

На правах рукописи

КЛИМШИН Дмитрий Валерьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ПРОГРАММНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ДЛЯ АНАЛИЗА
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И
БЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ВЗАИМНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
И ЖЕСТКОСТИ УЗЛОВ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург– 2011

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Болдырев Юрий Яковлевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Рутман Юрий Лазаревич
кандидат технических наук
Михалюк Дмитрий Сергеевич

Ведущая организация: Научно-исследовательский вычислительный центр
МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 15 декабря 2011 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.10 в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, корпус ____, аудитория ____.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан «__» _____ 2011 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.229.10,
кандидат технических наук, доцент



Кудряшов Э.А.

Актуальность темы исследования. Проблема математического моделирования для обоснования технически сложных строительных объектов разрабатывается в России течении многих десятилетий. Несмотря на достижения в области создания математических моделей сложных инженерных систем недостаточно исследован ряд вопросов. Это относится к вопросам применения технологии напряженного железобетона, позволяющей существенно ускорять возведение и уменьшать ресурсоемкость сооружения. Потребность в решении таких задач возникает при увеличении высотности, геометрической сложности зданий и воздействующих нагрузок. Отсутствуют математические модели, вычислительные методы и программные комплексы, позволяющие учитывать скользящую работу нескольких слоев напряженных элементов в теле бетона. Не в полной мере исследованы задачи влияния жесткости узловых соединений в металлических сооружениях сложной формы (куполообразных и т.д.). Отсутствуют математические модели и методики, позволяющие учитывать реальную жесткость узлов и определять напряженно-деформированное состояние каждого узла с учетом этой жесткости. Не исследован вопрос устойчивости ряда конструкций за пределом пластичности. Это касается, в частности, основных элементов промышленных цехов - подкрановых колонн. Отсутствуют математические модели и программные комплексы, позволяющие проводить анализ устойчивости колонн в нелинейной постановке для различных конструктивных схем. Также, не в полной мере исследован вопрос ветрового воздействия на сооружения сложной геометрической формы. Требуется разработка методик численного анализа ветрового давления в нелинейной постановке методами вычислительной гидрогазодинамики, позволяющих учитывать сложную геометрическую форму и взаимное влияние близко расположенных объектов.

Аналитическое решение перечисленных задач требуют существенного упрощения математических моделей, не позволяя достичь требуемой точности определения напряженно-деформированного состояния элементов сооружения.

Цель диссертационного исследования – разработка комплекса математических моделей, вычислительных методов и методик для оптимизации и повышения качества расчетного обоснования технически сложных строительных объектов.

Основным содержанием диссертационной работы является разработка, совершенствование и применение современных технологий математического моделирования, численных методов и комплексов программ для решения новых и уникальных технических и прикладных проблем инженерного анализа и проектирования в сфере строительства.

Для достижения перечисленных целей в работе поставлены и решены следующие **научные и практические задачи:**

1. Разработана математическая модель большепролетного куполообразного металлического сооружения, учитывающая реальную жесткость узловых соединений. На основе модели разработана и верифицирована методика уточнения напряженно-деформированного состояния самого сооружения и элементов узловых соединений.

2. Разработана математическая модель высотного бетонного сооружения сложной геометрической формы с большим перепадом толщин стен и учетом различных вариантов работы напряженной арматуры. На основе модели разработана методика расчета уникальных железобетонных конструкций со сложной геометрией и многослойным расположением напряженных элементов.

3. Разработаны математические модели металлических подкрановых колонн различных конструкций, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность. На основе моделей разработана методика и программное обеспечение для анализа несущей способности подкрановых колонн за пределом пластичности.

4. Разработана математическая модель и проведено моделирование движения воздушных потоков в масштабе спортивного комплекса. На основе модели разработана методика определения основных характеристик отрывного турбулентного течения рассматриваемых объектов.

В работе приводятся оценки возможностей применения рассматриваемых подходов и методологий моделирования для строительной сферы с разработкой рекомендаций по наиболее оптимальному сочетанию сильных сторон различных программных комплексов при проектировании уникальных зданий и сооружений.

Объектами исследования диссертационной работы являются математические модели уникальных зданий и сооружений, как составляющие современных технологий математического моделирования и проектирования в сфере строительства, включающие:

- технологии математического моделирования металлических конструкций;
- совершенствование методологий анализа напряженно-деформированного состояния предварительно напряженных железобетонных конструкций;
- технологии анализа аэродинамического воздействия набегающего ветрового потока на сооружения спортивного комплекса.

Объектами исследования являются также программные комплексы, на примере которых производится сравнение их возможностей и разработка вариантов оптимального их применения.

В последней части работы, как пример внедрения разработанных методик в строительную индустрию, описывается разработанное программное обеспечение для анализа нелинейного деформирования подкрановых колонн, являющееся адаптацией зарубежного программного комплекса.

Методы исследования – современные математические методы механики сплошных сред, преимущественно, в виде линейной теории упругости изотропной среды, а также методы механики жидкости и газа. Численное моделирование выполняется на основе универсального подхода метода конечных элементов (конечных объемов). Для решения большинства задач использованы последние версии программных комплексы ANSYS Mechanical 11 и ANSYS CFX 10.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Верифицированная математическая модель большепролетного металлического сооружения, учитывающая реальную жесткость узловых соединений. Представлен ряд результатов расчета уникального металлического купола, разработана методика учета узлов металлической конструкции в твердотельной постановки в составе балочной модели конструкции.

2. Верифицированная математическая модель бетонного сооружения с большим перепадом толщин стен и учетом работы напряженной арматуры. Новизна модели состоит в многослойном оболочечном представлении предварительно напряженных бетонных элементов, а также в методе их связывания со скользящей напряженной арматуры внутри. На основе этой математической модели разработана и продемонстрирована новая методика расчета бетонных конструкций со сложной геометрией с учетом напрягаемых элементов в теле бетона.

3. Проведен анализ результатов моделирования движения воздушных потоков в масштабе спортивного комплекса. Определены аэродинамические коэффициенты ветрового давления на здания с учетом взаимного влияния сооружений друг на друга.

