтра с 8-кратной симметрией, которую можно обеспечить, при условии:

$$h(n_1, n_2) = h(\pm n_1, \pm n_2) = h(\pm n_2, \pm n_1).$$

Частотный отклик фильтра запишется в виде (4.35), причем

$$i = \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} + n_2 + 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq n_1 \leq N, \quad 0 \leq n_2 \leq n_1,$$

$$\varphi_i(\omega_1, \omega_2) = \cos(\omega_1 \cdot n_1) \cdot \cos(\omega_2 \cdot n_2) + \cos(\omega_1 \cdot n_2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot n_1),$$

$$F = \frac{(N + 1) \cdot (N + 2)}{2}.$$

#### 4.4.1. Синтез методом наименьших квадратов

Необходимо рассмотреть алгоритм выбора  $h(n_1, n_2)$ , при котором минимизируется ошибка  $E_2$  и некоторые связанные с ней функционалы ошибок.

Коэффициенты фильтра, минимизирующие  $E_2$ , можно получить с помощью известного метода окон, если взять функцию окна, постоянную в  $R$ :

$$E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega_1, \omega_2)|^2 \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2.$$

Используя теорему Парсеваля, можно  $E_2$  выразить в пространственной области:

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \left[ h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2) \right]^2 = \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in R} \left[ h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2) \right]^2 + \sum_{(n_1, n_2) \notin R} \left[ h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2) \right]^2 = \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in R} \left[ h(n_1, n_2) - i(n_1, n_2) \right]^2 + \sum_{(n_1, n_2) \notin R} i^2(n_1, n_2), \end{aligned}$$

так как 
$$\sum_{(n_1, n_2) \notin R} h(n_1, n_2) = 0. \quad (4.37)$$

Обе суммы положительны, и изменять можно только первую подбором коэффициентов фильтра  $h(n_1, n_2)$ , тогда  $E_2$  достигает минимума при

$$h(n_1, n_2) = \begin{cases} i(n_1, n_2) & \text{при } (n_1, n_2) \in R, \\ 0 & \text{при } (n_1, n_2) \notin R. \end{cases} \quad (4.38)$$

Таким образом, оптимальным с точки зрения  $E_2$  будет фильтр, совпадающий с  $i(n_1, n_2)$  в области  $R$  и отличающийся от него только за пределами области  $R$ .

В более общем случае, когда наложены линейные ограничения и частотный отклик описывается выражением (4.35), имеем

$$E_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^F a(i) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2) \right\}^2 \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2.$$

Для минимизации  $E_2$  необходимо найти производные по каждому  $a(k)$  и приравнять их к нулю, а затем решить полученные уравнения.

Производные  $\frac{\partial E_2}{\partial a(k)}$  – являются линейными функциями неизвестных коэффициентов, поэтому потребуются решение системы  $F$  линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^F a(i) \cdot \varphi_{ik} = I_k, \quad k = 1, 2, \dots, F, \quad (4.39)$$

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(\omega_1, \omega_2) \cdot \varphi_k(\omega_1, \omega_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2,$$

$$I_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\omega_1, \omega_2) \cdot \varphi_k(\omega_1, \omega_2) \cdot d\omega_1 \cdot d\omega_2. \quad (4.40)$$

Однако на практике часто выбирают функции  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  ортогональными и, следовательно,  $\varphi_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ , тогда решением (4.39) будут:

$$a(i) = \frac{I_i}{\varphi_{ii}}.$$

Мера ошибки  $E_2$  в равной степени учитывает ошибки на всех частотах. Однако фильтры с минимизацией  $E_2$  не всегда оказываются удовлетворительными из-за больших пульсаций в полосах пропускания и полосах непропускания. Кроме того, если зависимость  $I(\omega_1, \omega_2)$  сложна, то вычисление интеграла (4.40) может представить значительные трудности.

Частично указанные трудности можно устранить, если ошибку  $E_2$  заменить ошибкой,  $E_2'$ , имеющей вид

$$E_2' = \sum_m W_m \left[ H(\omega_{1m}, \omega_{2m}) - I(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \right]^2$$

Совокупность частот  $(\omega_{1m}, \omega_{2m})$ , называемых ограничивающими частотами, соответствует конечному числу дискретных позиций на двумерной частотной плоскости, а положительные числа  $W_m$  обозначают весовые коэффициенты.

При такой мере ошибки мы можем в тех областях частотной плоскости, где ошибка должна быть мала, увеличить плотность ограничивающих частот и/или увеличить их веса. На практике число ограничивающих частот должно в несколько раз превышать число степеней свободы.

Нахождение коэффициентов  $a(k)$ , минимизирующих  $E_2'$ , по-прежнему требует решения  $F$  линейных уравнений с  $F$  неизвестными:

$$\sum_{i=1}^F a(i) \cdot \varphi_{ik} = I_k, \quad k = 1, 2, \dots, F,$$

$$\varphi_{ik} = \sum_m W_m \cdot \varphi_i(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \cdot \varphi_k(\omega_{1m}, \omega_{2m}),$$

$$I_k = \sum_m W_m \cdot I(\omega_{1m}, \omega_{2m}) \cdot \varphi_k(\omega_{1m}, \omega_{2m}).$$

#### 4.4.2. Синтез КИХ-фильтров с нулевой фазой и равновеликими пульсациями

Нам из предыдущего известно, что ширины переходной полосы фильтра и величина ошибки аппроксимации в полосах пропускания и непропускания связаны таким образом, что улучшение одного параметра приводит к ухудшению другого. При заданной конфигурации полос пропускания и непропускания наименьшие пульсации в этих областях достигаются при синтезе фильтров с равновеликими пульсациями с минимизацией критерия ошибки Чебышева:

$$E_\infty = \max_{(\omega_1, \omega_2) \in K} |E(\omega_1, \omega_2) - I(\omega_1, \omega_2)|,$$

здесь  $K$  представляет собой комплексную область частотной плоскости, которая обычно выбирается так, чтобы она включала в себя полосы пропускания и непропускания вместе с их границами.

Рассматриваем КИХ-фильтр с нулевой фазой:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{(n_1, n_2) \in R} \sum h(n_1, n_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot n_1 - j \cdot \omega_2 \cdot n_2).$$

Как и раньше, в силу симметрии или других ограничений не все коэффициенты фильтра будут независимы.

Выделим независимые и запишем для них частотный отклик:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^F a(i) \cdot \varphi_i(\omega_1, \omega_2),$$

где базисные функции  $\varphi_i(\omega_1, \omega_2)$  вещественны.

Эти фильтры называются иногда минимаксными, поскольку для них минимизируется максимальное значение ошибки. Их называют

фильтрами с равновеликими пульсациями, так как функция ошибки  $E = H - I$  содержит много пиков или пульсаций одинаковой величины.

## Глава 5. МНОГОМЕРНЫЕ РЕКУРСИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Линейные системы, инвариантные к сдвигу, в общем случае реализуется с помощью разностных уравнений. Многомерные разностные уравнения представляют собой обобщение одномерных, но фактически они гораздо сложнее из-за ряда неопределенностей, таких как направление рекурсии и соотношение упорядоченности.

Вопросы устойчивости приобретают статус сложной для понимания проблемы. Необходимо рассмотреть вопросы многомерного  $Z$ -преобразования и вопросы устойчивости многомерных систем.

### 5.1. Разностные уравнения конечного порядка

Разностное уравнение – это неявное соотношение между входом  $X$  и выходом  $Y$  линейной инвариантной к сдвигу системы, имеющую вид

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \\ = \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot x(n_1 - r_1, n_2 - r_2). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если выходные отсчеты ЛИС-системы можно найти по значениям входных отсчетов с помощью конечного числа вычислений, то эти вычисления можно выразить в форме (5.1) с конечными пределами суммирования.

Последнее условие означает, что массивы коэффициентов  $a$  и  $b$  имеют конечные размеры. В этом случае можно говорить о конечности порядка уравнения.

Если  $b(0,0) \neq 0$ , то можно нормализовать коэффициенты, разделив обе части (5.1) на  $b(0,0)$ , тогда  $b(0,0) = 1$  без потери общности рассмотрения и позволит упростить ряд последующих выражений.

Порядок разностного уравнения является мерой протяженности опорной области массива  $b(k_1, k_2)$ . Чем выше порядок, тем больше степень сложности. Не существует точного определения порядка, поскольку массив  $b$  может иметь любую форму. Порядок  $b$  определяется численно лишь после того, как установлена форма массива  $b$ .

Если  $b$  имеет прямоугольную форму, то можно записать

$$\sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot x(n_1 - r_1, n_2 - r_2) \quad (5.2)$$

при этом порядок равен  $N_1 \times N_2$ .

Интересен класс уравнений порядка (ноль на ноль).

Для них  $b(k_1, k_2)$  состоит из одного отсчета  $b(0,0)$ , а для нормализованных можно записать:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot x(n_1 - r_1, n_2 - r_2). \quad (5.3)$$

Следовательно, выходной массив  $y(n_1, n_2)$  является сверткой входного массива и коэффициентов  $a(r_1, r_2)$ , а  $a(r_1, r_2)$  можно отождествить с импульсным откликом фильтра.

Так как  $a(r_1, r_2)$  содержит только конечное число ненулевых значений, видно, что разностное уравнение порядка (ноль на ноль) соответствует КИХ-фильтрам.

Разностные уравнения конечного порядка, отличного от нуля, соответствуют БИХ-фильтрам.

### ***5.1.1. Реализация ЛИС-систем с помощью разностных уравнений***

Разностные уравнения не только описывают ЛИС-системы, но и определяют алгоритмы вычислений при реализации этих систем, что видно из выражения (5.1), переписанного следующим образом:

$$\begin{aligned}
y(n_1, n_2) &= \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot x(n_1 - r_1, n_2 - r_2) - \\
&- \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \\
&(k_1, k_2) \neq (0, 0)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

В этой форме разностное уравнение описывает алгоритм определения  $y(n_1, n_2)$  в точке  $(n_1, n_2)$  при допущении, что в нашем распоряжении имеются необходимые входные отсчеты, а отсчеты  $y$  в правой части либо вычислены ранее, либо заданы в виде начальных условий.

В этом случае можно говорить о рекурсивно вычислимых системах. Является система вычислимой или нет зависит от опорной области массива коэффициентов  $b(k_1, k_2)$ , положения отсчетов выходного массива, заданные как начальные условия, и порядка, в котором необходимо вычислять выходные отсчеты.

### 5.1.2. Рекурсивная вычислимость

Выражение (5.4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
y(n_1, n_2) &= \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(n_1 - r_1, n_2 - r_2) \cdot x(r_1, r_2) - \\
&- \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \cdot y(k_1, k_2). \\
&(k_1, k_2) \neq (n_1, n_2)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Графическая интерпретация выражения (5.5) приведена на рис.5.1.

**Входная маска** (окно конечной площади), форма которого определена массивом  $a(r_1, r_2)$ , наложена на входное множество в

точке, определяемой значением  $(n_1, n_2)$ . Маской накрывается только конечное число входных отсчетов. Отсчеты  $x$ , которые накрыты маской, умножаются на соответствующие коэффициенты  $a(r_1, r_2)$  и результирующие произведения складываются. Синхронно выходная маска, определяемая массивом  $b(k_1, k_2)$ , перемещается над выходным массивом. Все выходные отсчеты, накрытые этой маской, за исключением одного  $(n_1, n_2)$ , взвешиваются с помощью коэффициентов  $b(k_1, k_2)$ , складываются и вычитаются из суммы, полученной с помощью входной маски, в результате получается значение  $y(n_1, n_2)$ . Это число заносится в выходной массив, обе маски перемещаются в новое положение, и процесс повторяется (рис 5.1).

То место, где находится на выходной маске точка  $(n_1, n_2)$ , обведено отверстием в маске, показывающим, что данный отсчет не используется в вычислениях и на его место надо поместить вычисленное значение.

Для вычисления значения конкретного выходного отсчета, выходная маска должна накрывать только известные значения отсчетов, за исключением вычисляемого. Это означает, что определенные отсчеты следует вычислять ранее других. Если не существует способа упорядочивания, позволяющего последовательно вычислить выходные данные по набору начальных условий, система не является рекурсивно вычислимой.

Если имеется несколько различных способов упорядочивания, то имеется выбор, и возможно некоторые из них окажутся лучше других. Количество возможных способов упорядочивания зависит как от формы выходной маски, так и от положения выходного отсчета в этой маске.

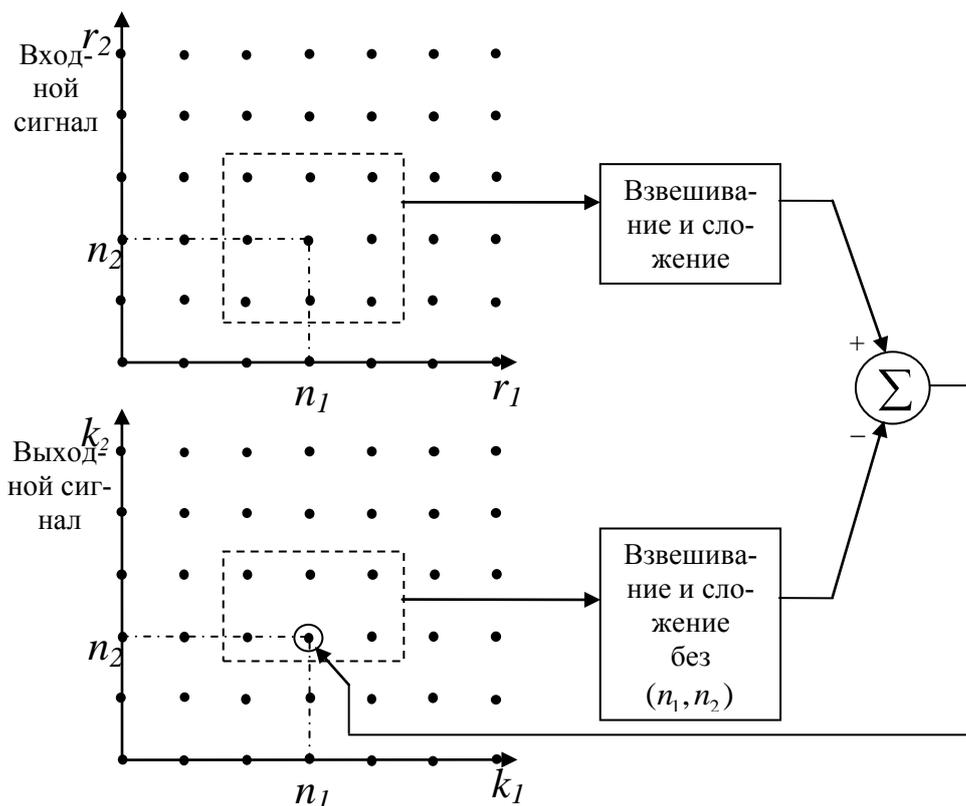


Рис. 5.1. Использование входной и выходной масок для последовательного вычисления выходных отсчетов рекурсивной ЛИС-системой

Простейшим примером двумерной выходной маски, позволяющей провести рекурсивное вычисление выходных данных, является фильтр первого квадранта, или «каузальный фильтр».

В этом случае коэффициенты  $b(k_1, k_2)$  имеют ненулевые значения в конечной области: 
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k_1 \leq N_1 \\ 0 \leq k_2 \leq N_2 \end{array} \right\}.$$

Форма выходной маски представлена на рис. 5.2.

Если даны начальные условия в виде буквы  $L$ , обозначенные на рисунке  $\circ$ , то выходная маска может перемещаться вверх столбец за столбцом и при этом выполняются условия рекурсии. Этот путь не является единственным. Возможно движение вдоль строк или сканирование по диагонали. В общем случае эта маска скользит вдоль лю-

бого семейства параллельных прямых при условии, что они имеют отрицательный наклон (рис. 5.3).

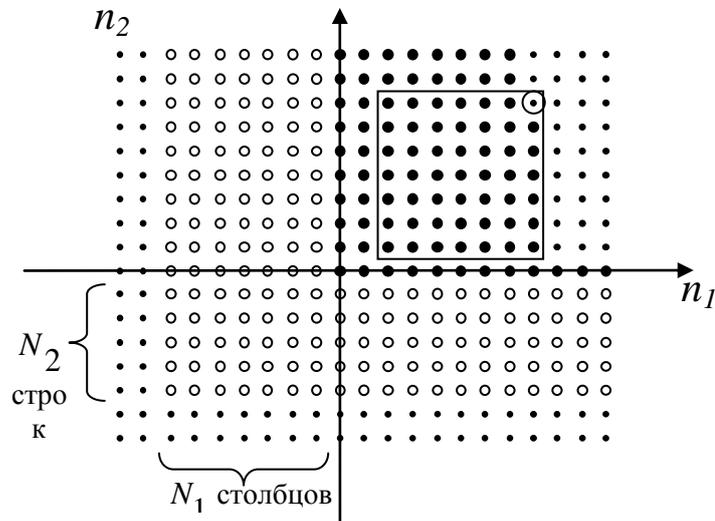


Рис. 5.2. Выходная маска размером  $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$  точек, соответствующая рекурсивно вычисляемому фильтру первого квадранта.

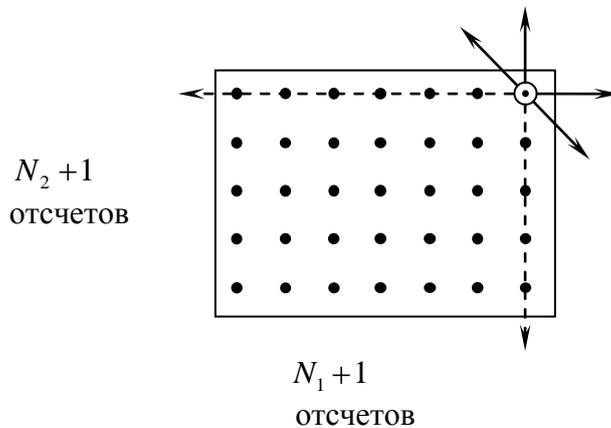


Рис. 5.3. Допустимые направления рекурсии для выходной маски первого квадранта (пунктир – недопустимые направления рекурсии)

При любом из направлений рекурсии для вычисления одних и тех же значений выполняются одни и те же арифметические операции, меняется только порядок вычисления выходных значений.

На рис. 5.4 показаны маски, не допускающие рекурсивное вычисление, хотя, как и маска (рис. 5.3), имеют прямоугольную форму.



Рис. 5.4. Маски,  
не позволяющие проводить рекурсивные вычисления

Однако маска с отверстием в углу не является единственно возможной для рекурсивно вычислимой системы, например несимметричная маска для несимметричного полуплоскостного фильтра (рис 5.5).

