САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра радиофизики

В.П.Акимов Л.А.Бабенко

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Фундаментальная библиотека Политехнического университета
Электронные ресурсы
2012

1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Система дифференциальных уравнений классической электродинамики носит название уравнений Максвелла. Максвелл сформулировал эти уравнения в шестидесятых годах девятнадцатого столетия и раскрыл их физический смысл. Общепринятая ныне формулировка уравнений принадлежит Герцу.

К основным уравнениям Максвелла относится, прежде всего, уравнение, определяющее зависимость вихря магнитного поля от плотности токов проводимости и токов смещения:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \tag{1.1}$$

где $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля, $\vec{D}$ - электрическая индукция, $\vec{j}$ - объемная плотность тока, и уравнение, выражающее закон индукции электрического поля при изменении магнитного поля:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

где $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, $\vec{B}$ - магнитная индукция.

Из этих уравнений вытекают при некоторых добавочных предположениях два других уравнения

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.4}$$

где ρ - объемная плотность заряда. Однако эти уравнения нельзя рассматривать как простые следствия. Они несут дополнительную информацию.

К основным уравнениям следует добавить соотношения, связывающие между собою векторы электромагнитного поля и зависящие от свойств среды. Эти соотношения называются материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \tag{1.5}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \tag{1.6}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \tag{1.7}$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ (Ф/м) – электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м) – магнитная постоянная, ε, μ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно, σ - удельная электрическая проводимость среды.

Соотношение (1.7) выражает известный из теории цепей закон Ома для постоянного тока, записанный в дифференциальной форме. Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды определяют ее электромагнитные свойства.

Эта система уравнений электродинамики является основой анализа всевозможных электромагнитных процессов. Чтобы система уравнений была полной, т.е. чтобы она давала возможность однозначно определить напряженность поля по начальным условиям, необходимо дополнить эту систему граничными условиями, которым должны удовлетворять векторы электромагнитного поля на поверхности раздела различных сред.

Вектор электрической индукции $\vec{D}$ подчиняется граничному условию

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_0 = \xi, \tag{1.8}$$

т.е. в граничных точках разность нормальных компонент вектора $\vec{D}$ в обеих средах равна плотности поверхностного заряда ξ. Если граница не несет заряда (ξ=0), то нормальная компонента вектора $\vec{D}$ при переходе границы остается непрерывной.

При переходе границы раздела сред всегда остаются непрерывными тангенциальная компонента вектора $\vec{D}$

$$\vec{n}_0 \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \tag{1.9}$$

и нормальная компонента вектора магнитной индукции $\vec{B}$

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0. \tag{1.10}$$

Для тангенциальной компоненты вектора $\vec{H}$ справедливо граничное условие

$$\vec{n}_0 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{\eta}, \qquad (1.11)$$

и лишь в отсутствии на границе поверхностного тока $\vec{\eta}$ тангенциальная компонента вектора $\vec{H}$ непрерывна.

Помимо приведенных условий на поверхности разрыва, необходимо также принимать во внимание граничные условия в собственном смысле этого слова. В каждом отдельном случае форма этих граничных условий всецело зависит от конкретных условий задачи. В частности, если в область рассмотрения включается все бесконечное пространство, то граничные условия приобретают характер условий на бесконечности.

Система уравнений Максвелла совместно с перечисленными условиями на поверхности раздела и с надлежащими условиями в бесконечности есть система полная, т.е. она позволяет однозначно определять электромагнитное поле в любой точке пространства и в любой момент времени по заданным для момента $t = 0$ начальным значениям $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

2.ТЕОРЕМА ПОЙНТИНГА

Электромагнитное поле, являясь особой формой материи, обладает энергией. Можно придти к заключению о существовании электромагнитного поля по наблюдаемому при известных условиях возникновению или исчезновению доступных восприятию форм энергии (например, тепловой или механической). Руководствуясь законом сохранения энергии, следует предположить, что возникновение или исчезновение известных форм энергии должно происходить за счет преобразования некоторой иной формы энергии, а именно энергии электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла определяют изменение электромагнитного поля во времени. Составим уравнение, которое позволяет определить те преобразования энергии, в которых эти изменения поля проявляются. Имея в виду, что энергия поля вполне определенным образом локализована в пространстве, сформулируем уравнение баланса применительно к некоторому объему V, ограниченному поверхностью S.

