На правах рукописи

Фирсов Андрей Николаевич

ОБОБЩЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА И ФИЛЬТРАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Санкт-Петербург – 2011

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Научный консультант: доктор технических наук, профессор
Козлов Владимир Николаевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Дегтярев Геннадий Лукич

доктор технических наук, профессор
Магомедов Курбан Ахмедович

доктор технических наук, профессор
Устинов Сергей Михайлович

Ведущая организация: Московский государственный университет тонких химических технологий им. М. В. Ломоносова

Защита состоится «30» декабря 2011 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.229.10 при ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» по адресу: 195251 Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 21, 9-й учебный корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

Автореферат разослан «29» ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кудряшов Э.А.
к.т.н., доцент

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Проблемы разработки и анализа математических моделей физических процессов переноса и фильтрации в технических объектах могут быть сведены к исследованию корректности задач для дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Численные методы анализа таких проблем формируются на основе сходящихся алгоритмов. Оптимальной является ситуация формирования аналитических решений задач в форме рекуррентных соотношений с обоснованием их сходимости и оценки точности приближений. Декомпозиция проблемы исследования уравнений, и сведение ее решения к совокупности инженерно-технических задач позволяет использовать интегральные преобразования типа Фурье или Лапласа или формальные разложения искомых решений в ряды по системам функций. Однако эти методы не всегда эффективны, поскольку применение преобразований Фурье или Лапласа для нелинейных операторов, переходящих сами в себя, не упрощает задачи. Кроме этого, методы разложения искомых функций в ряды содержат коэффициенты, не всегда имеющие техническое или физическое содержание. Наконец, в задачах исследования технических и физических проблем указанными методами возникает проблема обращения соответствующих преобразований.

Таким образом, представляет большой интерес разработка методов решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, описывающих явления переноса и фильтрации в технических и физических задачах, которые обладают достоинствами упомянутых методов и лишены указанных выше недостатков. Это открывает возможность аналитического исследования и построения аналитических методов моделирования и эффективных алгоритмов приближенного решения новых классов технических и физических задач, использующих модели математической физики, теории случайных процессов, теории управления и т.п. Исследованиями автора показано, что разработка и обоснование методов моделирования и решения прикладных задач возможно с помощью аппарата теории обобщенных функций.

Диссертация посвящена разработке, обоснованию и приложениям предлагаемого метода решения технических задач математической физики, описывающих процессы переноса и фильтрации, достаточно быстро затухающие на бесконечности. В основе метода лежит построение и анализ нового класса обобщенных функций как линейных функционалов в пространствах целых функций многих вещественных переменных. В частности, прослеживается конструктивная связь между указанными функциями и последовательностью их «степенных моментов», что позволяет дать для функций рассматриваемых классов полное и конструктивное решение «проблемы моментов».

Цель работы – разработка и теоретическое обоснование метода построения алгоритмов аналитического и численного решения и анализа задач переноса и фильтрации на основе специальных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, адекватных прикладным задачам. К ним относятся задачи системного анализа, теории случайных процессов, теории автоматического управления, а также аналитическое решение ряда новых задач: построение и исследование решений уравнения Колмогорова-Феллера с квадратичным коэффициентом сноса, решений уравнения Больцмана кинетической теории газов, задачи фильтрации пуассоновских процессов.

Объект исследования: математические модели физических явлений переноса и фильтрации в технических системах, аналитические и численные методы решения линейных и нелинейные дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Предмет исследования – методы математического моделирования на основе аналитических и численных алгоритмов решения технических задач, формализуемых специальными классами линейных и нелинейных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Для решения проблемы требуется решить следующие основные **научные задачи:**

- выделить соответствующие классы математических моделей физических явлений в технических системах;

- построить класс обобщенных функций (линейных функционалов) на пространствах целых функций многих вещественных переменных, допускающих представление в виде рядов по производным дельта-функции;

- определить и исследовать основные алгебраические и топологические структуры, связанные с этим классом обобщенных функций и связанные непосредственно с возможностью применения этих функций для решения задач математической физики;

- построить и обосновать аналитические и численные рекуррентные алгоритмы решения уравнения Колмогорова-Феллера с квадратичным коэффициентом сноса, решений уравнения Больцмана кинетической теории газов, задачи фильтрации пуассоновских процессов, широко используемые в технических системах.

Методы исследования. Методологическую основу работы составили специальные математические модели, физических процессов, использующие методы функционального анализа и математической физики: методы теории обобщенных функций, теории операторных уравнений, теории полугрупп линейных операторов, теории краевых задач для уравнений математической физики.

Научные положения, выносимые на защиту.

1) Математические модели кинетических явлений в технологических процессах, требующих для адекватного анализа применение специального класса обобщенных функций на пространствах целых функций многих

вещественных переменных, представляемых рядами по производным дельта-функций с коэффициентами, имеющими содержательный смысл.

2) Математические модели и методы, разработанные для корректного решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих технологические процессы переноса и фильтрации. Адаптация основных алгебраических и топологических свойств обобщенных функций для решения и анализа специальных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, используемых в задачах системного анализа, теории случайных процессов, теории автоматического управления.

3) Математические модели технологий, основанных на явлении переноса в классе аналитических и рекуррентных алгоритмов решения уравнения Колмогорова-Феллера с нелинейным коэффициентом сноса, решений уравнения Больцмана кинетической теории газов, задачи фильтрации пуассоновских процессов и их обоснование.

4) Решение технических задач на основе их сведения к задаче о неподвижной точке нерастягивающих отображений в функциональных пространствах.

5) Разработка кинетической теории многокомпонентных эмульсий на основе интегральных кинетических уравнений.

Научная новизна. Научная новизна диссертации заключается в разработанных методах математического моделирования физических процессов в технических системах для использования при решении специальных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах системного анализа, теории случайных процессов, теории управления:

1) Обоснование математических моделей и методов решения специальных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, основанных на специальных классах

обобщенных функций, представляемых рядами по производным дельта-функции.

2) Решение комплекса задач моделирования технических систем на основе обобщенной проблемы моментов.

3) Разработка математических моделей технических систем на основе аналитических решений уравнения Колмогорова-Феллера с нелинейным коэффициентом сноса, уравнения Больцмана кинетической теории газов, задачи фильтрации пуассоновских процессов и их обоснование.

4) Математические модели исследования технических систем на основе решения задачи о неподвижной точке нерастягивающих отображений в функциональных пространствах.

5) Разработка кинетической теории многокомпонентных эмульсий на основе интегральных кинетических уравнений.

Достоверность научных результатов подтверждается строгостью и обоснованностью математических построений, рассуждений и выкладок, строгостью доказательств формулируемых утверждений.

Значимость научных положений и выводов состоит в:

- эффективности предложенного метода решения специальных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, особенно в случаях невозможности использования для их решения классических методов интегральных преобразований;

- построении аналитических алгоритмов решений уравнения Колмогорова-Феллера с квадратичным коэффициентом сноса, уравнения Больцмана кинетической теории газов, задачи фильтрации пуассоновских процессов;

- решении обобщенной проблемы моментов, эффективных для решения задачи о представлении (в частности, приближенном) случайной величины на основе ее моментов;

- разработке кинетической теории многокомпонентных эмульсий на основе интегральных кинетических уравнений.