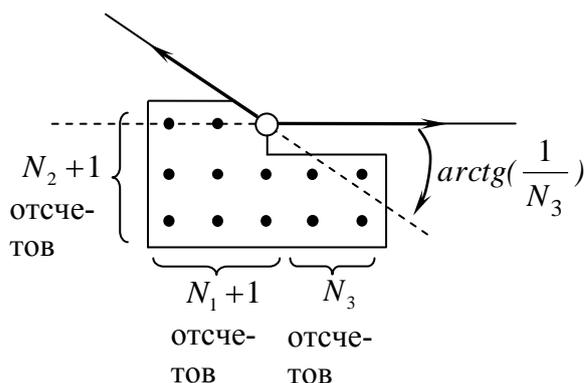


Рис. 5.5. Допустимые направления рекурсии  
для несимметричной полуплоскостной маски,  
которые показаны сплошными линиями

Этот фильтр имеет импульсный отклик, простирающийся на сектор плоскости  $(n_1, n_2)$ , имеющий угол меньше  $180^\circ$ :

$$\left(180^\circ - \arctg\left(\frac{1}{N_3}\right)\right).$$

Естественное, но не единственное направление для вычисления отсчетов с этой маской состоит в перемещении вдоль каждой строки слева направо, начиная со строки, находящейся непосредственно над

начальными условиями, и повторяя эту процедуру вверх строка за строкой.

Начальные условия, необходимые для этого конкретного несимметричного полуплоскостного фильтра (НПП-фильтра), приведены на рис. 5.6. Заметим, что форма зоны начальных условий зависит от порядка фильтра. НПП-фильтры можно обобщить с помощью отражения или вращения выходной маски, а также комбинации этих операций.

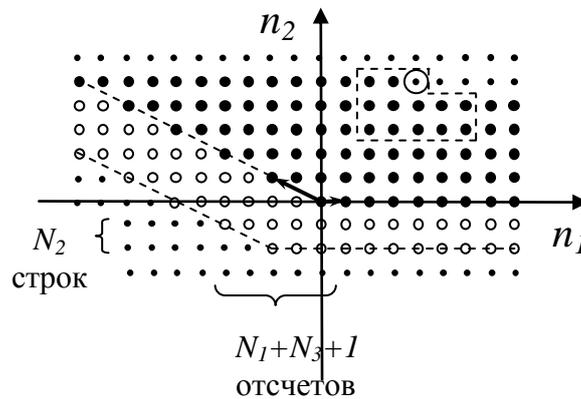


Рис. 5.6. Выходная маска, соответствующая рекурсивно вычисляемому НПП-фильтру (светлые кружки – набор начальных значений)

НПП-фильтр является обобщением фильтра одного квадранта и тесно связан с ним.

Любой НПП-фильтр можно отобразить на фильтр одного квадранта с помощью линейного отображения, введенного в п. 1.2.8, например, маску (рис. 5.5) можно отобразить в маску фильтра одного квадранта преобразованием

$$m_1 = n_1 + N_3 \cdot n_2; \quad m_2 = n_2,$$

которое приводит к маске первого квадранта (рис. 5.7).

**Граничные векторы области:**

$$m_1 = n_1 + N_3 \cdot n_2,$$

$$m_2 = n_2.$$

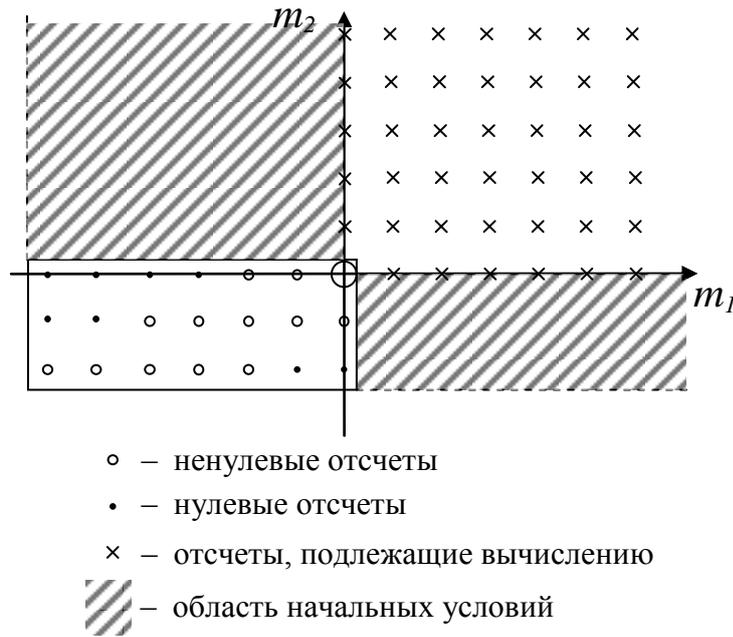


Рис. 5.7. Маска одного квадранта

$$\overline{N}_1 = \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{N}_2 = \begin{pmatrix} N_{12} \\ N_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = N_{11} \cdot N_{22} - N_{12} \cdot N_{21} \neq 0$$

$$m_1 = N_{22} \cdot n_1 - N_{12} \cdot n_2$$

$$m_2 = -N_{21} \cdot n_1 + N_{11} \cdot n_2$$

0 2	1 2	2 2		
0 1	1 1	2 1	3 1	4 1
0 0	1 0	2 0	3 0	4 0

2	b=0	b=0	b=0	b=0	b(0,2)	b(1,2)	(2,2)
1	b=0	b=0	b(0,1)	b(1,1)	b(2,1)	b(3,1)	b(4,1)
0	b(0,0)	b(1,0)	b(2,0)	b(3,0)	b(4,0)	b(5,0)	b(6,0)
	0	1	2	3	4	5	6

0)	1)	2)	3)	4)
$n_1 = 0$	$n_1 = 0$	$n_1 = 0$	$n_1 = 1$	$n_1 = 1$
$n_2 = 0$	$n_2 = 1$	$n_2 = 2$	$n_2 = 0$	$n_2 = 1$
$m_1 = 0$	$m_1 = 0 + 2 = 2$	$m_1 = 0 + 4 = 4$	$m_1 = 1$	$m_1 = 3$
$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$
5)	6)	7)	8)	9)
$n_1 = 2$	$n_1 = 1$	$n_1 = 2$	$n_1 = 2$	$n_1 = 3$
$n_2 = 2$	$n_2 = 2$	$n_2 = 0$	$n_2 = 1$	$n_2 = 0$
$m_1 = 2 + 4 = 6$	$m_1 = 5$	$m_1 = 2$	$m_1 = 4$	$m_1 = 3$
$m_1 = 2$	$m_1 = 2$	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 0$
10)	11)	12)		
$n_1 = 3$	$n_1 = 4$	$n_1 = 4$		
$n_2 = 1$	$n_2 = 0$	$n_2 = 1$		
$m_1 = 5$	$m_1 = 4$	$m_1 = 6$		
$m_1 = 1$	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$		

### 5.1.3 Граничные условия

Перейдем теперь к выбору граничных условий, при этом надо проявлять осторожность. Нельзя произвольно выбирать граничные условия, если мы хотим иметь линейную инвариантную к сдвигам систему, которая удовлетворяет условию

$$T [y \cdot x(n_1, n_2)] = a \cdot T [x(n_1, n_2)]$$

при всех значениях параметра  $a$ , включая  $a = 0$ .

Это означает, что откликом на нулевой входной сигнал будет нулевой выходной. Нельзя выбрать начальные условия так, чтобы нарушалось это условие, а система оставалась бы линейной.

Единственное явное условие, которое можно приписать граничным условиям линейной системы – это нулевое значение.

Если задано, что линейность требует равенства нулю всех граничных значений, где должны быть расположены эти отсчеты? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к свойству инвариантности к сдвигу.

Рассмотрим для примера неустойчивое разностное уравнение:

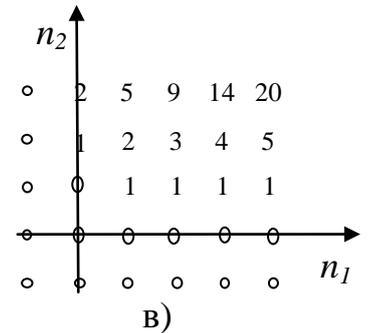
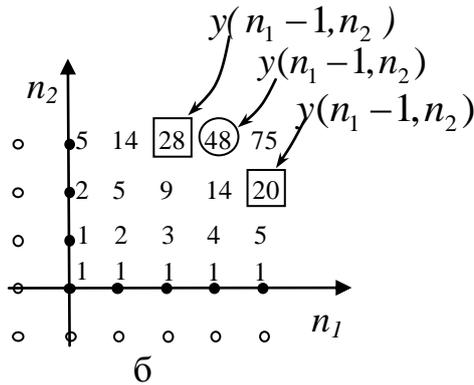
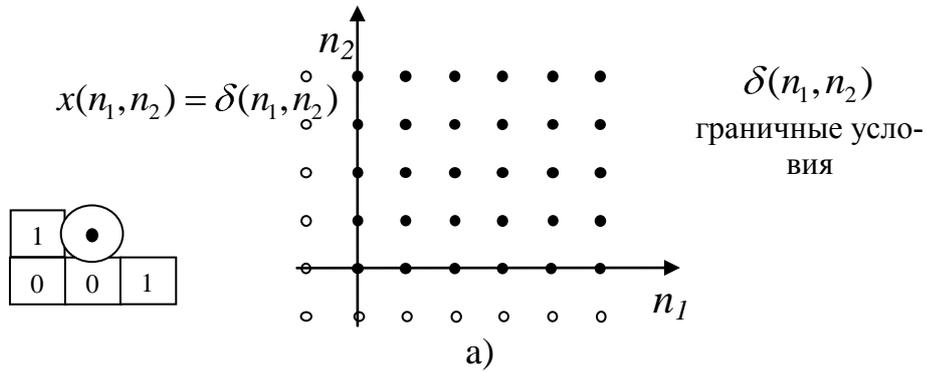
$$y(n_1, n_2) = y(n_1 - 1, n_2) + y(n_1 + 1, n_2 - 1) + x(n_1, n_2).$$

Рассмотрим примеры фильтрации пары идентичных входов с двумя наборами граничных условий, изображенных на рис. 5.8 и 5.9.

В зависимости от начальных условий при изменении одного и того же входного сигнала получаем различные отклики, причем на рис. 5.8 имеем неинвариантную к сдвигу систему, а на рис. 5.9 инвариантную к сдвигу. Интересно, в чем разница между двумя этими случаями?

Если мы имеем дело с ЛИС-системой, то выходная последовательность  $y(n_1, n_2)$  является результатом свертки входной последовательности и импульсного отклика системы. Если обозначить  $R_y$  – опорную область  $y(n_1, n_2)$ , то  $y(n_1, n_2) = 0$ ,  $(n_1, n_2) \notin R_y$ .

Это выражение показывает, как следует выбирать граничные условия. Если они выбраны так, что обращают некоторые отсчеты внутри  $R_y$  в нуль, как на рис. 5.8, в то время когда свертка дает значения этих отсчетов, отличные от нуля, то система становится неинвариантной к сдвигу.



$$x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Рис. 5.8. Примеры фильтрации идентичных входов с

L образными граничными условиями:

а – граничные условия (° – нулевое значение),

б – отклик на  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$ ,

в – отклик на  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1 - 1, n_2 - 1)$ .

Для фильтров конечного порядка достаточно определить граничные условия в зоне конечной ширины, имеющей форму буквы V. Зона граничных условий должна быть вне области  $R_y$ , в то время как точное значение ширины зоны и ориентация буквы V зависят от формы выходной маски.

$$x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$$

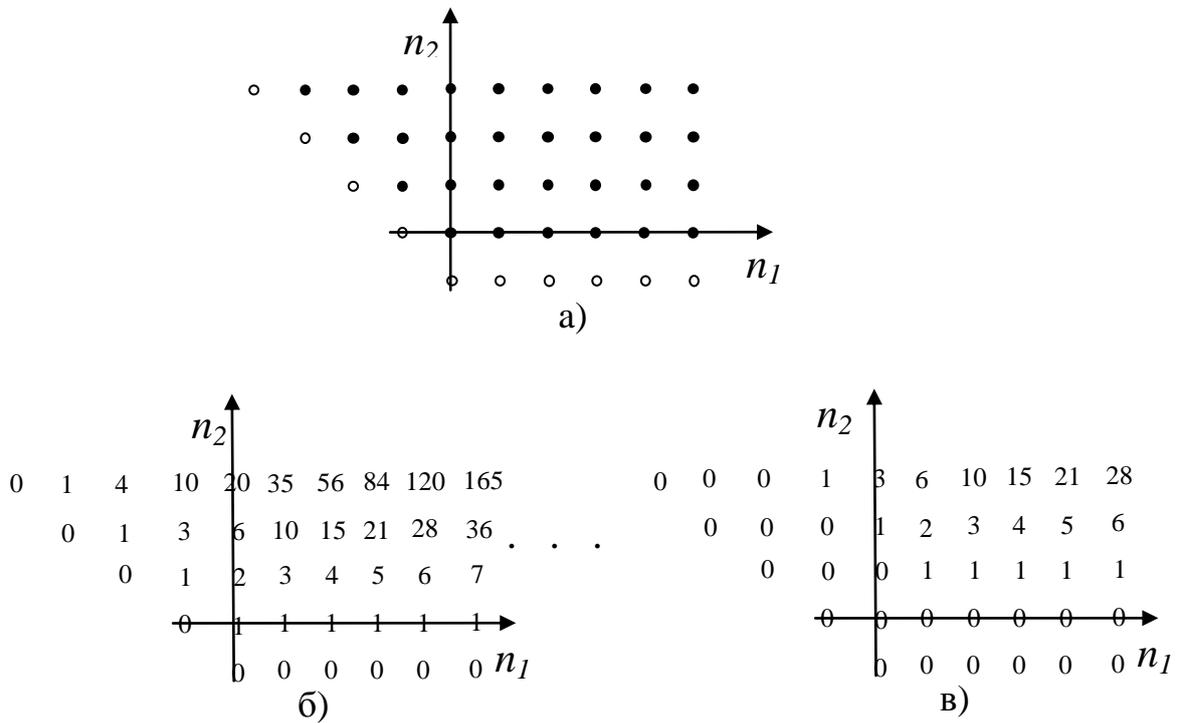


Рис. 5.9. Примеры фильтрации идентичных входов с V образными граничными условиями:

а – другой набор граничных условий для того же разностного уравнения

б – отклик на  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$

в – отклик на  $x(n_1, n_2) = \delta(n_1 - 1, n_2 - 1)$

Для несимметричной полуплоскостной маски инвариантность к сдвигу требует, чтобы зона граничных условий была похожа на ту, которая показана на рис. 5.6; т.е. представляет собой тупой угол, примыкающий к началу координат. Поэтому при фильтрации последовательности, расположенной в первом квадранте, приходится проводить вычисления отсчетов и во втором квадранте, что ограничивает использование НПП-фильтров.

Иногда полезно использовать ненулевые граничные условия, но при этом результирующая система не будет ни линейной, ни инвариантной к сдвигу.

#### 5.1.4. Упорядочивание вычислений выходных отсчетов

В предыдущих разделах было показано, что существенная разница между одномерными и  $M$ -мерными разностными уравнениями состоит в порядке, в котором могут быть вычислены выходные отсчеты. В одномерном случае возможен только единственный случай упорядочивания выходных отсчетов.

Однако в двумерном случае имеется несколько путей вычисления выходных отсчетов. Поэтому, вычисления являются лишь частично упорядоченными (рис. 5.10). Каждый выходной отсчет соответствует вершине графа.

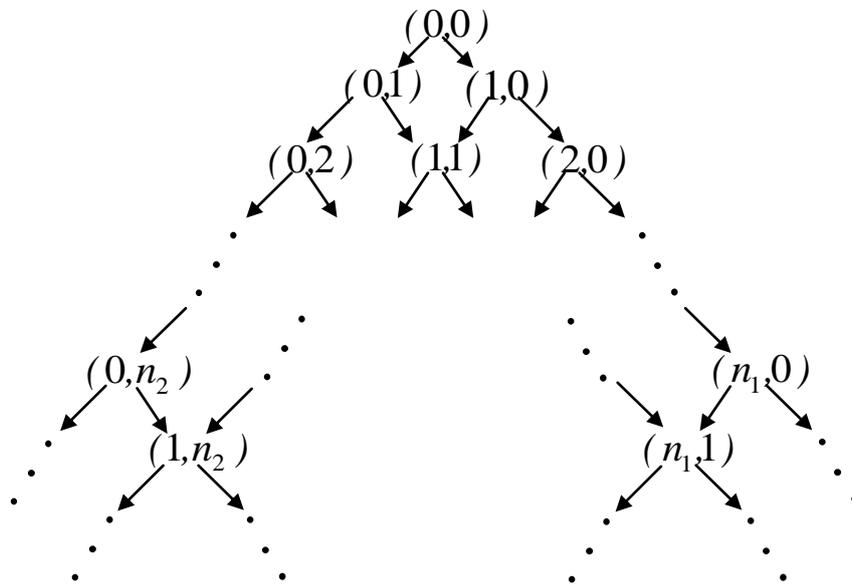


Рис. 5.10. Граф упорядочивания для рекурсии в первом квадранте

Порядок вычисления отсчетов кроме приведенного графа может быть определен с помощью функции отображения индексов

$$n = I(n_1, n_2),$$

которая при наличии двух пар индексов  $(n_1, n_2)$  и  $(n'_1, n'_2)$  работает следующим образом:

$$n = I(n_1, n_2), \quad n' = I(n'_1, n'_2),$$

если  $n < n'$ , то отсчет  $(n_1, n_2)$  должен быть вычислен раньше отсчета  $(n'_1, n'_2)$ .

Пусть мы вычисляем отсчеты первого квадранта как на (рис 5.10) в диапазоне  $\llbracket 0, N_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, N_2 - 1 \rrbracket$ .

Для вычисления отсчетов по столбцам можно использовать функцию отображения индексов:

$$n = I(n_1, n_2) = N_2 \cdot n_1 + n_2, \quad (5.6)$$

начиная с  $(0,0)$  и кончая  $(0, N_2 - 1)$ , затем, начиная с  $(1,0)$  и кончая  $(1, N_2 - 1)$ , и т.д.

Аналогично по строкам:

$$n = I(n_1, n_2) = n_1 + N_1 \cdot n_2 \quad (5.7)$$

Или еще один из возможных вариантов построения функции отсчетов:

$$n = \frac{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{2} + n_1 \quad (5.8)$$

Эта функция порождает такой порядок индексов:

$(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), \dots$ ,

и позволяет вычислять выходные значения вдоль диагоналей:

$$(n_1 + n_2 = \text{const}).$$

Однако выбор одного из видов функции отсчетов зависит от ситуации, т.е. от вида входной и выходной масок и от имеющегося оборудования.

**Пример** Пусть у нас есть необходимость реализовать фильтр первого порядка с квадратной областью  $N \times N$  и с квадратной точечной выходной маской  $(3 \times 3)$  и с точечной входной маской  $(1 \times 1)$ .

При реализации упорядочивания «столбец за столбцом» необходимо хранить в буферной памяти  $2N + 2$  выходных отсчетов. Если выходные отсчеты поступают столбец за столбцом, то их хранить не нужно.

Для вычисления  $N^2$  выходных значений требуется  $9N^2$  умножений, причем 8 умножений в выходной маске и одно для нормирования выходного значения на каждую выходную точку (рис. 5.11).