4. Математические модели металлических подкрановых колонн различных конструкций, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность. Впервые разработан программный продукт «Подкрановые колонны», использующий расчетное ядро комплекса ANSYS и предназначенный для анализа нелинейного поведения колонн за пределом пластичности.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1. Разработана и верифицирована математическая модель большепролетного металлического сооружения, позволяющая учитывать реальную жесткость узловых соединений. На основании разработанной математической модели проведена разработка

методики учета сложных узловых соединений для уникальных металлических конструкций в составе общей расчетной модели для учета их жесткости, а также определения реального напряженно-деформированного состояния.

2. Впервые разработана и верифицирована математическая модель бетонного сооружения с большим перепадом толщин стен, основывающаяся на многослойном оболочечном представлении предварительно напряженных бетонных элементов, позволяющая проанализировать различные варианты работы напряженной внутренней арматуры и уточнить значения напряженно-деформированного состояния сооружения.

3. Разработаны математические модели металлических подкрановых колонн различных конструкций, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность. Впервые разработано программное обеспечение, предназначенное для нелинейного анализа подкрановых колонн за пределами пластичности.

Достоверность результатов, выводов и рекомендаций определяется:

1. Удовлетворительным соответствием полученных результатов ожидаемым оценкам поведения конструкций, совпадением результатов в различных программных комплексах, а также сравнением с экспериментальными данными.

2. Опорой на классические и современные математические модели, хорошо зарекомендовавшие себя в решении многих практических задач, а также обоснованным применением современных численных методов.

3. Качественным совпадением результатов ветрового воздействия с оценками, представленными в СНиП.

Практическая ценность работы связана с применением разработанных математических моделей и методик при проектировании уникальных для России сооружений – металлического купола и спортивного трамплина. Полученные в работе результаты использованы при расчетном обосновании данных конструкций.

Разработанная математическая модель и методика учета узловых соединений металлических конструкций позволяет уточнить напряженное состояние элементов узлов (за счет учета локальных усилий в окружающих узел элементах), а также учитывать влияние жесткости узла на поведение конструкции, что не возможно в рамках стандартных методик. Величина уточнения напряженно-деформированного состояния может достигать 20 %.

Практической ценностью обладает возможность учета особенностей перехода узлов в пластическое состояние и оценка влияния данного процесса на поведение конструкций в аварийных ситуациях.

Разработанная в работе методика моделирования уникальных бетонных сооружений с большими перепадами толщин и учетом напряженной скользящей арматуры позволяет

проводить проектирование таких сооружений в России без обращения к зарубежным проектировщикам (существующие Российские расчетные комплексы не позволяют оценивать работу скользящего варианта применения напряженной арматуры). Возможность учета скользящего закрепления тросов позволяет уточнить на 10% напряженно-деформированное состояние конструкции.

В работе впервые выполнена адаптация программного комплекса ANSYS к требованиям расчета конкретных объектов. Практической ценностью обладает разработанный пакет программ для анализа упругопластического деформирования подкрановых колонн промышленных зданий, позволяющий оценивать остаточный ресурс колонн.

Рассмотрены и применены технологии вычислительной аэродинамики при расчете высотных трамплинов спортивного комплекса, где аэродинамические характеристики являются одним из важнейших факторов, характеризующих работоспособность и эффективность спортивных сооружений. При этом проведен анализ результатов моделирования движения воздушных потоков в масштабе всего спортивного комплекса, определены аэродинамические коэффициенты ветрового давления на поверхности сооружений, а также рассмотрено взаимное влияние двух близко стоящих высотных зданий при расчете ветрового воздействия на сооружения. Данные результаты использованы при проектировании уникальных для России сооружений.

Апробация. Основные результаты работы были применены при проектировании крупнейшего в России металлического купола диаметром 127м, а также при проектировании уникальных олимпийских высотных спортивных трамплинов HS 140 и HS 106. Результаты работы положены в основу разработанного программного продукта «Подкрановые колонны». Результаты работы представлены автором: в «Научно-технических ведомостях СПбГПУ» №3, №4 и №5 за 2010 г; на конференции «Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи», 2010 г.; на конференции "Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ)" в МГУ имени М.В. Ломоносова, 2011 г.; на семинаре в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ им. М.В.Ломоносова; на семинарах кафедр «Математические и программное обеспечение высокопроизводительных вычислений» и «Прикладная математика» Физико-Механического факультета; на семинаре кафедры «ПГС» Инженерно-Строительного факультета СПб ГПУ; на семинаре секции строительной механики в Доме учёных имени М. Горького РАН.

Личный вклад автора. Основные научные положения, математические модели, алгоритмы и их программная реализация, содержащиеся в диссертационной работе, получены автором самостоятельно.

Публикации. Основные теоретические и практические результаты диссертации опубликованы в 6 научных работах, среди которых 3 статьи в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных в перечне ВАК, 2 доклада на Международных и Всероссийских конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, включающего 63 наименования. Работа изложена на 171 машинописных страницах, содержит 88 рисунков, 3 таблиц.

Основное содержание работы.

Во введении показана актуальность темы исследования, описано современное состояние проблем математического моделирования в области проектирования зданий и сооружений.

В главе 1 проведен обзор развития математических технологий для инженерного анализа и проектирования зданий и сооружений, описаны основные сертифицированные программные продукты, дан краткий обзор нагрузок на здания и сооружения, описаны основные подходы при постановках задач для расчета зданий и сооружений.

В настоящей главе рассмотрена определенная ретроспектива развития расчетных методик в области проектирования зданий и сооружений.

Освещен вопрос трудоемкости работы в разных расчетных пакетах и даны рекомендации по сочетанию сильных сторон различных комплексов. Приведен пример одной из эффективных «цепочек» применения различных пакетов, позволяющей быстро и качественно выпускать конструкторскую документацию уникальных сооружений.

Представлены вопросы по исследованию значимости аэродинамического воздействия на здания и сооружения, значимость которых непрерывно растет в связи с ростом высотности в современном строительстве. Развивается тезис об уменьшении роли натурального эксперимента в данной сфере с ростом эффективности здесь технологий мат. моделирования.

Представлено описание метода конечных элементов, используемого в работе.

Кроме того в главе 1 описываются основы выбора базисных функций, связь метода конечных элементов с методами строительной механики стержневых систем, а также описывается формы потенциальной энергии для стержневых, оболочечных и пространственных систем.