Практическая значимость. Результаты диссертации использованы для анализа и синтеза физических процессов переноса, фильтрации, диффузии в технических системах на предприятиях и в организациях: Открытом акционерном обществе "Концерн "НПО "Аврора", заводе «Кризо», в учебных процессах Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, Омского государственного университета, Тверского государственного университета и др.

Личный вклад. В диссертации излагаются результаты, полученные лично автором.

Апробация работы. Основное содержание работы опубликовано в статьях, докладывалось на следующих семинарах и конференциях: Всесоюзная конференция по уравнениям с частными производными (МГУ, Москва, 1978); 13th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (Novosibirsk, 1982); Семинар по математической физике проф. О.А. Ладыженской (ЛОМИ АН СССР, Ленинград, 1983-1985); VIII Всесоюзная конференция по динамике разреженных газов (Москва, 1985); X Всесоюзная конференция по динамике разреженных газов (Москва, 1989); V Всероссийская конференция по проблемам науки и высшей школы (СПб., 2001); XIII Всероссийская конференция по проблемам науки и высшей школы (СПб., 2009); XVII Международная научно-методическая конференция «Высокие интеллектуальные технологии и инновации в образовании и науке» (СПб., 2010); XV Международная научно-практическая конференция «Системный анализ в проектировании и управлении» (СПб., 2011).

Публикации. Основные материалы по теме диссертации опубликованы в 30 научных статьях и докладах, среди которых 11 публикаций в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, одна монография и два учебных пособия.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 53 наименования. Основная часть диссертации изложена на 211 страницах.

2. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, определены цели и основные задачи исследования, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, кратко изложены основные результаты и показана их практическая ценность.

В **первой главе** определены основные математические модели теории переноса и фильтрации, исследуемые в диссертационной работе. Введен и исследован специальный класс обобщенных функций: линейных функционалов в пространствах целых функций многих вещественных переменных. В частности, установлена конструктивная связь между указанными функциями и последовательностью их «степенных моментов», что позволяет дать для функций рассматриваемых классов полное и конструктивное решение «проблемы моментов».

Хорошо известные принципы применения преобразований Фурье и Лапласа в прикладных задачах, использующие их свойства, позволяют переходить от соотношений, содержащих линейные дифференциальные операторы, к чисто алгебраическим (полиномиальным) соотношениям. Однако проблема остается, поскольку далеко не всегда тривиальной (если вообще *аналитически* возможной) оказывается задача обращения этих преобразований на заключительном этапе исследования. Кроме того, *изображения* не информативны с точки зрения оценки свойств соответствующих *оригиналов*. Наконец, применение преобразований Фурье или Лапласа для нелинейных операторов, переходящих сами в себя, не упрощает задачи.

В первой главе диссертации строится теоретическая основа метода, позволяющего трансформировать задачи, содержащие линейные дифференциальные операторы (вообще говоря, с переменными коэффициентами), к линейным алгебраическим задачам рекуррентного типа, лишенным указанных выше недостатков. Кроме того, величины, входящие в преобразованные соотношения, сами по себе оказываются имеющими содержательный смысл, что во многих случаях не требует обратного перехода к *оригиналам*.

Обобщенные функции в пространствах целых функций изучались главным образом в связи с преобразованием Фурье. В работах И.М. Гельфанда, Г.Е. Шилова, В.П. Паламодова подробно исследованы свойства и структура обобщенных функций в пространстве Z целых функций экспоненциального типа, убывающих при $Re\, z \to \infty$ быстрее любой степени $|z|$, и в пространстве H всех целых функций. Имеется, однако, ряд задач математической физики, которые не попадают в «сферу влияния» известных пространств обобщенных функций. Таковы, например, задачи теории вероятностей и статистической физики, задачи теории переноса, в которых естественным требованием является существование (степенных) моментов функции (плотности) распределения. В связи с этим, пространство Z' не адекватно решаемой задаче, поскольку полиномы от вещественных переменных основному пространству Z не принадлежат (и, следовательно, не имеет смысла говорить о моментах функций из Z'). Что касается пространства H', то оно имеет слишком малый для таких задач запас регулярных функционалов: «обычная» функция принадлежит H' лишь, если она очень быстро убывает (быстрее $exp(-|z|^n)$ для всех n).

В настоящей работе вводится и исследуется пространство обобщенных функций E', для которого порождающее пространство основных функций E является, по существу, сужением на R^ν пространства целых функций многих комплексных переменных порядка роста ≤ 1 (и, в частности, неограниченных при $|x| \to \infty$). Оказывается, что обобщенные функции из E' допускают представление (его можно назвать «моментным»), которое естественным образом связано с основными операциями в E', и которое дает удобный *метод* решения некоторых важных классов задач математической физики.

Изложение строится для случая функций многих вещественных переменных. Переформулировка основных результатов на случай функций многих комплексных переменных не представляет особого труда.

Ниже приняты следующие обозначения.

$x=(x_1,x_2,...,x_\nu)\in R^\nu\ (\nu=1,2,...)$; $|x|=|x_1|+|x_2|+...+|x_\nu|$;

$q=(q_1,q_2,...,q_\nu),\ q_j=0,1,2,...$; $|q|=q_1+q_2+...+q_\nu$; $q!=q_1!q_2!...q_\nu!$

$x^q=x_1^{q_1}\cdot x_2^{q_2}\cdot...\cdot x_\nu^{q_\nu}$; $D^q\varphi(x)=\dfrac{\partial^{|q|}\varphi(x)}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}...\partial x_\nu^{q_\nu}}=\varphi^{(q)}(x)$;

$\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1\\p_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}q_2\\p_2\end{pmatrix}\cdot...\cdot\begin{pmatrix}q_\nu\\p_\nu\end{pmatrix}$; $0\le p_j\le q_j,\ j=1,2,...,\nu$;

$\begin{pmatrix}q_j\\p_j\end{pmatrix}=\dfrac{q_j!}{q_j!\cdot\left(q_j-p_j\right)!}=C_{q_j}^{p_j}$ (биномиальные коэффициенты).

Определение. Пусть $s>0$. Через E_s будем обозначать пространство (комплекснозначных) функций $\varphi\in C^\infty\left(R^\nu\right)$ таких, что для любого $\rho>0$

$$\left|D^q\varphi\left(x\right)\right|\le C\left(s+\rho\right)^{|q|}e^{(s+\rho)|x|},\quad x\in R^\nu$$

Здесь C - постоянная, зависящая, вообще говоря, от φ, s и ρ, но не зависящая от q.

Отметим, что полиномы $P\left(x_1,x_2,...,x_\nu\right)$ и функции $\exp(s_1x_1+...+s_\nu x_\nu)$, $\exp\left[i(s_1x_1+...+s_\nu x_\nu)\right]$ принадлежат E_s (последние – для $s\ge max\left(|s_1|,...,|s_\nu|\right)$.