При упорядочивании «диагональ за диагональю» необходимо помнить четыре вычисленных диагонали и при этом занести в память максимум  $4N - 4$  выходных отсчета. Хотя эта реализация требует большего объема памяти, чем реализация упорядочивания «столбец за столбцом», ее важное преимущество состоит в том, что выходные отсчеты вдоль любой диагонали можно вычислять независимо.

Причем все отсчеты вдоль диагонали могут быть вычислены одновременно, и хотя по-прежнему надо вычислять  $9N^2$  умножений, но при этом можно использовать  $N$  параллельных процессоров.

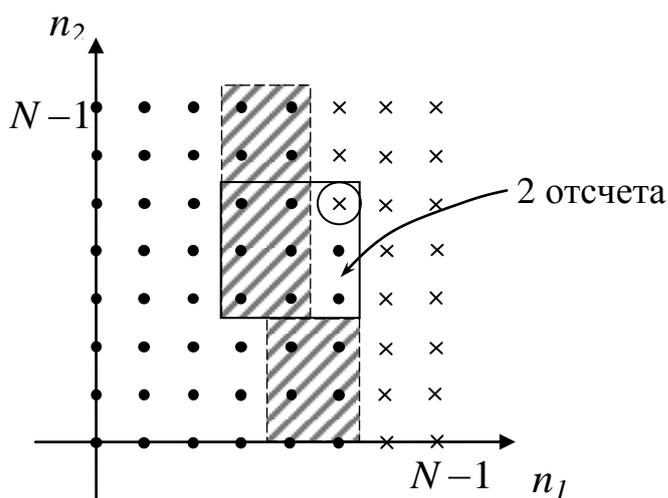


Рис. 5.11. Пример рекурсии по столбцам: (маска  $(3 \times 3)$ )

Таким образом, увеличение объема буферной памяти в этом случае позволяет выполнять параллельные вычисления и значительно сокращает время фильтрации. Пример выполнения такой операции приведен на рис 5 12. Видно, что для изображенного массива может выполняться вычислительная процедура с использованием шести процессоров одновременно.

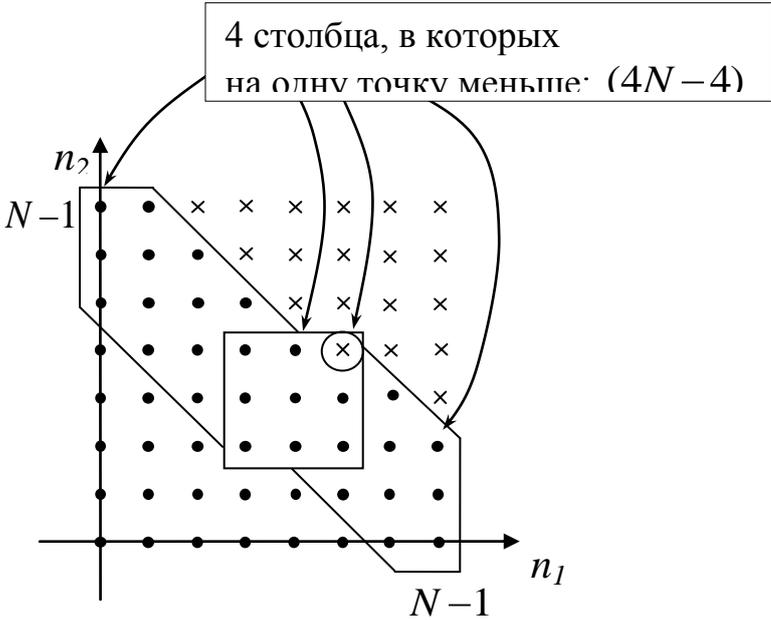


Рис. 5.12. Пример рекурсии по диагоналям: (маска  $(3 \times 3)$ )

**5.2. Многомерное z-преобразование**

Рассмотрение отклика ЛИС-систем на синусоидальное возбуждение естественным образом приводит к преобразованию Фурье.

Z-преобразование является обобщением преобразования Фурье, позволяющим исследовать экспоненциальные входные сигналы. Эти преобразования имеют много общего, но в способах их применения имеются и отличия.

Преобразование Фурье используется для описания сигналов и воздействия систем на эти сигналы.

Z-преобразование используется для описания самих систем и обеспечивает дополнительные средства обращения с разностными уравнениями и необходимо при анализе устойчивости фильтров. Это требует более полного изучения z-преобразования для решения указанных задач.

### 5.2.1. Передаточная функция

Экспоненты вида  $x(n_1, n_2) = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}$  являются собственными функциями двумерной ЛИС-системы.

Это можно показать, описав выходной массив с помощью свертки

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} z_1^{n_1 - k_1} \cdot z_2^{n_2 - k_2} \cdot h(k_1, k_2) = \\ &= z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2} = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \cdot \\ &\cdot H_z(z_1, z_2), \end{aligned} \tag{5.9}$$

где

$$H_z(z_1, z_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2} \quad \text{— является}$$

собственным значением, соответствующим собственной функции  $z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}$ . Ее называют передаточной функцией или системной функцией системы. Как и импульсный отклик, она полностью описывает ЛИС-систему.

В общем случае сумма в выражении (5.9) может не сходиться для всех значений комплексных переменных  $z_1$  и  $z_2$ , но если

фильтр устойчив, она будет сходиться при  $z_1 = e^{j\omega_1}$ ,  $z_2 = e^{j\omega_2}$ .

Для этих значений  $z_1$  и  $z_2$  передаточная функция становится частотным откликом, поскольку

$$H_z(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H(\omega_1, \omega_2). \quad (5.10)$$

### 5.2.2. Z-преобразование

Определим формально двухмерное Z-преобразование дискретного массива  $X$  в виде

$$X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \cdot z_1^{-n_1} \cdot z_2^{-n_2}, \quad (5.11)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – некоторые комплексные переменные.

При таком определении видно, что передаточная функция является Z-преобразованием импульсного отклика системы.

Z-преобразование, в отличие от преобразования Фурье, базируется не на функциях  $e^{-j\omega_1 n_1} \cdot e^{-j\omega_2 n_2}$ , а на функциях  $(\cdot \cdot e^{j\omega_1})^{-n_1} \cdot (\cdot \cdot e^{j\omega_2})^{-n_2}$ , таким образом, видно, что Z-преобразование можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье по функциям с  $r_1$  и  $r_2$ , отличными от 1.

#### Преобразование Фурье

Базовые функции:  $W = e^{j\omega}$

Прямое:  $W^{-n} = e^{-j\omega n}$

Обратное:  $W^n = e^{j\omega n}$

Многомерное:  $W^{-n_1}W^{-n_2} = e^{-j\omega_1 n_1} \cdot e^{-j\omega_2 n_2}$

### ***Z-преобразование***

Базовые функции:  $W = r \cdot e^{j\omega}$

Прямое:  $W^{-n} = r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$

Обратное:  $W^{n-1} = r^{n-1} \cdot e^{j\omega(n-1)}$

Многомерное:

$$W^{-n_1}W^{-n_2} = r^{-n_1} \cdot e^{-j\omega_1 n_1} \cdot r^{-n_2} \cdot e^{-j\omega_2 n_2}$$

При  $z_1 = e^{j\omega_1}$ ,  $z_2 = e^{j\omega_2}$  **Z**-преобразование переходит в преобразование Фурье.

Для удобства назовем поверхность в **Z**-пространстве, описываемую функциями  $z_1 = e^{j\omega_1}$ ,  $z_2 = e^{j\omega_2}$ , двухмерной единичной поверхностью или единичной биокружностью.

Сумма (5.11) необязательно сходится при всех  $z_1$  и  $z_2$ . Значения  $z_1$  и  $z_2$ , при которых **Z**-преобразование абсолютно сходится, составляют область сходимости или область аналитичности в

$(z_1, z_2)$ -гиперплоскости. Внутри этой области сходимости функция  $X_z(z_1, z_2)$  является аналитической функцией.

*Область сходимости* состоит из точек  $(z_1, z_2)$ , для которых выполняется:

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |x(n_1, n_2)| \cdot |z_1|^{-n_1} \cdot |z_2|^{-n_2} = S_1 < \infty,$$

что означает  $|X_z(z_1, z_2)| < \infty$ .

Лежит или не лежит точка  $(z_1, z_2)$  в области сходимости, зависит только от величин  $|z_1|, |z_2|$ , а не фазовых углов комплексных переменных.

Следовательно, в одномерном случае область сходимости  $Z$ -преобразования представляет собой кольцо (рис. 5.14).

Для одномерного  $Z$ -преобразования имеется пространство (рис. 5.13).

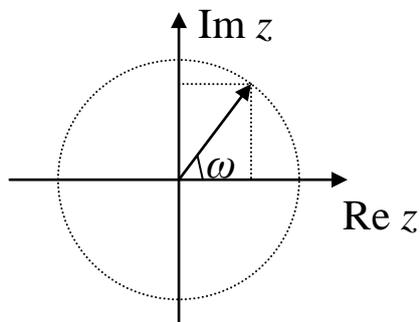


Рис. 5.13

Если  $z = e^{j\omega}$ , то эти точки принадлежат единичной окружности. В двухмерном случае имеем четырехмерное пространство:

$$\text{Im } z_1; \text{Re } z_1; \text{Im } z_2; \text{Re } z_2.$$

Область сходимости Z-преобразования одномерной последовательности (рис. 5.14):

а) – Кольцо в координатах  $(\text{Im } [z], \text{Re } [z])$ ,

б) – Эквивалентное представление кольца в виде отрезка прямой линии в координатах  $|z|$ ; возможно, поскольку значение фазового угла на сходимость не влияет.

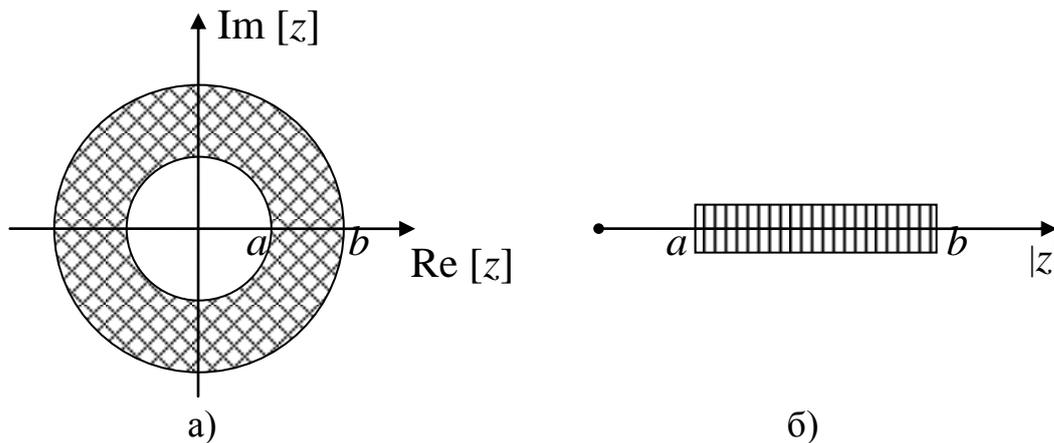


Рис. 5.14. Область сходимости Z-преобразования одномерной последовательности; двумерный аналог **область Рейнхардта–R**

Двухмерным аналогом кольца является **область Рейнхардта–R**.

Если точка  $(z_1, z_2)$  лежит в области R, точки  $(e^{j\mu} \cdot z_1, e^{j\nu} \cdot z_2)$  должны тоже лежать в области R для всех действительных  $\mu$  и  $\nu$ . Область R для двухмерного Z-преобразования является четырехмерной фигурой, она может быть полностью опре-

делена двумерной фигурой, поскольку значения фазовых углов на сходимость не влияют, а она полностью определяется значениями  $|z_1|, |z_2|$  (рис. 5.15).

Для упрощения последующих построений область сходимости показана в координатах  $\ln|z_1|$  и  $\ln|z_2|$ . Единичная окружность соответствует началу координат в плоскости  $(\ln|z_1|, \ln|z_2|)$ .

Как и в одномерном случае, определение z-преобразования последовательности является полным и определенным только при определении области сходимости. Поэтому целесообразно рассмотреть несколько примеров типичных областей сходимости, необходимых в практической работе, соотнесенных с опорными областями последовательности  $x(n_1, n_2)$ .

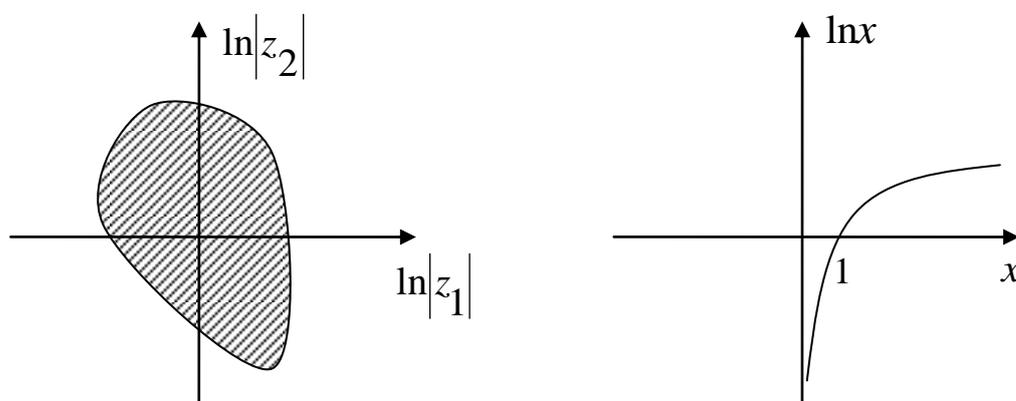


Рис. 5.15. Графическое представление двумерной области сходимости

### ***Последовательность с конечной опорной областью***

Для ограниченной на плоскости опорной области некоторой последовательности Z-преобразование можно записать в виде

$$X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_1=K_1}^{M_1} \sum_{n_2=K_2}^{M_2} x(n_1, n_2) \cdot z_1^{-n_1} \cdot z_2^{-n_2} \quad (5.12)$$

Поскольку пределы суммирования и сами суммируемые величины конечны, поэтому  $Z$ -преобразование сходится для всех конечных значений  $z_1$  и  $z_2$  за исключением точек  $z_1 = 0$  или  $z_2 = 0$ .

***Последовательность с опорной областью в виде квадранта***

Речь идет о физически реализуемых последовательностях, равных нулю за пределами первого квадранта.

Для последовательности этого класса двухмерное  $Z$ -преобразование можно записать:

$$X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} x(n_1, n_2) \cdot z_1^{-n_1} \cdot z_2^{-n_2} \quad (5.13)$$

Можно непосредственно показать, что если точка  $(z_{01}, z_{02})$  лежит в области сходимости суммы (5.13), то все точки  $(z_1, z_2)$ , удовлетворяющие условиям

$$|z_1| \geq |z_{01}|, \quad |z_2| \geq |z_{02}|, \quad (5.14)$$

также лежат в области сходимости. (рис. 5.15).

Пользуясь этими условиями, можно сделать несколько утверждений относительно границы области сходимости для последовательностей первого квадранта. Наклон этой границы, обозначенной штриховой линией, не может быть положительным (рис 5.16).

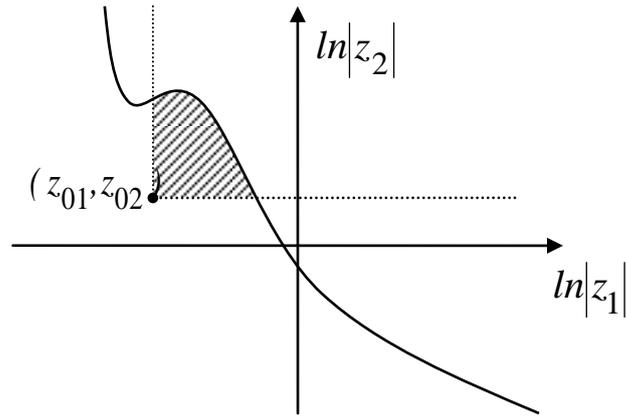


Рис. 5.16 Граница и область сходимости

Заштрихованная область не отвечает условиям (5.14) из-за положительного наклона границы (рис 5.17).

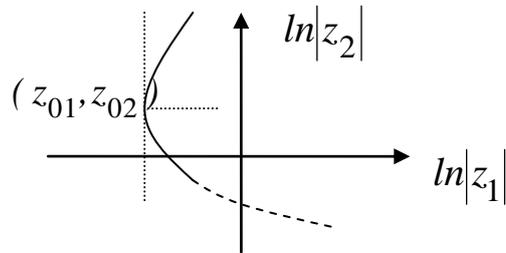


Рис. 5.17 Граница области сходимости

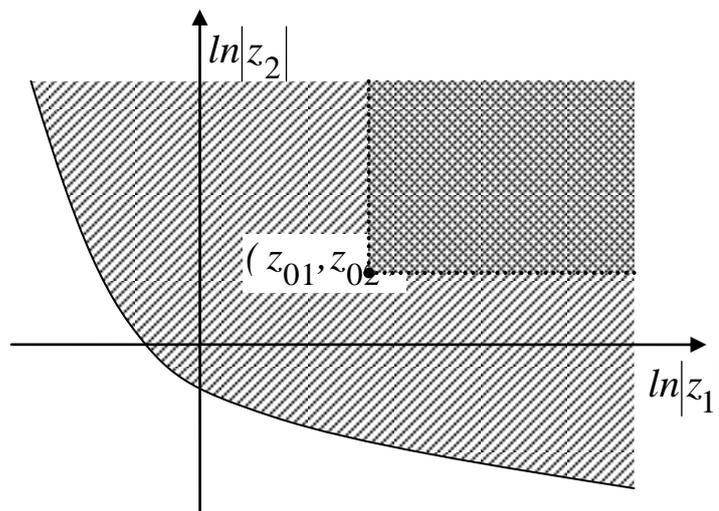


Рис. 5.18 Граница и область сходимости

На рис. 5.18 показана область сходимости двумерной последовательности с опорной областью в первом квадранте лежащая в плоскости  $\left( \ln|z_1|, \ln|z_2| \right)$  выше и правее штриховой линии.

### ***Последовательность с опорной областью на секторе***

Вид области сходимости для последовательности с опорной областью на секторе несколько более сложен. Пусть последовательность имеет опорную область (рис. 5.16), а  $\mathbf{Z}$ -преобразование такой последовательности

$$X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=-L \cdot n_1}^{\infty} x(n_1, n_2) \cdot z_1^{-n_1} \cdot z_2^{-n_2} \quad (5.15)$$

Определив новую целую переменную  $l = n_1 + L \cdot n_2$ , получаем сумму

$$\begin{aligned} X_z(z_1, z_2) &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} x(l - L \cdot n_2, n_2) \cdot z_1^{-l + L \cdot n_2} \cdot z_2^{-n_2} = \\ &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} x(l - L \cdot n_2, n_2) \cdot z_1^{-l} \cdot \left[ z_1^{-L} \cdot z_2 \right]^{n_2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Если сходится (5.16), то сходится и (5.15).

Последовательность  $x(l - L \cdot n_2, n_2)$  имеет опорную область, ограниченную первым квадрантом (рис 5.19 а,б).

