КУДРИЦКИЙ Г. А.

НЕТРАДИЦИОННАЯ МАТЕМАТИКА В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ.

НАХОЖДЕНИЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЕЛ и определение простых чисел

часть 1.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2011

Аннотация

В настоящей работе предлагается новый способ исследования делимости чисел (разложения чисел на множители). Взамен существующей теории сравнений, изучающей эти вопросы. Новый способ более перспективен, так как исследования ведутся в алгебраической форме, а аппарат алгебры более развит, чем теория сравнений.

Предисловие

В предлагаемой работе используется нетрадиционные подходы к теории чисел, что следует из самого названия. Целые положительные и целые отрицательные числа рассматриваются как единая числовая область (синтез). Как известно, любая прямая не параллельная оси абсцисс будет иметь значения ординат имеющих как отрицательные, так и положительные значения при изменении аргумента от -∞ до +∞. В данной работе такие прямые разделяются на две прямые, одна из которых, описывает положительные целые числа, а другая отрицательные целые числа и каждая из них имеет не равные по абсолютной величине (в общем случае) остатки при делении на какое-то положительное число. Но описать все подходы в предисловии это значит повторить всю работу целиком, что конечно невозможно. Все эти подходы описаны в самой работе. Перечислим только основные результаты, которые получены в результате подходов применяемых в данной работе:

1. Получена связь отрицательных и положительных чисел через их остатки.
2. Возможность в алгебраической форме описывать системы счисления. (Десятичная система счисления так же описана уравнениями первой степени).
3. Возможность в алгебраической форме разрабатывать теорию делимости и определения простых чисел рассматриваемую в теории сравнений.

1. Уравнения первой степени

1.1. Общие положения

Как известно любое арифметическое действие может быть произведено, когда в наличии имеются два числа. Зададим эти числа 0 и множество единиц. Зададимся целью с помощью этих чисел получить все целые числа, как положительные, так и отрицательные. Мысленно представим себе шахматную доску, из которой выделим два ряда. Будем писать на этих рядах (строчках), числа используя клеточки только одного какого-либо цвета. На нижней строчке напишем множество единиц. На верхней строчке напишем число нуль. Для образования положительных чисел условимся сложение производить слева направо. Первое сложение с числом 1 стоящим правее на нижней строчке даст в сумме число 1. Далее к этой полученной сумме прибавим еще единицу, в сумме получим число 2. и т. д. Вычитание будем производить в направлении справа налево. Первая разность при вычитании из нуля (нуль является уменьшаемым) положительной единицы даст разность -1. Из этой полученной разности вычтем следующую единицу, получим разность -2. и т. д.

Запишем эти две строчки.

$$\underleftarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)= -m\ldots,-3,\ -2,\ -1,\ \underline{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots}\ \underrightarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m) = m}$$

$$\underleftarrow{S_1^{|}}\mathbf{(m)\ldots,1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots}\ \underrightarrow{S_1^{|}}\mathbf{(m)}$$

где: $\underleftarrow{S}_{1}(m)$, $\underrightarrow{S}_{1}(m)$ обозначения действий вычитания и сложения (указывается стрелками), индекс 1 говорит о том, что уравнение первой степени.

m – количество операций сложения или вычитания ($1 \le m < \infty$).

$\underline{0}$, - обозначение числа, которое является первым уменьшаемым (слагаемым).

$\underrightarrow{S_1^{|}}(m) = \underleftarrow{S_1^{|}}(m) = S_1^{|}(m)$ – постоянное число, которое складывается или вычитается с последовательно получаемыми результатами сложения (вычитания)

Выберем в качестве первых слагаемых (вычитаемых) положительные числа $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, . . . , $\underline{B}$ каждому из этих чисел соответствует постоянное $S_1^{|}(m)$ 1, 2, 3, . . . , B. С помощью этих чисел образуем числовые ряды, подобные только что образованному.

$$\underleftarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)=-(m-1);\ \ldots;\ -2;\ \ -1;\ \ 0;\ \ 1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 4;\ \ 5;\ \ \ldots;}\ \underrightarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m) = m+1}$$

$$\mathbf{\ldots..\ \ 1,\ \ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ \ 1,\ 1,\ \ \ 1,\ \ \ldots}$$

$$\underleftarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)=-2\,(m-1);\ \ \ldots -6;\ -4;\ \ -2;\ \ 0;\ 2;\ \ 4;\ \ 6;\ \ 8;\ \ \ldots;}\ \underrightarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)=2m+2}$$

$$\mathbf{2,\ \ 2,\ \ \ 2,\ \ 2,\ 2,\ \ 2,\ \ 2,}$$

$$\underleftarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)=-3(m-1);\ \ \ldots;\ \ -9;\ \ -6;\ \ -3;\ \ 0;\ \ 3;\ \ 6;\ \ 9;\ \ 12;\ \ \ldots;}\ \underrightarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)=3m +3}$$

$$\mathbf{\ldots;3,\ \ \ 3,\ \ 3,\ \ 3,\ \ 3,\ \ 3,\ \ \ 3,}$$

. . . .

. . . .

$$\underleftarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)=-B(m-1);\ \ \ldots;\ \ -2B;\ \ \ -B;\ \ \ 0;\ \ B;\ \ 2B;\ \ 3B;\ \ \ldots;}\ \underrightarrow{S}_{\mathbf{1}}\mathbf{(m)= Bm+B} \qquad \mathbf{(1.1.1)}$$

.. .   . . .   B,   B, B,   B,   B,

Положительную постоянную B= { 1, 2, 3, 4, . . . , B } будем называть шагом последовательности. $1 \le B < \infty$

При выбранном шаге B=1 и <u>1</u> при сложении мы получили ряд натуральных чисел начинающийся с числа 2. Первое слагаемое <u>1</u> в нем отсутствует $\underrightarrow{S}_1(m) = m+1$, при изменении m от 1 до ∞. ($1 \le m < \infty$).

При B=2 и <u>2</u> мы получаем при сложении ряд положительных чисел кратных 2, но в этом ряду отсутствует число 2 и т. д.

Тоже самое наблюдается и при произвольном шаге B и <u>B</u>.

Выбранные нами постоянные +<u>B</u>={1, 2, . . ., B} являются наименьшими положительными числами, но не получаются в результате первого сложения. В результате первого сложения получаются числа на B единиц больше.

Другая картина наблюдается при движении в сторону вычитания так как $\underleftarrow{S}_1(m)= -B(m-1)$ при изменении +<u>B</u> от 1 до ∞ принимает все значения без пропуска отрицательных чисел получаемой последовательности. Число 0 в этом случае так же отнесем к области отрицательных чисел. Количество операций вычитания (m) лежит в области от 1 до ∞.

Наименьшим по абсолютной величине числом в области отрицательных чисел получаемых в результате вычитания является число 0 и далее по порядку следования –B. -2B. -3B, . . . при изменении m от 1 до ∞.

Выберем в качестве первого уменьшаемого (слагаемого) отрицательное число -<u>B</u> = { -<u>1</u>, -<u>2</u>, -<u>3</u>. . . . –<u>B</u>). Запишем результаты вычитания (сложения) в общем виде, так как вместо –<u>B</u> мы всегда можем подставить его значения (- 1, -2,- 3,- 4, . . . , -(B-1), -B).

$\underleftarrow{S}_1(m)= -B(m+1)$ . . . ,-3B, -2B, -<u>B</u>, 0, B, 2B, 3B, . . . $\underrightarrow{S}_1(m)=B(m-1)$

. . . B, B, B, B, B, B, . . . $S_1^{|}(m)$

где: $\underleftarrow{S}_1(m)$, $\underrightarrow{S}_1(m)$ обозначения функций получаемых в результате сложения (вычитания) при изменении количества операций сложения (вычитания) от 1 до ∞.

-<u>B</u> – обозначение числа являющегося первым слагаемым (уменьшаемым).

$S_1^{|}(m)$ – обозначение числа, которое многократно складывается или вычитается с получаемыми результатами сложения или вычитания.

Условимся числа являющиеся первыми слагаемыми (вычитаемыми) называть начальными.

Как видим при выборе начального числа отрицательным и равным по абсолютной величине шагу последовательности картина распределения меняется. Теперь при движении в отрицательную числовую область первая разность равна -2B, а нуль надо отнести к положительной числовой области, которая начинается с нуля и далее идут все положительные без пропуска целые числа, при последовательном придании m значении от 1 до ∞. Из приведенных примеров можно сделать вывод, что при построении рядов подобных приведенным, при выборе начального числа положительным для описания (без пропуска) положительных чисел, надо взять начальным числом число получаемое от первого вычитания, а для отрицательной числовой области начальное положительное число не меняется. Если же взять первым начальным число отрицательное -<u>B</u>, то для определения второго начального для описания отрицательных чисел надо взять число получаемое в результате первого сложения.

Запишем сказанное в математическом виде:

Пусть первое начальное $+\underline{B}$. Двигаемся в сторону вычитания.

$\underleftarrow{S}_1(1) = \underline{B}\text{-}B=0$

Далее идут результаты второго и последующих вычитаний.

$\underleftarrow{S}_1(2) = \underleftarrow{S}_1(1) – B$

$\underleftarrow{S}_1(3) = \underleftarrow{S}_1(2) – B = \underleftarrow{S}_1(1) – 2B$

$\underleftarrow{S}_1(4) = \underleftarrow{S}_1(3) – B = \underleftarrow{S}_1(1) – 3B$

. . . .

. . . .

$\underleftarrow{S}_1(m) = \underleftarrow{S}_1(1) – B(m\text{-}1) = \text{-}Bm + B$

В сторону сложения начальное число будет равно $\underleftarrow{S}_1(1) = 0$. Результат первого сложения будет:

$\underrightarrow{S}_1(1) = 0+\underline{B} = B$

Далее идут результаты второго и последующих сложений.

$\underrightarrow{S}_2(2) = \underrightarrow{S}_1(1) + B$

$\underrightarrow{S}_1(3) = \underrightarrow{S}_1(2) + B = \underrightarrow{S}_1(1) + 2B$

$\underrightarrow{S}_1(4) = \underrightarrow{S}_1(3) + B = \underrightarrow{S}_1(1) + 3B$

. . . .

. . . .

$\underrightarrow{S}_1(m) = \underrightarrow{S}_1(1) + B(m\text{-}1) = Bm$

Мы получили две формулы описывающие положительные и отрицательные числа кратные B, если $B \neq 1$. Число 0 относится в этом случае к отрицательной числовой области.

$$\left.\begin{aligned} &\underleftarrow{S}_1(m) = -\,Bm + B \\ &\underrightarrow{S}_1(m) = Bm \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.2)$$

где: $1 \leq m < \infty$. $+\underline{B}$ начальное число.

Для начального числа $\text{-}\underline{B}$ формулы будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\underleftarrow{S}_1(m) = \text{-}Bm \\ &\underrightarrow{S}_1(m) = Bm – B \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.3)$$

где: $1 \leq m < \infty$.

В обоих случаях выбора начального числа $\pm\underline{B}$ и 0 эти два числа являются по абсолютной величине наименьшими.

В приведенных примерах рассматривались случаи когда начальные числа принимали значения $\pm\underline{B}$ и 0, т. е. числа кратные $S_1^{|}(m) = B$ где: $1 \leq B < \infty$. Такой же подход можно применить и для случаев:

1. Начальное число не превосходит $S_1^{|}$(m) = B (начальное число≤B). Рассмотреть ряды получаемые, когда B принимает последовательно значения от 0 до B.

2. Начальное число превосходит по абсолютной величине $S_1^{|}$(m) =B и не является кратным ему |±<u>R</u>|>B. Это число также делится на положительное B и определяется последовательность к которой оно принадлежит с выводом формул при движении в стороны вычитания и сложения.

1. Рассмотрим первый случай. Начальными числами будем брать положительные числа, и записывать их в строчки. На верхней строчке построим последовательность чисел кратных B. Строчкой ниже начальным числом будет положительное число на единицу меньше B, т. е. число B-1. На следующей строчке начальным положительным числом будет число B-2 и т. д. На самой нижней строчке начальным числом будет нуль.

Построение 1.1.

Система уравнений первой степени.

-Bm+B ;. . .;-2B ; -B ; 0	B ; 2B ; 3B ;. . . ; Bm
-Bm+(B-1);. . .;-(2B+1); -(B+1); -1	B-1; 2B-1; 3B-1;. . . ; Bm-1
-Bm+(B-2);. . .;-(2B+2); -(B+2); -2	B-2; 2B-2; 3B-2;. . . ; Bm-2
-Bm+(B-3);. . .;-(2B+3); -(B+3); -3	B-3; 2B-3; 3B-3;. . . ; Bm-3
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
-B+3 ;. . .; -(3B-3); -(2B-3); -(B-3)	3 ; (B+3); 2B+3;. . . ;Bm-(B-3)
-Bm+2 ;. . .; -(3B-2); -(2B-2); -(B-2)	2 ; (B+2); 2B+2;. . . ;Bm-(B-2)
-Bm+1 ;. . .; -(3B-1); -(2B-1); -(B-1)	1 ; (B+1); 2B+1;. . . ;Bm-(B-1)
-Bm ;. . .; -3B ; -2B ; -B	0 ; (B+0); 2B ;. . . ;Bm-B

где: $1 \le m < \infty$; и $0 \le r \le B$ остатки для положительной числовой области.

$0 \ge -r \ge -B$ остатки для отрицательной числовой области.

Введем обозначения:

$r_B = B$; $r_{B-1} = B-1$; $r_{B-2} = B-2$; ... ; $r_3 = 3$; $r_2 = 2$; г, =1; $r_0 = 0$.

Остатки положительной числовой области.

$-r_0=0$; $r_{-1}= -1$; $r_{-2} = -2$; . . .; $r_{-(B-2)} = -(B-2)$; $r_{-(B-1)} = -(B-1)$; $r_{-(B-0)} = r_{-B} = -B$.

Остатки отрицательной числовой области.

Данная таблица составлена на основании приведенных рассуждений и проведена вертикальная черта, отделяющая отрицательную числовую область от положительной. Справа от черты в каждой из строчек стоят числа являющиеся остатками, так как при делении последующих за ними чисел для каждой из строчек они и будут являться остатками, что и видно из формул написанных для каждой из строчек. При m=1 эти формулы равны значениям остатков для каждой из строчек. Так же можно сказать и о числах стоящих слева от черты, эти числа будут являться остатками при делении отрицательных чисел на +B.

В дальнейшем подобные числовые построения будем называть упорядами (от слова упорядочить - привести в порядок).

Строчки, из которых состоит упоряд, будем называть последовательностями упоряда. Для последовательностей упоряда характерно то, что разность между рядом стоящими числами равна постоянному числу B в каждой из строчек. **Постоянную $S_1^{|}$(m) = B (см. начало работы) будем называть шагом**

упоряда, Любое целое число положительное или отрицательное, деленное на В дает какой-то остаток (-г) или (+г).
$-B \le -r < 0$ и $B \ge +r > 0$ соответственно.

Если делимое имеет остаток (-r), то этим самым будет определена его принадлежность к числовой последовательности все отрицательные числа которой будут иметь этот же остаток при делении на В. Остаток же положительных чисел, входящих в эту последовательность, будет определятся суммой двух чисел (-г) и В, то есть равен:

$$-r + B = (B-r) = r_{B-r} \tag{1.1.4}$$

Если же при делении положительного числа на В определится его принадлежность к какой - то последовательности с остатком (+r), то остаток для отрицательных чисел принадлежащих этой же последовательности будут определяться разностью между (+г) и В.

$$+r- B=-(B-r) = r_{-(B-r)} \tag{1.1.5}$$

Поэтому с учетом формул (1.1.4) и (1.1.5) можно сразу приступить к выводу математических выражений в общем виде пригодных для любой последовательности при подстановке реальных (+г) или (-г) а так же и В в полученные выражения.

Эти формулы при m = 1 должны давать остатки (+r) или (-r). Пусть при делении какого - либо отрицательного числа на В получен остаток (-r). Найдем формулу для чисел, составляющих положительную часть этой последовательности. По формуле (1.1.4) для первого суммирования имеем:

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(1) = -r + B = r_{-r+B} = B - r$$

где: $\underset{\rightarrow}{S}_1(1) = r_{B-r}$ остаток положительной части этой последовательности.

Для второго суммирования имеем:

$\underset{\rightarrow}{S}_1(2) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1) + B$ и далее для третьего, четвертого и т. д.

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(3) = \underset{\rightarrow}{S}_1(2) + B = \underset{\rightarrow}{S}_1(1) + 2B$$

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(4) = \underset{\rightarrow}{S}_1(3) + B = \underset{\rightarrow}{S}_1(1) + 3B$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1) + (m-1)B = Bm - (B-r_{B-r})$$

Так как $B \ge r_{B-r} \ge 0$, то $r_{в\cdot г} = B - r$ Следовательно конечная формула будет иметь вид:

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m) = Bm - (B - r) \tag{1.1.6}$$

где: $+ r_{B-r} = B - r$, то $- r = -(B - r_{B-r})$

Откуда:

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m) = B\,m - r \tag{1.1.6a}$$

$r-B < 0$, вторым слагаемым будет число равное шагу последовательности.
Сумма этих чисел $(r-B)+B=r$. Выпишем несколько первых значений для (m) = { r, r+B, r+2B, r+3B, и т. д. }

Для второго уравнения первым уменьшаемым остается положительное начальное r. Вычитаемым будет шаг последовательности. Теперь возьмем произвольное положительное число большее B. Разделив это число на B получим остаток (+г). Выведем формулу для отрицательных чисел входящих в последовательность, положительные числа которой имеют остаток (+г) при делении на B.