Введем в E_s счетную систему норм

$$q_1>k_1\ \|\varphi\|_s^{(\rho)}=\sup_{q,x}\left[\frac{\left|D^q\varphi(x)\right|}{(s+\rho)^{|q|}}e^{-(s+\rho)|x|}\right],\quad \rho=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},... \qquad (1)$$

Теорема 1. Пространство E_s, наделенное системой норм (1), является полным счетно-нормированным пространством.

Следующее свойство пространств E_s является ключевым.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in E_s$, $a = (a_1, a_2, ..., a_\nu) \in \mathbf{R}^\nu$. Тогда:

1) ряд Тейлора для φ

$$\varphi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|q|=l} \frac{\varphi^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^q$$

сходится для всех $x \in \mathbf{R}^\nu$;

2) частичные суммы

$$S_m(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|q|=l} \frac{\varphi^{(q)}(a)}{q!}(x-a)^q$$

сходится к φ в смысле сходимости в E_s.

3) Если $\varphi, \psi \in E,$ то и произведение $\varphi\psi \in E.$

4) Если $\varphi_n \to \varphi, \quad \psi_n \to \psi$ в E, $\varphi_n \psi_n \to \varphi\psi$ в E.

5) Если $\varphi \in E_s$, то $D^q \varphi \in E_s$.

6) Если $\varphi_n \to \varphi$ в E_s, то и $D^q \varphi_n \to D^q \varphi$ в E_s.

Пространство E' вводится стандартным образом как сопряженное к E. В нем обычным образом определяются линейные операции, операция умножения на функции из E и дифференцирование. Эти операции являются непрерывными в смысле сходимости в E' (т.е. в смысле слабой сходимости). Пространство E' полно (относительно слабой сходимости). Запас регулярных функционалов в E' достаточно велик. Так, всякая суммируемая в R^ν функция $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$f(x) = \underset{\alpha>0, \varepsilon>0}{\mathrm{O}}\left(\exp\left(-\alpha |x|^{1+\varepsilon}\right)\right), \quad |x| \to \infty,$$

порождает в E' функционал $\hat{f}$ по формуле

$$\left(\hat{f},\varphi\right)=\int\limits_{R^{\nu}} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi\in E.$$

Дельта-функция $\delta_a=\delta(x-a)$, определяемая обычным образом, т.е. $(\delta_a,\varphi)=\varphi(a)$, $\varphi\in E$, тоже принадлежит E' и является сингулярным функционалом. Отметим, что в E' теряют смысл слова «$\delta(x-a)$ сосредоточена в точке a», но этому не следует удивляться, поскольку в пространстве целых функций не имеет смысла понятие носителя функции.

Следующий результат представляет основное свойство обобщенных функций из пространства E'.

Теорема 3. Пусть $a\in\mathbf{R}^{\nu}$. Всякую обобщенную функцию $f\in E'$ можно единственным образом представить в виде

$$f=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|q|=l}C_a^{(q)}\delta_a^{(q)}, \tag{2}$$

где $C_a^{(q)}=C_a^{(q)}(f)=(-1)^{|q|}\left(f,(x-a)^q\right)/\,q!$

При этом, для того, чтобы $f\in E'$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{|l|=0}^{\infty}s^l\sum\limits_{|q|=l}\left|C_a^{(q)}\right|$ сходился для всех $s>0$.

Замечание. Поскольку коэффициенты $(-1)^{|q|}q!C_a^{(q)}$ можно интерпретировать как степенные моменты функционала f, то последняя *теорема дает решение проблемы степенных моментов в* E'.

Далее, в первой главе устанавливается связь разложений (2) с основными операциями в E'. Нижеследующие теоремы 4, 5, 6 являются основой для применения развиваемого метода для построения конструктивных решений прикладных задач математической физики.

Теорема 4. Пусть $f,g\in E'$; $C_a^{(q)},d_a^{(q)}$ - коэффициенты разложений (2) f и g соответственно. Тогда:

1) $\alpha f+\beta g=\sum_{|q|=0}^{\infty}\left(\alpha C_a^{(q)}+\beta d_a^{(q)}\right)\delta_a^{(q)}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{C})$.

2) $D^k f=\sum_{|q|=0}^{\infty}C_a^{(q)}\delta_a^{(q+k)},\ k=\left(k_1,\ldots,k_\nu\right)$.

3) Если $\psi\in E$, то $\psi f=\sum_{|q|=0}^{\infty}h_a^{(q)}\delta_a^{(q)}$, где

$$h_a^{(q)}=\sum_{r=0}^{\infty}\left(-1\right)^r\sum_{\substack{|n|=r+|q|\\ n\geq q}}\binom{n}{n-q}C_a^{(n)}\psi^{(n-q)}\left(a\right)$$

В частности, если $\psi\left(x\right)=\left(x-a\right)^m$, то

$$h_a^{(q)}=\left(-1\right)^m\frac{(q+m)!}{q!}C_a^{(q+m)}.$$

Теорема 5. Пусть для любого λ из некоторой окрестности $U\left(\lambda_0\right)$ точки λ_0 задана последовательность (комплексных) чисел $\left\{C^{(q)}\left(\lambda\right)\right\}_{|q|=0}^{\infty}$ такая, что для любого $s>0$ и любого $\lambda\in U\left(\lambda_0\right)$

$$\sum_{l=0}^{\infty}s^l\sum_{|q|=l}\left|C^{(q)}\left(\lambda\right)\right|<\infty. \tag{3}$$

Пусть далее для $\lambda\in U\left(\lambda_0\right)$

$$C^{(q)}\left(\lambda\right)-C^{(q)}\left(\lambda_0\right)=d_q\left(\lambda\right)\beta\left(\lambda\right),\quad \beta\left(\lambda\right)\underset{\lambda\to\lambda_0}{\to}0, \tag{4}$$

и для любого $s>0$

$$\sup_{q,\lambda}\left|d_q\left(\lambda\right)s^{|q|}\right|<\infty,\quad \lambda\in U\left(\lambda_0\right). \tag{5}$$

Тогда ряд

$$f\left(\lambda\right)=\sum_{|q|=0}^{\infty}C^{(q)}\left(\lambda\right)\delta_a^{(q)} \tag{6}$$

определяет обобщенную функцию $f\left(\lambda\right)\in E'$, непрерывную по λ в точке λ_0 (т.е. $\left(f\left(\lambda\right),\varphi\right)\underset{\lambda\to\lambda_0}{\to}\left(f\left(\lambda_0\right),\varphi\right),\quad \varphi\in E$).