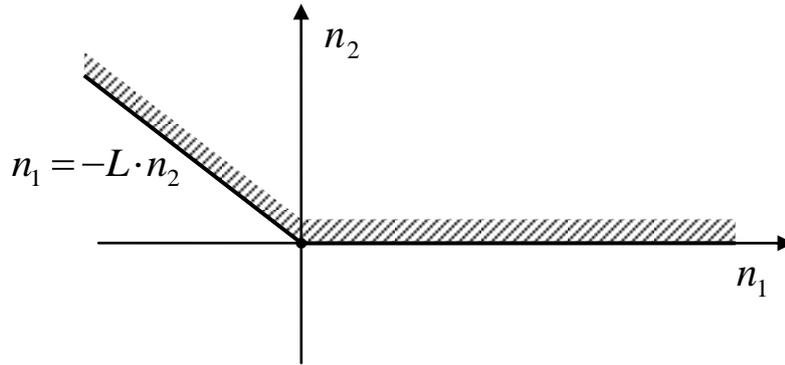


Рис. 5.19а – двумерная последовательность с опорной областью на секторе

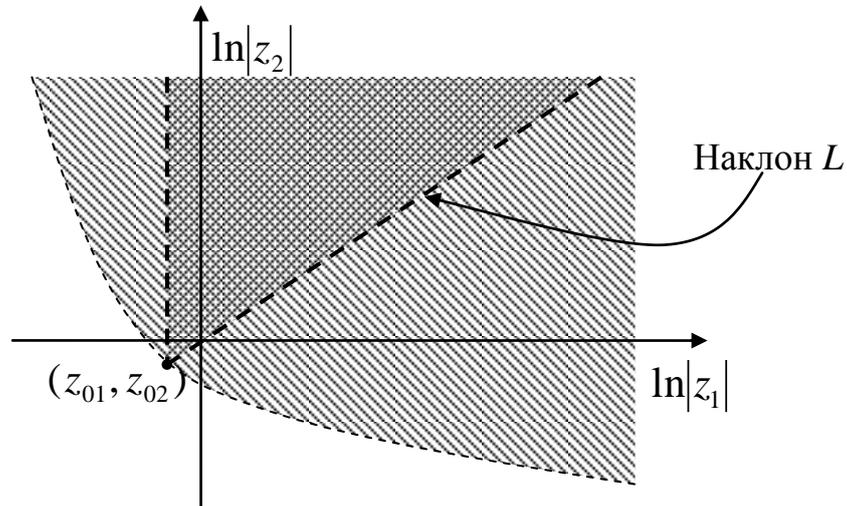


Рис. 5.19б – область сходимости Z-преобразования двумерной последовательности

Если точка  $(z_{01}, z_{02})$  лежит внутри опорной области, то все точки  $(z_1, z_2)$ , такие как  $\ln|z_1| \geq \ln|z_{01}|$  и  $\ln|z_2| \geq L \cdot \ln|z_1| + \ln|z_{02}| - L \cdot \ln|z_{01}|$ , также лежат внутри области сходимости (двойная штриховка).

Таким образом, если точки  $(z_{01}, z_{02})$  лежат внутри области сходимости, то точка  $(z_1, z_2)$  также будет лежать внутри области сходимости при условии:

$$\begin{aligned} |z_1| &\geq |z_{01}| \\ |z_1^{-L} \cdot z_2| &\geq |z_{01}^{-L} \cdot z_{02}|; \end{aligned}$$

или эквивалентное условие:

$$\begin{aligned} \ln|z_1| &\geq \ln|z_{01}| \\ \ln|z_2| &\geq \ln|z_1| + \ln|z_{02}| - L \cdot \ln|z_{01}|. \end{aligned}$$

### *Последовательность с опорной областью на полуплоскости*

Предположим, что последовательность  $x(n_1, n_2)$  имеет опорную область только на верхней полуплоскости:  $x(n_1, n_2) = 0$  при  $n_2 < 0$  и

$$X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} x(n_1, n_2) \cdot z_1^{-n_1} \cdot z_2^{-n_2}$$

Если  $(z_{01}, z_{02})$  лежит внутри область сходимости  $X_z$ , то точки  $(z_1, z_2)$ , удовлетворяющие условиям  $|z_1| = |z_{01}|$  и  $|z_2| \geq |z_{02}|$ , также лежат внутри области сходимости.

Следовательно, граница области сходимости должна быть однозначной функцией  $|z_1|$  или  $\ln|z_1|$ , как показано на рис. 5.17.

### **Последовательность с опорной областью на всей плоскости**

Область сходимости  $Z$ -преобразования последовательности с опорной областью на всей плоскости  $(n_1, n_2)$  может быть разнообразной по размеру и форме. Например,  $Z$ -преобразование последовательности  $x(n_1, n_2) = \exp(-n_1^2 - n_2^2)$  сходится при всех значениях  $(z_1, z_2)$ , а последовательность  $x(n_1, n_2) = 2^{|n_1|} \cdot 2^{|n_2|}$  не сходится ни при каких значениях  $(z_1, z_2)$ . Однако нередко  $Z$ -преобразование с опорной областью на всей плоскости сходится в области конечных размеров.

Последовательность с опорной областью на всей плоскости можно записать в виде суммы четырех последовательностей с опорной областью на квадранте, например:

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1, n_2) + x_2(n_1, n_2) + x_3(n_1, n_2) + x_4(n_1, n_2),$$

где

$$x_1(n_1, n_2) = \begin{cases} x(n_1, n_2), & \text{для } n_1 > 0, n_2 > 0, \\ \frac{1}{2} \cdot x(n_1, n_2), & \text{для } n_1 = 0, n_2 > 0 \text{ при } n_1 > 0, n_2 = 0, \\ \frac{1}{4} \cdot x(n_1, n_2), & \text{для } n_1 = n_2 = 0, \\ 0, & \text{для } n_1 < 0 \text{ или } n_2 < 0; \end{cases}$$

$x_2(n_1, n_2)$ ,  $x_3(n_1, n_2)$ ,  $x_4(n_1, n_2)$  определяются аналогично и имеют опорные области на втором, третьем и четвертом квадрантах.

Отсюда  $X_z(z_1, z_2)$  можно записать в виде суммы четырех  $Z$ -преобразований последовательностей с опорной областью на квад-

ранте. Область сходимости  $Z$ -преобразования  $X_z(z_1, z_2)$  является пересечением областей сходимости четырех составляющих  $Z$ -преобразований (рис. 5.20).

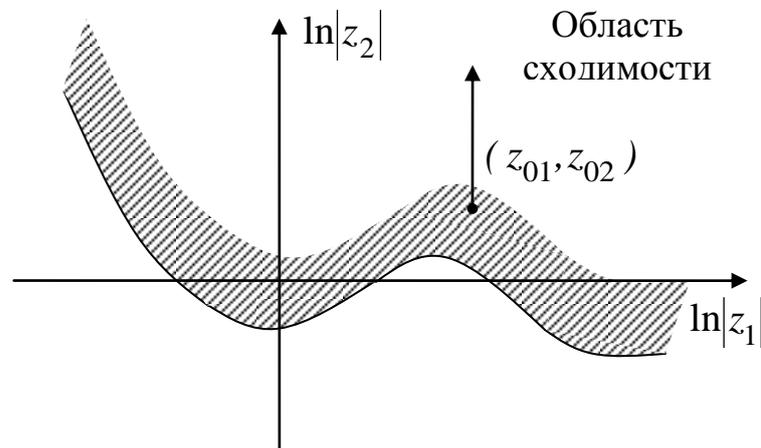


Рис. 5.20. Двухмерная последовательность с опорной областью в верхней полуплоскости

Для двухмерной последовательности с опорной областью в верхней полуплоскости принадлежность точки  $(z_{01}, z_{02})$  к области сходимости  $Z$ -преобразования означает, что все точки  $(z_1, z_2)$ , такие как  $|z_1| = |z_{01}|$  и  $|z_2| \geq |z_{02}|$ , также лежат в области сходимости.

### 5.2.3. Свойства двухмерного $Z$ -преобразования

$Z$ -преобразование имеет ряд свойств, полезных для вычисления, решения задач и доказательства теорем.

#### 1) Разделимые сигналы

Если  $x(n_1, n_2) = v(n_1) \cdot w(n_2)$ ,

то  $X_z(z_1, z_2) = V_z(z_1) \cdot W_z(z_2)$ .

Точка  $(z_1, z_2)$  будет областью сходимости последовательности  $X_z$  тогда и только тогда, когда  $z_1$  лежит в области сходимости одномерного  $Z$ -преобразования  $V_z$ , а  $z_2$  лежит в области сходимости  $Z$ -преобразования  $W_z$ .

### 2) Линейность

Если  $x(n_1, n_2) = a \cdot v(n_1, n_2) + b \cdot w(n_1, n_2)$ ,

то  $X_z(z_1, z_2) = a \cdot V_z(z_1, z_2) + b \cdot W_z(z_1, z_2)$

для любых комплексных констант  $a$  и  $b$ ; область сходимости

$X_z$  является пересечением областей сходимости  $V_z$  и  $W_z$ , хотя иногда может быть и шире. Это свойство может быть полезно при построении сложной системы при параллельном соединении простых.

### 3) Сдвиг

Если  $x(n_1, n_2) = v(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ ,

то  $X_z(z_1, z_2) = z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot V_z(z_1, z_2)$ .

Область сходимости  $X_z$  та же, что и область сходимости  $V_z$ , за исключением может быть точек, для которых  $|z_1| = 0$  или  $|z_2| = 0$ .

### 4) Модуляция

Если  $x(n_1, n_2) = a^{n_1} \cdot b^{n_2} \cdot w(n_1, n_2)$ ,

то  $X_z(z_1, z_2) = W_z(a^{-1} \cdot z_1, b^{-1} \cdot z_2)$

Область сходимости  $X_z$  имеет такую же форму, как и область для  $W_z$ , за исключением того, что ее масштаб изменен в  $|a|$  по переменной  $z_1$  и в  $|b|$  раз по переменной  $z_2$ .

**5) Дифференцируемость**

Если  $x(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2 \cdot w(n_1, n_2)$ ,

то  $X_z(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial z_1 \partial z_2} \cdot W_z(z_1, z_2)$

Области сходимости  $X_z$  и  $W_z$  одинаковы.

**6) Комплексная сопряженность**

Если  $x(n_1, n_2)$  является комплексным сигналом с Z-преобразованием имеющим область сходимости  $X_z$ .

$X_z(z_1, z_2)$ , определяется по следующим выражениям:

$$x^*(n_1, n_2) \leftrightarrow X_z^*(z_1^*, z_2^*),$$

$$Re[x(n_1, n_2)] \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot [X_z(z_1, z_2) + X_z^*(z_1^*, z_2^*)],$$

$$Im[x(n_1, n_2)] \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot j \cdot [X_z(z_1, z_2) - X_z^*(z_1^*, z_2^*)].$$

### 7) Зеркальное отражение

Если  $x(n_1, n_2) \leftrightarrow X_z(z_1, z_2)$ ,

то

$$x(-n_1, n_2) \leftrightarrow X_z(z_1^{-1}, z_2),$$

$$x(n_1, -n_2) \leftrightarrow X_z(z_1, z_2^{-1}),$$

$$x(-n_1, -n_2) \leftrightarrow X_z(z_1^{-1}, z_2^{-1}).$$

### 8) Свертка

Если

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \cdot h(k_1, k_2),$$

то  $Y_z(z_1, z_2) = X_z(z_1, z_2) \cdot H_z(z_1, z_2)$ .

Двумерное Z-преобразование свертки двух последовательностей равно произведению их Z-преобразований. Область сходимости

$Y_z$  является пересечением областей сходимости  $X_z$  и  $H_z$ .

### 9) Перемножение

Z-преобразование произведения двух последовательностей есть комплексная свертка их Z-преобразований:

$$x(n_1, n_2) \cdot y(n_1, n_2) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left( \frac{1}{2\pi \cdot j} \right)^2 \cdot \oint_{C_2} \oint_{C_1} X_z \left( \frac{z_1}{v_1}, \frac{z_2}{v_2} \right) \cdot Y_z(v_1, v_2) \cdot \frac{dv_1}{v_1} \cdot \frac{dv_2}{v_2}.$$

### 10) Теорема Парсеваля

Теорема Парсеваля устанавливает соотношение между скалярными произведениями двух последовательностей и их  $Z$ -преобразованиями:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) \cdot y^*(n_1, n_2) = \left( \frac{1}{2\pi \cdot j} \right)^2 \cdot \oint_{C_2} \oint_{C_1} X_z(z_1, z_2) \cdot Y_z^* \left( \frac{1}{z_1^*}, \frac{1}{z_2^*} \right) \cdot \frac{dz_1}{z_1} \cdot \frac{dz_2}{z_2}.$$

Контурные интегралов могут быть замкнуты, охватывать начало координат соответствующих переменных против часовой стрелки и лежать полностью в области сходимости.

### 11) Теоремы о начальных значениях

Если  $x(n_1, n_2) = 0$  для  $n_1 < 0, n_2 < 0$ ,

то

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_2} x(0, n_2) \cdot z_2^{-n_2}$$

$$\lim_{z_2 \rightarrow \infty} X_z(z_1, z_2) = \sum_{n_1} x(n_1, 0) \cdot z_1^{-n_1}$$

$$\lim_{\substack{z_1 \rightarrow \infty \\ z_2 \rightarrow \infty}} X_z(z_1, z_2) = x(0, 0)$$

## 12) Линейное отображение

Предположим, что два двумерных массива  $X$  и  $Z$  связаны соотношением линейного отображения так, что

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} w(m_1, m_2) & n_1 = I \cdot m_1 + J \cdot m_2, n_2 = K \cdot m_1 + L \cdot m_2 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

где  $I, J, K$  и  $L$  – целые числа;  $I \cdot L - K \cdot J \neq 0$ .

Тогда

$$X_z(z_1, z_2) = W_z(z_1^I \cdot z_2^K, z_1^J \cdot z_2^L).$$

### 5.2.4. Передаточные функции систем, описываемых разностными уравнениями

Рассмотрим двумерную ЛИС-систему, описываемую разностным уравнением

$$\begin{aligned} \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2) &= \\ = \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot x(n_1 - r_1, n_2 - r_2) &. \end{aligned}$$

Для ЛИС-системы последовательность

$$x(n_1, n_2) = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}$$

является ее собственной функцией, и выходной сигнал, соответствующий этому входному сигналу, имеет вид:

$$y(n_1, n_2) = H_z(z_1, z_2) \cdot z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}.$$

После сокращения  $z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}$  справа и слева и вынесения

$H_z$  за  $\sum$ ,  $H_z$  не зависит от  $k_1, k_2$ :

$$H_z(z_1, z_2) \cdot \sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2} =$$

$$= \sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot z_1^{-r_1} \cdot z_2^{-r_2} \quad ,$$

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\sum_{r_1} \sum_{r_2} a(r_1, r_2) \cdot z_1^{-r_1} \cdot z_2^{-r_2}}{\sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2}} \equiv \frac{A_z(z_1, z_2)}{B_z(z_1, z_2)}$$

Таким образом, передаточная функция системы, описываемой разностным уравнением, является отношением  $Z$ -преобразований коэффициентов  $a(r_1, r_2)$  и  $b(k_1, k_2)$ . Поскольку каждый из этих массивов имеет конечную опорную область, их  $Z$ -преобразования являются полиномами.

Для маски первого квадранта (рис. 5.2), передаточная функция дается выражением:

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\sum_{r_1=0}^{N_1} \sum_{r_2=0}^{N_2} a(r_1, r_2) \cdot z_1^{-r_1} \cdot z_2^{-r_2}}{\sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} b(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2}}$$

при условии, что входная маска имеет тот же размер, что и выходная.

Несимметричный полуплоскостной фильтр, аналогичный (рис. 5.5), имеет передаточную функцию вида:

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\sum_{r_1=-N_3}^{N_1} \sum_{r_2=1}^{N_2} a(r_1, r_2) \cdot z_1^{-r_1} \cdot z_2^{-r_2} + \sum_{r_1=0}^{N_1} a(r_1, 0) \cdot z_1^{-r_1}}{\sum_{k_1=-N_3}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} b(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2} + \sum_{k_1=0}^{N_1} b(k_1, 0) \cdot z_1^{-k_1}}$$

где входная маска имеет ту же форму, что и выходная.

Эта передаточная функция содержит только положительные степени  $z_2^{-1}$ , а также положительные и отрицательные степени переменной  $z_1^{-1}$ .

Чрезвычайно полезно определить полюсы и нули передаточной функции. Будем говорить, что  $H_z$  имеет нуль в точке  $(z_1, z_2)$ , если  $A_z(z_1, z_2) = 0$  и  $B_z(z_1, z_2) \neq 0$ . Аналогично будем говорить, что  $H_z$  обладает особенностью в точке  $(z_1, z_2)$ , если  $B_z(z_1, z_2) = 0$ . Часто такую особенность называют полюсом, однако такой термин не является вполне законным, т.к. они отличны от своих одномерных аналогов.

Нули одномерных полиномов появляются в изолированных точках  $Z$ -плоскости, в то время как многомерные нули являются в общем случае непрерывными поверхностями, например:

$$B_z(z_1, z_2) = 1 - b \cdot z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}.$$

Нули этого полинома определяются соотношением  $z_1 \cdot z_2 = b$  и образуют непрерывную поверхность в четырехмерном пространстве.

Так, если  $z_1$  перемещается по единичной окружности в плоскости  $z_1$ , то соответствующие значения  $z_2$ , для которых  $B_z(z_1, z_2) = 0$ , очерчивают окружность радиуса  $|b|$  в плоскости  $z_2$ .

Таким образом, положение полюсов и нулей  $H_z(z_1, z_2)$  по отношению к переменной  $z_2$  является функцией  $z_1$ , и наоборот.

### 5.2.5. Обратное Z-преобразование

Как и в одномерном случае, двухмерное Z-преобразование может быть обращено с помощью формулы, имеющей вид контурного интеграла:

$$x(n_1, n_2) = \left( \frac{1}{2\pi j} \right)^2 \cdot \oint_{C_2} \oint_{C_1} X_z(z_1, z_2) \cdot z_1^{n_1-1} z_2^{n_2-1} \cdot dz_1 dz_2.$$

Каждый интеграл вычисляется по контуру, который должен быть замкнут, лежать полностью в области сходимости  $X_z$  и обходить начало координат против часовой стрелки в плоскости  $z_1$  и  $z_2$ .

*Пример*

$$H_z = \frac{1}{1 - a \cdot z_1^{-1} - b \cdot z_2^{-1}},$$

где  $|a| + |b| < 1$  и область сходимости включает двухмерную единичную поверхность, по которой выполняется интегрирование:

$$\begin{aligned}
 h(n_1, n_2) &= \left( \frac{1}{2\pi j} \right)^2 \cdot \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}}{z_1 \cdot z_2 - a \cdot z_2 - b \cdot z_1} dz_1 dz_2 = \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi j} \right)^2 \cdot \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{z_2^{-b} \cdot z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2}}{z_1 - \left[ \frac{a \cdot z_2}{z_2 - b} \right]} dz_1 dz_2.
 \end{aligned}$$

Выполним сначала интегрирование по  $C_1$ . При этом  $z_2$  можно рассматривать как параметр.