По формуле (1.1.5) результат первого вычитания будет:

$$\underleftarrow{S}_1(1) = r - B = r_{-(B-r)} = -r_{B-r}$$

где: $\underleftarrow{S}_1(1) = r-B = -r_{B-r}$ остаток для отрицательных чисел этой же последовательности.

Результат второго вычитания будет

$\underleftarrow{S}_1(2)=\underleftarrow{S}_1(1)-B$ и далее

$$\underleftarrow{S}_1(3) = \underleftarrow{S}_1(2) - B = \underleftarrow{S}_1(1) - 2B$$

$$\underleftarrow{S}_1(4) = \underleftarrow{S}_1(3) - B = \underleftarrow{S}_1(1) - 3B$$

$$\underleftarrow{S}_1(5) = \underleftarrow{S}_1(4) - B = \underleftarrow{S}_1(1) - 4B$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\underleftarrow{S}_1(m) = \underleftarrow{S}_1(m) - (m-1)B = -Bm + (B - r_{B-r})$$

Так как

$$-B \le -r_{(B-r)} \le 0$$

то

$$B - r_{(B-r)} = +r$$

и можем написать:

$$\underleftarrow{S}_1(m) = -Bm + (B - r_{B-r}) \qquad (1.1.7)$$

или

$$\underleftarrow{S}_1(m) = -Bm + r \qquad (1.1.7a)$$

Из всего сказанного следует, что каждая последовательность упоряда описывается двумя уравнениями.

При $0 \le r < B$

$$\left.\begin{aligned} &\underrightarrow{S}_1(m) = Bm - (B-r) > 0 \\ &\underleftarrow{S}_1(m) = -Bm + r < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.8)$$

При $0 \ge -r > -B$

$$\left.\begin{aligned} &\underleftarrow{S}_1(m) = -Bm + (B-r) < 0 \\ &\underrightarrow{S}_1(m) = Bm - r > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.9)$$

где: для пары уравнений (1.1.8) при выборе положительного начального + r первым вычитаемым из +r будет число B. Выпишем несколько первых значений для $\underleftarrow{S}_1(m) = \{ r-B, r-2B, r-3B,$ и т. д. $\}$; где: $r-B \le 0$**.**

Для пары уравнений (1.1.9) при выборе отрицательного начального -r, которое и будет являться первым слагаемым при движении в сторону сложения, а вторым слагаемым будет положительный шаг последовательности +B. Сумма этих двух чисел будет $-r+B<B$, т. е. являться остатком рассматриваемой

последовательности описывающей положительные числа. Выпишем несколько первых значений. $\underset{\rightarrow}{S}_1(m)$ = { -r+B, -r+2B, -r+3B, и т. д. }. В сторону вычитания первым уменьшаемым будет число $\underset{\rightarrow}{S}_1(1)$ = -r+B, т .е. остаток положительных чисел рассматриваемой последовательности, а вычитаемым будет шаг последовательности. Их разность будет: $\underset{\leftarrow}{S}_1(m)$ =(-r+B)-B= -r. Выпишем несколько первых значений отрицательных чисел рассматриваемой последовательности.

$\underset{\leftarrow}{S}_1(m)$ = { -r, -r-B, -r-2B, -r-3B, . . . }

В данной работе мы будем рассматривать только уравнения первой степени, потому что для поставленной задачи (смотри название работы) нам не понадобятся уравнения высших степеней.

Поэтому мы будем рассматривать только свойства, получаемые при сложении и вычитании последовательностей упорядов.

Для облегчения сверки получаемых результатов в общем виде (упоряд с шагом B) с уравнениями описывающими упоряды с конкретными шагами приведем два проверочных упоряда с B = 5 и B = 6.

Построение 1.2.

Упоряд с шагом B=5.

-5m + 5 . . . ; -10; -5; 0	**5; 10; 15; . . . 5m**
-5m + 4 . . . ; -11; -6; -1	**4; 9; 14; . . . 5m – 1**
-5m + 3 . . . ; -12; -7; -2	**3; 8; 13; . . . 5m – 2**
-5m + 2 . . . ; -13; -8; -3	**2; 7; 12; . . . 5m – 3**
-5m + 1 . . . ; -14; -9; -4	**1; 6; 11; . . . 5m – 4**
-5m . . . ; -15;-10; -5	**0; 5; 10; . . . 5m – 5**

Построение 1.3

Упоряд с шагом B=6

-6m + 6 . . . ; -12; -6; 0	**6; 12; 18; . . . 6m**
-6m + 5 . . . ; -13; -7; -1	**5; 11; 17; . . . 6m – 1**
-6m + 4 . . . ; -14; -8; -2	**4; 10; 16; . . . 6m – 2**
-6m + 3 . . . ; -15; -9; -3	**3; 9; 15; . . . 6m – 3**
-6m + 2 . . . ; -16;-10; -4	**2; 8; 14; . . . 6m – 4**
-6m + 1 . . . ; -17;-11; -5	**1; 7; 13; . . . 6m – 5**
-6m . . . ; -18;-12; -6	**0; 6; 12; . . . 6m – 6**

Важнейшей характеристикой чисел является их четность или нечетность. Поэтому для примера и взяты два упоряда один с четным, а другой с нечетным шагом.

При построении упоряда с произвольным целочисленным шагом B> 0 мы получили (B+1) последовательности. Две последовательности любого из упорядов (смотри так же и проверочные упоряды с шагами B=5 и B=6) содержат две последовательности содержащие число 0 и числа кратные B. В верхней строчке мы написали в положительной числовой области число +B, а по ранее изложенному мы имеем право на эту запись при выборе начального числа относящегося к отрицательной числовой области и этим числом может быть только число 0, так как только $0+B=B$. Потом строчками ниже мы записываем положительные числа на единицу меньшие числа стоящего в верхней строчке. Таким образом в самой нижней строчке в положительной числовой области мы получим число $0 < B$ относящееся к положительной числовой области и в самом деле первое начальное число получаемое от первого сложения для получения положительных чисел будет равно $0-B=-B$ ($-B+B=0$). Выпишем в две строчки значения $\underset{\rightarrow}{S}_1(1)$ и ниже строчкой, соответствующие значения для $\underset{\leftarrow}{S}_1(1)$ для каждой последовательности упоряда с шагом B.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\rightarrow}{S}_1(1)=\{B > B-1 > B-2 > B-3 > \ldots > 3 > 2 > 1 > 0\} \\ \underset{\leftarrow}{S}_1(1)=\{0 > -1 > -2 > -3 > \ldots > -B+3 > -B+2 > -B+1 > -B\} \end{array}\right\} \qquad (1.1.10)$$

Остатки для $\underset{\rightarrow}{S}_{!}(1)$ от 0 до $B-1$ получены первым сложением, а числа полученные всеми последующими сложениями будут выглядеть так, если обозначить $\underset{\rightarrow}{S}_{!}(1) = r_{k2}$ где $0 \le r_{k2} \le B-1$, и продолжить сложение то будем получать следующие числа $r_{k2}+B$, $r_{k2}+2B$, $r_{k2}+3B$, и т. д. Это говорит о том что все эти последовательности отличаются друг от друга только остатками, а целые части равны между собой при одних и тех же значениях m.

Остатки для $\underset{\leftarrow}{S}_1(1)$ от 0 до $-B+1$ получены так же первым вычитанием обозначим их через $-r_{k1}$ $0 \ge r_{k1} \ge -B+1$. то так же можем написать результаты получаемые от второго третьего и далее вычитаний $-r_{k1}-B$, $-r_{k1}-2B$, $-r_{k1}-3B$, и т. д. то есть целые части этих последовательностей равны между собой и последовательность отличается от другой последовательности только остатком. Таким образом, можно написать:

$$\left.\begin{array}{l} +r_{k2},\ +r_{k2}+B,\ +r_{k2}+2B,\ +r_{k2}+3B,\ \ldots \\ -r_{k1},\ -r_{k1}-B,\ -r_{k1}-2B,\ -r_{k1}-3B\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (1.1.11)$$

где: $\underset{\rightarrow}{S}_1(1)=+r_{k2}$, $\underset{\leftarrow}{S}_1(1)=-r_{k1}$ - остатки получаемые в результате первого сложения. $0 \le +r_{k2} < B$, $0 \ge -r_{k1} > -B$. (см. обозначения введенные при построении упоряда с произвольным шагом B).

Из выписанных первых значений (1.1.10) можно сделать вывод, что для определения к какой последовательности упоряда относятся числа, получаемые в результате проведения алгебраических действий с последовательностями упоряда достаточно произвести эти же алгебраические действия только с остатками последовательностей участвующих в этих действиях. Это возможно потому, что все целые части как показано в (1.1.10) при одних и тех же $m \ge 2$ равны между собой как для положительных, так и для отрицательных чисел.

В данной работе, как уже говорилось, будут рассматриваться только алгебраические действия сложения и вычитания, производимые с последовательностями упорядов.

Как видим, начальными числами для получения положительных остатков являются отрицательные остатки, а для получения отрицательных остатков начальными числами служат положительные остатки.

$$\left.\begin{aligned} &\underrightarrow{S}_1(1) = -r_{k1} + B = + r_{k2} > 0 \\ &\underleftarrow{S}_1(1) = +r_{k2} - B = - r_{k1} < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.12)$$

где: $-r_{k1}$ множество отрицательных остатков $0 \geq -r_{k1} \geq -B+1$

$+r_{k2}$ множество положительных остатков $0 \leq +r_{k2} \leq B-1$

$|-r_{k1}| \neq |+r_{k2}|$ в общем случае

Уравнения, которые при значении целочисленного аргумента m=1 как для отрицательной числовой области, так и для положительной числовой области принимают значения остатков $-r_{k1}$ и $+r_{k2}$ соответственно назовем исходными уравнениями.

Если снять ограничения изменения целочисленного аргумента m и рассматривать значения функций $\underleftarrow{S}_1(m)$ и $\underrightarrow{S}_1(m)$ при изменении аргумента m в диапазоне $-\infty < m < +\infty$, то каждая функция, связанная остатками как сказано в (1.1.11) будет описывать все значения функции с ней парной (см. 1.1.8; 1.1.9 и проверочные упоряды с B=6 и B=5).

При $\underrightarrow{S}_1(0)$ значение функции будет равно начальному числу для получения положительных чисел, то есть отрицательному остатку соответствующей последовательности. При $\underrightarrow{S}_1(-1)$ функция принимает значение второго отрицательного числа последовательности описывающей отрицательные числа и т. д.

И наоборот $\underleftarrow{S}_1(0)$ принимает значение положительного остатка рассматриваемой последовательности. Значение $\underleftarrow{S}_1(-1)$ принимает второе значение положительного числа входящего в эту последовательность и т. д.

Значения функций $\underrightarrow{S}_1(0) = -r_{k1}$ и $\underleftarrow{S}_1(0) = +r_{k2}$ связанные соотношением (1.1.11) говорят о том, что не произведено ни одного действия сложения и ни одного действия вычитания соответственно с шагом упоряда B.

Такие пары уравнений (функций), когда:

$$\left.\begin{aligned} &\underrightarrow{S}_1(0) = \underleftarrow{S}_1(1) = -r_{k1} \\ &\underleftarrow{S}_1(0) = \underrightarrow{S}_1(1) = +r_{k2} \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(1.1.13)}$$

назовём взаимообратимыми.

где: $-r_{k1}$ и $+r_{k2}$ остатки отрицательных и положительных чисел, соответственно, какой либо из последовательностей упоряда. $0 \geq -r_{k1} > -B$; $0 \leq +r_{k2} < B$.

На основании ранее изложенного пары формул (1.1.8) и (1.1.9) можно записать одной парой формул.

$$\left.\begin{aligned} &\underrightarrow{S}_1(m) = Bm - r_{k1} \\ &\underleftarrow{S}_1(m) = -Bm + r_{k2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.14)$$

где: $-r_{k1} = \{ -1, -2, \ldots, -(B-2), -(B-1) \}$ множество отрицательных остатков, получаемых при делении отрицательных чисел на шаг упоряда +B. $-1 \geq -r_{k1} > -B$.
$+r_{k2} = \{ (B-1), (B-2), \ldots, 2, 1 \}$ множество положительных остатков, получаемых при делении положительных чисел на шаг упоряда +B. $1 \leq +r_{k2} < B$.

Множества остатков $-r_{k1}$ и $+r_{k2}$ однозначно связаны между собой уравнениями (1.1.12) и свойством взаимообратимости (1.1.13).

Так как при последовательном изменении m от 1 до ∞ каждая последовательность упоряда описываемая парой уравнений $\underrightarrow{S}_1(m)$ и $\underleftarrow{S}_1(m)$ принимает все значения как положительных, так и отрицательных чисел в порядке их следования, то целочисленный аргумент m можно называть и порядковым номером чисел входящих в последовательности упоряда.

2. Уравнения с начальными числами $|\pm R| > B$.

Рассмотрим второй случай, когда первыми начальными числами являются числа $|\pm R| > B$.

Рассмотрим случай $+R > B$. При делении числа $+R$ на B мы получим какой-либо остаток из множества $+r_{k2}$. Условимся для сокращения записи употреблять только запись $+r_{k2}$ или $-r_{k1}$ подразумевая под этим, что имеется в виду какой либо остаток из упомянутых ранее множеств. Начальное число служащее первым слагаемым будет остаток для отрицательных чисел входящих в ту же последовательность в которой находится число $+R$.

$+r_{k2} - B = - r_{k1}$ (см. 1.1.12.)

откуда:

$\underset{\rightarrow}{S}_1(1) = B - r_{k1}$ и можно написать:

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m) = Bm - r_{k1} \qquad (1.1.14\text{-}1)$$

Из (1.1.14-1) найдём номер m_k под которым стоит число $+R$.

$Bm_k - r_{k1} = R$ откуда:

$$m_k = \frac{R + r_{k1}}{B} \qquad (1.1.15)$$

где: m_k – порядковый номер, под которым стоит число R. m_k – является целым числом поскольку из (1.1.12) следует $+r_{k2} + r_{k1} = B$, а число R при делении дает остаток $+r_{k2}$.

В данном случае $\underset{\rightarrow}{S}_1(1)$ и $\underset{\leftarrow}{S}_1(1)$ будут являться положительными числами, поэтому в отличие от последовательностей, где начальными числами являются остатки по абсолютной величине меньшие B, то сейчас мы можем включить число R, как в $\underset{\rightarrow}{S}_1(1)$, так и в $\underset{\leftarrow}{S}_1(1)$.

Пусть R будет первым числом в сторону сложения. Найдем какое приращение надо дать аргументу m чтобы получить число R находящееся уже в установленной последовательности. (Определен остаток). Будем давать приращения целочисленному аргументу m в (1.1.14-1).

$B(m+1) - r_{k1} = Bm + (B-r_{k1})$

$B(m+2) - r_{k1} = Bm + (2B-r_{k1})$

. . . .

. . . .

$B(m+n) - r_{k1} = Bm + (Bn-r_{k1})$

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,n) = Bm + (Bn-r_{k1}) \qquad (1.1.14\text{-}2)$$

где: $m = 1$, а n изменяется в пределах $0 \le n < \infty$ при $n = 0$ уравнение принимает значение исходного

Приравняем (1.1.14-2) числу R и увидим, что при $m = 0$ начальным числом будет число на B меньше и определяться приращением n.

$Bm + (Bn-r_{k1}) = B(m+n) - r_{k1} = R$

Уравнение (1.1.14-1) при значении $m = m_k$ так же равно R.

$Bm_k – r_{k1} = R$.

Приравняв левые части получим:

$m + n = m_k$ (1.1.16)

При $m = 1$ (1.1.14-2) становится равным R т. е. являться первой суммой чисел $Bn-r_{k1}$ и B (В сторону сложения) Из (1.1.16) значение n равно $n = m_k – 1$ при $n=0$ $m_k=1$.

Подставляя это значение m_k-1 вместо n в (1.1.14-2) получим

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,m_k) = Bm + [Bm_k – (B+r_{k1})] \qquad (1.1.14\text{-}3)$$

где: m_k - фиксированное значение, определяемое величиной R входящего в определенную уже последовательность.

m – значение аргумента $1 \le m < \infty$.

Подставив в (1.1.14-3) значение $m_k = \dfrac{R + r_{k1}}{B}$ определяемое формулой (1.1.15) получим:

$$Bm + [\, B\frac{R + r_{k1}}{B} - B – r_{k1}\,] = Bm + (R-B)$$

И окончательно имеем:

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) = Bm - (B-R) \qquad (1.1.17\text{-}1)$$

При $m = 1$ уравнение (1.1.17-1) принимает значение равное R, т. е. это означает, что число R является первым уменьшаемым при движении в сторону вычитания по свойству взаимообратимости (1.1.13). В сторону вычитания первым числом будет разность R-B.

$\underset{\leftarrow}{S}_1(1) = R – B$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(2) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1) – B = R – 2B$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(3) = \underset{\leftarrow}{S}_1(2) – B = R – 3B$

. . . .