Если $C^{(q)}(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы по λ в $U(\lambda_0)$, и для $\frac{d}{d\lambda}C^{(q)}(\lambda)$ имеют место соотношения вида (3) – (5), то ряд (6) определяет непрерывно дифференцируемую обобщенную функцию $f(\lambda)\in E'$, и имеет место соотношение $\dfrac{df(\lambda)}{d\lambda}=\sum\limits_{|q|=0}^{\infty}\dfrac{d}{d\lambda}C_a^{(q)}(\lambda)\delta_a^{(q)},\quad \lambda=\lambda_0.$

В пространстве E' можно с помощью обычной процедуры определить свертку $f*g$ двух функционалов f и g в E'. При этом свертка в E' существует всегда (в отличие от других пространств обобщенных функций), обладает обычными свойствами, и для нее справедлива следующая

Теорема 6. Если $f,g\in E'$ и $f=\sum\limits_{|q|=0}^{\infty}C_a^{(q)}\delta_a^{(q)},\quad g=\sum\limits_{|q|=0}^{\infty}d_a^{(q)}\delta_a^{(q)}$, то

$$f*g=\sum_{|q|=0}^{\infty}h_a^{(q)}\delta_a^{(q)},\ \text{где}$$

$$h_a^{(q)}=\sum_{i+j\le q}(-1)^{|q-i-j|}\frac{a^{q-i-j}}{(q-i-j)!}C_a^{(i)}d_a^{(j)},$$

$$i=(i_1,i_2,...,i_\nu),\ j=(j_1,j_2,...,j_\nu).$$

В частности, при $a=0$

$$h_0^{(q)}=\sum_{i+j=q}C_0^{(i)}d_0^{(j)}.$$

Естественным представляется вопрос о восстановлении регулярного функционала по его моментам. В первой главе представлен следующий результат.

Теорема 7. Пусть $f\in L_2(\mathbf{R}^\nu)$ и, кроме того, порождает в E' регулярный функционал. Тогда равномерно для почти всех $x\in\mathbf{R}^\nu$:

$$f(x)=\frac{1}{\pi^\nu}\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{-(k+\nu)}\sum_{|q|=k}c_0^{(q)}\sigma^{(q)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где обозначено:

$$\sigma^{(q)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\sigma^{(q_1)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\cdot\ldots\cdot\sigma^{(q_\nu)}\left(\frac{x_\nu}{\varepsilon}\right);$$

$$\sigma^{(q_j)}\left(x_j\right)=\sum_{k=0}^{q_j}(-1)^k\left[\frac{q_j\,!}{(q_j-k)!}\right]\cdot\frac{Sin\left(x_j+(q_j-k)\pi/2\right)}{x_j^{k+1}}.$$

Кроме того, для $s\in\mathbb{Z}_0$, $x\in\mathbf{R}$ справедливы асимптотические соотношения:

$$\sigma^{(s)}(x)=O\left(1\big/|x|\right),\quad |x|\to\infty;\qquad\qquad \sigma^{(2s+1)}(x)=O(x),\quad x\to 0;$$

$$\sigma^{(2s)}(x)=\frac{(-1)^s}{2s+1}+O\left(x^2\right),\quad x\to 0.$$

Теорема 7а. В условиях предыдущей теоремы равномерно для почти всех $x\in\mathbf{R}^\nu$ справедливо асимптотическое соотношение:

$$f(x)=\frac{1}{\pi^\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{-(k+\nu)}\sum_{|q|=k}c_0^{(q)}\sigma^{(q)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon),\quad \varepsilon\to+0.$$

Отметим, что такое представление позволяет давать приближенное значение для функции $f(x)\in L_2(\mathbf{R}^\nu)$, порождающей в E' регулярный функционал, если известно только конечное число ее моментов. В частности, такая ситуация возникает в том случае, когда преобразование Фурье функции $f(x)$ представляет собой аналитическую функцию, для которой практически можно указать лишь конечное число ее коэффициентов Тейлора.

Кроме того, в первой главе решается задача о неподвижных точках нерастягивающих отображений в функциональных пространствах. Теория неподвижных точек нелинейных отображениий в различных функциональных пространствах имеет большое прикладное значение, так как часто являет собой чуть ли не единственную возможность обосновать существование и построить эффективный алгоритм решения нелинейных операторных уравнений. Известно, что задача о существовании неподвижных точек (НТ) у нерастягивающего отображения в банаховом пространстве должна ставиться иначе, чем в случае сжимающего отображения, поскольку для нерастягивающего отображения (в отличие от сжимающего) задача о НТ может иметь несколько решений или вообще ни одного. Ф. Браудер формулировал задачу о НТ нерастягивающего отображения как задачу о НТ при отображении выпуклого слабо компактного множества в себя. Но даже в такой постановке задача долго не получала решения. В настоящей главе приводятся некоторые весьма общие результаты о существовании и распределении НТ нерастягивающих отображений в банаховом пространстве.

Ниже *X* обозначает (вещественное) банахово пространство с нормой ||.||, *E, F* – подмножества *X*, ∂E – границу *E*. Для элементов $x, y \in X$ положим

$$[x,y] \equiv \{ty+(1-t)x, 0 \le t \le 1\}, \quad [x,y) \equiv \{ty+(1-t)x, 0 \le t < 1\}.$$

Заметим, что $[x,x) = \{x\}$.

Отображение $A : X \to X$ называется *нерастягивающим*, если для любых $x, y \in X$ $\|Ax - Ay\| \le \|x - y\|$, *строго нерастягивающим*, если $\|Ax - Ay\| < \|x - y\|$ и *сжимающим, если* $\|Ax - Ay\| \le \alpha \|x - y\|$ для некоторого числа $\alpha \in (0,1)$. Множество *E* будем называть *звездным относительно точки* x_0, если из условия $x \in E$ следует, что отрезок $[x_0, x] \subset E$.

Определение. Будем говорить, что *X* удовлетворяет G0-условию, если из $x_n \xrightarrow{w} x_\infty, x \neq x_\infty$ следует, что $\liminf \|x_n - x_\infty\| < \limsup \|x_n - x\|$. Заметим, что этому условию удовлетворяют, например, гильбертово пространство и пространства $l_p, p \geq 1$. Значок $\xrightarrow{w}$ обозначает здесь слабую сходимость в *X*.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема. Пусть *X* удовлетворяет G0-условию, *E* – звездное слабо компактное подмножество *X* и *A* – нерастягивающее отображение *X* в *X* такое, что для любого $x \in \partial E \quad [Ax, x) \cap E \neq \varnothing$.

Тогда *A* имеет в *E* по крайней мере одну неподвижную точку.

В следующих главах диссертации представлены приложения полученных в первой главе результатов к различным задачам математической физики, имеющим самостоятельное значение.

Во **второй главе** представленные выше результаты применяются для анализа явлений переноса, основанных на построении решения уравнения Колмогорова-Феллера с нелинейным коэффициентом сноса – интегро-дифференциального уравнения для переходной плотности вероятности марковских случайных процессов с разрывными (скачкообразными) изменениями состояния. Это и подобные уравнения имеют применение в задачах теории переноса и диффузии. Уравнения такого типа встречаются в стохастических задачах теории безопасности и надежности, динамике звездных систем и даже в экономических задачах.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left[(\alpha x + \beta x^2) w(x)\right] + \nu \int_{-\infty}^{\infty} p(a) w(x-a)\, da - \nu w(x) = 0. \qquad (7)$$

Здесь α, β, ν - постоянные вещественные числа, $p(a)$ – заданная функция. К уравнению добавляются условия

$$w(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1\,.$$

В случае β = 0 для решения этого уравнения удается естественным образом использовать преобразование Фурье (такие результаты известны). В случае же $\beta \neq 0$ подобная задача, насколько нам известно, не исследовалась. Отметим далее, что применение преобразования Фурье, как правило, приводит к необходимости решения задачи его обращения, что часто вызывает серьезные трудности, тем более, если решение преобразованного уравнения известно лишь приближенно. Использование результатов главы 1 позволяет подобные трудности обойти.