Этот интеграл является обратным одномерным  $Z$ -

преобразованием с простым полюсом при  $\left| \frac{a \cdot z_2}{z_2 - b} \right| < 1$ , и, следовательно, полюс находится внутри контура интегрирования.

Применяя теорему Коши о вычетах, получим

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{2\pi j} \cdot a^{n_1} \cdot u(n_1) \cdot \oint_{C_2} \frac{z_2^{n_1+n_2}}{(z_2 - b)^{n_1+1}} dz_2,$$

где  $u(n_1)$  – одномерная ступенчатая функция.

Интеграл по области  $C_2$  можно рассматривать как обратное  $Z$ -преобразование одномерной системы с полюсом порядка  $n_1 + 1$  при  $z_2 = b$ , лежащим внутри контура интегрирования.

Применяя теорему о вычетах, окончательно имеем

$$h(n_1, n_2) = a^{n_1} \cdot b^{n_2} \cdot \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! \cdot n_2!} \cdot u(n_1) \cdot u(n_2).$$

Несмотря на простоту примера, процедура вычисления оказывается достаточно сложной. Причем, как правило, аналитически вычислить многомерное  $Z$ -преобразование не представляется возможным.

Если передаточная функция и ее область сходимости соответствуют рекурсивно вычислимому разностному уравнению, то из передаточной функции можно вывести разностное уравнение с помощью которого можно получить численное представление импульсного отклика, как отклика на единичный импульс  $\delta(n_1, n_2)$ .

### 5.2.6. Двухмерные направленные графы

Ранее были введены входная и выходная маски для выполнения рекурсивного вычисления выходных отсчетов разностного уравнения. Маски полезны для определения того, является ли разностное уравнение рекурсивно вычислимым, какие начальные условия требуются для рекурсии и какие способы частичного упорядочивания обеспечивают рекурсивную вычислимость.

Направленный граф является другим способом графического описания двухмерных ЛИС-систем. Он хорошо выводится из  $Z$ -преобразования и полезен при описании схемной реализации. Если  $Z$ -преобразование поддается разложению на множители, то этот факт отчетливо отражается на направленном графе.

Над этим графом можно производить операции, упрощающие описание ЛИС-систем.

Однако ни один из способов, как масок, так и направленного графа, не обеспечивает полного описания системы, поскольку не определяет метода упорядочивания при реализации системы. Но оба они используются при анализе многомерных систем и дают весьма полезные результаты.

Направленный граф представляет собой набор ветвей, изображающих направленные соединения между узлами сигналов. Имеется пять типов ветвей (табл. 5.1). Каждая ветвь принимает входную величину из узла в начале ветви и выдает некоторую величину на своем конце. Величина, связанная с узлом, есть сумма входных величин.

Для любого значения упорядоченной пары  $(n_1, n_2)$  каждому узлу можно присвоить числовое значение, определяемое ветвями, входящими в узел, и несколькими правилами.

Простейший оператор – оператор усиления, определяемый ветвью 1, когда входная величина, умноженная на коэффициент  $C$ , дает выходную величину,  $C$  – коэффициент усиления ветви.

Остальные четыре типа ветвей являются операторами сдвига.

Если на входе  $f(n_1, n_2)$ , то

2)  $f(n_1 - 1, n_2)$  – сдвиг вправо

3)  $f(n_1 + 1, n_2)$  – сдвиг влево

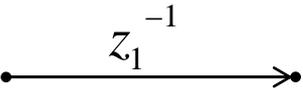
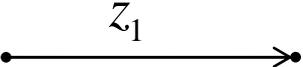
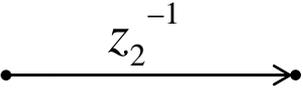
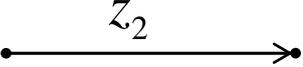
4)  $f(n_1, n_2 - 1)$  – сдвиг вверх

5)  $f(n_1, n_2 + 1)$  – сдвиг вниз

Эти сдвиги можно рассматривать как усиление в  $Z$ -области с коэффициентами усиления  $z_1^{-1}$ ;  $z_1$ ;  $z_2^{-1}$ ;  $z_2$  соответственно.

Таблица 5.1

Типы ветвей графов для описания ЛИС-систем

1		Оператор усиления
2		Сдвиг вправо (горизонтальная задержка)
3		Сдвиг влево
4		Сдвиг вверх (вертикальная задержка)
5		Сдвиг вниз

**Пример**

Рассмотрим передаточную функцию

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - a \cdot z_1^{-1} - b \cdot z_2^{-2}},$$

соответствующую разностному уравнению

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + a \cdot y(n_1 - 1, n_2) + b \cdot y(n_1, n_2 - 2),$$

представленному графом (рис. 5.21)

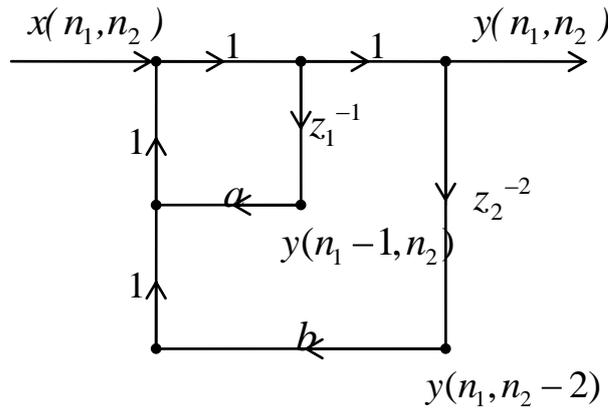


Рис. 5.21 Граф, представляющий передаточную функцию

**Пример**

Рассмотрим фильтр с передаточной функцией:

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - \sum_{\substack{n_1=0 \\ (n_1, n_2) \neq 0}}^2 \sum_{n_2=0}^2 c(n_1, n_2) \cdot z_1^{-n_1} \cdot z_2^{-n_2}},$$

соответствующей разностному уравнению:

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + \sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_1, k_2) \neq 0}}^2 \sum_{k_2=0}^2 c(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2),$$

представленному графом (рис. 5.22).

Направленный граф из-за своей простоты в многомерном случае оставляет неясным способ реализации горизонтальных и вертикальных операторов сдвига, и поэтому его применение ограничено.

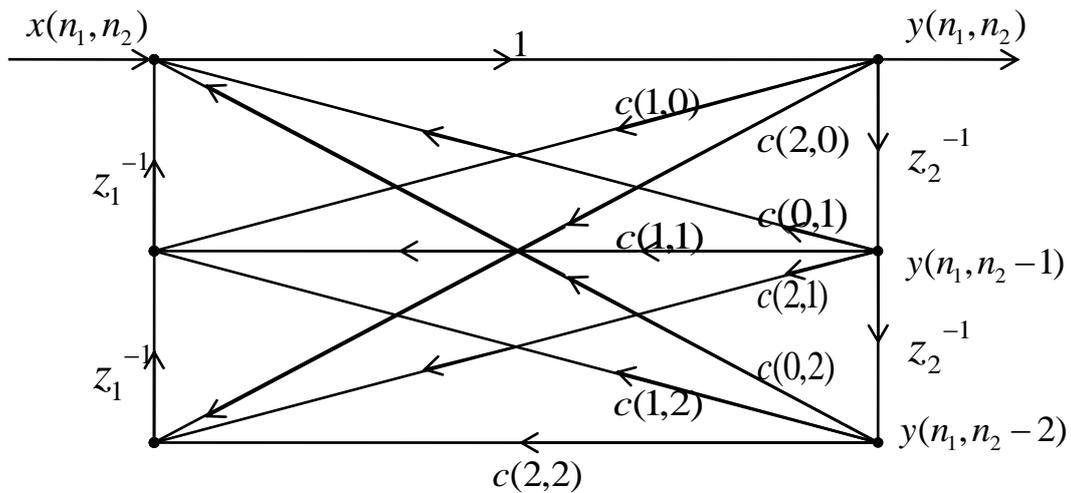


Рис. 5.22 Граф, представляющий передаточную функцию

### 5.3. Устойчивость рекурсивных систем

Понятие устойчивости вводится для описания систем при всех разумных значениях входных сигналов. Любой переходной процесс, вызванный резкими изменениями во входном множестве, должен быть ограничен по своей протяженности, и установившееся поведение системы должно быть предсказуемо.

Для ЛИС-системы все типы устойчивости связаны с импульсным откликом.

Наиболее изученным критерием является критерий ограниченного входа ограниченного выхода (ОВОВ).

Если  $|x(n_1, n_2)| < P$ , то выходной сигнал должен удовлетворять неравенству

$$|y(n_1, n_2)| < Q,$$

где  $P$  и  $Q$  – положительные числа, а это выполняется, когда:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |h(n_1, n_2)| = S_1 < \infty.$$

Но использование последнего неравенства на практике (несмотря на его фундаментальное значение) не всегда возможно из-за того, что суммирование при ограниченных  $n_1$  и  $n_2$  дает всегда конечный результат, а нахождение суммы с бесконечными пределами не всегда возможно.

Кроме того,  $h(n_1, n_2)$  не всегда известны.

Алгоритмы синтеза фильтров позволяют получить коэффициенты разностного уравнения либо передаточные функции фильтров, поэтому желательно получить условия для устойчивости фильтра по передаточной функции.

### 5.3.1. Теоремы об устойчивости

Если двухмерная последовательность абсолютно суммируема

$\left( \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |x(n_1, n_2)| < S < \infty \right)$ , ее  $Z$ -преобразование аналитично

на единичной поверхности  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Обратное утверждение также справедливо: если  $Z$ -преобразование последовательности аналитично на единичной поверхности, то последовательность является абсолютно суммируемой, а фильтр – устойчивым.

Для практически важного случая рациональных передаточных функций

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{A_z(z_1, z_2)}{B_z(z_1, z_2)}$$

требование аналитичности  $H_z$  для  $|z_1| = |z_2| = 1$  эквивалентно требованию  $B_z \neq 0$  для  $|z_1| = |z_2| = 1$ .

Это в свою очередь требует, чтобы единичная поверхность  $|z_1| = |z_2| = 1$  лежала в области сходимости передаточной функции.

Устойчивость рекурсивного фильтра зависит от положения его полюсов или от набора нулей полинома-знаменателя  $B_z(z_1, z_2)$ . На стабильность может влиять и полином-числитель, его влияние рассмотрим далее.

Вначале рассмотрим случай  $A_z(z_1, z_2) = 1$ .

### ***Теорема Шенкса***

Пусть  $H_z(z_1, z_2) = \frac{1}{B_z(z_1, z_2)}$  является рекурсивным фильтром в первом квадранте. Такой фильтр устойчив тогда и только тогда, когда  $B_z(z_1, z_2) \neq 0$  для любой точки  $(z_1, z_2)$ , такой, что  $|z_1| \geq 1$  или  $|z_2| \geq 1$ .

Теорема хотя и понятна, но трудноприменима практически, поскольку требует исследования на особые точки всего внешнего пространства единичной биокружности.

### ***Теорема Хуанга***

Пусть  $H_z(z_1, z_2) = \frac{1}{B_z(z_1, z_2)}$  является рекурсивным фильтром первого квадранта. Этот фильтр устойчив тогда и только тогда, когда  $B_z(z_1, z_2)$  удовлетворяет следующим двум условиям:

$$B_z(z_1, z_2) \neq 0 \quad |z_1| \geq 1, |z_2| = 1,$$

$$B_z(a, z_2) \neq 0 \quad |z_2| \geq 1 \quad \forall |a| \geq 1.$$

Второе условие теоремы является одномерным условием устойчивости; первое условие двумерно, но  $|z_2|$  находится на своей единичной окружности. Переменные  $z_1$  и  $z_2$  могут меняться местами.

Недавно было предложено более простое правило для тестирования систем на устойчивость.

### *Теорема де Карло-Стринциса*

Пусть  $H_z(z_1, z_2) = \frac{1}{B_z(z_1, z_2)}$  является рекурсивным фильтром первого квадранта. Такой фильтр устойчив тогда и только тогда, когда  $B_z(z_1, z_2)$  удовлетворяет следующим трем условиям:

$$B_z(z_1, z_2) \neq 0 \quad \text{для } |z_1| = 1 \text{ и } |z_2| = 1;$$

$$B_z(a, z_2) \neq 0 \quad \text{для } |z_2| \geq 1 \quad \forall a, \text{ такою что } |a| = 1$$

$$B_z(z_1, b) \neq 0 \quad \text{для } |z_1| \geq 1 \quad \forall b, \text{ такою что } |b| = 1.$$

Кроме первого условия, остальные являются одномерными, причем целесообразно всегда выбирать на практике  $|a| = |b| = 1$ . Следовательно, первое условие просто требует вычисления Z-преобразования по единичной окружности, которое сводится к преоб-

разованию Фурье. Таким образом, этот тест можно интерпретировать как обобщение одномерного критерия устойчивости Найквиста.

**Пример**

Рассмотрим фильтр первого квадранта с передаточной функцией

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - a \cdot z_1^{-1} - b \cdot z_2^{-1}}, \quad a > 0, b > 0.$$

Импульсный отклик такого фильтра имеет следующий вид:

$$h(n_1, n_2) = a^{n_1} \cdot b^{n_2} \cdot \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! \cdot n_2!} \cdot u(n_1) \cdot u(n_2),$$

где  $u(n)$  – одномерная ступенчатая функция. Для этого фильтра

$$B(\omega_1, \omega_2) = 1 - a \cdot e^{-j\omega_1} - b \cdot e^{-j\omega_2},$$

так как

$$H_z(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H(\omega_1, \omega_2) \text{ при } |z_1| = |z_2| = 1.$$

Первое условие теоремы де Карло-Стринтциса требует, чтобы

$$\left| 1 - a \cdot e^{-j\omega_1} - b \cdot e^{-j\omega_2} \right| > 0, \quad \text{а это эквивалентно}$$

$$B_z(z_1, z_2) \neq 0.$$

Второе и третье условия требуют, чтобы Z-преобразования

$B_z(1, z_2)$  и  $B_z(z_1, 1)$  не имели корней вне единичной окружности:

$$|b| < |1 - a|, \quad |b| < |1 - a| < 1 - |a| \Rightarrow |b| + |a| < 1;$$

$$|a| < |1 - b|, \quad |a| < |1 - b| < 1 - |b| \Rightarrow |a| + |b| < 1,$$

эквивалентны предыдущему неравенству, что эквивалентно требованию:

$$|a| + |b| < 1.$$

### 5.3.2. Проверка устойчивости

Выше были рассмотрены теоремы об устойчивости имеют косвенную ценность, поскольку сами по себе не могут быть непосредственно использованы для создания численного алгоритма проверки устойчивости.

Рассмотрим практический тест проверки устойчивости, базирующийся на теореме де Карло-Стринтциса.

Тест основан на использовании теоремы де Карло-Стринтциса и, следовательно, состоит из трех частей.

Второе условие заключается в исследовании расположения корней одномерного полинома

$$P_z(z_2) = B_z(1, z_2) = \sum_{n_2} \left[ \sum_{n_1} b(n_1, n_2) \right] \cdot z_2^{-n_2}$$

с целью убедиться в том, что

$$P_z(z_2) \neq 0 \quad \text{для } |z_2| \leq 1.$$

Это можно сделать, основываясь на принципе аргумента, который в своей общей формулировке утверждает, что полное приращение аргумента (фазы)  $P_z(z_2)$  при обходе  $z_2$  по единичной окружности в направлении против часовой стрелки равно нулю тогда и только тогда, когда все корни  $P_z(z_2)$  находятся внутри единичной окружности, а  $b(n_1, n_2)$  имеет опорную область в первом квадранте.

Третье условие теоремы де Карло-Стринтциса состоит в применении аналогичного теста к одномерному полиному

$$Q_z(z_1) = B_z(z_1, 1) = \sum_{n_1} \left[ \sum_{n_2} b(n_1, n_2) \right] \cdot z_1^{-n_1}.$$

Наконец, полагая, что полином  $B_z(z_1, z_2)$  прошел два одномерных теста, нужно отыскать нули на единичной биокружности или, что то же самое, отыскать нули спектра Фурье  $B(\omega_1, \omega_2)$ .

Одним из способов, является применение принципа аргумента для поиска траекторий корней, пересекающих единичную окружность  $Z_2$  на диаграмме корней.

Зафиксируем  $z_1 = e^{j\omega_1}$  и исследуем одномерный параметрический полином  $B \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right]$ . Поскольку  $B \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right] = P_z \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right]$ , все корни  $B \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right]$  находятся внутри единичной окружности. Тогда при некотором наборе дискретных значений  $\omega_1$  (и, следовательно,  $z_1$ ), можно проверить распределение нулей  $B \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right]$ , применяя принцип аргумента. Фактически это означает дискретизацию траектории на диаграмме корней  $Z_2$ .

Если полное приращение фазы  $B \left[ \begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix} \right]$  не равно нулю после одного оборота  $Z_2$  по единичной окружности, то, по крайней мере, один корень оказался вне единичной окружности. Для этого он должен пересечь единичную окружность в некоторой точке, что означает: в некоторой точке  $B(\omega_1, \omega_2) = 0$ . Следовательно, фильтр неустойчив.

При этом нет нужды исследовать  $B(z_2, z_1)$ , поскольку пересечение траектории корня и единичной окружности  $z_2$  означает пересечение траектории корня и единичной окружности  $z_1$  и наоборот.

На практике в качестве значений  $\omega_1$  принимают  $\frac{2\pi \cdot k_1}{N_1}$ , так что коэффициенты параметрического полинома  $B(z_1, z_2)$  можно вычислить с помощью быстрого преобразования Фурье. Значение  $N_1$  следует выбирать достаточно большим, чтобы точки дискретизации диаграммы корней были расположены достаточно часто, и не пропустить траекторию корня, которая пересекает единичную окружность и тут же уходит обратно.

Описанный тест оставляет невыясненным случай, когда траектория корня подходит по касательной к единичной окружности и контактирует всего в одной точке и снова уходит обратно, когда в этой точке  $B(\omega_1, \omega_2) = 0$ .

Для обращения к принципу аргумента необходимо вычислить фазу одномерного полинома  $P_z(z_2)$  при движении  $z_2$  по единичной окружности или, что то же самое, фазу одномерного спектра Фурье  $P(\omega_2)$ . Обычно фазовую функцию можно определить в виде:

$$\text{ARG} [P(\omega_2)] \equiv \text{arctg} \frac{\text{Im} [P(\omega_2)]}{\text{Re} [P(\omega_2)]}$$

или

$$\text{ARG} [P(\omega_2)] \equiv \text{Im} [\ln P(\omega_2)]$$

В обоих случаях берется главное значение аргумента, поскольку функции  $\text{arctg}$  и  $\ln$  многозначны.

Использование главного значения может привести к искусственному нарушению непрерывности при переходе  $\text{ARG } P(\omega_2)$  через  $2\pi$ , что делает невозможным определение полного приращения фазы  $P(\omega_2)$  при изменении  $\omega_2$  в пределах  $0 - 2\pi$ .

Эту трудность обходят, определив развернутую фазовую функцию  $\varphi(\omega_2)$  в виде интеграла производной фазы.