В главе 2 приведены примеры применения программных комплексов, а также разработаны новые математические модели и методы расчета для ряда уникальных сооружений. Одной из актуальных задач продления ресурса промышленных сооружений, является анализ устойчивости подкрановых колонн. В данной главе произведено описание разработки первого в своем роде специализированного программного комплекса

«Подкрановые колонны» по расчету нелинейного поведения подкрановых колонн за пределом пластичности (Рис. 1). Анализ устойчивости используется как для определения уровня нагрузки, при которой конструкция теряет устойчивость, так и для выяснения, сохраняет ли конструкция устойчивость при заданном уровне нагрузки.

Математическая формулировка задач устойчивости стержневых систем в линейной постановке основывается на решении задачи продольно-поперечного изгиба стержня. Дифференциальное уравнение и соответствующие кинематические и статические параметры в амплитудном состоянии, а также граничные условия, имеют вид:

$$\begin{aligned} v^{iv}(x) + 2r^2 v''(x) + s^4 v(x) &= q_y(x) / EI, v|_{x=0} = v_0, \varphi|_{x=0} = \varphi_0, M|_{x=0} = M_0, Q|_{x=0} = Q_0; \\ \varphi(x) &= v'(x); \quad M(x) / EI = a_1 v''(x) + a_2 v(x) + a_3 q(x) - a_4; \\ Q(x) / EI &= b_1 v'''(x) + b_2 v'(x) + b_3 q'(x) - b_4 \varphi(l), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ - амплитудные полный угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила. Данными дифференциальными уравнениями и условиями закрепления стержня по концам определяются все формы потери устойчивости невесомого стержня при его сжатии.

Решение задачи устойчивости подкрановой колонны с учетом детальных конструктивных особенностей производится с использованием метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе ANSYS. Рассматривается дискретная оболочечно-стержневая система, разбитая на конечные элементы (основные колонны – оболочки, решетка - стержни). Связь оболочечных элементов со стержневыми элементами обеспечивается естественным образом при совпадении узлов по всем 6 степеням свободы – $u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$. Снизу колонны ограничены перемещения, к верхней плите приложена сила F_z и крутящие моменты M_x, M_y .

При выполнении линейного анализа устойчивости методом конечных элементов решается задача на собственные значения. В такой формулировке определяются значения масштабных факторов (собственные значения) для матрицы эффективной жесткости, при которых компенсируется влияние матрицы жесткости системы. Разрешающее уравнение для линейного подхода имеет следующий вид:

$$([K] - \lambda[S])\{u\} = 0, \quad (2)$$

где $[K]$ - матрица жесткости конструкции; $[S]$ - матрица эффективной жесткости; λ - собственное значение (масштабный фактор); $\{u\}$ - собственный вектор, определяющий форму выпучивания.

Для более точного определения критических нагрузок следует использовать нелинейное решение. Нелинейный анализ устойчивости - это, в сущности, исследование влияния больших смещений. Программный комплекс ANSYS корректирует ориентацию

элементов конструкции, используя комбинированный способ решения на основе метода Ньютона-Рафсона в сочетании с техникой корректирующих дуг Рикса.

Подход, использующий процедуру последовательных приближений Ньютона-Рафсона, приводит к следующему соотношению, справедливому для некоторой равновесной итерации:

$$[K]_{i-1} \{\Delta u\}_i = \{F\} - \{F_{el}\}_{i-1}, \quad (3)$$

где $[K]_{i-1}$ - матрица жесткости на предыдущей итерации; $\{\Delta u\}_i$ - вектор, компонентами которого являются приращения перемещений двух последовательных итераций $\{u\}_i = \{u\}_{i-1} + \{\Delta u\}_i$; $\{u\}_i$ - вектор перемещений, относящихся к текущей итерации; $\{F\}$ - вектор приложенных к системе сил; $\{F_{el}\}_{i-1}$ - вектор упругих сил, соответствующих перемещениям предыдущей итерации с номером $(i - 1)$.

Нелинейный анализ устойчивости выполняется за счет постоянного контроля за поведением приращений Δu в итерационном процессе. Обычно при решении задач с учетом больших смещений факт уменьшения прироста перемещений между итерациями свидетельствует о достижении системой стабильного, устойчивого состояния. Однако если конструкция нагружена выше критического уровня, то приращения Δu будут расти от итерации к итерации (т.е. решение расходится). Критической нагрузкой (нагрузкой, соответствующей потере устойчивости) является тот ее уровень, при котором решение начинает расходиться.

В рамках адаптации программного комплекса ANSYS к нуждам строительной индустрии в диссертации проведена разработка программного продукта для расчета и анализа подкрановых колонн CML Crane Column Stability (CCS) (Рис. 1), в основу которого положено семейство математических моделей колонн различной конструктивной формы.

Отличительной особенностью разработанных математических моделей колонн является учет пластического поведения материала.

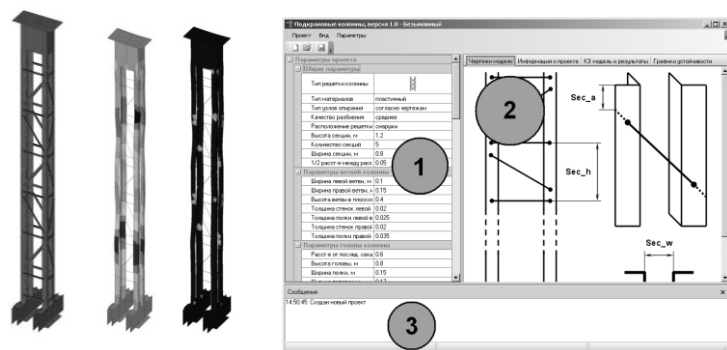


Рис. 1. Подкрановые колонны и интерфейс программы

Основной задачей разработанной программы является анализ устойчивости подкрановых колонн в нелинейной постановке с учетом упругопластической работы всех элементов. В работе проведено сравнение результатов работы программы CML Crane Column Stability с аналитическими оценками значения критической силы:

$$P_{кр.аналит} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_b} + \frac{a^2}{24EJ_c} \right)}, \quad J = 2J_c + F_c \frac{b^2}{2}, \quad (4)$$

где E - модуль упругости материала, F_c - площадь поперечного сечения вертикальной ветви, J_b - момент инерции поперечного сечения распорки, J_c - момент инерции поперечного сечения вертикальной ветви относительно центральной оси параллельной оси изгиба. Погрешность определения критической силы составляет 3%.