Предположим, что преобразование Фурье $\widehat{p}(k)$ функции $p(x)$ является целой аналитической функцией *вещественной переменной k*. Пусть далее $\widehat{w}(k)$ - преобразование Фурье функции $w(x)$. Положим

$$\widehat{w}(k) = \varphi(k)\exp\left(-i\frac{\alpha}{2\beta}k\right).$$

Применяя к (7) преобразование Фурье и переходя к функции φ, получаем хорошо известное в теории линейных дифференциальных уравнений уравнение

$$\varphi''(k) - q(k)\varphi(k) = 0\,, \qquad (8)$$

где $q(k) > 0$ – известная целая аналитическая функция

$$q(k) = q_0 + q_1 k + q_2 k^2 + \dots .$$

Краевые условия для φ приобретают вид

$$\varphi(k) \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0, \quad \varphi(0) = 1\,.$$

Так как $q(k)$ – целая аналитическая функция, то $\varphi(k)$ – тоже целая аналитическая функция (подчеркнем, что речь идет об аналитических функциях *вещественной переменной*). Пусть

$$\varphi(k) = 1 + a_1 k + a_2 k^2 + \dots .$$

Тогда для коэффициентов a_n получаем систему уравнений:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - \sum_{s=0}^{n} a_s q_{n-s} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad a_0 = 1.$$

При $n = 0$ сразу находим a_2. Остальные коэффициенты, начиная с a_3, выражаются линейно через a_1. Таким образом, получается следующее представление для $\varphi(k)$:

$$\varphi(k) = a_1 g(k) + h(k),$$

где $g(k)$ и $h(k)$ – известные целые функции. Применение метода ВКБ к уравнению (8) дает следующие асимптотические представления:

$$a_1 g(k) + h(k) = C \cdot [q(k)]^{-1/4}(1 + \varepsilon_1(k)),$$

$$a_1 g'(k) + h'(k) = -C \cdot [q(k)]^{1/4}(1 + \varepsilon_2(k)),$$

где ε_1 и ε_2 – бесконечно-малые при $|k| \to \infty$. Отсюда

$$a_1 = \lim_{|k| \to \infty} \left(-\frac{hq^{1/2} + h'}{gq^{1/2} + g'} \right).$$

Через коэффициенты разложения функции $\varphi(k)$ находим тейлоровские коэффициенты функции $\widehat{w}(k)$ (т.е. моменты функции $w(x)$). Для нахождения $w(x)$ теперь достаточно воспользоваться теоремой 7а.

Третья глава посвящена качественному исследованию явлений переноса в разреженном газе на основе решений кинетического уравнения Больцмана для разреженных газов. Это уравнение используется в задачах высотной авиации, ракетной, космической, вакуумной техники. Сложность этого уравнения, несмотря на существенные достижения различных исследователей (Г. Грэд, К. Черчиньяни, А.Я. Повзнер, А.А. Арсеньев, Н.Б. Маслова, А.Н. Фирсов, А.В. Бобылев, В.В. Веденяпин, работы представителей ленинградской школы динамики разреженных газов и др.) привела к тому, что точные его решения (хотя бы в форме строго обоснованных и сравнительно просто реализуемых аналитических алгоритмов) практически отсутствуют. Более того, даже в линейном приближении анализ качественных свойств этого уравнения далеко не исчерпан. Так, не все ясно с характером поведения решений уравнения Больцмана при $t \to \infty$(здесь t – время) и даже с корректностью постановки задачи Коши в общем случае (например, при произвольном законе межмолекулярного взаимодействия).

В третьей главе диссертации также представлены результаты автора, связанные с исследованием асимптотических свойств решений задачи Коши для уравнения Больцмана. Рассмотрим задачу Коши для линеаризованного уравнения Больцмана кинетической теории газов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = L[f], \quad t > 0, \quad L[f] = \mathrm{K}[f] - \nu f, \tag{9}$$

$$f = f(\vec{x}, \vec{u}, t), \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^3, \quad \vec{u} \in \mathbf{R}^3, \quad t \geq 0,$$

$$f\big|_{t=0} = f_0(\vec{x}, \vec{u}) \tag{10}$$

Здесь $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ - линеаризованная функция распределения молекул по координатам $\vec{x}$ и скоростям $\vec{u}$ в момент времени t. $\mathrm{K}[f]$- линейный ограниченный оператор, действующий на f как функцию $\vec{u}$; $\nu = \nu(u) = O(u^{\beta})$ при $u \to \infty$, $0 < \beta \leq 1$, $u = |\vec{u}|$. Свойства функции $\nu(u)$ зависят от конкретной модели межмолекулярного взаимодействия, принимаемой при выводе кинетических уравнений.

Известно, что решение задачи (9), (10) имеет при $t \to \infty$ в общем случае степенную асимптотику вида $O\left(\dfrac{1}{1+t^{\mu}}\right)$, $\mu > 0$. Этот результат получается в предположении, что $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ при $x = |\vec{x}| \to \infty$ ведет себя в некотором смысле как функция из $L_p(\mathbf{R}_x^3)$, $p > 1$.

Оказывается, что если на поведение $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ при $x \to \infty$ наложить более жесткие требования (например, потребовать, чтобы $f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ удовлетворяла по $\vec{x}$ условию регулярности функционала в смысле главы 1), то установление равновесия (т.е. стремление функции f к нулю при $t \to \infty$) происходит экспоненциально быстро.

Идея доказательства состоит в следующем. Будем искать $f(\vec{x},\vec{u},t)$ в классе функций таких, что при почти всех $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ и всех $t > 0$ $f(\vec{x},\vec{u},t) \in \mathbb{E}'_x$, т.е. функцию f можно представить в виде

$$f(\vec{x},\vec{u},t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{|q|=r} c^{(q)}(\vec{u},t)\delta^{(q)}(\vec{x}) . \tag{11}$$

Подставляя это выражение в (9) и учитывая теорему 5, получим для коэффициентов $c^{(q)}(\vec{u},t)$ бесконечную «зацепляющуюся» систему уравнений:

$$\frac{\partial c^{(0)}}{\partial t} = L[c^{(0)}], \qquad (12)_1$$

$$\frac{\partial c^{(q)}}{\partial t} = L[c^{(q)}] - [u_1 c^{(q-I_1)} + u_2 c^{(q-I_2)} + u_3 c^{(q-I_3)}], \quad |q| \neq 0, \qquad (12)_2$$

где через I_1, I_2, I_3 обозначены мультииндексы (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1) соответственно.