Продифференцируем последнее выражение:

$$\frac{\partial \varphi(\omega_2)}{\partial \omega_2} = \frac{P_R(\omega_2) \cdot \frac{\partial P_I(\omega_2)}{\partial \omega_2} - P_I(\omega_2) \cdot \frac{\partial P_R(\omega_2)}{\partial \omega_2}}{P_R^2(\omega_2) + P_I^2(\omega_2)}. \quad (5.17)$$

Развернутая фазовая функция  $\varphi(\omega_2)$  для некоторого значения частоты  $\nu_2$  вычисляется:

$$\varphi(\nu_2) = \varphi(0) + \int_0^{\nu_2} \frac{\partial \varphi(\omega_2)}{\partial \omega_2} \cdot d\omega_2.$$

Поскольку  $P(\omega_2)$  – тригонометрический полином, производная от  $\varphi(\omega_2)$  и, следовательно, сама  $\varphi(\omega_2)$  будут непрерывными, если  $P(\omega_2) \neq 0$ .

Теперь для исследования устойчивости  $B_z(z_1, z_2)$  можно применить принцип аргумента.

Второе условие теоремы де Карло-Стринтциса будет выполняться, если полное приращение развернутой фазы полинома  $P(\omega_2) = B(0, \omega_2)$  будет равно нулю при изменении значения  $\omega_2$  в

пределах  $0 - 2\pi$ . Это эквивалентно утверждению, что развернутая фазовая функция периодична.

Аналогично третье условие будет удовлетворяться, если периодична развернутая фаза полинома  $Q(\omega_1) = B(\omega_1, 0)$ .

Наконец, первое условие будет удовлетворяться, если развернутая фаза параметрического тригонометрического полинома  $B[\omega_1](\omega_2)$  периодична при любом вещественном значении  $\omega_1$ .

Этот ряд одномерных тестов периодичности фазы можно рассматривать как вычисление двумерной развернутой фазовой функции для  $B(\omega_1, \omega_2)$  и проверку ее непрерывности и двойной периодичности.

Двухмерная развернутая фазовая функция

$$\varphi(\nu_1, \nu_2) = \varphi(0, 0) + \int_0^{\nu_2} \frac{\partial \varphi(0, \omega_2)}{\partial \omega_2} \cdot d\omega_2 + \int_0^{\nu_1} \frac{\partial \varphi(\omega_1, 0)}{\partial \omega_1} \cdot d\omega_1,$$

где частные производные описываются формулами, аналогичными формуле (5.17).

Эта функция будет непрерывна, если  $B(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ .

Она также периодична, если

$$\varphi(\omega_1 + 2\pi, \omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (5.18)$$

$$\varphi(\omega_1, \omega_2 + 2\pi) = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (5.19)$$

то условие второе теоремы де Карло-Стринтциса выполняется, поскольку оно эквивалентно условию

$$\varphi(0, \omega_2 + 2\pi) = \varphi(0, \omega_2).$$

Аналогично для третьего условия, поскольку эквивалентно условию

$$\varphi(\omega_1 + 2\pi, 0) = \varphi(\omega_1, 0).$$

Первое условие выполняется, если функция  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  непрерывна, что возможно только при  $B(\omega_1, \omega_2) \neq 0$ . Непрерывность проверяется применением принципа аргумента либо к параметрическому полиному  $B[\omega_1](\omega_2)$ , либо к полиному  $B[\omega_2](\omega_1)$  для проверки нарушения условий периодичности  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  (5.18) или (5.19).

Сформируем теорему об устойчивости с использованием понятия фазовой функции.

***Теорема О'Коннора.***

Двухмерный рекурсивный фильтр с частотным откликом  $H(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{B(\omega_1, \omega_2)}$  устойчив, если развернутая фазовая функция  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  непрерывна и дважды периодична.

***5.3.3. Влияние полинома-числителя на устойчивость***

В одномерном случае, если полином числитель и полином знаменатель не имеют общих множителей, устойчивость фильтра зависит от расположения его полюсов.

В двухмерном случае числитель может влиять на устойчивость фильтра.

Рассмотрим три передаточных функции:

$$F_z(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot z_1^{-1} - \frac{1}{2} \cdot z_2^{-1}},$$

$$G_z(z_1, z_2) = \frac{(1 - z_1^{-1})^8 \cdot (1 - z_2^{-1})^8}{1 - \frac{1}{2} \cdot z_1^{-1} - \frac{1}{2} \cdot z_2^{-1}},$$

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{(1 - z_1^{-1}) \cdot (1 - z_2^{-1})}{1 - \frac{1}{2} \cdot z_1^{-1} - \frac{1}{2} \cdot z_2^{-1}}.$$

Фильтр  $F_z(z_1, z_2)$  стабилен только при условии, когда коэффициент  $a$  при  $z_1$  и  $b$  при  $z_2$  удовлетворяют строгому неравенству:

$$|a| + |b| < 1.$$

В нашем случае  $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = 1$  и, значит, фильтр неустойчив.

Функции  $G_z$  и  $H_z$  имеют такой же знаменатель, как и  $F_z$ , однако  $G_z$  стабилен, а  $H_z$  – нет.

Полиномы знаменатели равны нулю на биокружности или внутри нее в единственной точке  $z_1 = z_2 = 1$ .

Полиномы числители равны нулю в этой же точке.

Таким образом,  $G_z$  и  $H_z$  обладают несущественной особенностью второго рода на единичной биокружности.

Одно из изображений нуля и изображений полюса касаются в одной точке единичную биокружность на диаграмме корней (рис. 5.23).

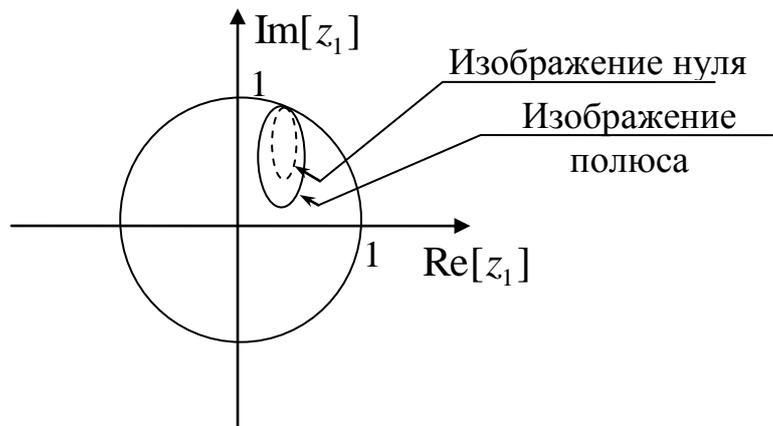


Рис. 5.23 Изображения нуля и изображения полюса касаются в одной точке единичную биокружность на диаграмме корней

Интуитивно ясно, что устойчивость фильтра связана со степенью касания, однако в настоящее время отсутствуют общие и прямые средства для определения является ли фильтр устойчивым. Для этого требуются дополнительные исследования.

## **Глава 6. СИНТЕЗ И РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХМЕРНЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ**

В этом разделе рассматриваются двухмерные цифровые фильтры с импульсной характеристикой бесконечной протяженности. Входной и выходной сигналы двумерного БИХ-фильтра удовлетворяют линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами, которое дает возможность вычислить значение выходного отсчета по значениям входных отсчетов и ранее вычисленных выходных отсчетов.

Так как в определении выходных отсчетов участвуют ранее вычисленные выходные отсчеты, то двумерные БИХ-фильтры могут быть неустойчивыми.

Достоинством БИХ-фильтра является возможность сокращения объема вычислений по сравнению с соответствующим КИХ-фильтром, за счет использования выходных отсчетов, что позволяет уменьшить число коэффициентов.

### **6.1. Классические схемы двухмерных БИХ-фильтров**

В настоящее время известен ряд подходов к реализации одномерных БИХ-фильтров. Среди них прямые способы реализации, способы, построение каскадных и параллельных схем. Как для КИХ-фильтров, так и для многомерных БИХ-фильтров характерны некоторые особенности, отсутствующие в одномерном случае. Это прежде всего порядок вычисления значений выходных отсчетов.

В одномерном случае он определен однозначно, а в многомерном имеется свобода действий, ограничиваемая лишь формой входной и выходной масок.

Кроме того, данные на вход фильтра в одномерном случае поступают принципиально последовательно, в заранее определенном порядке. В многомерном случае порядок поступления входных данных не определен однозначно, хотя на него и наложены ограничения соотношениями предшествования.

### 6.1.1. Прямые формы реализации

Рассмотрим случай, когда выходная маска имеет ненулевую протяженность.

Для фильтра первого квадранта входной сигнал  $x(n_1, n_2)$  связан с выходным сигналом  $y(n_1, n_2)$  соотношением:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1-1} \sum_{l_2=0}^{L_2-1} a(l_1, l_2) \cdot x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) - \sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)}}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2),$$

где без нарушения общности принято  $b(0,0) = 1$ .

Отклик фильтра на импульс  $\delta(n_1, n_2)$  по определению равен импульсному отклику, тогда можно получить соотношение:

$$h(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) - \sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)}}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2) \cdot y(n_1 - k_1, n_2 - k_2).$$

Выполнив двумерное Z-преобразование выражений, стоящих слева и справа от знака равенства, решим это уравнение относительно

$$H_z(z_1, z_2):$$

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\sum_{l_1=0}^{L_1-1} \sum_{l_2=0}^{L_2-1} a(l_1, l_2) \cdot z_1^{-l_1} \cdot z_2^{-l_2}}{\sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2) \cdot z_1^{-k_1} \cdot z_2^{-k_2}} = \frac{A_z(z_1, z_2)}{B_z(z_1, z_2)}.$$

Имеем двухкаскадный КИХ-фильтр с передаточной функцией  $A_z(z_1, z_2)$  и чисто рекурсивный фильтр с передаточной функцией, равной  $1/B_z(z_1, z_2)$  (рис. 6.1).

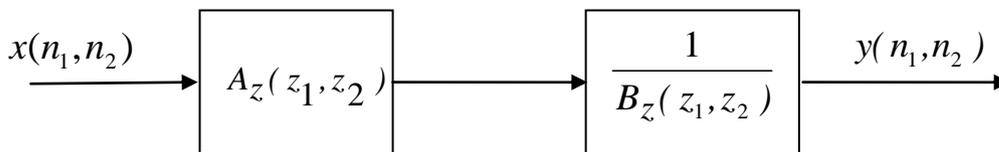


Рис. 6.1

Пусть входная маска имеет размер  $L_1 \times L_2$  точек, обработка выполняется столбец за столбцом и в каждом столбце желательно получить  $N_2$  выходных точек. В этом случае должно храниться  $(L_1 - 1)N_2 + L_2 - 1$  входных отсчетов, т. е. немного более  $L_1 - 1$  столбцов. Такой объем памяти как раз необходим для размещения входной маски, соответствующей КИХ-ступени в каскаде.

Вторая ступень каскада представляет собой БИХ-фильтр с постоянным числителем. Если его выходная маска содержит  $K_1 \times K_2$  точек и вычисляется отсчет в правом верхнем углу, то при вычислении отсчетов столбец за столбцом потребуется  $(K_1 - 1)N_2 + K_2 - 1$  ячеек памяти.

В результате потребуется  $(L_1 + K_1 - 1)N_2 + L_2 + K_2 - 1$  ячеек памяти. Поскольку имеем дело с ЛИС-системой из последовательно включенных подсистем, можно поменять порядок их следования. По-

лучится двумерная прямая форма, которая называется «прямая форма II» (рис. 6.2):

$$w(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) - \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} b(k_1, k_2) \cdot w(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (k_1, k_2) \neq (0, 0)$$

(6.1)

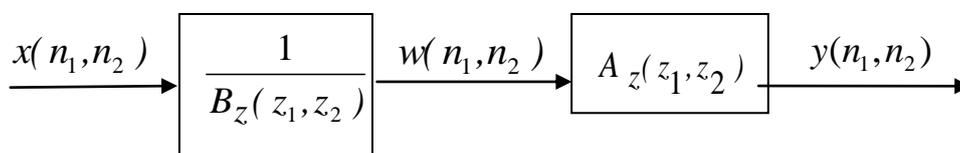


Рис. 6.2

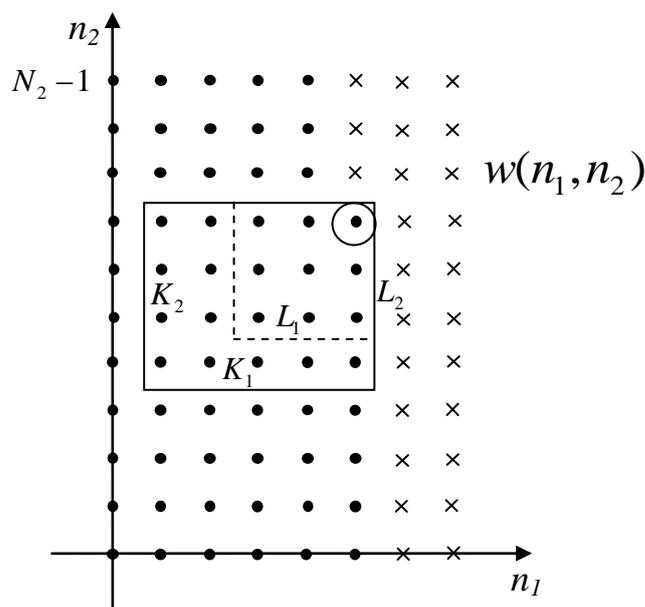


Рис. 6.3. Точечные маски:

$(K_1 \times K_2)$  – выходная маска,  $(L_1 \times L_2)$  – входная маска

Маски (рис. 6.3) накладываются в случае реализации прямой формы II:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1-1} \sum_{l_2=0}^{L_2-1} a(l_1, l_2) \cdot w(n_1 - l_1, n_2 - l_2). \quad (6.2)$$

Пусть  $(K_1, K_2)$  – точечная выходная маска, соответствующая формуле (6.1).

Вычисления выполняются по массиву  $w(n_1, n_2)$  столбец за столбцом и в соответствии с (6.1) формируют выходные значения  $w(n_1, n_2)$ . Входная маска, соответствующая передаточной функции фильтра  $A_z(z_1, z_2)$ , покрывает прямоугольную область  $L_1 \times L_2$ .

Если  $L_1 \leq K_1$  и  $L_2 \leq K_2$  и закончено вычисление значения  $w(n_1, n_2)$  для конкретной точки  $(n_1, n_2)$ , можно сразу вычислить  $y(n_1, n_2)$  в соответствии с формулой (6.2), поскольку имеются все необходимые значения для вычисления. В этом случае для реализации числителя передаточной функции фильтра дополнительная память не требуется.

Вообще говоря,  $L_1$  может быть больше  $K_1$ . Тогда по формуле (6.2) потребуется сохранять в памяти  $L_1 - K_1$  дополнительных столбцов массива  $w(n_1, n_2)$ .

Таким образом, при использовании прямой формы II и обработке по столбцам требуется объем памяти:

$$\max \left[ (L_1 - 1) \cdot N_1 + L_2 - 1, (K_1 - 1) \cdot N_2 + K_2 - 1 \right],$$

т. е. приблизительно  $N_2 \cdot \max(K_1, L_1)$ .

### 6.1.2. Каскадная и параллельная реализации

Известно, что сложные ЛИС-системы можно строить с помощью последовательного и параллельного соединения более простых ЛИС-систем. Аналогично и для БИХ-фильтров (рис. 6.4). Пусть у нас име-

ется фильтр представляющий собой каскад из  $N$  двумерных БИХ-фильтров.

Пусть передаточная функция  $i$ -го фильтра в каскаде имеет вид

$$H_z^{(i)}(z_1, z_2) = \frac{A_z^{(i)}(z_1, z_2)}{B_z^{(i)}(z_1, z_2)},$$

тогда

$$H_z^c(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^N H_z^{(i)}(z_1, z_2) = \frac{\prod_{i=1}^N A_z^{(i)}(z_1, z_2)}{\prod_{i=1}^N B_z^{(i)}(z_1, z_2)}. \quad (6.3)$$

$H_z^c(z_1, z_2)$  имеет форму отношения двумерных полиномов, то она является двумерным БИХ-фильтром. Однако из-за того, что полиномы в числителе и знаменателе входят в произведение в качестве сомножителей, функцию  $H_z^c(z_1, z_2)$  нельзя использовать для представления передаточной функции произвольного двумерного БИХ-фильтра.

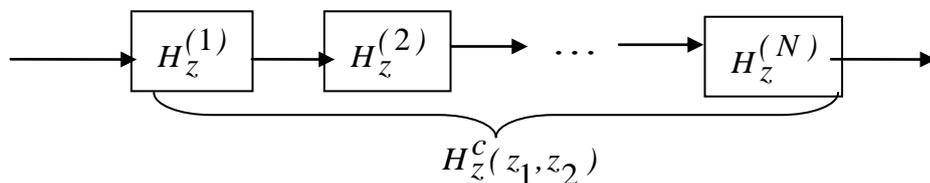


Рис. 6.4

В общем случае можно разложить произвольный двумерный БИХ-фильтр в цепочку последовательно соединенных более простых фильтров нельзя. Но его можно получить, соединяя каскадно более простые фильтры. Двухкаскадный фильтр из фильтра нижних и верх-

них частот представлен на рис. 6.5. Такой подход имеет практическое значение при его реализации.

Конвейерная схема вычислений с помощью многопроцессорной схемы позволяет реализовать сложные фильтры в реальном масштабе времени. Требуемый объем памяти определяется суммой объемов ЗУ для каждого из фильтров.

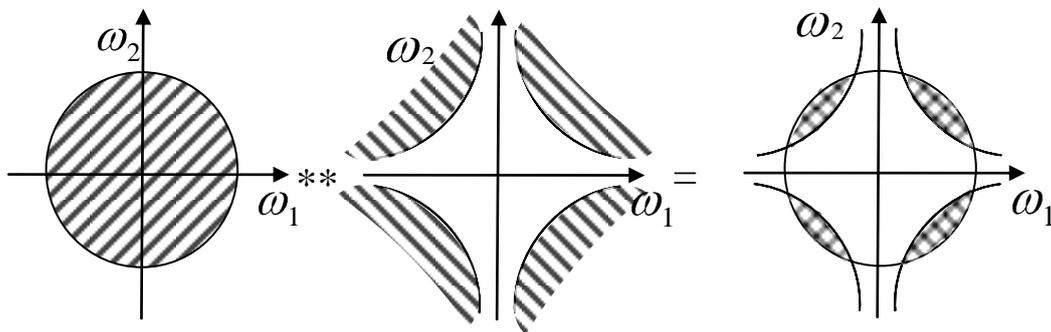


Рис. 6.5

С другой стороны, имея набор некоторых подпрограмм стандартных простых фильтров, можно быстро получать системы, фильтрующие сигналы на основе конвейерной схемы.

Объем ЗУ, требуемый для реализации такой фильтрации равен  $\max \sum H_z^{(i)}$ .

Двухмерный БИХ-фильтр можно построить, используя параллельное соединение более простых фильтров (рис. 6.6).