. . . .

$\underset{\leftarrow}{S}_1(m) = R – Bm$

Окончательно запишем:

$$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) = R – Bm \qquad (1.1.17\text{-}2)$$

Получили пару уравнений при начальном числе $R > B$.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) &= Bm - (B-R) \\ \underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) &= - Bm + R \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.17)$$

где: $1 \le m < +\infty$, $B < R < +\infty$.

Эта пара уравнений обладает свойствами взаимообратимости. Найдем разности между $\underset{\rightarrow}{S}_1(m,R)$ и $\underset{\leftarrow}{S}_1(m,R)$. $\underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) > \underset{\leftarrow}{S}_1(mR)$.

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) - \underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) = 2Bm – B = B(2m-1). \qquad (1.1.17\text{-}3)$$

Числа полученной последовательности принадлежат упоряду с шагом 2B и остатком B т. е . находятся в противополжно-взаимообратимой последовательности упоряда с шагом 2B (см. 1.12 и 1.1.3). Если отнести эти числа к упоряду с шагом B, то они будут находится в симметрично-взаимообратимой последовательности и стоять на нечетных номерах 2m-1.

$2Bm – B = \{B, 3B, 5B, 7B, . . . \}$

где: $m = \{ 1, 2, 3, 4, . . . \}$ $1 \leq m < \infty$

Найдем разность:

$$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) - \underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) = -2Bm + B = -B(2m-1) \qquad (1.1.17\text{-}4)$$

Получили отрицательные числа противоположные (1.1.17-3)

$-2Bm + B = \{ -B, -3B, -5B, -7B, . . . \}$

где: $m = \{ 1, 2, 3, 4, . . . \}$

При выводе пары формул (1.1.17) мы пользовались свойствами взаимообратимости (1.1.13) и формулами (1.1.12), выведенными для начальных чисел меньших по абсолютной величине шага упоряда +B, т. е. для множеств остатков $-r_{k1}$ и $+r_{k2}$ однозначно связанных между собой. Для случаев же когда $| \pm R | > B$ такой однозначности нет, т. к. $| \pm R |$ может в одинаковой степени отнестись как к первым числам, получаемым при движении в сторону сложения, так и в сторону вычитания, т. е. наблюдается двузначность в отличие от исходных уравнений и нет изменения знаков (+) на (-) и наоборот.

При выборе начального числа $+R > B$ разберем эти два случая:

1. Число + R является первым уменьшаемым, а это означает, что оно является первой суммой при движении в сторону сложения. ($\underset{\rightarrow}{S}_1(1,R) = R$ при $m = 1$). Это так же означает, что R является вторым слагаемым, а первым слагаемым является число равное разности (R-B).

2. Число + R является первым слагаемым, а вторым слагаемым является число равное (R + B), которое является первым уменьшаемым при движении в сторону вычитания, т. е. первым числом $\underset{\rightarrow}{S}_1(1,R)$ при m=1.

Для пояснения сказанного отделим вертикальной чертой числа, полученные при первом сложении от чисел, полученных при первом вычитании.

$$\left.\begin{aligned} &1).\ \underset{\leftarrow}{S}_1(1,R) = R-B \mid R = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,R) \\ &2)\ \ \underset{\leftarrow}{S}_1(1,R) = R \mid R+B = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,R) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.12\text{-}1)$$

Первый случай соответствует паре уравнений (1.1.17).

Выведем пару уравнений для второго случая.

$\underset{\leftarrow}{S}_1(1,R) = R+B-B = R$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(2,R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1,R) – B = R-B$

$\underset{\leftarrow}{S}_!(3,R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(2,R) –B = R-2B$

. . . .

. . . .

$$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) = R – (m-1)B = -Bm + (B+R) \qquad (1.1.18\text{-}1)$$

Это уравнение (1.1.18-1) выведено при движении в сторону вычитания. Выведем уравнение в сторону сложения.

$\underset{\rightarrow}{S}_!(1,R) = R+B$

$\underset{\rightarrow}{S}_1(2,R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,R) + B = R+2B$

$\underset{\rightarrow}{S}_1(3,B) = \underset{\rightarrow}{S}_1(2,R) + B = R+3B$

. . . .

. . . .

$S_1(m,R) = R + mB = Bm + R$ (1.1.18-2)

где: $1 \leq m < +\infty$; $B < R < +\infty$ и число R не является кратным B.

Итак мы можем написать вторую пару уравнений для случая, когда число R является первым числом при движении в сторону вычитания, т. е. числом при проведении первого вычитания (m=1).

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) = Bm + R \\ \underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) = -Bm + (B+R) \end{array}\right\} \quad (1.1.18)$$

Напишем условия взаимообратимости для обоих случаев:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \underset{\rightarrow}{S}_1(0,R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1,R) = R - B \\ \quad\ \underset{\leftarrow}{S}_1(0,R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,R) = R \\ 2)\ \underset{\leftarrow}{S}_1(0,R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,R) = R + B \\ \quad\ \underset{\rightarrow}{S}_1(0,R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1,R) = R \end{array}\right\} \quad (1.1.13\text{-}1)$$

где: m принимает только два значения 0 и 1.

$B < R < +\infty$

Найдем разности между $\underset{\rightarrow}{S}_1(m,R)$ и $\underset{\leftarrow}{S}_1(m,R)$

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) - \underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) = 2Bm – B = B(2m- 1) \quad (1.1.18\text{-}3)$$

$$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,R) - \underset{\rightarrow}{S}_1(m,R) = -2Bm + B = -B(2m-1) \quad (1.1.18\text{-}4)$$

Сравнив с (1.1.17-1) и с (1.1.17-2) видим полное совпадение, поэтому рассуждения приведенные для формул (1.1.17-1) и (1,1.17-2) и выводы полностью такие же и их повторять нет смысла.

Для случая $-R < B$ ($|-R| > B$) можно произвести такие же рассуждения но эти рассуждения можно и опустить, так как из пояснений подобных (1.1.12-1) можно составить в такой же последовательности и пояснения для случая -R<B.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) = -R-B \mid -R = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R) \\ 2)\ \underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) = -R \mid -R+B = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R) \end{array}\right\} \quad (1.1.12\text{-}2)$$

Выведем пару уравнений для первого случая:

$\underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) + B = -R-B+B=-R$

$\underset{\rightarrow}{S}_1(2,-R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R) + B = -R +B$

$\underset{\rightarrow}{S}_1(3,-R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(2,-R) + B = -R + 2B$

. . . .

. . . .

$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) = -R + (m-1)B = Bm – (B+R)$ (1.1.19-1)

Уравнение (1.1.19-1) получено при движении в сторону сложения. Выведем уравнение для первого случая при движении в сторону вычитания.

$\underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1.-R) – B = -R-B$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(2,-R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) – B = -R-2B$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(3,-R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(2,-R) – B = -R-3B$

. . . .

. . . .

$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) = -R –mB = -Bm - R$ (1.1.19-2)

Мы получили пару уравнений для первого случая:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) = Bm – (B+R)\\&\underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) = -Bm - R\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.19)$$

где: $1 \le m < + \infty$; $B > -R > - \infty$.

Найдем разности:

$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) - \underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) = 2Bm – R = B(2m-1)$ (1.1.19-3)

$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) - \underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) = -2Bm + B = -B(2m-1)$ (1.1.19-4)

Рассмотрим второй случай (1.1.12-2)

$\underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R) = \underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) +B =-R+B$

$\underset{\rightarrow}{S}_1(2,-R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(1.-R) + B = -R + 2B$

$\underset{\rightarrow}{S}_1(3,-R) = \underset{\rightarrow}{S}_1(2,-R) + B = -R + 3B$

. . . .

. . . .

$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) = -R + Bm = Bm - R$ (1.1.20-1)

Выведем формулу при движении в сторону вычитания.

$\underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R) = -R$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(2,-R) = -R – B$

$\underset{\leftarrow}{S}_1(3,-R) = -R – 2B$

. . . .

. . . .

$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) = -R – (m-1)B = -Bm + (B-R)$ (1.1.20-2)

Итак, мы получили пару уравнений для второго случая (11-2), когда первым начальным числом является отрицательное число -R по абсолютной величине большее шага упоряда B.

$$\left.\begin{aligned}&\underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) = Bm – R\\&\underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) = -Bm + (B-R)\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.20)$$

Найдем разности:

$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) - \underset{\leftarrow}{S}_1(m.-R) = 2Bm – B = B(2m-1)$ (1.1.20-3)

$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,-R) - \underset{\rightarrow}{S}_1(m,-R) = -2Bm + B = -B(2m-1)$ (1.1.20-4)

Обе пары уравнений (1.1.19 и 1.1.20) обладают свойством взаимообратимости. Покажем это для обоих случаев.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \underset{\rightarrow}{S}_1(0,-R)=\underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R)=-R-B \\
\quad\ \underset{\leftarrow}{S}_1(0,-R)=\underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R)=-R \\
2)\ \underset{\leftarrow}{S}_1(0,-R)=\underset{\rightarrow}{S}_1(1,-R)=-R+B \\
\quad\ \underset{\rightarrow}{S}_1(0,-R)=\underset{\leftarrow}{S}_1(1,-R)=-R
\end{array}\right\} \qquad (1.1.13\text{-}2)$$

Сравнив результаты свойств взаимообратимости выведенные для первого начального числа +R [случай 1) в 1.1.13-1] и первого начального числа равного –R так же случай 1) в (1.1.13-2). Этим результатам соответствуют пары уравнений (1.1.17) и (1.1.19) соответственно из рассмотрения этих пар видим, что они отличаются друг от друга только знаком числа R (+) или (-) так же соответственно. То же самое можно сказать и о парах уравнений (1.1.18) и(1.1.20) которым соответствуют вторые случаи (1.1.13-1) и (1.1.13-2). т. е. стоящие на вторых строчках для случаев 1) и 2). Объединяя эти результаты можно написать:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \underset{\rightarrow}{S}_1(0,\pm R)=\underset{\leftarrow}{S}_1(1,\pm R)=\pm R-B \\
\quad\ \underset{\leftarrow}{S}_1(0,\pm R)=\underset{\rightarrow}{S}_1(1,\pm R)=\pm R \\
2)\ \underset{\leftarrow}{S}_1(0,\pm R)=\underset{\rightarrow}{S}_1(1,\pm R)=\pm R+B \\
\quad\ \underset{\rightarrow}{S}_1(0,\pm R)=\underset{\leftarrow}{S}_1(1,\pm R)=\pm R
\end{array}\right\} \qquad (1.1.13\text{-}3)$$

где: +R знак (+) означает, что рассматриваются пары уравнений (1.1.17) и (1.1.18). -R знак (-) означает, что рассматриваются пары уравнений (1.1.19) и (1.1.20). $|\pm R| > B$.

Во всех случаях независимо от знака и величины ±R [см. 1.1.17-3, 1.1.18-3, 1.1.19-3, 1.1.20-3 соответствуют $\underset{\rightarrow}{S}_1(m,\pm R)$ и 1.1.17-4, 1.1.18-4, 1.1.19-4, 1.1.20-4 соответствуют значениям $\underset{\leftarrow}{S}_1(m,\pm R)$] разности будут равны:

$$\underset{\rightarrow}{S}_1(m,\pm R)-\underset{\leftarrow}{S}_1(m,\pm R)=2Bm-B$$

$$\underset{\leftarrow}{S}_1(m,\pm R)-\underset{\rightarrow}{S}_1(m,\pm R)=-2Bm+B$$

Эти разности образуют противоположно –взаимообратимую последовательность упоряда с удвоенным шагом.

Условие взаимообратимости (1.1.13-3) соответствует случаю когд $|-R| = R$. При неравенстве абсолютных величин надо пользоваться условиями взаимообратимости (1.1.13-1) и (1.1.13-2). Все представленные пары уравнений обладают свойствами арифметических прогрессий (каждое уравнение из этой пары).

1.2. Упоряды с четными и нечетными шагами В

Пусть мы имеем упоряд, с четным шагом В. Тогда в этом упоряде содержится последовательность с положительным остатком +В/2 и отрицательным остатком -В/2. Так как В число четное то оно делится без остатка на 2, т. е. является целым числом и +В/2 < В. –В так же делится без остатка на 2 и так же является целым числом -В/2 > -В. Пусть при делении отрицательных чисел на В мы получили остаток $-r_{k1} = -B/2$. Число -В/2 является начальным числом для получения сложением положительных чисел.

$\underset{\rightarrow}{S}_1(1) = -r_{k1} + B = +r_{k2}$

Подставив значение $-r_{k1} = -B/2$ находим:

$\underset{\rightarrow}{S}_1(1) = -B/2 + B = B/2$ откуда $+r_{k2} = B/2$.

Т. е. мы выявили в упоряде с четным шагом В наличие последовательности которая содержит противоположные числа начиная с остатков $|-r_{k1}|=|+r_{k2}|$

Упоряды с нечетными шагами В таких последовательностей не имеют. Выпишем эту пару уравнений с противоположными числами, которая обладает так же свойствами взаимообратимости. (см. упоряды с В=5 и В=6).

$$\left.\begin{aligned} \underset{\rightarrow}{S}_1(m) &= Bm - B/2 \\ \underset{\leftarrow}{S}_1(m) &= -Bm + B/2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.1)$$

где: -В/2 остаток отрицательных чисел входящих в рассматриваемую последовательность.

+В/2 остаток положительных чисел входящих в эту же последовательность.

Уравнения (1.2.1) описывают непрерывную числовую последовательность целых чисел как отрицательных так и положительных которые при делении на В дают остатки -В/2 или +В/2 соответственно. Каждое из этих уравнений при умножении на -1 превращается в уравнение с ним парное (противоположное).

Последовательности упорядов с четными шагами содержащими противоположные числа с равными по абсолютной величине остатками назовем противоположно-взаимообратимыми последовательностями.

Рассмотрим две последовательности упоряда с произвольным шагом В, каждая из которых описывается двумя парными уравнениями.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\leftarrow}{S}_1(m) &= -Bm + B \\ \underset{\rightarrow}{S}_1(m) &= Bm \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{\leftarrow}{S}_1(m) &= -Bm \\ \underset{\rightarrow}{S}_1(m) &= Bm - B \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.3)$$

Последовательность (1.1.2) отличается от последовательности (1.1.3) только тем, что в (1.1.2) число 0 относится к отрицательной числовой области, а в (1.1.3) число 0 относится к положительной числовой области. Как последовательность (1.1.2), так и последовательность (1.1.3) описываются парами взаимообратимых уравнений. Но уравнения этих пар не являются противоположными, так как ни одно из этих уравнений не может быть получено умножением на -1 уравнения с ним парного, хотя каждое из них содержит в себе все числа противоположные другому. Но если отступить от правила и первым слагаемым брать число 0 при движении вправо и так же первым уменьшаемым брать число 0 при движении влево, то получим:

$$\underleftarrow{S}_1(m)=-Bm;\ \ldots;\ -3B;\quad -2B;\quad -B;\quad 0;\quad B;\quad 2B;\ \ldots;\ \underrightarrow{S}_1(m)=Bm$$

$$\ldots B \qquad B \qquad B \qquad B \qquad B \quad \ldots$$

Получили пару противоположных уравнений, но эти уравнения не отвечают условию взаимообратимости (1.1.13).

Такие же условия нарушения взаимообратимости относятся и к паре противоположных уравнений Bm - B и - Bm + B. Если же ввести два нуля один для положительной области, а другой нуль для отрицательной числовой области, то нарушится условие $S_1^{|}(m) = B$, так как появится в ряду (строчке) постоянных чисел B число 0, что недопустимо.

Из всего сказанного следует, что число 0 является общим, как для отрицательной числовой области, так и для положительной числовой области. Последовательности вида (1.1.2) или (1.1.3) будем называть симметрично - взаимообратимыми. При делении кратных B чисел на B, мы не получаем никаких остатков, но как увидим в дальнейшем запись этих последовательностей в виде (1.1.2) или (1.1.3) вполне оправдана. Симметрично - взаимообртимые последовательности содержатся в любом упоряде с любым целочисленным шагом B Значит в упорядах с четными шагами B содержатся последовательности противоположно - взаимообратимые и симметрично - взаимообратимые, а в упорядах с нечетными шагами B содержатся только симметрично - взаимообратимые последовательности.

1.3. Упоряды и системы счисления

В параграфе 1.1 введены обозначения остатков для последовательностей упорядов с произвольным целочисленным шагом B.

$r_0=0,\ r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=3\ ,\ \ldots\ ,\ r_{B-2}=B-2,\ r_{B-1}=B-1,\ r_B=B$

$r_{-B}=-B,\ r_{-B+1}=-B+1,\ \ r_{-B+2}=-B+2,\ \ldots\ r_{-2}=-2,\ r_{-1}=-1,\ \ r_0=0.$

Как известно остатки появляются тогда, когда числа не делятся нацело на B. В упорядах числа положительные и отрицательные группируются по последовательностям таким образом, что каждая из последовательностей содержит в себе как положительные, так и отрицательные числа остатки которых связаны между собой понятием взаимообратимости (см. 1.1.13), из которого следует непрерывность этих последовательностей.

Если взять какую либо B-ричную систему счисления и располагать числа этой системы (в порядке их следования по строчкам) следующим образом.