Пусть в объеме V, заполненном однородной изотропной средой, находятся сторонние источники. Очевидно, что мощность, выделяемая этими источниками, может расходоваться на потери и на изменение электромагнитной энергии внутри объема V, а также частично рассеиваться, уходя в окружающую среду через поверхность S. При этом должно выполняться равенство

$$P^S = P^r + \frac{dW}{dt} + P^{\Sigma}, \tag{2.1}$$

где P^s – мощность сторонних (заданных) источников, P^r – мощность потерь внутри объема V, P^{Σ} - мощность, проходящая через поверхность S, W – энергия электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме V, $\frac{dW}{dt}$ - мощность, расходуемая на изменение энергии внутри объема V.

Написанное уравнение дает только качественное представление об энергетических соотношениях. Чтобы получить количественные соотношения, следует воспользоваться уравнениями Максвелла.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла с учетом сторонних токов

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}^S + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$\vec{j}^S$ - объемная плотность стороннего тока.

Члены этого уравнения – векторные величины, имеющие размерность А/м^2. Чтобы получить уравнение, аналогичное (2.1), надо видоизменить первое уравнение так, чтобы его члены стали скалярными величинами, измеряющимися в ваттах. Для этого достаточно умножить указанное уравнение на вектор $\vec{E}$:

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,S} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2.3)$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя известную формулу векторного анализа

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}).$$

Кроме того, заменим $\nabla \cdot \vec{E}$ его значением из второго уравнения Максвелла. При этом получим уравнение

$$-\vec{E} \cdot \vec{j}^{\,S} = \vec{E} \cdot \vec{j} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Последние два слагаемых представим в виде

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_o \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_o \mu H^2}{2}\right)$$

Введя обозначение $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{\Pi}$, проинтегрируем по объему V:

$$-\int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,s} dv = \int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{j} dv + \oint\limits_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}\right) dv \qquad (2.4)$$

Здесь использована теорема Остроградского – Гаусса для преобразования объемного интеграла от $\nabla \cdot \vec{\Pi}$ в поверхностный интеграл от вектора $\vec{\Pi}$ и, кроме того, в последнем члене правой части изменен порядок операций интегрирования и дифференцирования.

Полученное уравнение носит название теоремы Пойнтинга. Вектор $\vec{\Pi}$ - вектор Пойнтинга. Левая часть уравнения определяет мощность, отдаваемую сторонними токами в объеме V. Действительно, ток проводимости представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц. Ток отдает энергию электромагнитному полю при торможении этих частиц. Для этого необходимо, чтобы вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ имел составляющую, ориентированную противоположно направлению тока, т.е. чтобы скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{j}^{\,S}$ было отрицательным $(\vec{E} \cdot \vec{j}^{\,S} < 0)$. Тогда левая часть уравнения – положительная величина.

Первый член в правой части равен мощности джоулевых потерь, определяемых по закону Джоуля – Ленца. В случае цилиндрического проводника с сопротивлением R и током I мощность джоулевых потерь $P^r = I^2 R$ (I – действующее значение тока). Для бесконечно малого цилиндра объемом $dv = ds \cdot dl$, торцы которого перпендикулярны направлению тока, получаем

$$dP^r = (j \cdot ds)^2 \cdot \left(\frac{dl}{\sigma\, ds}\right) = \frac{j^2}{\sigma} dv$$

Следовательно, для тела произвольной формы должно выполняться равенство

$$P^r = \int\limits_V \frac{j^2}{\sigma} dv = \int\limits_V \sigma E^2 dv = \int\limits_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dv \qquad (2.5)$$

Для выяснения физического смысла последнего члена в правой части уравнения рассмотрим частный случай. Предположим, что объем окружен идеально проводящей оболочкой, совпадающей с поверхностью S. Тогда касательная составляющая $\vec{E}$ на поверхности S будет равна нулю. Кроме того, $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$, где $\vec{n}_0$- орт внешней нормали. Следовательно, поверхностный интеграл в уравнении будет равен нулю, т.к. нормальная компонента векторного произведения $\vec{E} \times \vec{H}$ определяется касательными составляющими входящих в него векторов. Предположим также, что в пределах объема V среда не обладает проводимостью (σ = 0). При этом в рассматриваемой области не будет джоулевых потерь. В результате получим

$$-\int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,s} dv = \frac{d}{dt} \int\limits_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}\right) dv$$

Очевидно, что в этом случае мощность сторонних источников может расходоваться только на изменение энергии электромагнитного поля, следовательно, правая часть последнего уравнения представляет собой скорость изменения энергии электромагнитного поля, запасенной в объеме *V*. Энергия электромагнитного поля в объеме *V*

$$W = \int_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} \right) dv \tag{2.6}$$

Осталось выяснить физическую сущность поверхностного интеграла. Предположим, что в объеме *V* отсутствуют потери, кроме того, величина электромагнитной энергии остается постоянной (W= const). В этом случае вся мощность сторонних источников должна уходить в окружающее пространство. Уравнение принимает вид

$$-\int_V \vec{E} \cdot \vec{j}^{\,S} dv = -\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$$

Следовательно, поток вектора $\vec{\Pi}$ через поверхность *S* равен мощности P^{Σ}, уходящей в пространство из объема *V*. Вектор Пойнтинга можно трактовать как вектор плотности потока энергии в единицу времени. Направление этого вектора в изотропной среде совпадает с направлением распространения энергии. Поток, проходящий через поверхность *S*, определяемый интегралом $\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$, может быть направлен из окружающего пространства в объем *V*, при этом этот интеграл будет отрицательной величиной.