Также проведено сравнение результатов с экспериментальными данными (Рис. 2). Продемонстрировано, что результат нелинейного анализа устойчивости гораздо ближе к реальному поведению конструкции. При этом показано, что пластические деформации, столь существенно меняющие поведение колонны, наблюдаются в основном только в элементах опор.

Разработка подобного программного пакета решает одну из поставленных в работе проблем – отсутствие адаптации современных зарубежных программных комплексов для решения прикладных задач строительного проектирования. Продемонстрированный вариант разработки специализированного программного обеспечения, как «надстройки» над «тяжелым» зарубежным комплексом, является наиболее оптимальным путем внедрения разрабатываемых далее в работе расчетных методик в строительную индустрию.

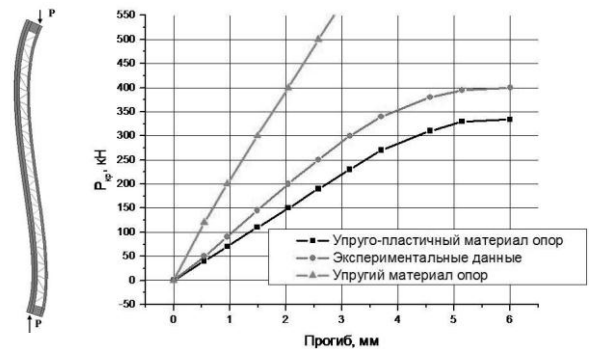


Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных с результатами программы

Следующая часть главы 2 посвящена применению вычислительных методов и разработка методик для расчета большепролетных металлических сооружений.

В настоящее время наблюдается все большее усложнение форм металлических конструкций, объемно-планировочных решений, пролетов и высот. Увеличивается диапазон используемых сплавов, способов соединения и изготовления элементов конструкций.

Одной из наиболее экономичных форм покрытий зданий больших площадей являются купола – сооружения со сферической формой покрытия. При различных очертаниях и конструктивных формах они позволяют обеспечить наименьший расход материалов по сравнению с другими конструкциями. В главе 2 данной работы представлены некоторые результаты расчета уникального металлического купола диаметром 127 метров, проведен выбор наилучшей конструктивной схемы, проведена разработка методики расчета сложных узловых соединений в пространственной твердотельной постановке.

Особенностью данной методики является использование гибридной твердотельно (узлы) – стержневой (балки) математической модели конструкции. При этом в областях касания стержневой и твердотельной моделей производится объединение перемещений.

Математическая формулировка статических задач прочности стержневых систем основывается на решении задач растяжения-сжатия, изгиба, сдвига и кручения стержня. Дифференциальные уравнения данных краевых задач, приведенные к виду начальной задачи (Коши), а также граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{q_x(x)}{EA}, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad N|_{x=0} = EAu'|_{x=0}; \quad \Theta''(x) = -\frac{m(x)}{GI_k}, \quad \Theta|_{x=0} = \Theta_0, \quad M|_{x=0} = M_0; \\ v_c''(x) = -\frac{q_y(x)k_1}{GA}, \quad v_c|_{x=0} = v_{c0}, \quad Q|_{x=0} = Q_0; \quad v^{iV}(x) = \frac{q_y(x)}{EI}, \quad v|_{x=0} = v_0, \quad Q|_{x=0} = Q_0, \quad M|_{x=0} = M_0, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi_0. \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ - полный угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила.

Для реализации возможности учета жесткости узловых соединений в стержневую модель сооружения импортируется модели узлов, основанные на механике сплошной среды. Для сплошной среды требуется определение 9 компонент тензора напряжения – σ_x , σ_y , σ_z и 6 касательных напряжений. В качестве геометрических уравнений механики сплошной среды используются уравнения (Сен-Венана) совместности (неразрывности) деформаций, которые получены из соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned}$$

Для полноты системы добавляется условие равновесия и Закон Гука:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \rho Z = 0, \quad d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl}.$$

Реализация подобной смешанной математической модели производилось с использованием метода конечных элементов (Рис. 3). Далее, в соответствии с главой 1 данной работы, строится матрица жесткости системы и выполняется решение методом конечных элементов.

Металлические части каркаса моделировались с помощью балочных элементов. Сеточное разбиение на конечные элементы проведено на основании сходимости решения по количеству степеней свободы.

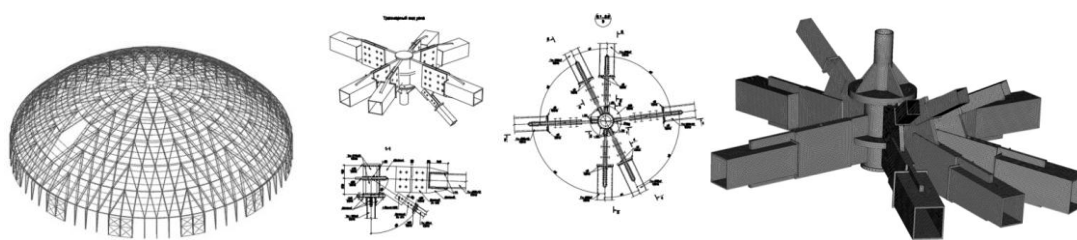


Рис. 3. Большепролетный металлический купол и характерная конструкция узлов

Для учета реальной жесткости узловых соединений (что не производится при стандартном анализе) в работе разработана методика учета узлов конструкции в твердотельной постановке в составе балочной модели сооружения. При этом твердотельные узлы конструкции связываются с балочными элементами сооружения с помощью функции coupling (накладывает условие эквивалентности выбранных степеней свободы в двух узлах). Математически данное условие выглядит следующим образом: $U^{beam}_i = U^{solid}_i$, где $i = x, y, z$.