Для положительной числовой области на первой строчке расположим числа от 0 до B. На второй строчке расположим числа от B до 2B и т.д. Возрастание чисел в строчках идет слева направо. Для отрицательной числовой области над первой строчкой мы разместим отрицательные числа по правилам построения упорядов с соблюдением свойств взаимообратимости. Таким образом мы получим полное совпадение числовых последовательностей упоряда с шагом B, состоящего из (B+1) последовательностей с B-ричной системой счисления. В позиционных системах счисления принято обозначать цифры с помощью которых записываются числа одним знаком, что хорошо разработано в десятичной системе счисления (вместе с нулем применяется еще девять цифр). Значит следует различать системы счисления с B≤10 и B>10, так как для B-ричной системы счисления требуется (B-1) цифра, поэтому в данной работе наряду с девятью цифрами применяемыми в десятичной системе счисления будут применяться обозначения остатков приведенные в начале этого параграфа.

Таблица 1,3,1

10	20	30	40	50	60	70	80	90	$R_{10}0$	$R_{11}0$	$R_{12}0$	$R_{13}0$	$R_{14}0$	$R_{15}0$	100
R_{15}	$1R_{14}$	$2R_{13}$	$3R_{12}$	$4R_{11}$	$5R_{10}$	69	78	87	96	$R_{10}5$	$R_{11}4$	$R_{12}3$	$R_{13}2$	$R_{14}1$	$R_{15}0$
R_{14}	$1R_{12}$	$2R_{10}$	38	46	54	62	70	$7R_{14}$	$8R_{12}$	$9R_{10}$	$R_{10}8$	$R_{11}6$	$R_{12}4$	$R_{13}2$	$R_{14}0$
R_{13}	$1R_{10}$	27	34	41	$4R_{14}$	$5R_{11}$	68	75	82	$8R_{15}$	$9R_{12}$	$R_{10}9$	$R_{11}6$	$R_{12}3$	$R_{13}0$
R_{12}	18	24	30	$3R_{12}$	48	54	60	$6R_{12}$	78	84	90	$9R_{12}$	$R_{10}8$	$R_{11}4$	$R_{12}0$
R_{11}	16	21	$2R_{12}$	37	42	$4R_{13}$	58	63	$6R_{14}$	79	84	$8R_{15}$	$9R_{10}$	$R_{10}5$	$R_{11}0$
R_{10}	14	$1R_{14}$	28	32	$3R_{12}$	46	50	$5R_{10}$	64	$6R_{14}$	78	82	$8R_{12}$	96	$R_{10}0$
9	12	$1R_{11}$	24	$2R_{13}$	36	$3R_{15}$	48	81	$5R_{10}$	63	$6R_{12}$	75	80	89	90
8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	80
7	R_{14}	15	$1R_{12}$	23	$2R_{10}$	31	38	$3R_{15}$	46	$4R_{13}$	54	$5R_{11}$	62	69	70
6	R_{12}	12	18	$1R_{14}$	24	$2R_{10}$	30	36	$3R_{12}$	42	48	$4R_{14}$	54	$5R_{10}$	60
5	R_{10}	R_{15}	14	19	$1R_{14}$	23	28	$2R_{13}$	32	37	$3R_{12}$	41	46	$4R_{11}$	50
4	8	R_{12}	10	14	18	$1R_{12}$	20	24	28	$2R_{12}$	30	34	38	$3R_{12}$	40
3	6	9	R_{12}	R_{15}	12	15	18	$1R_{11}$	$1R_{14}$	21	24	27	$2R_{10}$	$2R_{13}$	30
2	4	6	8	R_{10}	R_{12}	R_{14}	10	12	14	16	18	$1R_{10}$	$1R_{12}$	$1R_{14}$	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	10

Так будет выглядеть таблица умножения в шестнадцатеричной системе счисления. В которой вместо цифр превышающих 9 применены остатки от R_{10} до R_{15}. Приведем эти обозначения: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16} = B =10. Для перевода чисел в привычную для нас десятичную систему счисления применяется известная формула.

$$K_nB^n + K_{n-1}B^{n-1} + \ ... \ + K_2B^2 + K_1B^1 + K_0B^0 \text{ - - - - - - - - - - - - - } (1.3.1)$$

где: B указывает систему счисления (упоряд с шагом B записанным в десятичной системе)

K_n, K_{n-1}, K_{n-2}, . . . , K_2, K_1, K_0 – для конкретного числа записанного в рассматриваемой системе K_0 это число единиц содержащееся в самом младшем разряде первого класса. Для K_1, K_2 и т. д. названий не придумано в отличии от десятичной системы. В десятичной системе счисления числа разбиваются на классы (в каждом классе три разряда). Так например в числе 122 999 цифры 999 принадлежат первому классу, а цифры 122 принадлежат второму классу. В первом классе справа налево стоит разряд единиц, потом разряд десятков и замыкает этот класс разряд сотен. Во втором классе так же справа налево единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч. Следующие классы описываются аналогично. B^0=1, B^1, B^2, B^3, . . . , B^n это фиксированные числа (определяются рассматриваемой системой счисления). K_0, K_1, K_2, K_3, . . . , K_n это числа для каждого числа различны и принимают значения от 0 до (B-1). При любом K стоящем перед какой-либо степенью B и равном K=B эта степень обнуляется, а K стоящее перед следующей по порядку степенью увеличивается на единицу. Следует отметить, что числовое значение K_0 это остаток в рассматриваемой системе счисления с основанием B. Так например число в 16-ричной системе счисления переведенное по формуле (1.3.1) в десятичную будет $3R_{15}=3\cdot16^1+15\cdot16^0=63_{(10)}$. Из приведенного примера видно, что приведенное число в шестнадцатеричной системе счисления имеет остаток 15 и это же число в десятичной системе счисления имеет остаток 3. Конечно не будут совпадать и другие разряды. Из этого следует, что признаки делимости разработанные для одной системы счисления не пригодны для любой другой системы счисления.

Прибавим к числу $3R_{15}$ единицу

$3R_{15(16)}+1 =3\cdot16^1+15\cdot16^0+1\cdot16^0=4\cdot16^1+0\cdot16^0=40_{(16)}=64_{(10)}$.

Построим упоряд с шагом равным B = 10 или другими словами изобразим десятичную систему счисления по правилам построения упорядов (смотри проверочные упоряды с B=5 и B=6 и упоряд с произвольным шагом B).

Таблица 1.3.2

-10m+10 . . .; -20; -10; 0;	10; 20; 30; . . . 10m
-10m+9 . . . ; -21; -11; -1;	9; 19; 29; . . . 10m-1
-10m+8 . . . ; -22; -12; -2;	8; 18; 28; . . . 10m-2
-10m+7 . . . ; -23; -13; -3;	7; 17; 27; . . . 10m-3
-10m+6 . . . ; -24; -14; -4;	6; 16; 26; . . . 10m-4
-10m+5 . . . ; -25; -15; -5;	5; 15; 25; . . . 10m-5
-10m+4 . . . ; -26; -16; -6;	4; 14; 24; . . . 10m-6
-10m+3 . . . ; -27; -17; -7;	3; 13; 23; . . . 10m-7
-10m+2 . . . ; -28; -18; -8;	2; 12; 22; . . . 10m-8
-10m+1 . . . ; -29; -19; -9;	1; 11; 21; . . . 10m-9
-10m . . . ; -30; -20; -10;	0; 10; 20; . . . 10m-10

Условимся называть упорядами построения у которых шаг B не записывается в виде B=10 ($1\leq B<\infty$), как в позиционных системах счисления. (см. проверочные упоряды с B=5 и B=6 у которых числа записаны в десятичной системе). А построения аналогичные десятичной и приведенной в этом параграфе шестнадцатиричной (где найден способ обозначения цифр больших девяти) называть позиционными системами счисления.

2. Нахождение делителей чисел

2.1. Вводная часть

При работе с большими числами записанными в виде дробных математических выражений возникают проблемы сокращения этих дробных выражений т. е. проблема сокращения этих дробей, заключающаяся в нахождении общих делителей для числителя и знаменателя дроби и последующего их сокращения на эти общие делители. Таблицы простых чисел отчасти решают эту задачу, но не решают проблему разложения чисел на множители.

В данной работе предлагается метод нахождения делителей для составных чисел. Для этой цели будет использоваться упоряд с B = 6 и десятичная система счисления. Использование упоряда с B=6 объясняется тем что в нем содержится только две последовательности с простыми числами это последовательности 6m-1 и 6m-5. Нахождение количества последовательностей содержащих простые в упоряде с произвольным целочисленным шагом B осуществляется с помощью функции Эйлера. Если шаг упоряда B является простым числом, то все последовательности входящие в этот упоряд содержат простые за исключением симметрично-взаимообратимых последовательностей, выделяющих все числа делящиеся на B.

Пусть дан упоряд с шагом B = $p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha n}$

где: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - простые числа

$\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n$ - показатели простых, с которыми они входять в разложение шага упоряда.

Упоряд с шагом B содержит B/p_1 последовательностей числа которых делятся на p_1 без остатка. Следовательно, количество последовательностей, не делящихся на p_1 будет равно:

$$B - \frac{B}{p_1} = \frac{B(p_1 - 1)}{p_1}$$

Из этого количества последовательностей на p_2 делятся:

$$\frac{B(p_1 - 1)}{p_1 p_2}$$ последовательностей.

Следовательно, количество последовательностей не делящихся на p_1 и p_2 будет равно:

$$\frac{B(p_1-1)}{p_1} - \frac{B(p_1-1)}{p_1p_2} = \frac{B(p_1-1)(p_2-1)}{p_1p_2}$$

Рассуждая таким же образом мы найдем количество последовательностей упоряда числа которых не делятся на простые, входящие в разложение шага упоряда. Конечная формула будет иметь вид:

$$\frac{B(p_1-1)(p_2-1)....(p_n-1)}{p_1p_2....p_n} = p_1^{\alpha 1-1}p_2^{\alpha 2-1}....p_n^{\alpha n-1}(p_1-1)(p_2-1)....(p_n-1) \qquad (2.1.1)$$

По функции Эйлера найдем количество последовательностей в десятичной системе счисления числа которых не делятся на 2 и на 5

$\frac{10(5-1)(2-1)}{2\times 5}$ = 4 это количество последовательностей не делящихся ни на одно из чисел произведения 2·5=10. Это последовательности 10m-9; 10m-7; 10m-3 и 10m-1, которые содержат и простые числа. К этому заключению можно прийти путем простых рассуждений. **Каждый упоряд, как и система счисления содержит в себе все целые числа как положительные, так и отрицательные без пропуска.** Систему счисления с основанием 10 можно рассматривать как составленную из двух систем счисления. Последовательности все числа которых делятся на 2 получены умножением всех последовательностей упоряда с В = 5 на 2. Получены последовательности в десятичной системе счисления:

10m-10=2(5m-5); 10m-8=2(5m-4); 10m-6=2(5m-3); 10m-4=2(5m-2);

10m-2=2(5m-1); 10m =2(5m) Этим последовательностям, описывающим в положительной числовой области десятичной системы счисления все числа делящиеся на 2 соответствуют в отрицательной числовой области по свойству взаимообратимости последовательности:

-10m=2(-5m); -10m+2=2(-5m+1); -10m+4=2(-5m+2); -10m+6=2(-5m+3);

-10m+8=2(-5m+4); -10m+10=2(-5m+5)

Числа последовательностей делящихся на 5 образованы умножением последовательностей упоряда с В=2 на 5.

10m-10=5(2m-2); 10m-5=5(2m-1); 10m=5(2m) Этим последовательностям соответствуют: -10m=5(-2m); -10m+5=5(-2m+1); -10m+10=5(-2m+2).

Две симметрично-взаимообратимые последовательности системы счисления с основанием десять делятся на 2 и 5.

Остальные 4 уже перечисленные последовательности содержат остальные числа не делящиеся на 5 и 2. В этих последовательностях находятся и простые числа.

Упоряд с В=6 выделяет последовательности делящиеся на 3 и 2 (см. проверочный упоряд с В=6). Рассуждения и выводы по аналогии с упорядом (В=10) или десятичной системой счисления.

Количество последовательностей содержащих простые числа будет равно:

$\frac{6(3-1)(2-1)}{2\times 3}=2$ Это последовательности 6m-1 и 6m-5. Им соответствуют в отрицательной числовой области по свойству взаимоообоатимости уравнения -6m+5 и -6m+1.

Определим, при каких значениях m числа последовательностей -10m+1 | 10m-9; -10m+3 | 10m-7; -10m+5 | 10m-5; -10m+7 | 10m-3; -10m+9 | 10m-1, являются числами последовательности -6m+1 | 6m-5. Вертикальной чертой отделяются отрицательные числа от положительных в каждой из последовательностей. Итак запишем по порядку :

-10m+1 | 10m-9

-6m+1 | 6m-5

$-10\,m_1^{\backslash}+1=-6\,m_2^{\backslash}+1$

где: $m_1^{\backslash}$ - выборка номеров в последовательности -10m+1 под которыми находятся числа общие с числами последовательности -6m+1.

$m_2^{\backslash}$ - выборка номеров под которыми находятся числа последовательности -6m+1 совпадающие с числами последовательности -10m+1.

$m_1^{\backslash}=\frac{6m_2^{\backslash}}{10}$; $m_2^{\backslash}=\{5, 10, 15, \ldots, 5m\}$

$$m_1^{\backslash}=\frac{6(5m)}{10}=\frac{30m}{10}=3m=\{3,6,9,\ldots.,3m\}$$

Подставив найденные выборки номеров в соответствующие уравнения, получим:

$$\left.\begin{array}{l}-10(3m)+1=-30m+1\\ -6(5m)+1=-30m+1\end{array}\right\}\quad \{-29, -59, -89, -119, \ldots\}$$

Определим последовательность, которая содержит числа общие для последовательностей 10m-9 и 6m-5.

$10\,m_1^{\backslash}-9=6\,m_2^{\backslash}-5$

где: $m_1^{\backslash}$ и $m_2^{\backslash}$ выборки номеров.

$$m_1^{\backslash}=\frac{6m_2^{\backslash}+4}{10};$$

Значения $m_2^{\backslash}$ выбираются такими, чтобы $6m_2^{\backslash}+4$ делилось без остатка на основание десятичной системы B=10.

$m_2^{\backslash}=\{1,6,11,\ldots.,5m-4\}$ откуда:

$$m_1^{\backslash}=\frac{6(5m-4)+4}{10}=\frac{30m-20}{10}=3m-2=\{1,4,7,\ldots\ldots\}$$

После нахождения выборок номеров $m_1^{\backslash}$ и $m_2^{\backslash}$ при подстановке которых в формулы $10\,m_1^{\backslash}-9$ и $6\,m_2^{\backslash}-5$ соответственно превращает их в тождество, а это говорит о том, что найдена третья последовательность, состоящая из общих чисел рассматриваемых последовательностей.

$$\left.\begin{array}{l}10(3m-2)-9=30m-29\\ 6(5m-4)-5=30m-29\end{array}\right\}\quad \{1, 31, 61, 91, \ldots\}$$

Формулы -30m+1 и 30m-29 образуют пару взаимообратимых уравнений, описывающих одну из последовательностей упоряда с шагом B=30.

Методика нахождения выборок номеров $m_1^\backslash$ и $m_2^\backslash$ вполне указана. И нет необходимости повторять ее неоднократно, поэтому условимся ее опускать. Тем более что эти выборки указываются в скобках при подстановках в исходные уравнения.

Рассмотрим следующую последовательность:

-10m+3 | 10m-7

-6m + 1 | 6m-5

-10$m_1^\backslash$+3= -6$m_2^\backslash$+1

где: $m_1^\backslash$ и $m_2^\backslash$ выборки номеров, при подстановке которых в рассматриваемое равенство, обращает это равенство в тождество.

-10(3m-1)+3=-6(5m-2)+1= -30m+13 {-17, -47, -77, . . . }

Для положительных чисел рассматриваемых последовательностей имеем:

10$m_1^\backslash$-7= 6$m_2^\backslash$-5

10(3m-1)-7=6(5m-2)-5=30m-17 {13, 43, 73, . . . }

Полученные уравнения взаимообратимы и описывают одну из последовательностей упоряда с шагом 30.

-30m+13 | 30m-17

Следующая последовательность:

-10m+5 | 10m-5

-6m + 1 | 6m-5

-10(3m-2)+5=-6(5m-4)+1=-30m+25 {-5, -35, -65, . . . }

10(3m)-5=6(5m)-5 = 30m – 5 {25, 55, 85, ...}

Получена следующая пара уравнений описывающая очередную последовательность упоряда с B=30.

-10m+7 | 10m-3

-6m + 1 | 6m-5

-10(3m)+7=-6(5m-1)+1= -30m+7 {-23, -53, -83, . . . }

10(3m-2)-3=6(5m-3)-5= 30m-23 {7, 37, 67, ... }

-30m+7 и 30m-23 взаимообратимы, а это означает что найдена последовательность упоряда с B=30 в которой находятся числа общие для только что рассмотренных последовательностей.

-10m+9 | 10m-1

-6m + 1 | 6m-5

-10(3m-1)+9=-6(5m-3)+1= -30m+19 {-11, -41, -71, . . . }

10(3m-1)-1=6(5m-1)-5= 30m-11 {19, 49, 79, . . . }

Выпишем выборки номеров для последовательности -6m+1 | 6m-5.