В этом случае результирующая передаточная функция

$$H_z^P(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^N H_z^{(i)}(z_1, z_2),$$

отсюда

$$H_z^P(z_1, z_2) = \frac{A_z^P(z_1, z_2)}{B_z^P(z_1, z_2)} = \frac{\sum_{j=1}^N \prod_{i \neq j}^N A_z^{(j)}(z_1, z_2) \cdot B_z^{(i)}(z_1, z_2)}{\prod_{i=1}^N B_z^{(i)}(z_1, z_2)}.$$

Как и в случае каскадного фильтра, полином-знаменатель  $H_z^P(z_1, z_2)$  можно разложить на множители.

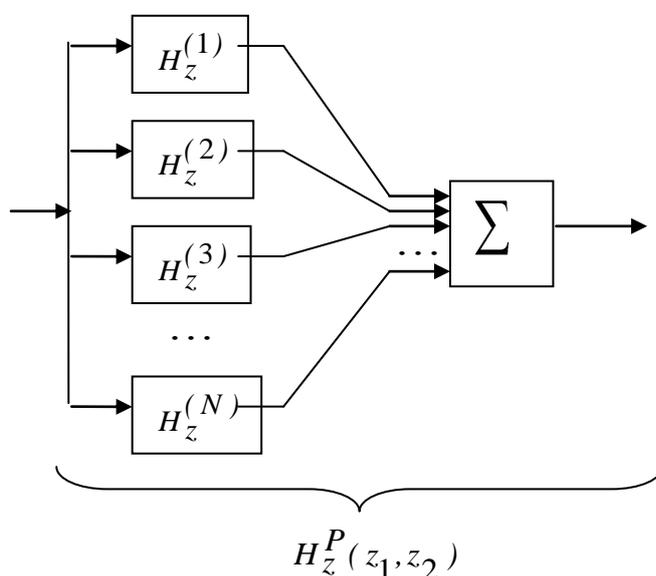


Рис. 6.6 Двухмерный БИХ-фильтр из параллельно соединенных более простых фильтров

Следовательно, параллельная форма не годится для реализации двухмерной рациональной передаточной функции. Однако синтезировать полезные двухмерные БИХ-фильтры с помощью параллельной архитектуры можно. Удобно строить, например, многополосовые фильтры.

Параллельная архитектура может быть полезна, когда реализуется БИХ-фильтр с импульсным откликом не ограниченным первым квадрантом, например, симметричные фильтры.

В этом случае импульсный отклик с опорной областью на все плоскости  $(n_1, n_2)$  можно разбить на четыре отдельных отклика, определенных каждый на одном квадранте. Затем строятся фильтры для каждого из квадрантов, а далее, соединив все четыре фильтра параллельно, получаем четырехквадрантный импульсный отклик.

Параллельную структуру, так же как и последовательную, можно трактовать двояким образом.

Можно организовать параллельную работу каждого из  $H_z^{(i)}(z_1, z_2)$  фильтров с одними и теми же входными данными, суммируя результат. Объем памяти для результирующего фильтра равен сумме объемов для каждого из составляющих его фильтров.

С другой стороны можно использовать подпрограмму, реализующую фильтр в общем виде, как и в случае последовательного соединения фильтров. При параллельной реализации эта подпрограмма запускается  $N$  раз с одними и теми же входными данными, но с различными коэффициентами. Затем  $N$  выходных сигналов складываются – при таком подходе, суммарный объем памяти уменьшается.

## 6.2. Итерационные методы реализации двухмерных БИХ-фильтров

Рассмотрим еще один подход к реализации двухмерного цифрового фильтра с рациональной передаточной функцией. В том случае если нельзя получить все отсчеты одновременно (в противоположность случаю обработки изображений, когда имеем всю картину целиком), целесообразно обрабатывать выходной сигнал совместно с полученным выходным для формирования новой итерации выходного сигнала. Такая итерационная реализация использует известную концепцию обратной связи для последовательного формирования все лучших и лучших аппроксимаций требуемого выходного сигнала.

### 6.2.1. Базовая итерационная схема

Одним из побудительных мотивов использования принципа итерации является стремление получить БИХ-фильтры с импульсными откликами, которые нельзя реализовать в рекурсивной форме.

В одномерном случае передаточную функцию БИХ-фильтра можно разложить на множители так, что в ней выделяются казуальная и антиказуальная части, которые можно реализовать отдельно с помощью разностных уравнений.

Однако в случае многомерных сигналов отсутствует основная теорема алгебры о разложении на множители, что затрудняет использование такого подхода, вынуждая прибегать либо к приближенной факторизации, либо синтезировать лишь передаточные функции, факторизуемые явным образом.

Итерационная реализация предоставляет третью возможность и, кроме того, дает возможность учитывать граничные условия.

Чтобы сделать обозначения менее громоздкими, опишем итерационную реализацию с помощью частотного отклика КИХ-фильтра

$H(\omega_1, \omega_2)$ , а не его передаточной функции  $H_z(z_1, z_2)$ .

В общем случае  $H(\omega_1, \omega_2)$  можно представить как:

$$\begin{aligned}
H(\omega_1, \omega_2) &= \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)} = \\
&= \frac{\sum_{l_1} \sum_{l_2} a(l_1, l_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot l_1 - j \cdot \omega_2 \cdot l_2)}{\sum_{k_1} \sum_{k_2} b(k_1, k_2) \cdot \exp(-j \cdot \omega_1 \cdot k_1 - j \cdot \omega_2 \cdot k_2)},
\end{aligned}$$

где  $a(l_1, l_2)$  и  $b(k_1, k_2)$  – последовательности конечной протяженности.

Как и ранее, будем считать, что отношение нормировано, т. е.  $b(0,0) = 1$ .

Определим новый тригонометрический полином  $C(\omega_1, \omega_2)$ :

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - B(\omega_1, \omega_2),$$

тогда

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)}.$$

Если считать, что  $X(\omega_1, \omega_2)$  – спектр входного сигнала  $x$ , а  $Y(\omega_1, \omega_2)$  – выходного сигнала  $y$ , и  $|X(\omega_1, \omega_2)|$  и  $|Y(\omega_1, \omega_2)|$  ограничены, то

$$Y(\omega_1, \omega_2) = H(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)}.$$

Умножая выражения справа и слева от знака равенства на  $[1 - C(\omega_1, \omega_2)]$  и переставив сомножители, получаем неявное соотношение:

$$Y(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) \cdot Y(\omega_1, \omega_2). \quad (6.4)$$

В пространственной области это выражение принимает вид

$$y(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** y(n_1, n_2), \quad (6.5)$$

где, как и раньше, две звездочки означают двумерную свертку.

Выражения (6.4) и (6.5) определяют неявное соотношение между входными и выходными сигналами и коэффициентами БИХ-фильтра, однако они совсем не обязательно указывают удобный или даже осуществимый способ вычисления последовательности  $y(n_1, n_2)$  по данному сигналу  $x(n_1, n_2)$ .

Предположим, однако, что мы располагаем хорошей оценкой значения выходного сигнала. Подставив это значение в правую часть выражения (6.5) вместо  $y(n_1, n_2)$ , можно получить лучшее приближение к  $y(n_1, n_2)$ . Естественно, этот процесс можно продолжить.

Пусть  $y_{i-1}(n_1, n_2)$  представляет собой  $(i-1)$ -е приближение к истинному выходному сигналу  $y(n_1, n_2)$ , тогда  $i$ -е приближение можно найти из соотношения:

$$y_i(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** y_{i-1}(n_1, n_2) \quad (6.6)$$

В частотной области этому выражению соответствует

$$Y_i(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) \cdot Y_{i-1}(\omega_1, \omega_2) \quad (6.7)$$

Зададимся теперь вопросом: сходится ли последовательность приближений  $y_i(n_1, n_2)$  к истинному выходному сигналу  $y(n_1, n_2)$ ? Ответить на этот вопрос легче, рассматривая частотную область.

Для удобства будем считать, что  $Y_{-1}(\omega_1, \omega_2) = 0$ , тогда:

$$Y_0(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2), \quad (6.8a)$$

$$Y_1(\omega_1, \omega_2) = \left[ A(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) \cdot A(\omega_1, \omega_2) \right] X(\omega_1, \omega_2) \quad (6.85)$$

и т. д.

На  $I$ -й итерации получим:

$$Y_1(\omega_1, \omega_2) = \left[ A(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=0}^I C^i(\omega_1, \omega_2) \right] \cdot X(\omega_1, \omega_2). \quad (6.9)$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^I C^i(\omega_1, \omega_2) = \frac{1 - C^{I+1}(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)}, \quad (6.10)$$

тогда

$$Y_1(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{1 - C^{I+1}(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)} \cdot X(\omega_1, \omega_2). \quad (6.11)$$

Далее, если принять

$$|C(\omega_1, \omega_2)| < 1, \quad (6.12)$$

то

$$\lim_{I \rightarrow \infty} Y_1(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2)}{1 - C(\omega_1, \omega_2)} = Y(\omega_1, \omega_2) \quad (6.13)$$

что и требовалось.

В сущности, каждая итерация уравнения (6.7) порождает новый член бесконечной геометрической прогрессии. Если условие (6.12) выполняется, то прогрессия сходится. В этом случае можно доказать, что при  $i \rightarrow \infty$   $Y_i(\omega_1, \omega_2)$  равномерно сходится к  $Y(\omega_1, \omega_2)$ , а  $y_i(n_1, n_2)$  равномерно сходится к  $y(n_1, n_2)$ .

Поскольку  $a(n_1, n_2)$  и  $b(n_1, n_2)$  – массивы конечной протяженности, вычисления, выполняемые на каждой итерации, явля-

ются операциями КИХ-фильтрации.

Таким образом, рациональный частотный отклик  $H(\omega_1, \omega_2)$  двумерного БИХ-фильтра можно получить с помощью бесконечного числа операций БИХ-фильтрации.

Можно представить описанную итерационную процедуру (6.6) как фильтрацию простым цифровым фильтром первого порядка, обрабатывающим не последовательность значений отсчетов, а последовательность сигналов. Чтобы лучше пояснить эту аналогию, слегка обобщим входной сигнал, рассматривая его как функцию номера итераций  $i$ , т.е. в виде  $x_i(n_1, n_2)$ .

Для рассмотренного выше частного случая можно считать, что  $x_i(n_1, n_2)$  – одномерная ступенчатая функция переменной  $i$ , умноженная на  $x(n_1, n_2)$ :

$$x_i(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) \cdot u(i). \quad (6.14)$$

При такой обобщенной трактовке входного сигнала выражение (6.16) принимает вид (рис. 6.7)

$$y_i(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) ** x_i(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** y_{i-1}(n_1, n_2) \quad (6.15)$$

На каждой итерации оценка выходного сигнала поступает в цепь обратной связи. Оператор ПАМЯТЬ сохраняет результаты предыдущей итерации; он аналогичен одномерному оператору сдвига, которому в структурных схемах одномерных цифровых фильтров обычно соответствует блок  $z^{-1}$ . Однако в данном случае оператор ПАМЯТЬ сохраняет не значение одного отсчета, а весь сигнал.

Условие сходимости итераций является очень сильным ограничением:  $|C(\omega_1, \omega_2)| < 1$ . Не все устойчивые двумерные БИХ-фильтры удовлетворяют этому условию сходимости. Если

$C(\omega_1, \omega_2) \neq 1$ , БИХ-фильтр устойчив в смысле ОВВ.

Очевидно, что условие сходимости итераций  $|C(\omega_1, \omega_2)| < 1$ , является гораздо более сильным ограничением, чем условие устойчивости.

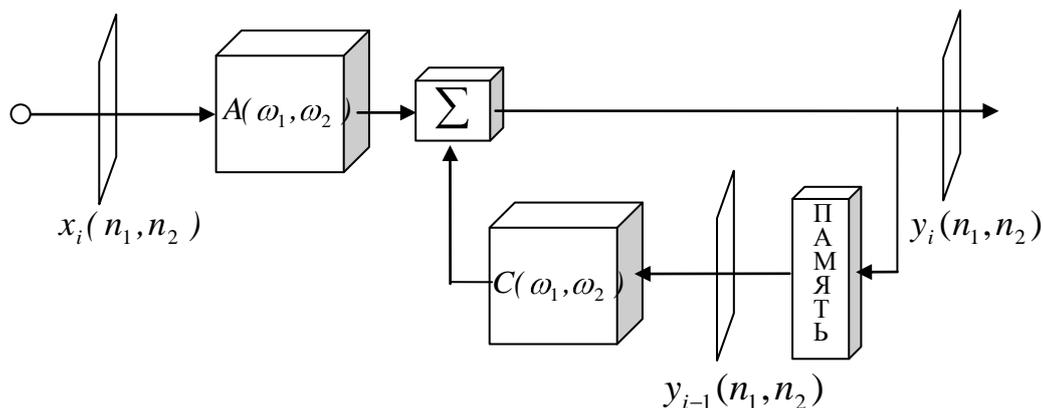


Рис. 6.7. Структурная схема итерационной реализации  $H(\omega_1, \omega_2)$

Проведение бесконечного числа итераций требует бесконечного объема вычислений. На практике ограничиваются конечным числом итераций, результате чего сигнал  $y_I(n_1, n_2)$  оказывается лишь аппроксимацией требуемого сигнала  $y(n_1, n_2)$ . Естественно рассмотреть величину ошибки аппроксимации. Это легче сделать в частотной области.

Фурье-спектры сигналов  $y_I(n_1, n_2)$  и  $y(n_1, n_2)$  связаны формулой:

$$Y_I(\omega_1, \omega_2) = Y(\omega_1, \omega_2) \cdot \left[ -C^{I+1}(\omega_1, \omega_2) \right] \quad (6.16)$$

В идеале отношение комплексных функций  $Y_I(\omega_1, \omega_2)/Y(\omega_1, \omega_2)$  должно равняться единице; поэтому абсолютное значение разности этого отношения и единицы можно

принять в качестве меры ошибки вследствие ограничения вычислений  $I$ -ми итерациями.

Приняв, что  $E(\omega_1, \omega_2)$  описывает спектральную ошибку как функцию от частоты, получим

$$E(\omega_1, \omega_2) = \left| \frac{Y_I(\omega_1, \omega_2)}{Y(\omega_1, \omega_2)} - 1 \right| = |C(\omega_1, \omega_2)|^{I+1}. \quad (6.17)$$

Если задать допустимый уровень спектральной ошибки в некоторой полосе частот  $\Omega$  с помощью условий

$$E(\omega_1, \omega_2) < \varepsilon \text{ для } (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad (6.18)$$

( $\varepsilon$  является малой положительной константой), то, используя выражение (6.17), можно определить необходимое число итераций для обеспечения заданной ошибки. И наоборот, если задано число итераций  $I$ , формулу (6.17) можно использовать для определения ограничений, накладываемых на  $|C(\omega_1, \omega_2)|$ .

Если процесс вычислений заканчивается после  $I$ -й итерации, эффективный частотный отклик описывается формулой:

$$H_I(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) \sum_{i=1}^I C^i(\omega_1, \omega_2), \quad (6.19)$$

что соответствует частотному отклику КИХ-фильтра, аппроксимирующему требуемый рациональный частотный отклик  $H(\omega_1, \omega_2)$ .

### 6.2.2. Обобщения итерационной схемы

Пожалуй, самым неприятным ограничением итерационной схемы, описанной в 6.2.1, является существование устойчивых БИХ-фильтров, не удовлетворяющих условию сходимости (6.12). Такие фильтры нельзя реализовать с помощью итерационных вычислений.

Рассмотрим некоторые обобщения, позволяющие выполнять итерационную реализацию любого устойчивого БИХ-фильтра.

Для упрощения выкладок рассмотрим частный случай, когда полином-знаменатель  $B(\omega_1, \omega_2)$  является чисто вещественной и строго положительной функцией

$$B(\omega_1, \omega_2) > 0. \quad (6.20)$$

Требуемый частотный отклик БИХ-фильтра можно записать следующим образом:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\lambda \cdot A(\omega_1, \omega_2)}{\lambda \cdot B(\omega_1, \omega_2)}, \quad (6.21)$$

где константа  $\lambda$  – параметры, которые требуется определить.

Теперь можно переопределить  $C(\omega_1, \omega_2)$  в виде

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - \lambda \cdot B(\omega_1, \omega_2). \quad (6.22)$$

Как и выше, построим итерационное выражение для нахождения частотного отклика  $\lambda \cdot A(\omega_1, \omega_2) / \lambda \cdot B(\omega_1, \omega_2)$ :

$$Y_i(\omega_1, \omega_2) = \lambda \cdot A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) \cdot Y_{i-1}(\omega_1, \omega_2). \quad (6.23)$$

Условие сходимости  $|C(\omega_1, \omega_2)| < 1$  остается без изменения, однако теперь функция  $C(\omega_1, \omega_2)$  содержит свободный параметр  $\lambda$ . Поскольку приняли, что функция  $B(\omega_1, \omega_2)$  строго положительна, то получается, что  $C(\omega_1, \omega_2) < 1$  для положительных значений  $\lambda$ . Для выполнения условия сходимости остается потребовать, чтобы выполнялось условие  $C(\omega_1, \omega_2) > -1$ .

Этого можно добиться, выбирая константу  $\lambda$  в интервале

$$0 < \lambda < \frac{2}{\max_{(\omega_1, \omega_2)} B(\omega_1, \omega_2)}. \quad (6.24)$$

В результате обеспечивается выполнение условия  $|C(\omega_1, \omega_2)| < 1$ .

Случай, когда функция  $B(\omega_1, \omega_2)$  вещественна и положительна, имеет определенную практическую ценность, поскольку включает в себя некоторые симметричные двумерные БИХ-фильтры, используемые в обработке изображений.

В более общем случае  $B(\omega_1, \omega_2)$  представляет собой комплексную тригонометрическую полиномиальную функцию, которая для устойчивого двумерного БИХ-фильтра удовлетворяет условию

$$B(\omega_1, \omega_2) \neq 0. \quad (6.25)$$

Для этого общего случая отклик  $H(\omega_1, \omega_2)$  можно записать в виде

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{B(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\lambda \cdot B^*(\omega_1, \omega_2) \cdot A(\omega_1, \omega_2)}{\lambda \cdot |B(\omega_1, \omega_2)|^2}, \quad (6.26)$$

здесь в знаменателе стоит вещественная и положительная функция  $|B(\omega_1, \omega_2)|^2$ , что дает возможность повторить приведенные выше выкладки.

Переопределив функцию:

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - \lambda \cdot |B(\omega_1, \omega_2)|^2, \quad (6.27)$$

получим новое итерационное выражение

$$Y_i(\omega_1, \omega_2) = \lambda \cdot B^*(\omega_1, \omega_2) \cdot A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) \cdot Y_{i-1}(\omega_1, \omega_2). \quad (6.28)$$

Как и ранее, функция  $C(\omega_1, \omega_2)$  должна удовлетворять условию сходимости  $|C(\omega_1, \omega_2)| < 1$ . Это обеспечивается выбором константы  $\lambda$  в интервале:

$$0 < \lambda < \frac{2}{\max_{(\omega_1, \omega_2)} B(\omega_1, \omega_2)}. \quad (6.29)$$

Итерационное выражение (6.28) позволяет реализовать любой устойчивый двумерный рациональный частотный отклик и, кроме того, обладает еще некоторыми интересными свойствами.