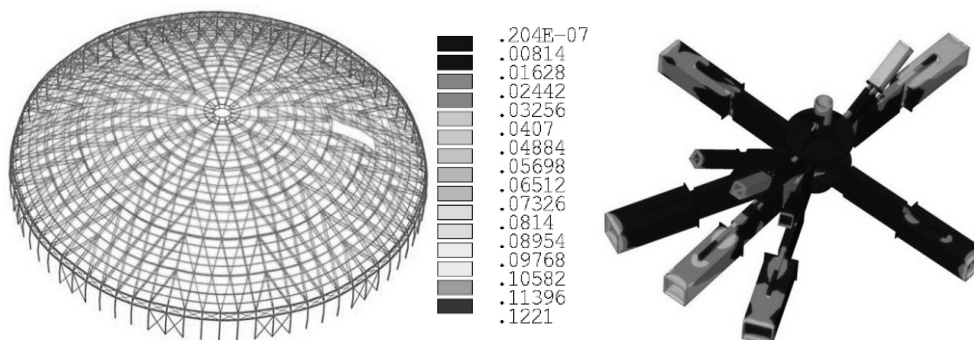


Рис. 4. Перемещения $|U_{sum}|$ конструкции, поле напряжений отдельного узла

Трудоемкость исполнения уникальных конструкций заключается также и в сложных схемах узлов. Зачастую узлы подобных конструкций невозможно реализовать из-за сложностей сварки, контроля качества сварных швов, монтажа. Сложные узлы металлических конструкций традиционно проектируются частями, каждый элемент отдельно (сварные швы, болты, пластины). При этом напряжения в спроектированном таким образом узле в реально работающей конструкции могут отличаться от предполагаемых. Это связано с влиянием конечной жесткости узла на поведение конструкции. Учитывая то, что количество узлов уникальной конструкции подобной куполу составляет порядка нескольких сотен, идеализация напряженного состояния в узлах при расчете (шарнир, жесткое соединение) может привести при реальной работе конструкции к отличиям до 20% по деформациям от проекта (влияние конечной жесткости в каждом из нескольких сотен узлов существенно)

В этих условиях наблюдается существенное отличие в напряженно-деформированном состоянии между спроектированной и реально работающей конструкцией. Данное отличие, прежде всего, скажется на усилиях в узлах. Представленная методика позволяет проверить

спроектированный частями узел с точки зрения его пространственной работы в составе конструкции. Это позволяет проанализировать отличие усилий от проектных (идеализированных) и, при необходимости, внести корректировки. Данная методика позволяет учесть дефекты производства узлов (плохую сварку, неточность сборки, углов и размеров). Экспресс анализ подобных дефектов может быть проведен по требованию завода в кратчайшие сроки без срыва графика монтажа или переделки уже сделанного узла.

Широкие возможности применения данной методики открываются в случаях экстремальных воздействий на конструкцию. При этом большая часть конструкции может решаться в виде балочной системы, а интересующая часть содержать в своем составе твердотельные узлы. Такой подход позволяет исследовать влияние работы узлов за пределами пластичности и влияние локальных разрушений на поведение всей конструкции.

Особенностью решения данной задачи является наличие большого числа связей между балочными и твердотельными элементами при импортировании нескольких узлов, а также повышенная ресурсоемкость при решении в этом случае.

Таким образом, в данной части главы 2 разработана гибридная балочно-твердотельная модель конструкции и применена методика, решающая поставленную в начале работы проблему - отсутствие возможностей полноценного расчета уникальных металлических сооружений с узлами повышенной трудоемкости исполнения.

Третья часть главы 2 посвящена разработке методики расчета уникальных бетонных сооружений с напрягаемой арматурой. Одним из наиболее сложных с точки зрения конструктива объектов, в которых планируется применение напряженного железобетона, являются спортивные прыжковые трамплины многофункционального комплекса «Токсово». Каждый трамплин представляет собой вертикально-наклонную изогнутую конструкцию большой высоты. На вершине трамплина HS 140 располагается округлая башня с помещениями ресторана и стартовой площадкой для спортсменов. Во внешней стене вертикальной части каждого трамплина планируется проведение 48 напряженных тросов диаметром 8 см (Рис. 5).

Для обеспечения возможности учета различного варианта работы напряженной арматуры (скользящего и неподвижного) в диссертации разработана математическая модель данного сооружения, основанная на многослойном представлении стен сооружения, в каждом слое которых располагается напрягаемая арматура. Особенностью данной модели является объединение в одной модели оболочечной формулировки стен и балочной формулировки напряженной арматуры.

Математическая формулировка статической задачи прочности для пластин включает:

- уравнения равновесия (бигармоническое уравнение Софи-Жермен - Лагранжа):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}; \quad (6)$$

- условие совместности деформаций:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \quad \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} z; \quad (7)$$

- закон Гука для пластин ($\sigma_z = 0$):

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1-\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

- граничные условия (статические, геометрические, смешанные).

Математическая формулировка статических задач прочности стержневых систем основывается на решении задач растяжения-сжатия, изгиба, сдвига и кручения стержня. Дифференциальные уравнения данных краевых задач, приведенные к виду начальной задачи (Коши), имеют вид:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\frac{q_x(x)}{EA}, \quad u|_{x=0} = u_0, \quad N|_{x=0} = EA u'|_{x=0}; \quad \Theta''(x) = -\frac{m(x)}{GI_k}, \quad \Theta|_{x=0} = \Theta_0, \quad M|_{x=0} = M_0; \quad (9)$$

$$v_c''(x) = -\frac{q_y(x)k_1}{GA}, \quad v_c|_{x=0} = v_{c0}, \quad Q|_{x=0} = Q_0; \quad v^{IV}(x) = \frac{q_y(x)}{EI}, \quad v|_{x=0} = v_0, \quad Q|_{x=0} = Q_0, \quad M|_{x=0} = M_0, \quad \phi|_{x=0} = \phi_0,$$

где $\phi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ - полный угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила.