5m | 5m-4; 5m-2 | 5m-2; 5m-4 | 5m; 5m-1 | 5m-3; 5m-3 | 5m-1.

Как видим все номера последовательности -6m+1 | 6m-5 заняты числами последовательностей десятичной системы счисления соответственно:

-10m+1 | 10m-9; -10m+3 | 10m-7; -10m+5 | 10m-5; -10m+7 | 10m-3;

-10m+9 | 10m-1.

Точно такими же расчетами и в такой же последовательности найдем заполнение номеров последовательности -6m+5 | 6m-1.

-10m+1 | 10m-9
-6m + 5 | 6m-1
-10(3m-1)+1= -6(5m-1)+5= -30m+11 {-19, -49, -79, . . . }
10(3m-1)-9=6(5m-3)-1 = 30m – 19 {11, 41, 71, . . . }

-10m+3 | 10m-7
-6m + 5 | 6m-1
-10(3m-2)+3=-6(5m-3)+5= -30m+23 {-7, -37, -67, . . . }
10(3m)-7 = 6(5m-1)-1 = 30m – 7 {23, 53, 83, ... }

-10m+5 | 10m-5
-6m + 5 | 6m-1
-10(3m)+5= -6(5m)+5= -30m+5 {-25, -55, -85, . . . }
10(3m-2)-5=6(5m-4)-1= 30m-25 {5, 35, 65, ... }
-10m+7 | 10m-3
-6m + 5 | 6m-1
-10(3m-1)+7= -6(5m-2)+5= -30m+17 {-13, -43, -73, . . . }
10(3m-1)-3=6(5m-2)-1= 30m – 13 {17, 47, 77, . . . }

-10m+9 | 10m-1
-6m + 5 | 6m-1
-10(3m-2)+9= -6(5m-4)+5= -30m+29 {-1, -31, -61, . . . }
10(3m)-1=6(5m)-1=30m-1 {29, 59, 89, . . . }

Выпишем выборки номеров для последовательности -6m+5 | 6m-1.
5m-1 | 5m-3; 5m-3 | 5m-1; 5m | 5m-4; 5m-2 | 5m-2; 5m-4 | 5m

Как видим и в этом случае все номера последовательности -6m+5 | 6m-1 заняты числами последовательностей десятичной системы принадлежащие соответственно: -10m+1 | 10m-9; -10m+3 | 10m-7; -10m+5 | 10m-5; -10m+7 | 10m-3; -10m+9 | 10m-1.

В обоих случаях порядок следования последовательностей десятичной системы счисления не изменен и следует от -10m+1 | 10m-9 до -10m+9 | 10m-1. Выпишем последовательности упоряда с B=30, числа которых входят в последовательность -6m+1 | 6m-5. Порядок следования последовательностей десятичной системы не будет и в дальнейшем нигде изменяться, т. е. тот же.

-30m+1 | 30m-29; -30m+13 | 30m-17; -30m+25 | 30m-5; -30m+7 | 30m-23; -30m+19 | 30m-11. получили пять последовательностей.

Выпишем последовательности упоряда с B=30, числа которых входят в последовательность упоряда с B=6, т. е. последовательность -6m+5 | 6m-1.

-30m+11 |30m-19; -30m+23 | 30m-7; -30m+5 | 30m-25; -30m+17 | 30m-13;

-30m+29 | 30m-1.

В данной работе принято, что знак целочисленного аргумента m всегда положителен в отличии от последовательностей описываемых парами уравнений. Теперь сравним номера полученные для последовательности

-6m+1 | 6m-5 и -6m+5 | 6m+1

Замечаем, что выборки номеров для последовательности -6m+1 | 6m-5 если начать читать их с конца предварительно поменяв местами выборки номеров для положительных чисел с выборками для отрицательных чисел, то получим выборки номеров получаемые для последовательности -6m+5 | 6m-1.

Это объясняется тем, что последовательности -6m+1 | 6m-5 и -6m+5 | 6m-1 есть последовательности равноотстоящие от концов упоряда и являются противоположными друг другу. Уравнение -6m+1 противоположно 6m-1, а уравнение 6m-5 противоположно -6m+5.

Для последовательностей упоряда с B=30 числа которых входят в последовательность -6m+1 | 6m-5 при перестановке их местами т. е. начать писать их с конца предварительно умножив каждую на -1 то получим последовательности упоряда с B=30 числа которых входят в последовательность -6m+5 | 6m-1.

По функции Эйлера определим общее количество последовательностей упоряда с B=30 числа которых входят в последовательности -6m+5 | 6m-1 и

-6m+1 | 6m-5.

B=30 = 2·3·5

Две последовательности упоряда с B=6 содержат две последовательности содержащие простые числа 6=2·3. Значит можно написать:

$\frac{30(3-1)(2-1)}{2\times 3}=10$ последовательностей числа которых входят в две последовательности упоряда с B=6 содержащих простые.

Приведенные рассуждения можно упростить, если вспомнить что в десятичной системе счисления разряд единиц первого класса и есть остаток (в дальнейшем будем называть его **низшим разрядом**). Выпишем отдельно числа последовательности -6m+1 | 6m-5.

6m-5 = { 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, 85, 91, . . . }

-6m+1={-5, -11, -17, -23, -29, -35, -41, -47, -53, -59,-65,-71,-77, . . . }

В десятичной системе счисления остаток 1 соответствует уравнению 10m-9 а соответствующему уравнению в отрицательной числовой области остаток равен -9 т. е. это будет уравнение -10m+1. выпишем номера чисел, которые имеют эти остатки 1, 6, 11, . . . , 5m-4; 5, 10, . . . 5m. Подставив эти номера в соответствующие уравнения -6m+1 | 6m-5 получим:

-6(5m)+1 | 6(5m-4) -5 или -30m+1 | 30m-29.

Следующая последовательность по принятому порядку следования есть последовательность -10m+3 | 10m-7 имеющая остатки -7 и 3 соответственно. В рассматриваемых последовательностях упоряда с B=6 числа с этими остатками стоят под номерами 3, 8, . . . 5m-2; 3, 8, . . . 5m-2 подставив эти номера в соответствующие уравнения -6m+1 | 6m-5 получим:

-6(5m-2)+1 | 6(5m-2) -5 или -30m+13 | 30m-17.

Следующая последовательность в десятичной системе $-10m+5 \mid 10m-5$ имеет остатки -5 и $+5$ в последовательности $-6m+1 \mid 6m-5$ числа имеющие эти остатки стоят под номерами $1, 6, \ldots 5m-4$; и $5, 10, \ldots 5m$ после подстановки этих выборок номеров имеем:

$-6(5m-4)+1 \mid 6(5m)-5$ или $-30m+25 \mid 30m-5$.

Для последовательности $-10m+7 \mid 10m-3$ имеющей остатки -3 и 7 в последовательности $-6m+1 \mid 6m-5$ стоят под номерами $4, 9, \ldots 5m-1$; $2, 7, \ldots 5m-3$ после подстановки в соответствующие уравнения получим:

$-6(5m-1)+1 \mid 6(5m-3)-5$ или $-30m+7 \mid 30m-23$.

Для последовательности $-10m+9 \mid 10m-1$ с остатками -1 и 9 в последовательности $-6m+1 \mid 6m-5$ им соответствуют номера $2, 7, \ldots 5m-3$; $4, 9, \ldots 5m-1$, подставив которые в соответствующе уравнения получим:

$-6(5m-3)+1 \mid 6(5m-1)-5$ или $-30m+19 \mid 30m-11$

Сравнив с результатами, полученными ранее, видим полное совпадение, что и следовало ожидать.

Для последовательности $-6m+5 \mid 6m-1$, которая является противоположной последовательности $-6m+1 \mid 6m-5$, а следовательно и выборки номеров будут одни и те же для противоположных уравнений, о чем уже говорилось.

2.2. Разложение чисел на множители

В 2.1 показано, что последовательности десятичной системы счисления содержащие простые числа содержатся в двух последовательностях упоряда с шагом $B=6$ и в этих же последовательностях содержатся и числа последовательности $-10m+5 \mid 10m-5$ числа которой не делятся на 2 и 3, т. к. упоряд с $B=6$ выделяет только последовательности делящиеся на 2 и 3.

Учитывая (1.1.11) можно сделать вывод, что при сложении последовательностей упорядов можно всегда определить в какой последовательности этого же упоряда окажется сумма складываемых последовательностей если знать только сумму остатков . Об этом можно сказать и из рассмотрения систем счисления по сумме низших разрядов. (В позиционной форме).

Так как числа в упоряде с $B=6$ записываются в десятичной системе счисления, то делимость на 2. 3 и на 5 очевидна.

Находить делители для других составных чисел будем с помощью многократного сложения самих с собой последовательностей упоряда $6m-5$ и $6m-1$. Ограничиваясь положительной числовой областью, так как отрицательные числа будут иметь такие же делители как и положительные если такие имеются.

1) $6m-5$ $\qquad$ $6m-1$

2) $6m-5+6m-5=12m-10=6(2m-1)-4$ $\qquad$ $6m-1+6m-1=12m-2=6(2m)-2$

При двукратном сложении этих последовательностей мы получили числа последовательностей $6m-4$ и $6m-2$ с соответствующими остатками 2 и 4 находящимися на нечетных номерах $m' = 2m-1$ в последовательности $6m-4$ и стоящие на четных номерах $m'=2m$ в последовательности $6m-2$. Условимся, для сокращения записи использовать умножение. Например:

$6m-5+6m-5=2(6m-5)$ $\qquad$ $6m-1+6m-1=2(6m-1)$

3) 3(6m-5)=18m-15=6(3m-2)-3 3(6m-1)=18m-3=6(3m)-3

При трех кратном сложении последовательности 6m-5 сумма чисел находится в последовательности 6m-3 суммы располагаются на выборке номеров 3m-2= {1, 4, 7, 10, . . . } Числа стоящие на этих номерах делятся на 3 и в порядке следования на числа последовательности 6m-5, что легко проверить.

6(3m-2)-3={3·1, 3·7, 3·13, . . . }

При трех кратном сложении последовательности 6m-1 сумма чисел так же находится в последовательности 6m-3 на выборке номеров 3m= {3, 6, 9, . . . }. Эти числа делятся на 3 и числа последовательности 6m-1 в порядке их следования. 6(3m)-3= {3·5, 3·11, 3·17, . . . }.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Для последовательности 6m-5 последовательность 6m-1 умноженная на -1 будет являться взаимообратимой для 6m-5 и наоборот. Последовательности полученные при двух, трех и более кратном сложении будут обладать таким же свойством, что легко проверить при выполнении операций сложения.

1) 6m-5	6m-1
2) 2(6m-5)=12m-10=6(2m-1)-4	2(6m-1)=12m-2=6(2m)-2
3) 3(6m-5)=18m-15=6(3m-2)-3	3(6m-1)=18m-3=6(3m)-3
4) 4(6m-5)=24m-20=6(4m-3)-2	4(6m-1)=24m-4=6(4m)-4
5) 5(6m-5)=30m-25=6(5m-4)-1	5(6m-1)=30m-5=6(5m)-5
6) 6(6m-5)=36m-30=6(6m-5)	6(6m-1)=36m-6=6(6m-1)
7) 7(6m-5)=42m-35=6(7m-5)-5	7(6m-1)=42m-7=6(7m-1)-1
8) 8(6m-5)=48m-40=6(8m-6)-4	8(6m-1)=48m-8=6(8m-1)-2
9) 9(6m-5)=54m-45=6(9m-7)-3	9(6m-1)=54m-9=6(9m-1)-3
10) 10(6m-5)=60m-50=6(10m-8)-2	10(6m-1)=60m-10=6(10m-1)-4
11) 11(6m-5)=66m-55=6(11m-9)-1	11(6m-1)=66m-11=6(11m-1)-5
12) 12(6m-5)=72m-60=6(12m-10)	12(6m-1)=72m-12=6(12m-2)
13) 13(6m-5)=78m-65=6(13m-10)-5	13(6m-1)=78m-13=6(13m-2)-1
14) 14(6m-5)=84m-70=6(14m-11)-4	14(6m-1)=84m-14=6(14m-2)-2
15) 15(6m-5)=90m-75=6(15m-12)-3	15(6m-1)=90m-15=6(15m-2)-3
16) 16(6m-5)=96m-80=6(16m-13)-2	16(6m-1)=96m-16=6(16m-2)-4
17) 17(6m-5)=102m-85=6(17m-14)-1	17(6m-1)=102m-17=6(17m-2)-5
18) 18(6m-5)=108m-90=6(18m-15)	18(6m-1)=108m-18=6(18m-3)
19) 19(6m-5)=114m-95=6(19m-15)-5	19(6m-1)=114m-19=6(19m-3)-1
20) 20(6m-5)=120m-100=6(20m-16)-4	20(6m-1)=120m-20=6(20m-3)-2
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

Прежде чем приступить к рассмотрению распределения чисел в последовательностях содержащих простые рассмотрим распределение во всех последовательностях упоряда с B=6. При двух кратном сложении последовательности 6m-5 мы получили числа с остатком 2, т. е. находящихся в последовательности 6m-4. Числа этой суммы стоят на нечетных номерах и делятся на 2 и числа 1, 7, 13, 19, . . . т. е. на числа последовательности 6m-5 в порядке их следования.

При двукратном сложении последовательности 6m-1 мы получили числа находящиеся в последовательности 6m-2 имеющей остаток 4. Числа этой суммы находятся на четных номерах и делятся на 2 и числа 6m-1 в порядке их следования.

Для того чтобы сумма чисел последовательности 6m-5 оказалась в последовательности 6m-2 надо произвести четырех кратное сложение, при котором получим числа последовательности 6(4m-3)-2. Числа этой суммы стоят на номерах 4m-3 (выборка номеров $m^{\backslash}=4m-3$) и делятся на 4 и числа последовательности 6m-5 в порядке и следования.

При четырех кратном сложении последовательности 6m-1 мы получим последовательность числа которой находятся в последовательности 6m-4 и стоят на номерах 4m ($m^{\backslash}=4m$) и делятся на 4 и числа последовательности 6m-1 в порядке их следования.

В остальных последовательностях можно делать аналогичные выводы, если внимательно рассматривать уравнения, которые изначально имеют делители

6m-4=2(3m-2); 6m-3=3(2m-1); 6m-2=2(3m-1)

Далее будем рассматривать только числообразование в последовательностях содержащих простые это последовательности 6m-5 и 6m-1

Так в последовательности 6m-5 присутствуют числа делящиеся на числа последовательности 6m-1 и 6m-5.

Выпишем последовательности, получаемые семи кратным, тринадцати кратном и девятнадцати кратном и т. д. сложением последовательности 6m-5. Числа сумм этих последовательностей находятся в последовательности 6m-5. Это последовательности 6m-5; 6(7m-5)-5; 6(13m-10)-5; 6(19m-15)-5; . . . Выпишем выборки номеров и найдем разности между этими выборками.

Таблица 2.2.1.

m	7m-5	13m-10	19m-15	25m-20	31m-25	37m-30	
	6m-5	6m-5	6m-5	6m-5	6m-5	6m-5	6m-5 . . .

M	7m-5	13m-10	19m-15	25m-20	31m-25	37m-30	43m-35	49m-40	55m-45	61m-50
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	**9**	16	23	30	37	44	51	58	65	72
3	16	**29**	42	55	68	81	94	107	120	133
4	23	42	**61**	80	99	118	137	156	175	194
5	30	55	80	**105**	130	155	180	205	230	255
6	37	68	99	130	**161**	192	223	254	285	316
7	44	81	118	155	192	**229**	266	303	340	377
8	51	94	137	180	223	266	**309**	352	395	438
9	58	107	156	205	254	303	352	**401**	450	499
10	65	120	175	230	285	340	395	450	**505**	560
11	72	133	194	255	316	377	438	499	560	**621**
12	79	146	213	280	347	414	487	548	615	682
13	86	159	232	305	378	451	524	597	670	743
14	93	172	251	330	409	488	567	646	725	804
15	100	185	270	355	440	525	610	695	780	865
16	107	198	289	380	471	562	653	744	835	926
17	114	211	308	405	502	599	696	793	890	987
18	121	224	327	430	533	636	739	842	945	1048
19	128	237	346	455	564	673	782	891	1000	1109
20	135	250	365	480	595	710	825	940	1055	1170

. . . .

. . . .

. . . .