Например, легко показать, что фаза спектра сходится к нужному значению после первой же итерации:

$$\varphi \mathbf{Y}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} = \varphi \mathbf{Y}_i(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} \text{ для } i \geq 0 \quad (6.30)$$

с учетом  $\mathbf{Y}_{-1}(\omega_1, \omega_2) = 0$ .

Этот интересный факт объясняется тем, что фаза  $B^*(\omega_1, \omega_2)$  совпадает с фазой  $1/B(\omega_1, \omega_2)$ . Поэтому,

$$\begin{aligned} \varphi \mathbf{Y}_0(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} &= \varphi \mathbf{A}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} + \varphi \mathbf{B}^*(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} + \varphi \mathbf{K}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} = \\ &= \varphi \mathbf{A}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} - \varphi \mathbf{B}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} + \varphi \mathbf{K}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}} = \varphi \mathbf{Y}(\omega_1, \omega_2) \bar{\mathbf{Y}}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Последующие итерации лишь уточняют амплитуду спектра.

Итерационное выражение (6.28) обладает большей общностью по сравнению с более простым выражением (6.7) в том смысле, что позволяет реализовать более широкий класс частотных откликов. С другой стороны, оно требует большого объема вычислений.

Входной сигнал  $x(n_1, n_2)$  должен подвергаться фильтрации последовательно соединенными фильтрами  $\lambda \cdot B^*(\omega_1, \omega_2)$  и  $A(\omega_1, \omega_2)$ , а не одним фильтром  $A(\omega_1, \omega_2)$ . КИХ-фильтр, со-

ответствующий функции  $C(\omega_1, \omega_2)$ , также оказывается более сложным: он требует примерно вдвое больше вычислений по сравнению с реализацией прямой сверткой.

Переопределение функции  $C(\omega_1, \omega_2)$  не изменило соотношение между ошибкой  $E(\omega_1, \omega_2)$  и функцией  $C(\omega_1, \omega_2)$ .

Повторим для удобства вычислений это соотношение:

$$E(\omega_1, \omega_2) = |C(\omega_1, \omega_2)|^{I+1}. \quad (6.32)$$

Если в какой-то полосе частот функция  $|C(\omega_1, \omega_2)|$  близка к нулю, то ошибка  $E(\omega_1, \omega_2)$  в этой полосе частот будет быстро приближаться к нулю по мере увеличения номера итерации. Наоборот, если для некоторой спектральной области функция  $|C(\omega_1, \omega_2)|$  близка к единице, то ошибка в этой области будет оставаться значительной даже после нескольких итераций.

Иногда желательно иметь возможность перераспределять ошибки в частотной плоскости, например, для того, чтобы распределить их более равномерно по всей полосе частот или, наоборот, чтобы уменьшить ошибки в пределах более важной полосы частот за счет относительно менее важной полосы.

Этого можно добиться с помощью еще одного обобщения. Вместо множителя  $\lambda \cdot B^*(\omega_1, \omega_2)$  в выражениях (6.26) и (6.27) можно использовать более общую частотно-зависимую функцию релаксации  $\lambda(\omega_1, \omega_2)$ . Тогда, можно записать

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{\lambda(\omega_1, \omega_2) \cdot A(\omega_1, \omega_2)}{\lambda(\omega_1, \omega_2) \cdot B(\omega_1, \omega_2)} \quad (6.33)$$

и снова переопределить функцию  $C(\omega_1, \omega_2)$  следующим образом:

$$C(\omega_1, \omega_2) = 1 - \lambda(\omega_1, \omega_2) \cdot B(\omega_1, \omega_2). \quad (6.34)$$

Итерационное выражение примет вид

$$Y_i(\omega_1, \omega_2) = \lambda(\omega_1, \omega_2) \cdot A(\omega_1, \omega_2) \cdot X(\omega_1, \omega_2) + C(\omega_1, \omega_2) \cdot Y_{i-1}(\omega_1, \omega_2). \quad (6.35)$$

Теперь следует так выбрать  $\lambda(\omega_1, \omega_2)$ , чтобы в важной для нас полосе частот выполнялось условие  $|C(\omega_1, \omega_2)| \cong 0$ . (Теоретически можно было бы выбрать функцию  $\lambda(\omega_1, \omega_2) = B^{-1}(\omega_1, \omega_2)$  и ограничиться одной итерацией, но реализовать  $B^{-1}(\omega_1, \omega_2)$  непосредственно невозможно.)

Из практических соображений ограничиваемся функциями  $\lambda(\omega_1, \omega_2)$ , которые являются частотными откликами КИХ-фильтров. Расширив пространственную протяженность обратного преобразования Фурье-функции  $\lambda(\omega_1, \omega_2)$ , можно принудительно уменьшить  $|C(\omega_1, \omega_2)|$ . Однако чем больше пространственная протяженность, тем больше объем вычислений на каждой итерации выражения (6.35).

Таким образом, приходится идти на компромисс между объемом вычислений на каждой итерации и числом итераций, требуемых для снижения ошибки  $E(\omega_1, \omega_2)$  до допустимого значения в заданной полосе частот.

### **6.2.3. Усечение, граничные условия и ограничения сигнала**

Оператор ПАМЯТЬ на рис 6.7, который должен хранить весь сигнал, имеет конечную емкость. Однако по мере продолжения итераций протяженность сигнала  $Y_i(n_1, n_2)$  растет. В какой-то момент она превысит имеющийся объем памяти, и информация, необ-

ходимая для последующих итераций, будет потеряна.

Поэтому возникает естественный вопрос: Как повлиять на конечный результат усечения оценки сигнала на каждой итерации?

Рассмотрим более простое итерационное выражение (6.6).

Для входного сигнала  $x(n_1, n_2)$  можно (в принципе), используя это выражение, найти сигнал  $y(n_1, n_2)$ , удовлетворяющий неявному соотношению (6.5), которое для удобства приводится еще раз:

$$y(n_1, n_2) = a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** y(n_1, n_2). \quad (6.36)$$

Из-за ограниченной емкости оператора ПАМЯТЬ в действительности выполняется итерация

$$\tilde{y}_i(n_1, n_2) = T \left[ a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** \tilde{y}_{i-1}(n_1, n_2) \right] \quad (6.37)$$

где функция  $T \left[ f(n_1, n_2) \right]$  равна функции  $f(n_1, n_2)$  в пределах некоторой области  $I$  и равна нулю вне этой области.

Можно доказать, что существует сигнал  $\tilde{y}(n_1, n_2)$ , который удовлетворяет соотношению:

$$\tilde{y}(n_1, n_2) = T \left[ a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** \tilde{y}(n_1, n_2) \right]. \quad (6.38)$$

Разность между функциями  $y(n_1, n_2)$  и  $\tilde{y}(n_1, n_2)$  составляет ошибку усечения.

Определив сигнал ошибки

$$e(n_1, n_2) = y(n_1, n_2) - \tilde{y}(n_1, n_2), \quad (6.39)$$

можно получить неявное выражение для  $e(n_1, n_2)$ , воспользовавшись тем, что оператор усечения линеен, дистрибутивен по от-

ношению к сложению и идемпотентен ( $T \llbracket [x] \rrbracket \equiv T[x]$ ):

$$\begin{aligned}
 & T \llbracket (n_1, n_2) \rrbracket \equiv T \llbracket y(n_1, n_2) - \tilde{y}(n_1, n_2) \rrbracket \\
 & = T \llbracket (n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** y(n_1, n_2) \rrbracket \\
 & \quad - T \llbracket (n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + c(n_1, n_2) ** \tilde{y}(n_1, n_2) \rrbracket \\
 & = T \llbracket (n_1, n_2) ** y(n_1, n_2) \rrbracket - T \llbracket (n_1, n_2) ** \tilde{y}(n_1, n_2) \rrbracket \\
 & = T \llbracket (n_1, n_2) ** \cancel{y(n_1, n_2)} - \tilde{y}(n_1, n_2) \rrbracket \\
 & = T \llbracket (n_1, n_2) ** e(n_1, n_2) \rrbracket
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Таким образом, в области  $I$  сигнал ошибки

$$e(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) ** e(n_1, n_2) \text{ для } (n_1, n_2) \in I. \tag{6.41}$$

Вне области  $I$  сигнал ошибки просто равен  $y(n_1, n_2)$ , поскольку  $\tilde{y}(n_1, n_2) = 0$ .

Сигнал ошибки  $e(n_1, n_2)$  можно получить итеративным путем с учетом граничных условий, а именно:

$$e_i(n_1, n_2) = \begin{cases} c(n_1, n_2) ** e_{i-1}(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \in I, \\ y(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \notin I. \end{cases} \tag{6.42}$$

Выражение (6.42) можно рассматривать как частный случай более общего итерационного выражения

$$f_i(n_1, n_2) = \begin{cases} a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + \\ + c(n_1, n_2) ** e_{i-1}(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \in I, \\ b \cdot c(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \notin I. \end{cases} \tag{6.43}$$

где  $f_i(n_1, n_2)$  –  $i$ -я оценка выходного сигнала;  $x(n_1, n_2)$  – входной сигнал, а  $b \cdot c(n_1, n_2)$  граничные условия.

Граничные условия определены в области  $J$ , которая в общем случае охватывает область  $I$ , как показано на рис. 6.8. Ширина области зависит от пространственной протяженности множества коэффициентов  $c(n_1, n_2)$ . Вообще говоря, область  $J$  должна быть достаточно широкой, чтобы вместить множество  $c(n_1, n_2)$ , когда функция  $f_i(n_1, n_2)$  вычисляется для значений  $(n_1, n_2)$ , находящихся на краях области  $I$ .

Поскольку  $y(n_1, n_2) = \tilde{y}(n_1, n_2) + e(n_1, n_2)$ , можно показать, что  $y(n_1, n_2)$  – решение итерационного уравнения:

$$y_i(n_1, n_2) = \begin{cases} a(n_1, n_2) ** x(n_1, n_2) + \\ + c(n_1, n_2) ** y_{i-1}(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \in I, \\ y(n_1, n_2) & \text{для } (n_1, n_2) \notin I. \end{cases} \quad (6.44)$$

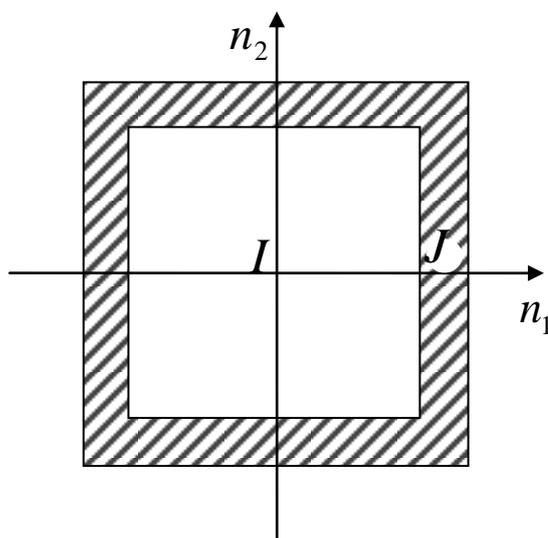


Рис. 6.8 Граничные условия определены в области  $J$ , которая в общем случае охватывает область  $I$

Таким образом, несмотря на эффекты усечения, истинный сигнал по-прежнему можно вычислить, если известны его значения вне области  $I$ . (Если требуется получить ответ только внутри об-

ласти  $I$ , то значения  $y(n_1, n_2)$  должны быть известны в области  $J$ , а не вне области  $I + J$ .)

Для демонстрации использования граничных условий с целью уменьшения эффектов усечения рассмотрим простой одномерный пример.

**Пример**

Пусть итерационное уравнение

$$y_i(n) = A \cdot \delta(n) + b \cdot y_{i-1}(n-1) + b \cdot y_{i-1}(n+1) \quad (6.45)$$

имеет решение

$$y(n) = a^{|n|}, \quad (6.46)$$

параметры  $A$  и  $b$  связаны с константой  $a$  следующим образом:

$$A = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \quad b = \frac{a}{1+a^2} \quad (6.47)$$

На рис. 6.9,а показана функция  $y(n)$  для случая  $a = 0,5$ .

Предположим теперь, что имеет место усечение, так что выражение (6.45) принимает вид:

$$\tilde{y}_i(n) = \begin{cases} A \cdot \delta(n) + b \cdot \tilde{y}_{i-1}(n-1) + b \cdot \tilde{y}_{i-1}(n+1) & \text{при } |n| < 4 \\ 0 & \text{при } |n| \geq 4 \end{cases} \quad (6.48)$$

На рис. 6.9,б показаны значения  $\tilde{y}(n)$ , полученные итерированием (6.48) до получения сходимости. Разность  $y(n) - \tilde{y}(n)$  представлена на рис. 6.9,в.

Истинные значения  $y(n)$  можно получить, используя усеченную итерацию, если ввести корректирующие граничные условия

в точках  $n = \pm 4$ , а именно:  $y(\pm 4) = a^2 = 0,0625$ .

Для иллюстрации процесса сходимости к истинному решению на рис. 6.10 показан выходной сигнал после  $i=2, 10, 20$  и  $70$  итераций.

В процесс итераций можно также включить ограничения, накладываемые на сигнал, хотя этот вопрос детально мы рассматривать не будем. Наложение граничных условий можно рассматривать как наложение на выходной сигнал одного из видов ограничения.

В некоторых приложениях заранее может быть известно, что на истинный выходной сигнал наложены ограничения другого рода, например, сигнал должен быть строго положителен или иметь ограниченную полосу. В таких случаях использование оператора ограничения на каждой итерации обеспечивает соответствие выходного сигнала, если он существует, этим условиям.

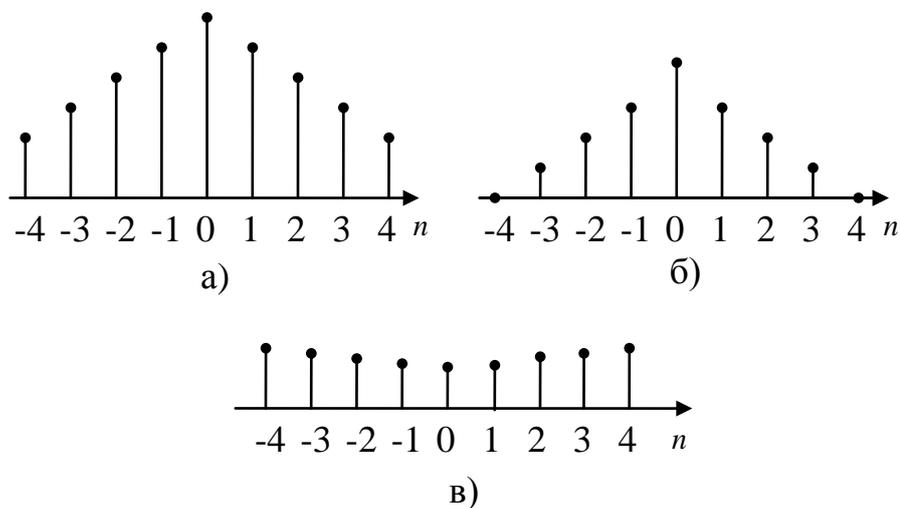


Рис. 6.9. Получение решения  $y(n)$  с усеченной итерацией: а – истинное значение; б – решение с усеченной итерацией; в – сигнал разности для простой итерационной реализации

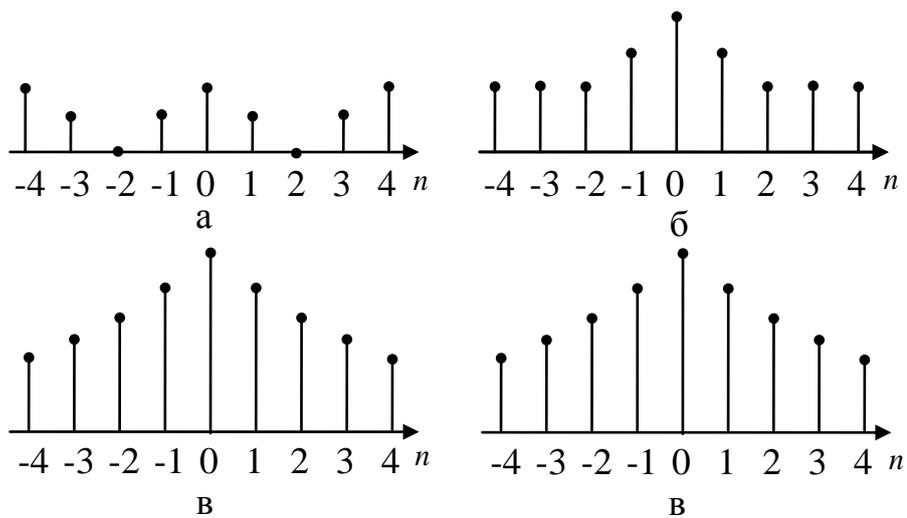


Рис. 6.10. Получение истинного решения  $y(n)$  с усеченной итерацией, используя граничные условия:  
а – 2, б – 10, в – 20, г – 70 итераций

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Оппенгейм, А.В. Цифровая обработка сигналов / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер. – М. : Связь, 1979. – 416 с.
2. Применение цифровой обработки сигналов / Под ред. Э. Оппенгейма. – М. : Мир, 1980. – 552 с.
3. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
4. Даджион, Д. Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, Р. Мерсеро. – М. : Мир, 1988. – 488 с.
5. Ярославский, Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. – М. : Радио и связь, 1987. – 296 с.
6. Хармут, Х. Теория секвентного анализа. Основы и применения; [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1980. – 574 с.
7. Анисимов, Б.В. Распознавание и цифровая обработка изображений / Б.В. Анисимов, В.Д. Курганов, В.К. Злобин. – М : Высшая школа, 1983. – 295 с.
8. Бейтс, Р. Восстановление и реконструкция изображений. [пер. с англ.] / Р. Бейтс, М. Мак-Доннелл. – М.: Мир, 1989. – 334 с.
9. Прет, У. Цифровая обработка изображений / У. Прет; [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1982. – 480 с.
10. Павлидис, Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений. – М. : Радио и связь, 1986. – 399 с.
11. Дуда, Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт. – М. : Мир, 1976. – 512 с.
12. Ярославский, Л.П. Методы цифровой голографии / Л.П. Ярославский, Н.С. Мерзляков. – М. : Наука, 1977. – 192 с.
13. Писаревский, А.Н. Системы технического зрения / А.Н. Писаревский и др. – Л.: Машиностроение, 1988. – 424 с.
14. Иванов, В.П. Трехмерная компьютерная графика / В.П. Иванов, А.С. Батраков. – М. : Радио и связь, 1995. – 223 с.
15. Хуанг, Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг и др.– М. : Радио и связь, 1984. – 224 с.

16. Крылов, В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля. – М. : Наука, 1974. – 224 с.
17. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
18. К. Де Бор. Практическое руководство по сплайнам; [пер. с англ.]. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
19. Курячий, М.И. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие. – Томск : Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 175 с.
20. Блейхуд, Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов; [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1989. – С. 448 с.
21. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов: учебник для вузов. – СПб. : Питер, 2006. – 751 с.
22. Аммерал, Л. Принципы программирования в машинной графике; [пер. с англ.]. – М. : Сол Систем, 1992. – 215 с.