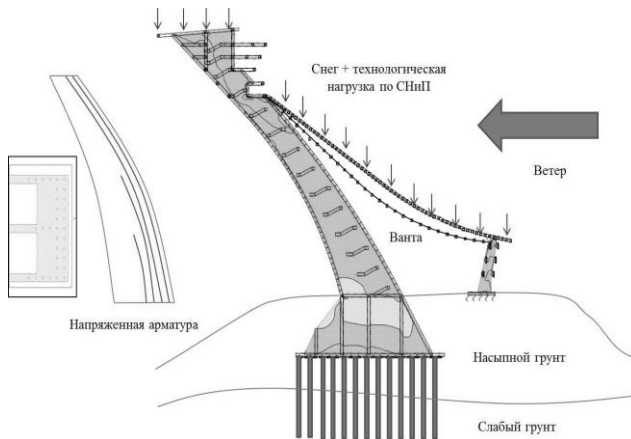


Рис. 5. Сооружение трамплина

и постановка задачи

На всех нагруженных поверхностях $\sigma_z = P_i$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$ где i – номер распределенной нагрузки (снег, вес оборудования и т.д.).

Реализация подобной смешанной математической модели производилось с использованием метода конечных элементов. Сооружение трамплина моделируется оболочечными элементами. Основание трамплина закреплено жестко – по всей фундаментной плите $U_x=U_y=U_z = 0$ (в точке опоры на свайное поле).

В точках совпадения узлов бетона и троса накладывается дополнительное условие (Рис. 6) на перемещения: $U_X^B=U_X^T; U_Y^B=U_Y^T; U_Z^B=U_Z^T$ – для жесткого сопряжения и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_X^B - U_X^T}{U_Y^B - U_Y^T}; U_Z^B = U_Z^T \text{ – для скользящего сопряжения.}$$

Следует отметить, что расчет подобного сооружения в стандартных комплексах SCAD, LIRA не возможен из-за ограничений возможностей моделирования сложной геометрии, а также невозможности реализации скользящего поведения троса.

Новизна разработанного метода заключается в том, что с его помощью возможно моделировать бетонные сооружения с большими перепадами толщин и учетом напряженной арматуры в них, а также исследовать влияние эффекта скольжения тросов.

Основной особенностью разработанного метода является моделирование стены как набора оболочек определенной толщины на расстоянии друг от друга (Рис. 6). Каждая оболочка имеет определенную длину и расположение в стене. Напряженная арматура располагается в плоскости оболочек и связана с элементами своей оболочки математическими условиями скольжения или связывания. Общая толщина оболочек в каждом сечении стены соответствует реальной толщине стены. Общий объем материала также идентичен. Кроме того, для корректного присоединения остальных элементов конструкции, в модель заводятся дополнительные оболочки по границам стены, не содержащие арматуры и имеющие малую толщину. Вся система оболочек связана друг с другом жесткими вставками, позволяющими работать всем элементам совместно.

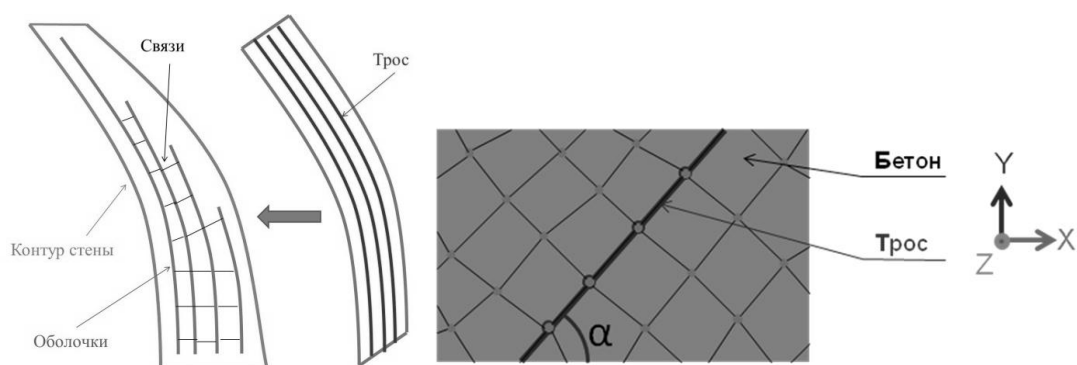


Рис. 6. Технология моделирования стены и расположение узлов троса относительно бетона

Моделирование производилось оболочечными и балочными элементами, а решение сравнивалось с эталонной моделью, созданной на основе твердотельных элементов. При этом разработка методики шла от решения тестовых моделей с элементарным и поддающимся анализу расположением тросов и их натяжением, к решению полной модели, учитывающей проектное расположение тросов и изменение толщины внешней стены.

Для верификации данных результатов было проведено сравнение с расчетом в комплексе TOWER, имеющим сертификат соответствия Госстроя России на расчет железобетонных конструкций. Применение разработанной модели позволяет уточнить решение в случае скользящих тросов на 10%. Полученные результаты использованы при расчете и проектировании описанных конструкций, являющихся уникальными для России. Разработанная методика является уникальной в своем роде и позволяет проектировать уникальные бетонные сооружения со сложной геометрией.

В главе 3 работы приведены результаты применения современных технологий вычислительной аэродинамики для расчета зданий и сооружений. С точки зрения прикладной аэродинамики такой класс задач относится к области турбулентных течений за плохообтекаемыми телами, включая и отрывные течения. Результаты данной части работы, имеют широкую область приложений к численному моделированию ветрового воздействия на здания и сооружения, к которым относятся рассматриваемые в диссертации объекты различной архитектуры и конфигурации.

Новизна данного исследования заключается в том, что применение математических и численных методов аэродинамики к современным зданиям и сооружениям в России носит единичный характер. С этой точки зрения данная часть работы позволяет оценить применимость и трудоемкость изложенного подхода к задачам обтекания высотных объектов.

В качестве наиболее характерного примера рассмотрено обтекание воздушным потоком высотных трамплинов спортивного комплекса. Рассматривается моделирование на основе программного комплекса ANSYS CFX, который входит в состав вычислительной среды инженерного анализа ANSYS Workbench.

Основными задачами ставятся определение величин ветрового давления и аэродинамических коэффициентов спортивных трамплинов многофункционального спортивного комплекса «Токсово», находящегося в стадии проектирования в данный момент.