где: первая строчка выборки номеров m, 7m-5, 13m-10, 19m-15, 25m-20, ... m+(k-1)(6m-5) определяет столбцы. m-соответствует первому столбцу, в котором выборка номеров $m^{\backslash}$=m. Определяет числа последовательности 6m-5 = ={1, 7, 13, . . . } $1 \le m < \infty$

7m-5 – выборка номеров второго столбца, определяющая номера в последовательности 6m-5 числа которой делятся на 7. При подстановке этих номеров в $6m^{\backslash}$-5=6(7m-5)-5= {7·1, 7·7, 7·13, 7·19, 7·25, . . . }

И далее по аналогии с изложенным, где коэффициент при m определяет на какое число делятся числа последовательности 6m-5

Формула для столбца k={1, 2, 3, 4, . . . }

$$m+(k-1)(6m-5) \qquad (2.2.1)$$

Последовательность выборок номеров можно для проверки получить и прямым вычислением.

$$6m_1^{\backslash} - 5 = m_2^{\backslash} \qquad m_1^{\backslash} = \frac{m_2^{\backslash} + 5}{6}; \qquad m_2^{\backslash} = \{1,7,13,19,...6m-5\}$$

$$m_1^{\backslash} = \frac{(6m-5)+5}{6} = m$$

$6m_1^\backslash$-5=7$m_2^\backslash$ $\quad m_1^\backslash = \dfrac{7m_2^\backslash + 5}{6}$; $\quad m_2^\backslash$={1, 7, 13, . . . , 6m-5 } откуда:

$$m_1^\backslash = \frac{7(6m-5)+5}{6} = \frac{42m-30}{6} = 7m-5 = \{2,9,16,...\}$$

$6m_1^\backslash - 5 = 13m_2^\backslash$ $\quad m_1^\backslash = \dfrac{13m_2^\backslash + 5}{6}$; $\quad m_2^\backslash$= {1, 7, 13, . . . , 6m-5 } откуда:

$$m_1^\backslash = \frac{13(6m-5)+5}{6} = \frac{78m-60}{6} = 13m-10 = \{3,16,29,...\}$$

. . . .
. . . .
. . . .

$$m_1^\backslash = \frac{(6k-5)(6m-5)+5}{6} = (6k-5)m - 5(k-1) \qquad (2.2.1)$$

где: k- номер столбца k= {1, 2, 3, 4, . . . }

Следовательно, прямым вычислением мы получили такую же последовательность выборок номеров полученных многократным сложением последовательности 6m-5. Разность между рядом стоящими выборками так же будет равно 6m-5.:

[6(k+1)-5]m-5k – (6k-5)m+5(k-1) = 6m-5 (2.2.2)

Итак мы получили тот же результат и можем написать:

m 7m-5 13m-10 19m-15 . . . .
6m-5 6m-5 6m-5 . . .

При одних и тех же значениях m в выражениях выборок номеров и их разностей мы получим значения номеров чисел записанных в приведенной таблице (числа разностей 6m-5 не записываем).

1, 2, 3, 4, 5, ...
2, 9, 16, 23, 30, . . .
3, 16, 29, 42, 55, . . .
. . . .

Числа столбца 4, 23, 42, 61, . . . есть выборка номеров 19m-5 в порядке их следования раскладываются на 2 делителя 1·19; 7·19; 13·19; 19·19; . . . или соответствуют произведениям (6·1-5)(6·4-5)=1·19; (6·2-5)(6·4-5)=6·23-5=7·19;
(6·3-5)(6·4-5)=6·42-5 =13·19; (6·4-5)(6·4-5)=6·61-5=19·19; . . . .

Напомним, что числа этой последовательности (выборки номеров) получены 19-кратным сложением последовательности 6m-5. И при подстановке этой выборки в порядке следования m={1, 2, 3, 4, 5, . . . } в 6(19m-15)-5 будут определять само число равное произведению числа 19 на (6m-5) так же в порядке следования m={1, 2, 3, 4, 5, . . . } соответствующее числам 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67, 73, 79, 85, 91, ...

В таблице 2.2.1 выборки номеров соответствующие квадратам чисел входящих в 6m-5 выделены полужирным шрифтом и определяются по формуле:

$$\underset{\rightarrow}{S}_2(m^\backslash) = 6m^2 - 10m + 5 \qquad (2.2.3)$$

где: индекс 2 при $\underset{\rightarrow}{S}_2$ означает уравнение второй степени.

При подстановке этой формулы (выборки номеров) в уравнение 6m\-5 мы получим:

$(6m-5)^2=6(6m^2-10m+5)-5$ (2.2.3-1)

где: m= {1, 2, 3 ,4, . . . , ∞} и этим значениям m соответствуют числа {1, 49, 169, 361, 625, 961, . . . }

Формула (2.2.3) приводится без вывода.

Как видим в таблице 2.2.1 строчки и столбцы проходящие через выборки номеров соответствующие выборкам определяемым (2.2.3) содержат одни и те же числа, но расширять эту таблицу не имеет смысла. Числа в упоряде с шагом 6 записаны в десятеричной системе и нумерация так же записывается в этой же системе, поэтому будем записывать выборки номеров по десять в каждом ряду следующим образом.

Выборки номеров соответствующие числам, делящимся на 7, образуют последовательность 7m-5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
70m-68	70m-61	70m-54	70m-47	70m-40	70m-33	70m-26	70m-19	70m-12	70m-5
2	**9**	16	23	30	37	44	51	58	65
72	79	86	93	100	107	114	121	128	135
142	149	156	163	170	177	184	191	198	205

. . . .

Эта таблица не заканчивается тремя строчками, а может продолжаться до бесконечности. Числа (соответствующие выборкам номеров) записаны в десятичной системе счисления, а это означает что число, соответствующее выборке в низшем разряде оканчивается одним из десяти чисел от 0 до 9, что мы и видим в таблице. Принадлежность числа последовательности 6m-5 определяется делением числа на 6. С получением после запятой, отделяющего целую часть от дробной, числа 1/6=0,16(6)

Далее по формуле (1.1.15) находим номер (выборку) под которым находится это число. По числу низшего разряда находим столбец для чисел выборки 7m-5. Каждый столбец состоит из чисел получаемых из соответствующих уравнений (для каждого столбца свое уравнение). Определив столбец, опять прибегаем к помощи уравнения (1.1.15). К найденному числу выборки прибавляем свободный член из соответствующего уравнения и сумму делим на 70 шаг уравнения. Если частное есть целое число, то исследуемое число, принадлежащее последовательности 6m-5, имеет своим делителем число 7, если же выборка (номер числа) не делится нацело, то исследуемое число не делится на 7 и номер под которым стоит данное число в последовательности 6m-5 не является выборкой для чисел делящихся на 7.

Пусть найденный номер числа является выборкой для чисел, делящихся на 7 в последовательности 6m-5. Для определения второго делителя необходимо составить вторую таблицу, которая будет являться пригодной и для других выборок таблицы 1 (13m -10, 19m-15, . . .).

Таблица 2.2.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
60m-59	60m-53	60m-47	60m-41	60m-35	60m-29	60m-23	60m-17	60m-11	60m-5
1	7	13	19	25	31	37	43	49	55
61	67	73	79	85	91	97	103	109	115
121	127	133	139	145	151	157	163	169	175
181	187	193	199	205	211	217	223	229	235

. . . . ………………….. . .
……………………………………………………………………………………….

В данной таблице так же подразумевается бесконечное количество строк.

В этой таблице стоят не номера чисел, а сами числа последовательности.

Рассмотрим пример пользования таблицей 2. Пусть мы получили номер выборки числа 177 находящегося в 6 столбце таблицы для 7m-5 на третьей строчке. В таблице 2 точно по этому же адресу находим число 151. Находим само число $6\cdot177-5=1057$ ($151\cdot7=1057$)

Таблица для выборки 13m-10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
130m-127	130m-114	130m-101	130m-88	130m-75	130m-62	130m-49	130m-36	130m-23	130m-10
3	16	**29**	42	55	68	81	94	107	120
133	146	159	172	185	198	211	224	237	250
263	276	289	302	315	328	341	354	367	380

………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………..

Прежде чем приступить к дальнейшему рассмотрению нахождения делителей чисел находящихся в положительной части последовательности 6m-5 и получаемых ее многократным сложением, приведем некоторые рассуждения.

В таблице 2.2.1 в первом столбце $m^{\backslash} = m$ после подстановки которых в само уравнение 6m-5 мы получим последовательный ряд чисел 1, 7, 13, 19, и т. д., (каждое из этих чисел стоит соответственно на строчках 1, 2, 3, 4, . . .) что соответствует в той же последовательности столбцам выборок номеров чисел которые делятся на 1. 7, 13, 19, и т. д. в той же последовательности. В пересечении второй строчки со вторым столбцом стоит выборка номера 9 определяющая число 49 ($6\cdot9-5=49$), на пересечении третьего столбца с третьей строчкой стоит выборка 29 соответствующая числу $13^2=169$ ($6\cdot29-5=169$) и т. д. Каждый столбец начинается с выборки номера, под которым стоит это число в последовательности 6m-5 и совпадает с номером числа, поэтому нумерация столбцов опускается (принимается равным номеру, под которым стоит само число в последовательности). Каждый столбец и каждая строчка представляет собой бесконечные последовательности целых чисел выборок номеров при подстановке которых в 6m-5 мы получаем числа с интересующими нас свойствами так, например, четвертая строчка, как и четвертый столбец, независимо друг от друга выделяют все (выборки номеров) при подстановке которых в 6m-5 получаются числа последовательности (положительной части) делящиеся на 19. Все выборки номеров стоящие ниже в таблице выборки соответствующей квадрату рассматриваемого числа совпадают с выборками стоящими в строчках после выборки соответствующей тому же квадрату, что и усматривается в таблице 2.2.1. Это говорит о том, что все номера (выборки) повторяются дважды, кроме выборок которые соответствуют квадратам чисел последовательности 6m-5. Поэтому можно ограничиваться номерами, которые стоят в таблице 2.2.1 выше номеров соответствующих квадратам чисел. Но если поступить так, то это приведет к трудностям при составлении аналитических выражений для выборок номеров, под которыми стоят составные числа последовательности 6m-5.

В таблице 2.2.2 вместо номеров чисел стоят сами числа последовательности как составные, так и простые. Шаг последовательностей входящих в эту таблицу равен 60, это объясняется тем что в этой таблице находится (см. параграф 2.1) по два раза пять последовательностей десятичной системы счисления содержащих простые включая в это число последовательность с остатком 5 не входящую в разложение шага упоряда с B=6. Поэтому в таблице 2.2.2 остатки 1, 3, 5, 7, 9 встречаются дважды. Но нумерация производится в десятичной системе.

Следует отметить что многократное сложение остатка самого с собой при количестве сложений превышающих B на единицу дает в результате число которое находится в последовательности в которой находился этот остаток- это относится к остаткам не входящим в разложение шага упоряда или системы счисления.

Мы рассуждаем о делимости пока только тех чисел, которые получены сложением самой последовательности 6m-5, а числа полученные многократным сложением 6m-1 оставляем пока в стороне. В таблице 2.2.1 выборки номеров этих чисел не присутствуют. В таблице 2 присутствуют все числа входящие в положительную часть последовательности 6m-5. Продолжим рассматривать выборки номеров образованные сложением последовательности 6m-5.

Таблица для выборки 19m-15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
190m-186	190m-167	190m-148	190m-129	190m-170	190m-91	190m-72	190m-53	190m-34	190m-15
4	23	42	**61**	80	99	118	137	156	175
194	213	232	251	270	289	308	327	346	365
384	403	422	441	460	479	498	517	536	555

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Таблица для выборки 25m-20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
250m-245	250m-220	250m-195	250m-170	250m-145	250m-120	250m-95	250m-70	250m-45	250m-20
5	30	55	80	**105**	130	155	180	205	230
255	280	305	330	355	380	405	430	455	480
505	530	555	580	605	630	655	680	705	730

…………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

Таблица для выборки 31m-25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
310m-304	310m-273	310m-242	310m-211	310m-180	310m-149	310m-118	310m-87	310m-56	310m-25
6	37	68	99	130	**161**	192	223	254	285
316	347	378	409	440	471	502	533	564	595
626	657	688	719	750	781	812	843	874	905

…………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

Таблица для выборки 37m-30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
370m-363	370m-326	370m-289	370m-252	370m-215	370m-178	370m-141	370m-104	370m-67	370m-30
7	44	81	118	155	192	**229**	266	303	340
377	414	451	488	525	562	599	636	673	710
747	784	821	858	895	932	969	1006	1043	1080

…………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………….

Таблица для выборки 43m-35

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
430m-422	430m-379	430m-336	430m-293	430m-250	430m-207	430m-164	430m-121	430m-78	430m-35
8	51	94	137	180	223	266	**309**	352	395
438	481	524	567	610	653	696	739	782	825
868	911	954	997	1040	1083	1126	1169	1212	1255

…………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Таблица для выборки 49m-40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
490m-481	490m-432	490m-383	490m-334	490m-285	490m-236	490m-187	490m-138	490m-89	490m-40
9	58	107	156	205	254	303	352	**401**	450
499	548	597	646	695	744	793	842	891	940
989	1038	1087	1136	1185	1234	1283	1332	1381	1430

……………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Таблица для выборки 55m-45

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
550m-540	550m-485	550m-430	550m-375	550m-320	550m-265	550m-210	550m-155	550m-100	550m-45
10	65	120	175	230	285	340	395	450	**505**
560	615	670	725	780	835	890	945	1000	1055
1110	1165	1220	1275	1330	1385	1440	1495	1550	1605

……………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

В каждой из этих таблиц первая строчка определяет второй делитель из таблицы 2 так же находящийся на первой строчке ее. Вторая строчка выборок приводимых таблиц имеет второй делитель, находящийся на второй строчке таблицы 2 и т. д. (см. пример приведенный после таблицы 2.2.2). Но все эти выборки, сведенные в таблицу, после подстановки их в $6m^{\backslash}-5$ образуют числа делящиеся на 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43,49 и 55 по мере их приведения (соответственно) т. е. первый делитель не зависит от строчек таблицы 2.2.2.

Следует иметь в виду, что приведенные таблицы на самом деле соответствуют столбцам и для каждого столбца соответствующая формула, описывающая выборки чисел, которые делятся на коэффициент при целочисленном аргументе m.(см. таблицу 2.2.1) Таблица 2.2.2 будет описывать строчки $1^{\text{ый}}$ столбец 60m-59 будет первой строчкой таблицы. 60m-53 будет стоять на второй строчке таблицы и т. д. до десятой строчки на которой будет стоять формула 60m-5.

Таблица 2.2.3.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{(60)}$		m	7m-5	13m-10	19m-15	25m-20	31m-25	37m-30	43m-35	49m-40	55m-45
1	60m-59	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	60m-53	2	**9**	16	23	30	37	44	51	58	65
13	60m-47	3	16	**29**	42	55	68	81	94	107	120
19	60m-41	4	23	42	**61**	80	99	118	137	156	175
25	60m-35	5	30	55	80	**105**	130	155	180	205	230
31	60m-29	6	37	68	99	130	**161**	192	223	254	285
37	60m-23	7	44	81	118	155	192	**229**	266	303	340
43	60m-17	8	51	94	137	180	223	266	**309**	352	395
49	60m-11	9	58	107	156	205	254	303	352	**401**	450
55	60m-5	10	65	120	175	230	285	340	395	450	**505**
	10	61m-50	67m-55	73m-60	79m-65	85m-70	91m-75	97m-80	103m-85	109m-90	115m-95
	20	121m-100	127m-105	133m-110	139m-115	145m-120	151m-125	157m-130	163m-135	169m-140	175m-145
	30	181m-150	187m-155	193m-160	199m-165	205m-170	211m-175	217m-180	223m-185	229m-190	235m-195
	40	241m-200	247m-205	253m-210	259m-215	265m-220	271m-225	277m-230	283m-235	289m-240	295m-245
	50	301m-250	307m-255	313m-260	319m-265	325m-270	331m-275	337m-280	343m-285	349m-290	355m-295
	60	361m-300	367m-305	373m-310	379m-315	385m-320	391m-325	397m-330	403m-335	409m-340	415m-345
	70	421m-350	427m-355	433m-360	439m-365	445m-370	451m-375	457m-380	463m-385	469m-390	475m-395
	80	481m-400	487m-405	493m-410	499m-415	505m-420	511m-425	517m-430	523m-435	529m-440	535m-445
	90	541m-450	547m-455	553m-460	559m-465	565m-470	571m-475	577m-480	583m-485	589m-490	595m-495
	100	601m-500	607m-505	613m-510	619m-515	625m-520	631m-525	637m-530	643m-535	649m-540	655m-545
	110	661m-550	667m-555	673m-560	679m-565	685m-570	691m-575	697m-580	703m-585	709m-590	715m-595

……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

где: $1 \leq m < \infty$ во всех формулах для выборок номеров, стоящих в столбцах от 1 до ∞ т. е. количество столбцов не ограничено. Таблица 2.2.3 оканчивается столбцом 120, которому соответствует формула (715m-595) для определения выборок чисел номеров, при подстановке которых в 6m\ -5 мы получим числа делящиеся на 715.

$1 \leq m < \infty$ для всех формул от 60m-59 до 60m-5 размещенных на 10 строчках, стоящих в верхней части таблицы 2.2.3. Эти формулы при последовательном изменении целочисленного аргумента (m) будут описывать сами числа последовательности 6m-5, а не выборки номеров. (см. таблицу 2.2.2)

$r_{(60)}$ – остатки последовательностей с шагом 60.

В строчке начинающейся с числа 10 при движении направо начинается 11 столбец, которому соответствует уравнение выборки 61m-50 и далее идут по порядку 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 столбцы и заканчивается 20 столбцом с уравнением для выборки 115m-95. Далее аналогично для начинающихся с 20, 30, и т. д. По примеру построения столбцов приведенных в таблице 2.2.1 для выборки 61m-50 строятся все остальные, и при желании для каждой из них может быть построены таблицы по подобию таблиц для 7m-5, 13m-10, . . . , 55m-45.