Уравнения $(12)_2$ представляют собой неоднородные уравнения вида

$$\frac{\partial c^{(q)}}{\partial t} = L[c^{(q)}] - g_q(\vec{u},t), \quad |q| \neq 0,$$

где $g_q(\vec{u},t)$ - известная функция (на каждом шаге – своя). Таким образом, свойства функций $c^{(q)}(\vec{u},t)$ зависят от свойств оператора L. Последние достаточно полно изучены. В частности, оператор L на подпространстве функций $w(\vec{u},t)$, ортогональных в смысле $L_2(\mathbf{R}_u^3)$ подпространству аддитивных инвариантов (что, по существу, эквивалентно выполнению классических законов сохранения для массы газа), порождает полугруппу $T(t), t > 0$ ограниченных операторов, дающую решение абстрактной задачи

Коши для уравнения $(12)_1$; при этом оказывается $\|T(t)\| \le const \cdot e^{-\mu t}$, $\mu > 0$. По индукции получаем для решений уравнений $(12)_2$ оценку вида $\|c^{(q)}(t)\| \le const \cdot e^{-\gamma t}, \gamma > 0$, где $const$ зависит от начальной функции распределения $f_0(\vec{x},\vec{u})$ и параметров оператора *L*. Последняя оценка, с учетом теорем 7-7а, позволяет сделать заключение об экспоненциально быстром (по времени) установлении равновесия в системе, описываемой уравнением (9).

Вторая задача, связанная с уравнением Больцмана и рассмотренная в третьей главе диссертации, относится к несколько неожиданным особенностям решений задачи Коши для уравнения Больцмана в случае так называемых «мягких» потенциалов межмолекулярного взаимодействия.

Поведение решений уравнения Больцмана

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q(F,F); \quad F\big|_{t=0} = F_0 \tag{13}$$

при больших значениях времени рассматривается в большинстве серьезных исследований этого объекта. Фактически еще Больцман высказывал соображения о возможности быстрой релаксации произвольной начальной функции распределения к равновесной. Такого вывода придерживаются и сейчас многие физики, хотя используемые ими доказательства весьма далеки от математического совершенства. Впервые серьезный анализ этих вопросов был проведен Карлеманом еще в 30-х годах, а затем лишь через 30 лет продолжен уже многими исследователями. В интересующем нас аспекте суть их состоит в том, что для решения $F(x,u,t)$ задачи (13) справедливо неравенство вида

$$N(F - F_M) \le C_0 p(t), \tag{14}$$

где $N -$ подходящая норма в пространстве функций, зависящих от скорости u и радиус-вектора x (так что $N(F)-$ функция, зависящая от времени t); $C_0 -$ постоянная, зависящая, от начального распределения

$F_0(x,u)$; $F_M = F_M(|u|)$ – максвелловское распределение; поведение функций $p(t)$ существенно зависит, с одной стороны, от класса функциональных пространств, в которых ищется решение, а с другой - от свойств оператора столкновений $Q(F,F)$, характеризующихся предположениями о виде потенциала межмолекулярного взаимодействия.

Для «жестких» потенциалов $U \sim r^{-k}$, $k > 4$ задача исследовалась очень активно; основной результат состоит в том, что функция $p(t)$ в (14) стремится к нулю при бесконечном возрастании времени t либо как степенная, либо как экспонента в зависимости от степени гладкости по координатам начального распределения, ограниченности (или нет) пространственной области и скорости убывания $F_0(x,u)$ при $|u|,|x| \to \infty$.

Представленные выше результаты иллюстрируют новизну предлагаемых в диссертации решений.

Существенно беднее набор фактов, касающихся случая «мягких» (также обрезанных по углу) потенциалов $U \sim r^{-k}$, $2 < k < 4$. Здесь имеются результаты Р. Кэфлиша, при получении которых полагалось, что, во-первых, имеет место ситуация так называемого «ящика Грэда» с зеркально отражающими стенками (т.е. рассматривается класс периодических по координатам решений), а во-вторых, начальная функция распределения достаточно гладкая и разность $F - F_M$ экспоненциально быстро (по скорости) убывает; кроме того, речь идет лишь о слабом решении уравнения (13).

Поскольку далее мы будем рассматривать ситуации, близкие к равновесным, то, как обычно, вместо функции F используем $f = F_M^{-\frac{1}{2}}(F - F_M)$. Уравнение (13) перейдет в

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = L(f) + \nu(|u|)\Gamma(f,f); \qquad (15)$$

$$f|_{t=0} = f(x,u).$$

Результат (14) в терминах функции f имеет вид

$$N(f) \le N_1(f_0)\,p(t),$$

где N_1 – норма, в общем случае отличная от нормы N (свойства решения f, вообще говоря, ухудшаются по сравнению со свойствами начальной функции f_0, см. упомянутую выше работу Р. Кэфлиша), а $p(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Характерной особенностью всех полученных выше результатов является равномерная по начальному распределению эволюция решения к равновесной функции распределения; иными словами, «долго живущие» начальные распределения отсутствуют.

Переход к «мягким» потенциалам и ослабление условий, налагаемых на f_0, принципиально меняют картину асимптотического поведения решений уравнения (15). В третьей главе диссертации получен следующий результат:

Теорема. В случае «обрезанных по углу» степенных потенциалов межмолекулярного взаимодействия вида $U \sim r^{-k}$, $2 < k < 4$, для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $T > 0$ существует начальное распределение $f_0 \in L_2(x,u)$, такое, что для соответствующего решения $f(x,u,t)$ задачи (15) имеет место неравенство

$$\inf_{0 \le t \le T} \left[N(f)/N(f_0) \right] > 1 - \varepsilon.$$

Здесь $N(f)$ означает норму f в $L_2(x,u)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае *существуют «долго живущие» начальные возмущения.*

Наконец, в третьей главе диссертации приведено доказательство теоремы существования и единственности решения нелинейного уравнения Больцмана на бесконечном промежутке времени в случае периодических (по координатам) начальных условий, и исследована асимптотика по времени этого решения. Оказывается, что при определенных условиях гладкости начального распределения для случая молекул – твердых шариков или закона межмолекулярного взаимодействия с показателем степени больше 8, решение нелинейного уравнения Больцмана существует на бесконечном промежутке времени и единственно, причем равновесие устанавливается экспоненциально быстро.

В **четвертой главе** рассматривается задача о фильтрации пуассоновских процессов, являющихся основой математического моделирования широкого класса технических систем. Предлагается решение задачи фильтрации на основе разработанной методики, использующей понятие моментов. Пусть процесс иллюстрируется следующей схемой:

$$\vec{x}(t) \to \lambda\left(t, \vec{x}(t)\right) \to N_\lambda(t) \to \overset{\textit{фильтр}}{\square} \to z(t) \to \overset{\downarrow \eta(t)}{\oplus} \to y(t).$$

Здесь $y(t)$ - наблюдаемая функция, $\eta(t)$ - гауссов шум с известными вероятностными характеристиками, $\vec{x}(t)$ - марковский процесс (векторный, размерности n), характеристики которого нас в конечном итоге интересуют.
$\lambda\left(t, \vec{x}(t)\right)$ - интенсивность пуассоновского процесса N_λ (известная функция t и $\vec{x}(t)$). Процесс $N_\lambda(t)$ фильтруется (фильтр задан, в частности, известна его переходная функция) и преобразуется в сигнал $z(t)$, который после усиления и смешения с шумом $\eta(t)$ и является наблюдаемой величиной $y(t)$.