Математическая постановка задачи выглядит следующим образом: расчёт турбулентного несжимаемого течения предполагает решение системы трехмерных нестационарных нелинейных уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right], \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где u, v, w – искомые компоненты вектора скорости (по осям x, y, z), p – давления, t – время, μ – динамический коэффициент вязкости для воздуха, ρ – плотность, R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

Также в состав системы входят уравнение неразрывности и уравнение состояния:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad p = \rho RT. \quad (10)$$

При этом ветровые потоки считаются несжимаемыми и изотермическими, массовые силы не учитываются. Граничные условия для расчетной области - "мягкие" условия по Нейману (равенство нулю производных). Шероховатость стенок не учитывалась. На одной границе задается ветровой профиль в виде скорости потока, а на остальных границах – условие равенства нулю давления. В качестве входных данных в расчеты закладывался логарифмический профиль скорости ветра в приземном слое атмосферы, определяемый в соответствии с нормативными и расчетными ветровыми нагрузками, рассчитанными по СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия» для II ветрового района (Санкт-Петербург) и типа местности «А».

В работе принята к-ε модель турбулентности – дифференциальная модель второго порядка, основанная на совместном решении уравнений переноса импульса, кинетической энергии и скорости диссипации. Уравнение для кинетической энергии и скорости диссипации турбулентности имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v k)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w k)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \\ &+ \mu_t \Phi - \rho \varepsilon + \frac{C_4 \beta \mu_t}{\sigma_t} (g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z}); \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \varepsilon)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \varepsilon)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \\ &+ \mu_t C_1 \frac{\varepsilon}{k} \Phi - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{C_\mu (1 - C_3) \beta \rho k}{\sigma_t} (g_x \frac{\partial T}{\partial x} + g_y \frac{\partial T}{\partial y} + g_z \frac{\partial T}{\partial z}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $C_1=1.44$, $C_2=1.92$, $C_3=1$, $C_4=0$, $C_\mu=0.09$, $\beta=0$, $\sigma_k=1$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $\sigma_t=1$, k – кинетическая энергия, ε – скорость диссипации кинетической энергии

В современной расчетной практике доминирует полуэмпирический подход, основанный на разложении скорости на осредненную во времени и пульсационную составляющие и переходе к решению т.н. "осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса" (Reynolds Averaged Navier-Stokes Method, RANS):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right], \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} = 0. \quad (12)$$

Сдвиговые (Рейнольдсовы) напряжения $\rho \overline{u'_i u'_j}$ являются дополнительными шестью неизвестными к параметрам осредненного движения (\bar{u}_i, \bar{p}) и аппроксимируются, как правило, по гипотезе Буссинеска:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}.$$

где μ_t – дополнительная вязкость, вызванная пульсациями; k – осредненная энергия турбулентных пульсаций (*TKE*). Система является незамкнутой и требует дополнительных соглашений ("моделей турбулентности").

Решение данных уравнений может проводиться как в стационарной, так и в нестационарной постановке. Стационарная задача сводится к итерационному решению редко заполненной системы линейных алгебраических уравнений, с узловыми давлениями, компонентами скоростей и мерами локальной турбулентности в качестве неизвестных. Определяются осредненные во времени величины, число которых для рассматриваемых объектов/задач может достигать сотен миллионов. Итерационный процесс решения системы проводится по связанной многосеточной схеме (*coupledmultigrid*) и считается сошедшимся при малых относительных невязках решения системы. Для улучшения сходимости в качестве предобуславливателя используется неполное треугольное (*ILU*) разложение матрицы.

Целью данного исследования является проведение математического моделирования обтекания и экспертные расчеты аэродинамических характеристик конструкции трамплина, установленного на плоскости земли. Подземная часть конструкции и примыкающее здание в расчете не рассматривается.

Исследование проводилось на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений аэродинамики с использованием k - ϵ модели турбулентности для значений скорости набегающего ветрового потока на высотах от 10 до 100 м от земли, соответствующих логарифмическим профилям, построенным для нормативного значения ветрового давления (60 кгс/м² на высоте 100 м при скорости ветра 31.6 м/с). Заметим что для этих значений величины числа Маха и Рейнольдса, составляют, соответственно $M \cong 0,1$ и $Re \cong 21,5 \times 10^6$.

Приведены результаты моделирования движения воздушных потоков в масштабе всего комплекса (Рис. 7). Уравнения движения преобразуются к виду, в котором добавлено влияние флуктуации средней скорости (в виде турбулентной кинетической энергии) и процесса уменьшения этой флуктуации за счёт вязкости (диссипации). В данной модели решаются 2 дополнительных уравнения для транспорта кинетической энергии турбулентности и транспорта диссипации турбулентности.

Приведены результаты решения задач, в рамках которых определены аэродинамические коэффициенты ветрового давления на здания с учетом взаимного влияния сооружения друг на друга.

Отмечено, что при проектировании высотных зданий важно получить детальную картину обтекания их ветром, при этом для объектов сложной формы, таких как рассматриваемый многофункциональный комплекс, такая задача, при решении её в полном объёме (т.е. с учётом всех особенностей архитектурного решения фасада и ветрового профиля, - нарастания скорости ветра с высотой) достаточно трудоёмка даже для современных программных комплексов и требует применения суперкомпьютерных ресурсов.