Следует напомнить, что выборка номеров соответствующая числам, делящимся на 115, получена 115 кратным сложением последовательности 6m-5

115(6m-5)=690m-575=6(115m-95)-5 r=1(см. 1.1.13 и упоряды с B=6 и B=5, а так же систему счисления с B=10). Из формулы видно, что при всех m ={1, 2, 3, 4, . . ., ∞} все получаемые целые числа будут делиться на 115 и на числа последовательности 6m-5 в порядке их следования. Само число 115=5·23 это значит, что все получаемые числа будут так же делиться на 5 и 23.

Рассмотрим первый десяток таблицы 2.2.3.

$r_{(60)}$		m	7m-5	13m-10	19m-15	25m-20	31m-25	37m-30	43m-35	49m-40	55m-45
1	60m-59	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	60m-53	2	**9**	16	23	30	37	44	51	58	65
13	60m-47	3	16	**29**	42	55	68	81	94	107	120
19	60m-41	4	23	42	**61**	80	99	118	137	156	175
25	60m-35	5	30	55	80	**105**	130	155	180	205	230
31	60m-29	6	37	68	99	130	**161**	192	223	254	285
37	60m-23	7	44	81	118	155	192	**229**	266	303	340
43	60m-17	8	51	94	137	180	223	266	**309**	352	395
49	60m-11	9	58	107	156	205	254	303	352	**401**	450
55	60m-5	10	65	120	175	230	285	340	395	450	**505**

При подстановке выборок $m^{\backslash}=m$ (первый столбец) в уравнение 6m-5 мы получим числа равные остаткам последовательностей с шагом 60, стоящими на тех же строчках, что и выборки $m^{\backslash}$. Таблица первого десятка (10 строчек и 10 столбцов) напоминает таблицу умножения, если вместо выборок подставить соответствующие им числа. И если эту таблицу продолжить до бесконечности вправо и так же вниз, то ее будет просто не разместить ни на каком листе бумаги. Поэтому при составлении таблицы 2.2.3 было принято решение к первому десятку приписывать десятки, следующие по порядку следования вправо под первым десятком так же в порядке следования (под первым десятком второй под вторым десятком третий и т. д.). Последовательности с шагом 60 в количестве 10 расположены слева от таблицы и числа входящие в эти последовательности так же должны продолжаться писаться влево в порядке следования (см. таблицу 2.2.2), но как увидим в дальнейшем, нам будет достаточно знать остаток числа и принадлежность этого числа последовательности 6m-5. Так например имеем число 30229 разделив которое на 6 получим остаток равный 1 [30229/6=5038,16(6)]. У двух последовательностей с шагом 60 в низшем разряде имеется число 9 это 60m-41 и 60m-11. Предположим, что исследуемое число находится в последовательности 60m-41, тогда должно выполнятся равенство:

60m-41=30229 откуда:

$m=\frac{30229+41}{60}=\frac{30270}{60}=504{,}5$ не находится в последовательности 60m-41.

Точно таким же образом исследуем принадлежность этого числа к последовательности 60m-11.

60m-11=30229

$m=\frac{30229+11}{60}=\frac{30240}{60}=504$ находится в последовательности 60m-11, так как m целое число.

где: $1 \le m < \infty$ говорит о том, что и исследуемые числа могут быть бесконечно большими.

Выпишем уравнения для выборок второго десятка определяющих номера после подстановки которых в последовательность $6m^{\backslash}-5$ получим числа делящиеся без остатка на 61, 67, 73, 79, 85, 91, 97, 103, 109, 115.

61m-50	67m-55	73m-60	79m-65	85m-70	91m-75	97m-80	103m-85	109m-90	115m-95

где: $1 \le m < \infty$

Пример построения выборок приведен в таблице 2.2.1 для уравнения 61m-50.

Выборки, определяемые другими уравнениями второго десятка, выписываются аналогично. При таком расположении выборки описываемые всеми десятью уравнениями второго десятка будут последовательно при придании m последовательных значений m=1, m=2, . . . , m=9, m=10 будут соответствовать числам, делящимся на числа определяемые остатками последовательностей с шагом 60 или на числа определяемые значениями $6m^{\backslash}-5$ ($1 \le m^{\backslash} \le 10$) т. е. числовым значениям первого столбца первого десятка. При придании m в любом уравнении рассматриваемых выборок значений от 11 до 20 (последовательно) получатся выборки соответствующие числам, делящимся на 6m-5 при изменении m от 11 до 20, что будет соответствовать числам последовательностей с шагом равным 60 при значениях m=2. (см. таблицу 2.2.2) При желании для каждого уравнения выборки второго десятка можно составить таблицу аналогичную таблицам первого десятка. Для определения выборки соответствующей квадрату необходимо в уравнение выборки подставить значение m равное столбцу. (номер столбца совпадает со значением уравнения выборки при m=1).

Например:

61m-50 при m=1 61-50=11, подставим 11 в уравнение выборки, получим:

$61 \cdot 11-50=621$. Для проверки подставим эту выборку в 6m-5, получим:

$6 \cdot 621-5=3721$. $61 \cdot 61=3721$.

Для 67m-55; 67-50=12; $67 \cdot 12-55=749$; $6 \cdot 749-5=4489$; $67 \cdot 67=4489$.

Полностью записаны только выборки первого десятка, так как во всех остальных десятках остатки выборок будут периодически совпадать с первым десятком, что можно усмотреть из таблицы 2.2.3, если построить таблицы такие, какие построены для последовательностей выборок первого десятка от первого до десятого столбца. Остатки выборок первого столбца такие же как в 11, 21, 31, и. т. д. столбцах при одних и тех же номерах (m). Будут совпадать и остатки 2, 12, 22, 32, и т. д. в столбцах при одних и тех же номерах m в уравнениях для выборок. В таблице 2.2.3 такие столбцы записаны один под другим.

Выпишем уравнения для третьего десятка (столбцы 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30)

121m-100	127m-105	133m-110	139m-115	145m-120	151m-125	157m-130	163m-135	169m-140	175m-145

Составим таблицу для выборки соответствующей числам делящимся на 127. Эта выборка определяется уравнением 127m-105.

1270m-1248	1270m-1121	1270m-994	1270m-867	1270m-740	1270m-613	1270m-486	1270m-359	1270m-232	1270m-105
22	149	276	403	530	657	784	911	1038	1165
1292	1419	1546	1673	1800	1927	2054	2181	2308	2435
2562	**2689**	2816	2943	3070	3192	3324	3451	3578	3705

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………........

где: Первая строчка этих выборок соответствует числам имеющим своими делителями в порядке следования числа 6m-5 при m={1, 2, . . . , 10}; вторая строчка при m={11, 12, . . . ,20} и третья строчка m={21, 22, 23, . . . , 30} и т. д. Для всех строчек этих выборок общим делителем является число 127.

Уравнение, определяющее выборки чисел делящихся на 127 находится на 22 столбце (табл. 2.2.3). Найдем значение выборки которое при подстановке в

$6m^{\backslash}-5$ даст в результате число равное $127^2=16129$. Найдем значение этой выборки подставив в уравнение 127m-105 номер столбца, получим: 127·22-105=2689

Подставив в последовательность $6m^{\backslash}-5$ $m^{\backslash}=2689$ получим:

6·2689-5=16129; 127·127=16129.

Уже говорилось, что в любом упоряде с шагом B число не входящее в разложение шага упоряда при количестве сложений превышающем шаг упоряда на единицу, т, е, сумма этих B+1 сложений будет находится в последовательности в которой находится это складываемое число. Для примера возьмем число 7 и будем складывать его само собой при B=10, (Десятичная система).

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
147	154	161	166	175	182	189	196	203	210

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………......

Как видим будут совпадать и остатки в зависимости от чередований количеств сложений, что наглядно видно из приведенного примера.

Так же будет и при сложении если первым начальным числом будет другое число, например 9 к которому будем прибавлять число 7 и к получаемым суммам все время будем прибавлять 7 (см. любую последовательность приведенных в работе упорядов). Каждая строчка в таблицах 2.2.1 и 2.2.3 начинается с числа определяемого первым столбцом $m^{\backslash}=m$ служащего начальным и потом многократно суммируется с числом определяемым 6m-5 (m определяет строчку, а числовое значение 6m-5 определяет суммируемое число).

На основании сказанного можно составить формулы для столбцов выборки которых имеют одни и те же остатки при одних и тех же значениях m. Выпишем формулы для выборок 1, 11, 21, 31, и т. д. столбцов.

m, 61m-50, 121m-100, 181m-150, ...

Выпишем коэффициенты при m и найдем разности между ними.

1, 61, 121, . . .

60, 60, ...

Выводы для отыскания коэффициентов по аналогии с выводами уравнений (1.1.2, 1.1.3, 1.1.6, 1.1.7 параграф 1.1) для положительных чисел.

1+60(k-1)= 60k-59.

Для свободных членов:

0, 50, 100, ...

50, 50, ...

0+50(k-1)= 50k-50=5(10k-10).

Окончательная формула будет:

1. (60k-59)m-5(10k-10) (2.2.4)

где: k – номер десятка. 1. – начинается со столбца первого десятка. При k=1 получаем формулу, соответствующую формуле первого десятка. При k=2 получаем формулу, соответствующую формуле второго десятка с остатками такими же, как и в первом десятке при одних и тех же m и т. д.

Точно таким же образом выводим формулы для столбцов:

2, 12, 22, 32, ...

3, 13, 23, 33, . . . и т. д.

Результаты вывода формул для выборок с совпадающими остатками при одних и тех же значениях m запишем без вывода, так как вывод такой же, как и для 1. (60k-59)m-5(10k-10).

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ (60k-59)m-5(10k-10)\\
2.\ (60k-53)m-5(10k-9)\\
3.\ (60k-47)m-5(10k-8)\\
4.\ (60k-41)m-5(10k-7)\\
5.\ (60k-35)m-5(10k-6)\\
6.\ (60k-29)m-5(10k-5)\\
7.\ (60k-23)m-5(10k-4)\\
8.\ (60k-17)m-5(10k-3)\\
9.\ (60k-11)m-5(10k-2)\\
10.\ (60k-5)m-5(10k-1)
\end{array}\right\} \qquad (2.2.4\text{-}1)$$

где: $1 \le k < \infty$; $1 \le m < \infty$; 1., 2., 3., . . . , 9., 10. – столбцы первого десятка. При k=1 получаем формулы для выборок первого десятка. При k=2 получаем формулы для второго десятка соответствующие 11, 12, 13, . . . , 19, 20. столбцам (см. таблицу 3). При k=3 получаем формулы для третьего десятка соответствующие 21, 22, 23, 24, . . . , 29, 30. столбцам (см. таблицу 3) и т. д. Каждая из этих формул выделяет при изменении k от 1 до ∞ выборки с одними и теми же остатками при одних и тех же m.

Для того чтобы полностью перейти к нахождению алгоритма разложения на множители чисел последовательности 6m-5 необходимо рассмотреть суммы, получающиеся от многократного сложения последовательности 6m-1 находящиеся в последовательности 6m-5. Выпишем эти суммы:

$$\left.\begin{array}{l}
5(6m-1)=30m-5=6(5m)-5\\
11(6m-1)=66m-11=6(11m-1)-5\\
17(6m-1)=102m-17=6(17m-2)-5\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (2.2.5)$$

Выпишем формулы для выборок с разностями между ними:

5m 11m-1 17m-2 23m-3 29m-4 35m-5 . . . . .

6m-1 6m-1 6m-1 6m-1 6m-1 . . . . . .

Числа последовательности 6m-1 записанные по десять в строчку в порядке следования образуют таблицу аналогичную таблице 2.

Таблица 2. 2.2-1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
60m-55	60m-49	60m-43	60m-37	60m-31	60m-25	60m-19	60m-13	60m-7	60m-1
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59
65	71	77	83	89	95	101	107	113	119
125	131	137	143	149	155	161	167	173	179
185	191	197	203	209	215	221	227	233	239
245	251	257	263	269	275	281	287	293	299

………...

Проанализируем таблицы 2.2.2 и 2.2.2-1 Эти таблицы в сумме содержат 16 последовательностей содержащих простые числа (по 8 в каждой таблице) вместе с числами которые не входят в разложение шага упоряда ($B=60=2^2\cdot3\cdot5$). По функции Эйлера имеем:

$2\cdot(5-1)(3-1)(2-1)=16$

Как видим из выписки (2.2.5) числа образованные многократным сложением последовательности 6m-1, суммы которых находятся в последовательности 6m-5, являются составными. Суммы равны или квадратам чисел последовательности 6m-1 или произведениями двух из них. Каждая из выписок состоит из произведения, какого либо числа последовательности 6m-1 равного количеству суммирования, умноженному на числа той же последовательности 6m-1 в порядке их следования.

$$\left.\begin{array}{l} 5(6m-1)=\{5\cdot5,\ 5\cdot11,\ 5\cdot17,\ \ldots\} \\ 11(6m-1)=\{11\cdot5,\ 11\cdot11,\ 11\cdot17,\ \ldots\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (2.2.5\text{-}1)$$

Таблицы 2.2.2 и 2.2.2-1 составлены по принципу выписывания в строчку подряд чисел входящих в эти таблицы соответствующие последовательностям 6m-5 и 6m-1. А так как нумерация в упоряде с шагом 6 осуществляется в десятичной системе, то каждая строчка содержит по десять чисел рассматриваемых последовательностей. Таблица 2.2.2 вписана в таблицу 2.2.3 так, что каждый столбец (если счет вести слева направо) становится строчкой (счет сверху вниз). Остальное описано при составлении таблицы 2.2.3 (см. так же таблицу первого десятка). Такой же подход разворачивания таблиц осуществлен и для таблиц выборок чисел делящихся на 7, 13, . . . , 55. Но таблица 2.2.2 вписана в таблицу 2.2.3 только с указанием формул описывающих каждый из столбцов и остатков, но этого достаточно, так как остатки определяют первые начальные числа и при задании шага последовательности можно написать формулу (см. параграфы 1.1 и 1.3 в которых разработаны принципы такого подхода).

Таблица 2.2.3 составлена по принципу таблицы умножения, но вместо результатов равных произведениям перемножаемых чисел в соответствующих клеточках стоят номера чисел, под которыми находятся произведения перемножаемых чисел. Такой подход дает возможность указывать последовательность, в которой находятся произведения перемножаемых чисел и номера, под которыми находятся числа связанные между собой уравнениями, называемыми в данной работе выборками, определяющие номера чисел связанных между собой одним и тем же свойством, а именно делимостью на какое-либо число. Так например в уравнении для положительной части последовательности 6m-5 целочисленный аргумент m заменяется выборкой $6m^{\backslash}$-5 а в свою очередь выборка так же аналитически выражается уравнением указывающим какие номера последовательности 6m-5 определяют числа, делящиеся на определяемые этими уравнениями выборок. Например:

$m^{\backslash}$=7m-5={2, 9, 16, 23, . . . }

где: коэффициент при аргументе m указывает, на какое число делятся числа последовательности 6m-5 при изменении аргумента по определяемому уравнением выборки закону. (см. 2.2.5 и 2.2.5-1).

По такому же принципу построим таблицу для чисел, получаемых сложением последовательности 6m-1, суммы которых находятся в последовательности 6m-5.

Таблица 2.2.4

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_{(60)}$		5m	11m-1	17m-2	23m-3	29m-4	35m-5	41m-6	47m-7	53m-8	59m-9
5	60m-55	**5**	10	15	20	25	30	35	40	45	50
11	60m-49	10	**21**	32	43	54	65	76	87	98	109
17	60m-43	15	32	**49**	66	83	100	117	134	151	168
23	60m-37	20	43	66	**89**	112	135	158	181	204	227
29	60m-31	25	54	83	112	**141**	170	199	228	257	286
35	60m-25	30	65	100	135	170	**205**	240	275	310	345
41	60m-19	35	76	117	158	199	240	**281**	322	363	404
47	60m-13	40	87	134	181	228	275	322	**369**	416	463
53	60m-7	45	98	151	204	257	310	363	416	**469**	522
59	60m-1	50	109	168	227	286	345	404	463	522	**581**
	10	65m-10	71m-11	77m-12	83m-13	89m-14	95m-15	101m-16	107m-17	113m-18	119m-19
	20	125m-20	131m-21	137m-22	143m-23	149m-24	155m-25	161m-26	167m-27	173m-28	179m-29
	30	185m-30	191m-31	197m-32	203m-33	209m-34	215m-35	221m-36	227m-37	233m-38	239m-39
	40	245m-40	251m-41	257m-42	263m-43	269m-44	275m-45	281m-46	287m-47	293m-48	299m-49
	50	305m-50	311m-51	317m-52	323m-53	329m-54	335m-55	341m-56	347m-57	353m-58	359m-59
	60	365m-60	371m-61	377m-62	383m-63	389m-64	395m-65	401m-66	407m-67	413m-68	419m-69

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

где: $1 \le m < \infty$ для всех уравнений выборок.

Все номера выборок этой таблицы надо отнести к таблице 2.2.3, в которой они и находятся. Каждый номер выборки определяемый таблицей 2.2.4 определяет столбец в таблице 2.2.3, все числа которого делятся на число определяемое этой выборкой. Так, например:

Выберем номера выборок из таблицы 2.2.4.