Сигнал $y(t)$ связан с выходным сигналом фильтра $z(t)$ дифференциальным уравнением

$$dy(t) = \tilde{z}(t)dt + R^{\frac{1}{2}}(t)d\eta(t), \qquad \tilde{z}(t) = C(t)z(t), \tag{16}$$

где $\begin{Bmatrix} R^{\frac{1}{2}}(t) \\ C(t) \end{Bmatrix}$ - заданные неслучайные функции.

Действие фильтра описывается дифференциальным уравнением

$$dz(t) = A(t)z(t)dt + b(t)dN_\lambda(t), \tag{17}$$

где $A(t)$ и $b(t)$ - известные (неслучайные) функции.

Уравнения (16), (17) дают, таким образом, возможность связать наблюдаемые $y(t)$ с процессом $N_\lambda(t)$.

Относительно процесса $\vec{x}(t)$ предполагается, что он задан стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} d\vec{x}(t) &= \vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)dt + \overleftrightarrow{G}\left(t,\vec{x}(t)\right)d\vec{\chi}(t) \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0 \end{aligned}, \tag{18}$$

где $\vec{\chi}(t)$- винеровский процесс, а функции $\vec{f}\left(t,\vec{x}(t)\right)$ и $\overleftrightarrow{G}\left(t,\vec{x}(t)\right)$ заданы (соответствующие векторная функция и матрица).

Положим далее

$$\hat{\vec{x}}(t) = E\left[\vec{x}(t)\middle|N(t)\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \vec{x}\,p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)d\vec{x},$$

$$\hat{\lambda}(t) = \mathrm{E}\left[\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right)\middle|N(t)\right] = \int\limits_{R^n} \lambda(t,\vec{x})p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)d\vec{x},$$

$$\overleftrightarrow{\sum}_t = \left(\sigma_{ij}\right); \quad \sigma_{ij} = E\left\{\left(x_i(t) - \hat{x}_i(t)\right)\left(x_j(t) - \hat{x}_j(t)\right) \mid N(t)\right\},$$

где $p\left(t,\vec{x}\middle|N(t)\right)$- условная (апостериорная) плотность вероятности, которая учитывает известную реализацию $N(t)$ (или, в более общем случае, реализацию $y(t)$).

В предположении, что $\lambda\left(t,\vec{x}(t)\right) = \lambda\left(t,\hat{\vec{x}}(t)\right)$ (что верно с точностью до малых второго порядка относительно $\left|x_i(t) - \hat{x}_i(t)\right|$), и что фильтрация проводится с помощью *RC*-цепочки, для $\hat{x}_i$, σ_{ij} выводится следующая система уравнений:

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = f_i\left(t,\hat{\vec{x}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k,l}\sigma_{kl}\frac{\partial^2 f_i\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}{\partial\hat{x}_k\partial\hat{x}_l} + \frac{\hat{x}_i}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}\sum_{k,l}\sigma_{kl}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_k}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_l}, \quad i=1,2,...,n$$

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \sum_k\frac{\partial f_k}{\partial\hat{x}_i}\sigma_{kj} + \sum_k\sigma_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial\hat{x}_j} + \sum_k g_{ik}g_{jk} + \frac{1}{\lambda\left(t,\hat{\vec{x}}\right)}\sum_{k,l}\sigma_{il}\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_l}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial\hat{x}_k}\sigma_{kj},$$

с начальными условиями

$$\hat{x}_i\left(t_0\right) = \mathrm{E}\left[x_{i0}\right] = x_{i0}, \quad i=1,2,...,n, \quad \sigma_{ij}\left(t_0\right) = \mathrm{E}\left[\left(x_{i0}-x_{i0}\right)\left(x_{j0}-x_{j0}\right)\right],$$

$i, j = 1,2,...,n$.

Решения этой системы уравнений и дают решение исходной задачи фильтрации.

В **пятой главе** предложен вывод интегральных кинетических уравнений, описывающих процессы переноса в эмульсиях – сплошных средах, содержащих включения в виде пузырьков газа.

В некоторых практически важных ситуациях (таких, например) как движение нефти по скважине) приходится иметь дело с задачей о движении вязкой жидкости, внутри которой имеются мелкие включения в виде газовых пузырьков, капелек воды, твердых частиц и т.п. Известные автору теоретические результаты в этом направлении связаны с конкретными (и довольно простыми) полуэмпирическими физическими моделями, что не позволяет достаточно полно охватить задачу о движении эмульсий и дать ее замкнутую математическую постановку. Предложенная автором модель описания процессов переноса в эмульсиях на основе кинетической теории позволяет дать (по аналогии с тем, как это делается в классической кинетической теории газов на основе уравнения Больцмана) теоретический вывод макроскопических уравнений переноса для эмульсий, а также вывести соответствующие формулы для коэффициентов вязкости и диффузии.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В диссертационной работе получены следующие научные результаты.

1) Разработан комплекс методов математического моделирования физических процессов в технических системах, использующий аналитические методы, порождающие численные алгоритмы решения специальных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, основанные на построении и анализе специального класса обобщенных функций на пространствах целых функций многих вещественных переменных, представленных в виде рядов по производным дельта-функции. В частности, прослеживается конструктивная связь между указанными функциями и последовательностью их «степенных моментов», что позволяет дать для функций рассматриваемых классов полное и конструктивное решение «проблемы моментов». Метод позволяет трансформировать задачи, содержащие линейные дифференциальные операторы (вообще говоря, с переменными коэффициентами), к линейным алгебраическим задачам рекуррентного типа, причем метод оказывается эффективным даже тогда, когда известные методы интегральных преобразований не дают конструктивного результата. Кроме того, величины, входящие в преобразованные соотношения, сами по себе оказываются имеющими содержательный смысл, что во многих случаях не требует обратного перехода к оригиналам.

2) Предложены аналитические и алгоритмизуемые численные методики математического моделирования технических систем на основе конструктивного решения уравнения Колмогорова-Феллера для случая нелинейной зависимости коэффициента сноса от пространственной координаты. Решение такой задачи ранее в литературе не встречалось.

3) Исследованы качественные свойства математических моделей физических явлений в технических системах, основанных на аналитических решениях уравнения Больцмана кинетической теории газов, в частности, для случая «мягких» потенциалов межмолекулярного взаимодействия, что позволило выявить специфические эффекты, касающиеся асимптотического поведения соответствующих решений этого уравнения.

4) Предложены методы математического моделирования технических систем, использующие решения общей задачи о фильтрации пуассоновских процессов при весьма слабых ограничительных предположениях.

5) Дан вывод интегральных кинетических уравнений, описывающих процессы переноса в многокомпонентных эмульсиях – сплошных средах, содержащих включения в виде пузырьков газа.

4. ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях по перечню ВАК Минобрнауки РФ

1. Фирсов А.Н. Об одной задаче Коши для нелинейного уравнения Больцмана. // Аэродинамика разреженных газов, вып. 8. Изд-во ЛГУ., Л., 1976, с. 22 – 37

2. Фирсов А.Н. О разрешимости в целом задачи Коши для нелинейного уравнения Больцмана. / Маслова Н.Б., Фирсов А.Н. // Труды Всесоюзной конф. по уравнениям с частными производными. Изд-во МГУ, М., 1978, с. 376 – 377

3. Фирсов А.Н. Слабо компактные множества и неподвижные точки нерастягивающих отображений в банаховом пространстве. // Доклады АН СССР, 1980, т. 254, № 3, с. 559 – 561

4. Firsov A.N. On asymptotic behaviour of solutions of the Boltzmann equation in the case of «soft» potentials. / Firsov A.N., Kulginov D.V. // 13th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Novosibirsk, July 5 - 9, 1982. Book of Abstracts. Vol. 1, p. 20 – 21

5. Фирсов А.Н. Об одном моментном представлении быстро убывающих функций и его приложениях к решению кинетических уравнений. // Тезисы докладов VIII Всесоюзной конференции по динамике разреженных газов. Москва, 24 - 26 сентября 1985 г. Том 1. М., 1985, с.18

6. Фирсов А.Н. О решениях уравнения Больцмана для «мягких» потенциалов. // Труды X Всесоюзной конференции по динамике

разреженных газов. Том 1. Кинетическая теория газов. М., МЭИ, 1991, с. 40 – 45

7. Фирсов А.Н. Моментное представление обобщенных функций. «Высокие интеллектуальные технологии и инновации в образовании и науке»: Материалы XVII Междунар. науч.-метод. конф. 11-12 февраля 2010 г. Том 2. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, с. 66-68

8. Фирсов А.Н. Моментное представление быстро убывающих функций и его приложения. // «Высокие интеллектуальные технологии и инновации в образовании и науке»: Материалы XVII Междунар. науч.-метод. конф. 11-12 февраля 2010 г. Пленарные доклады. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, с. 114-124

9. Фирсов А.Н. Метод моментов в теории обобщенных функций и его приложения в задачах системного анализа и управления. Основы теории. // НТВ СПбГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 6, 2010. – с. 74-81.

10. Фирсов А.Н. О свойствах решений уравнения Больцмана для «мягких» потенциалов. // НТВ СПбГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 2, 2011. – с. 78-80.

11. Фирсов А.Н. Решение уравнения Колмогорова - Феллера с квадратичным коэффициентом сноса. // Системный анализ в проектировании и управлении. Труды XV международной научно-практ. конференции. Часть 1. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011, с. 120-122

12. Фирсов А.Н. К кинетической теории многокомпонентных эмульсий. I. Основные уравнения. - Аэродинамика разреженных газов. Вып. 11// Межвуз. сб. / Под ред. Р.Г. Баранцева, Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983, с. 54 – 67

Монография

13. Фирсов А.Н. Обобщенные математические модели и методы анализа явлений переноса и фильтрации в распределенных технических системах // СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 150 с.

Учебные пособия

14. Фирсов А.Н. Уравнения и методы математической физики. Классические модели: учеб. пособие. / Куликов К.Г., Фирсов А.Н. // СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 220 с.

15. Фирсов А.Н. Теория вероятностей. Ч. 1: учеб. пособие. // СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. – 112 с.

Статьи и доклады

16. Фирсов А.Н. Граничные задачи для уравнения Больцмана. // Материалы III студенческой научной конференции ЛГУ. Изд-во ЛГУ, 1974, с. 46 – 47

17. Фирсов А.Н. Теоремы существования и единственности решения одной внешней граничной задачи для уравнения Больцмана. // Вестник Ленингр. Ун-та, 1975, № 7, с. 110 – 117

18. Фирсов А.Н. О дифференциальных свойствах решений уравнения Больцмана. // Вестник Ленингр. Ун-та, 1975, № 13, с. 99 – 105

19. Фирсов А.Н. Решение задачи Коши для нелинейного уравнения Больцмана. // IV Всесоюзная конф. по динамике разреженного газа. Сб. Аннотаций. М., 1975, с. 91 – 92

20. Фирсов А.Н. Исследование решений уравнения Больцмана, близких к равновесным. // Автореферат канд. диссертации на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Л., ЛГУ, 1975, с. 1 – 15

21. Фирсов А.Н. Исследование решений уравнения Больцмана, близких к равновесным. // Диссертация на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Л., ЛГУ, 1975, 127 с.

22. Фирсов А.Н. Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. I. / Маслова Н.Б., Фирсов А.Н. // Вестник Ленингр. Ун-та, 1975, № 19, с. 83 – 88

23. Фирсов А.Н. Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. II. / Маслова Н.Б., Фирсов А.Н. // Вестник Ленингр. Ун-та, 1976, № 1, с. 97 – 103

24. Фирсов А.Н. Расчетные исследования регенератора газовой холодильной машины. / Соколов С.А., Тамбовцев Б.З., Фирсов А.Н. // Отчет по х/д теме, Омск, ОмГУ, 1978, с. 1 - 18. Гос. регистр. № 78048989

25. Firsov A.N. Weakly compact sets and fixed points of nonexpansive mappings in a Banach space. // Soviet Math. Dokl., 1980, vol. 22, № 2, p. 422 – 424

26. Фирсов А.Н. Некоторые результаты и проблемы в теории неподвижных точек нерастягивающих отображений. // Омская областная математическая конференция. Аннотации докладов. Омск, ОмГУ, 1981, с. 12

27. Фирсов А.Н. Теоретическая механика. Часть 1. Кинематика, статика: справочное пособие. // Изд-во Омского политехн. ин-та, Омск, 1982, 23 с.

28. Фирсов А.Н. Теоретическая механика. Часть 2. Динамика: справочное пособие. // Изд-во Омского политехн. ин-та, Омск, 1983, 28 с.

29. Фирсов А.Н. О решениях уравнения Больцмана для «мягких» потенциалов. // X Всесоюзная конференция по динамике разреженных газов. Тезисы докладов. (27 - 30 июня 1989 г.) М., МЭИ, 1989, с. 3

30. Фирсов А.Н. Решение задачи об управлении нестационарной транспортировкой углеводородов по системе трубопроводов. / Нгуен Д.Х., Козлов В.Н., Фирсов А.Н. // «Научные и технические средства обеспечения энергосбережения и энергоэффективности в экономике РФ»: Сб. научн. трудов 1-й Междунар. научно-практ. конф. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010, с. 83-85

31. Фирсов А.Н. Математическое моделирование и оптимизация гидравлических сетей при установившихся режимах транспортировки слабо сжимаемой жидкости. / Козлов В.Н., Нгуен Д.Х., Фирсов А.Н. // НТВ СПб ГПУ, сер. «Информатика, телекоммуникации, управление», вып. 4, 2011. – с. 42-46.