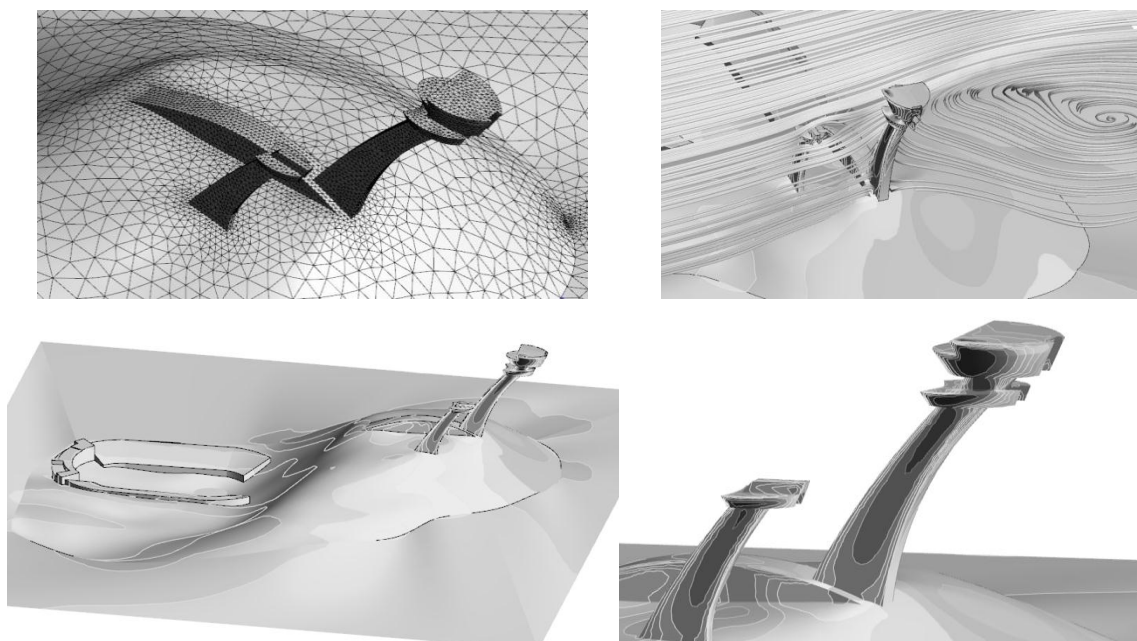


Рис. 7. Конечно-элементная сетка и характерное распределение воздушных потоков вокруг трамплина

Важным обстоятельством, которое исследовано в работе, является то, что испытания в аэродинамических трубах, весьма широко распространенные до сегодняшнего дня, имеют ряд существенных недостатков. Это высокая стоимость проведения экспериментов, создание моделей объектов и ряд других, при том, что количество обдуваемых направлений, а также объем и качество получаемых данных ограничены.

Показано, что применение продемонстрированных технологий вычислительной аэродинамики на базе компьютерных технологий в строительной области позволяет существенно сократить количество испытаний в аэродинамической трубе.

Указано, что при этом придает новое качество самому процессу проектированию, поскольку давления и скорости потоков воздуха могут быть получены в любой точке сооружения и учтены любые особенности фасада. Еще раз следует также отметить, что вычислительные технологии в аэродинамике требуют больших вычислительных ресурсов. Причиной этого является высокий уровень сложности уравнений, описывающих течение

жидкости и газа, необходимость учета в моделях огромных массивов воздушных масс для их корректного анализа, а также требуемая высокая точность описания геометрии исследуемых объектов.

Отмечено, что рассматриваемые современные методы математического моделирования с использованием суперкомпьютеров позволяют

- существенно сократить количество испытаний в аэродинамических трубах и в перспективе отказаться от них;
- уделить особое внимание тонким вопросам вибрационного и шумового воздействия ветрового потока в зонах углов здания и выступающих элементов, которые трудно реализуемы в физическом эксперименте;
- определять оптимальную по ряду критериев форму, размеры и ориентацию здания (например, исходя из минимизации отрицательного воздействия наружных климатических условий на энергетический баланс здания);
- разработать комплексную оценку влияния сооружений на окружающую застройку.

Основные выводы и результаты.

1. Разработана математическая модель большепролетного куполообразного металлического сооружения, учитывающая реальную жесткость узловых соединений. На основе модели разработана и верифицирована методика уточнения напряженного-деформированного состояния самого сооружения и элементов узловых соединений.

2. Разработана математическая модель высотного бетонного сооружения сложной геометрической формы с большим перепадом толщин стен и учетом различных вариантов работы напряженной арматуры. На основе модели разработана методика расчета уникальных железобетонных конструкций со сложной геометрией и многослойным расположением напряженных элементов.

3. Разработаны математические модели металлических подкрановых колонн различных конструкций, учитывающие физическую и геометрическую нелинейность. На основе моделей разработана методика и программное обеспечение для анализа несущей способности подкрановых колонн за пределом пластичности.

4. Разработана математическая модель и проведено моделирование движения воздушных потоков в масштабе спортивного комплекса. На основе модели разработана методика определения основных характеристик отрывного турбулентного течения рассматриваемых объектов.

В работе приводятся оценки возможностей применения рассматриваемых подходов и методологий моделирования для строительной сферы с разработкой рекомендаций по

наиболее оптимальному сочетанию сильных сторон различных программных комплексов при проектировании уникальных зданий и сооружений.

Основные публикации автора:

1. Климшин Д.В. Современные технологии математического моделирования для инженерного анализа и проектирования в строительстве. / Болдырев Ю.Я., Климшин Д.В., Романов С.В., Шанина А.С. // Научно-технические ведомости СПбГПУ – СПб: Изд-во СПбГПУ – 2010. – №4. – С. 106-111.

2. Климшин Д.В. Современные технологии математического моделирования при расчетах ветрового воздействия на уникальные здания и сооружения / Белов В.В., Болдырев Ю.Я., Климшин Д.В., Романов С.В. // Научно-технические ведомости СПбГПУ – СПб: Изд-во СПбГПУ – 2010.–№5. – С. 109 - 115.

3. Климшин Д.В. Современные технологии математического моделирования большепролетных металлических сооружений / Белов В.В., Болдырев Ю.Я., Климшин Д.В., Шанина А.С. // Научно-технические ведомости СПбГПУ – СПб: Изд-во СПбГПУ – 2010. – №5. – С. 151 - 156.

4. Болдырев Ю.Я., Климшин Д.В. Применение математического моделирования на основе суперкомпьютеров при решении задач аэродинамики зданий и сооружений // Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи: труды Международной суперкомпьютерной конференции. Новороссийск – М.: Изд-во МГУ. – 2010. – С. 292.

5. Болдырев Ю.Я., Климшин Д.В., Шанина А.С. Математическое моделирование сложных строительных конструкций и сооружений с использованием суперкомпьютеров// Параллельные вычислительные технологии: труды международной научной конференции. Москва [Электронный ресурс] – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2011. – С. 433-439.

6. Шанина А.С. Численное моделирование поведения сложных строительных конструкций и сооружений с использованием суперкомпьютеров / Болдырев Ю.Я., Климшин Д.В., Шанина А.С. // CAD/CAM/CAE Observer, 2011, №6, с. 85-90.