5, 10, 21, 32, 49 . . . в таблице 3 им соответствуют столбцы 5. 25m-20,

10. 55m-45, 21. 121m-100, 32. 187m-155, 49. 289m-240, . . . эти столбцы (приведены вместе с уравнениями выборок) содержат числа, делящиеся на 5·5, 5·11, 11·11, 17·11, 17·17 соответственно получаемые после подстановки указанных выборок в уравнение 6m-5. Напомним, что уравнения для выборок при m=1 принимают значения равные номерам столбцов.

По аналогии с выводом формул (2.2.4-1) выведем уравнения для выборок столбцов таблицы 3.1.

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ (60k-55)m-(10k-10)\\
2.\ (60k-49)m-(10k-9)\\
3.\ (60k-43)m-(10k-8)\\
4.\ (60k-37)m-(10k-7)\\
5.\ (60k-31)m-(10k-6)\\
6.\ (60k-25)m-(10k-5)\\
7.\ (60k-19)m-(10k-4)\\
8.\ (60k-13)m-(10k-3)\\
9.\ (60k-7)m-(10k-2)\\
10.(60k-1)m-(10k-1)
\end{array}\right\} \qquad (2.2.4\text{-}2)$$

где: $1 \le k < \infty$ 1., 2., . . . , 9., 10 столбцы первого десятка при k=1 формулы будут описывать выборки этих столбцов. При k=2 формулы будут описывать выборки второго десятка, при k=3 формулы будут описывать столбцы третьего десятка и т. д. В таблицах 3 и 3.1 десятки записаны одна под другой только формулами выборок. Полностью записан только первый десяток.

$1 \le m < \infty$ каждое уравнение содержит бесконечное число номеров, определяемое уравнениями выборок, при подстановке которых в уравнение 6m-5 получим бесконечное число чисел делящихся на коэффициенты при целочисленном аргументе m в формулах для выборок.

Задача разложения чисел на множители многозначна и надо рассматривать все возможные варианты. На основании того, что произведение двух чисел находящихся в разных последовательностях какого либо упоряда или системы счисления (без учета его конкретной величины), будет находиться в последовательности, определяемой произведением их остатков или в общем случае произведением остатков любых из 2 чисел, которые входят в эти последовательности, к которым принадлежат и перемножаемые числа (см. 1.1.11).

Рассмотрим эти варианты:

$$\left.\begin{array}{l}
(r=1)\ \ 60m_1-59\ \text{x}\ 60m_2-59\ \ (r=1)\\
(r=19)\ 60m_1-41\ \text{x}\ 60m_2-41\ \ (r=19)\\
(r=31)\ 60m_1-29\ \text{x}\ 60m_2-29\ \ (r=31)\\
(r=49)\ 60m_1-11\ \text{x}\ 60m_2-11\ \ (r=49)\\
(r=7)\ \ 60m_1-53\ \text{x}\ 60m_2-17\ \ (r=43)
\end{array}\right\} \quad =60m_3-59\ \ (r=1)$$

(r=13) $60m_1$-47 x $60m_2$-23 (r=37)

где: x- читается как знак умножения. В скобках указаны остатки перемножаемых чисел последовательностей. Читается так: например:

(r=7) $60m_1$-53 x $60m_2$-17 (r=43) = $60m_3$-59 (r=1) Произведение любого числа последовательности $60m_1$-53 умноженное на любое число последовательности $60m_2$-17 будет находиться в последовательности $60m_3$-59.

Но в таблице 2.2.3 присутствуют так же числа, получаемые многократным сложением числовой последовательности 6m-1, стоящие на номерах выборок при m=1. Например:

В таблице 22.2.4 номеру выборки 21 в таблице 2.2.3 соответствует 21-й столбец с уравнением для выборок 121m-100. При m=1 121·1-100=21 при подстановке этого значения в уравнение 6m-5 получим число 121=11·11. (см. таблицу 2.2.4)

Номеру выборки 32 из таблицы 2.2.4 в таблице 2.2.3 соответствует 32 столбец с уравнением для выборок в этом столбце 187m-155 при m=1 принимающим числовое значение равное 17·11=187. И далее в обоих столбцах приведенных примеров выборки будут соответствовать числам, делящимся на числа последовательности 6m-5 в порядке их следования при придании m последовательных значений от 1 до ∞.

Поэтому надо приводить и возможные варианты, получаемые перемножением чисел таблицы 2.2.4 произведения которых находятся в таблице 2.2.3. Эти варианты будем обозначать полужирным шрифтом.

$$\left.\begin{array}{llcll}
\mathbf{(r=11)} & \mathbf{60m_1-49} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-49} & \mathbf{(r=11)} \\
\mathbf{(r=17)} & \mathbf{60m_1-43} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-7} & \mathbf{(r=53)} \\
\mathbf{(r=23)} & \mathbf{60m_1-37} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-13} & \mathbf{(r=47)} \\
\mathbf{(r=29)} & \mathbf{60m_1-31} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-31} & \mathbf{(r=29)} \\
\mathbf{(r=41)} & \mathbf{60m_1-19} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-19} & \mathbf{(r=41)} \\
\mathbf{(r=59)} & \mathbf{60m_1-1} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-1} & \mathbf{(r=59)}
\end{array}\right\} \mathbf{=60m_3-59\ \ (r=1)}$$

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-53.

$$\left.\begin{array}{llcll}
(r=13) & 60m_1-47 & x & 60m_2-41 & (r=19) \\
(r=31) & 60m_1-29 & x & 60m_2-23 & (r=37) \\
(r=43) & 60m_1-17 & x & 60m_2-11 & (r=49) \\
(r=1) & 60m_1-59 & x & 60m_2-53 & (r=7)
\end{array}\right\} =60m_3-53\ \ (r=7)$$

$$\left.\begin{array}{llcll}
\mathbf{(r=11)} & \mathbf{60m_1-49} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-43} & \mathbf{(r=17)} \\
\mathbf{(r=23)} & \mathbf{60m_1-37} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-31} & \mathbf{(r=29)} \\
\mathbf{(r=41)} & \mathbf{60m_1-19} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-13} & \mathbf{(r=47)} \\
\mathbf{(r=53)} & \mathbf{60m_1-7} & \mathbf{x} & \mathbf{60m_2-1} & \mathbf{(r=59)}
\end{array}\right\} \mathbf{=60m_3-53\ \ (r=7)}$$

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-47.

(r=7) $60m_1-53 \times 60m_2-41$ (r=19)
(r=31) $60m_1-29 \times 60m_2-17$ (r=43) $=60m_3-47$ (r=13)
(r=37) $60m_1-23 \times 60m_2-11$ (r=49)
(r=1) $60m_1=59 \times 60m_2-47$ (r=13)

(r=11) $60m_1-49 \times 60m_2-37$ (r=23)
(r=17) $60m_1-43 \times 60m_2-31$ (r=29) $=60m_3-47$ (r=13)
(r=41) $60m_1-19 \times 60m_2-7$ (r=53)
(r=47) $60m_1-13 \times 60m_2-1$ (r=59)

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-41.
(r=7) $60m_1-53 \times 60m_2-23$ (r=37)
(r=13) $60m_1-47 \times 60m_2-17$ (r=43) $=60m_3-41$ (r=19)
(r=31) $60m_1-29 \times 60m_2-11$ (r=49)
(r=1) $60m_1-59 \times 60m_2-41$ (r=19)

r=11) $60m_1-49 \times 60m_2-31$ (r=29)
(r=17) $60m_1-43 \times 60m_2-13$ (r=47) $=60m_3-41$ (r=19)
(r=23) $60m_1-37 \times 60m_2-7$ (r=53)
(r=41) $60m_1-19 \times 60m_2-1$ (r=59)

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-29.

(r=7) $60m_1-53 \times 60m_2-47$ (r=13)
(r=19) $60m_1-41 \times 60m_2-11$ (r=49) $=60m_3-29$ (r=31)
(r=37) $60m_1-23 \times 60m_2-17$ (r=43)
(r=1) $60m_1-59 \times 60m_2-29$ (r=31)

(r=11) $60m_1-49 \times 60m_2-19$ (r=41)
(r=17) $60m_1-43 \times 60m_2-37$ (r=23) $=60m_3-29$ (r=31)
(r=29) $60m_1-31 \times 60m_2-1$ (r=59)
(r=47) $60m_1-13 \times 60m_2-7$ (r=53)

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-23.

(r=7) $60m_1-53 \times 60m_2-29$ (r=31)
(r=13) $60m_1-47 \times 60m_2-11$ (r=49) $=60m_3-23$ (r=37)
(r=19) $60m_1-41 \times 60m_2-17$ (r=43)
(r=1) $60m_1-59 \times 60m_2-23$ (r=37)

(r=11) $60m_1-49 \times 60m_2-13$ (r=47)
(r=17) $60m_1-43 \times 60m_2-19$ (r=41) $=60m_3-23$ (r=37)
(r=23) $60m_1-37 \times 60m_2-1$ (r=59)
(r=29) $60m_1-31 \times 60m_2-7$ (r=53)

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-17.

(r=7) $60m_1$-53 x $60m_2$-11 (r=49)
(r=13) $60m_1$-47 x $60m_2$-29 (r=31)
(r=19) $60m_1$-41 x $60m_2$-23 (r=37)
(r=1) $60m_1$-59 x $60m_2$-17 (r=43)

=$60m_3$-17 (r=43)

(r=11) $60m_1$-49 x $60m_2$-7 (r=53)
(r=17) $60m_1$-43 x $60m_2$-1 (r=59)
(r=23) $60m_1$-37 x $60m_2$-19 (r=41)
(r=29) $60m_1$-31 x $60m_2$-13 (r=47)

=$60m_3$-17 (r=43)

Варианты определения составных чисел в последовательности 60m-11.

(r=7) $60m_1$-53 x $60m_2$-53 (r=7)
(r=13) $60m_1$-47 x $60m_2$-47 (r=13)
(r=37) $60m_1$-23 x $60m_2$-23 (r=37)
(r=43) $60m_1$-17 x $60m_2$-17 (r=43)
(r=19) $60m_1$-41 x $60m_2$-29 (r=31)
(r=1) $60m_1$-59 x $60m_2$-11 (r=49)

=$60m_3$-11 (r=49)

(r=11) $60m_1$-49 x $60m_2$-1 (r=59)
(r=17) $60m_1$-43 x $60m_2$-43 (r=17)
(r=23) $60m_1$-37 x $60m_2$-37 (r=23)
(r=29) $60m_1$-31 x $60m_2$-19 (r=41)
(r=47) $60m_1$-13 x $60m_2$-13 (r=47)
(r=53) $60m_1$-7 x $60m_2$-7 (r=53)

=$60m_3$-11 (r=49)

где: в скобках указаны остатки перемножаемых последовательностей.

В общем случае $m_1 \neq m_2$, но не исключаются и $m_1 = m_2$, т. е. значения целочисленного аргумента m могут быть любыми $1 \leq m_1 < \infty$ и $1 \leq m_2 < \infty$ и зависят от исследуемого числа, что мы и увидим в дальнейшем.

Пусть мы имеем число 6520633 которое надо разложить на множители. Выпишем возможные окончания, которые получаются при делении на 6.

1/6=0,16(6); 2/6=0,3(3); 3/6=0,5; 4/6=0,6(6); 5/6=0,83(3); 6/6=1.

Разделим число 6520633 на 6 получим число 1086772,1(6), т. е. таким образом мы установили, что исследуемое число находится в последовательности

6m-5=6520633. Откуда $m = \frac{6520633+5}{6} = 1086773$. Это мы получили номер числа, под которым стоит исследуемое число в последовательности 6m-5. Можно было бы и не прибегать к помощи только что приведенного решения уравнения, если вспомнить что при m=1 уравнения принимают значения остатков. Достаточно к целой части полученной при делении прибавить единицу.

В последовательностях с шагом 60 имеются две последовательности, которые имеют в низшем разряде число 3. Это последовательности:

60m-17 и 60m-47 для того чтобы определить к какой последовательности находится исследуемое число надо для каждого из них составить уравнение

60m-17=6520633 и 60m-47=6520633 и если m при решении одного из них принимает целочисленное значение, то и исследуемое число находится в этой последовательности. Такое решение дает последовательность 60m-47.

60m-47=6520633, $m = \frac{6520633 + 47}{6} = 108678$. Но остаток уже выборки (число 8) не дает нам ни какой информации о том, что составное число или простое.

Задача определения этого многозначна, так как необходимо рассмотреть все варианты определения составных чисел для последовательности 60m-47 и если ни один вариант не даст никакого решения на разложение, то число надо отнести к простому. В этом случае, этому простому будет соответствовать столбец, уравнение выборки которого будет равно исследуемому числу при значении m=1. (Вспомните решето Эратосфена).

Для облегчения изложения введём дополнительное определение для столбцов с повторяющимися остатками выборок в каждом десятке, которые в таблицах 2.2.3 и 2.2.4 записаны **уравнениями выборок одно под другим и могут быть описаны уравнениями (2.2.4-1) и (2.2.4-2). Такие построения будем называть колонками.**

Обратим внимание еще раз, что в колонках коэффициенты при целочисленном аргументе m определяющие делимость чисел совпадают с числами получаемыми последовательностями с шагом 60 (см. таблицу 2.2.2 и табл. 2.2.3). Поэтому варианты определения составных чисел можно было бы составить и перемножая коэффициенты при m в уравнениях для выборок первого десятка. Рассмотрим первый вариант:

(r=7) $60m_1$-53 x $60m_2$-41 (r=19)

Для определения первого делителя выберем колонку с уравнением для выборки первого десятка 19m-15 соответствующему уравнению 60m-41 (надо учитывать, что мы работаем с уравнениями для выборок). Число 6520633 в последовательности 6m-5 стоит под номером m=1086773. проверяем его делимость на 19.

19m-15=1086773 $m = \frac{1086773 + 15}{19} = 57199{,}36....$ не делится

Проверим на делимость следующего числа в колонке 79 определяемого равнением для выборки 79m-65.

79m-65=1086773 $m = \frac{1086773 + 65}{79} = 13757{,}443....$ не делится.

Следующее уравнение для выборки чисел делящихся на 139.

139m-115=1086773 $m = \frac{1086773 + 115}{139} = 7819{,}3....$ не делится

Далее смотрим следующую выборку в колонке:

199m-165=1086773 $m = \frac{1086773+165}{199} = 5462$ Число 6520633 делится на число 199. Мы получили номер 5462, подставив который в последовательность 6m-5 определим второй делитель исследуемого числа, который может быть как составным так и простым.

$6m^{\backslash}-5=6\cdot5462-5=32767$

Так как исследуемое число получено перемножением двух последовательностей принадлежащих колонкам в первом десятке имеющих уравнения выборок 19m-15 и 7m-5, то второй делитель надо искать во второй колонке. Договоримся колонки обозначать цифрами как это и делалось в уравнениях 2.2.4-1 и 2.2.4-2. Исследуем делимость на 7

7m-5=5462 $m = \frac{5462+5}{7} = 781$ 781 это номер числа в последовательности 6m-5 который получится если разделить на 6 число полученное от деления исследуемого на 199 и на 7. Подставим номер 781 в последовательность 6m-5.

$6\cdot781-5=4681$ проверка $\frac{6520633}{199\times 7} = 4681$ Как видим результаты совпадаю

В последовательностях 60m-59 и 60m-29 числа оканчиваются в низшем разряде на единицу. Определим, в какой из них находится число 4681:

60m-29=4681 $m = \frac{4681+29}{60} = 78{,}5$ число 4681 не находится в этой последовательности так как m не является целым числом.

60m-59=4681 $m = \frac{4681+59}{60} = 79$ находится в последовательности 60m-59.

Алгоритм действий уже изложен, поэтому не вижу смысла записывать все варианты. Варианты первой колонки результатов нахождения делителей не дают. Номер числа 4681 в последовательности 6m-5:

$$m = \frac{4681+5}{6} = 781$$

Варианты 4 колонки уже исследованы [4. (60k-41)m-5(10k-7)] при k=1 получаем формулу (4. 19m-15).

Рассмотрим варианты (r=31) $60m_1-29$ x $60m_2-29$ (r=31) или 6 колонку 6. (60k-29)m-5(10k-5).

31m-25=781 $m = \frac{781+25}{31} = 26$ число 4681 делится на 31

Результат от деления будет:

$6m^{\backslash}-5=6\cdot26-5=151$ 4681/31=151

Число 151 так же находится в 6 колонке в столбце 26, которому соответствует уравнение 151m-125 при m=1 мы должны получить номер выборки при подстановке которого в $6m^{\backslash}-5$ даст в результате число 151.

$151\cdot1-125=26$; $6m^{\backslash}-5=6\cdot26-5=151$

Число 151 является числом простым так как его номер не входит в номера чисел являющихся составными.

Таким образом мы разложили число 6520633 на множители

$7\cdot31\cdot151\cdot199=6520633$

Полученные сомножители проверены так же и по таблице 2.2.4

Определение простых чисел и разложение на множители это одна и та же задача, которая окончательно будет рассмотрена во второй части данной работы. Во второй части будет рассматриваться разложение на множители чисел находящихся в последовательности 6m-1 и некоторые вопросы, которые для этого необходимо рассмотреть.

Содержание