3.ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Система основных уравнений Максвелла является полной, т.е. электромагнитное поле в каждой точке пространства и в каждый момент времени однозначно определяется этой системой, если только для момента $t=t_0$ заданы начальные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всех точках пространства. Однако определить напряженность во всем бесконечном пространстве невозможно, т.к. наблюдению доступна лишь его ограниченная часть. Поэтому теорема единственности приобретает непосредственный физический смысл в том случае, если ограничиться некоторым конечным объемом пространства и дополнить условия, определяющие решение уравнений Максвелла, граничными условиями на границах раздела этого объема.

В качестве первичной причины существования электромагнитного поля естественно видеть превращение неэлектромагнитной энергии в энергию поля. Поэтому будем исследовать решения при заданных источниках, т.е. такие, которые должны представлять вынужденные поля.

Теорема единственности утверждает, что электромагнитное поле в любой момент времени $t>t_0$ в любой точке объема V, ограниченного поверхностью S, определяется уравнениями Максвелла однозначно, если в каждой точке объема V заданы начальные значения векторов $\vec{E}(\vec{r},t_0)=\vec{E}_0$, $\vec{H}(\vec{r},t_0)=\vec{H}_0$ и если известны граничные значения проекций, касательных к S, одного из векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$ в точках поверхности S для любого момента времени $t>t_0$.

Для доказательства теоремы предположим, что для области V, содержащей источники поля $\vec{j}^{\,s}$, существуют два решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие одинаковым начальным и граничным условиям. Обозначим поля, соответствующие этим решениям, через $\vec{E}_1,\vec{H}_1$ и $\vec{E}_2,\vec{H}_2$. Очевидно, что разность указанных решений

$$\vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \quad \vec{H}' = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла, не содержащим источники, а также нулевым начальным и граничным условиям

$$\vec{E}'(\vec{r}, t_0) = 0, \quad \vec{H}'(\vec{r}, t_0) = 0$$

$$\vec{E}' \times \vec{n}_0 \Big|_S = 0, \quad \vec{H}' \times \vec{n}_0 \Big|_S = 0$$

Применим к полю $\vec{E}', \vec{H}'$ теорему Пойнтинга:

$$\int_V \sigma E'^2 dv + \oint_S \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E'^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H'^2}{2} \right) dv = 0$$

Так как $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$, то, учитывая граничные условия для полей $\vec{E}', \vec{H}'$, получаем, что интеграл по поверхности S равен нулю. Очевидно, что интеграл $\int_V \sigma E'^2 dv$ всегда больше или равен нулю. Следовательно, уравнение баланса энергии будет удовлетворено лишь в том случае, когда функция

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon E'^2 + \mu_0 \mu H'^2 \right) dv$$

монотонно убывает во времени (только при этом предположении $\frac{\partial W}{\partial t} \le 0$).

Но при $t=t_0$ энергия поля $W(t_0) = 0$. Так как энергия электромагнитного поля не может принимать отрицательные значения, то уравнение баланса будет справедливо лишь при условии, что функция $W(t) = 0$ для любого $t \ge t_0$. Последнее возможно, если $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ равны нулю в каждой точке области V при $t \ge t_0$. Следовательно, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_2 = \vec{H},$ что доказывает единственность решения.

Исследованная задача о нахождении поля внутри объема V называется внутренней задачей электродинамики, Все рассуждения можно повторить и для внешней задачи, когда вынужденное поле существует в бесконечном пространстве вне некоторой области V'. Теперь V – область, ограниченная изнутри поверхностью S, а из вне – поверхностью сферы бесконечно большого радиуса S_r. В этом случае теорема Пойнтинга для поля $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ запишется в виде

$$\int_V \sigma E'^2 dv + \oint_S \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot d\vec{s} + \oint_{S_r} \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E'^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H'^2}{2} \right) dv = 0 .$$

Проведенные выше рассуждения полностью применимы и к последнему равенству при условии, что

$$\oint_{S_r} \vec{E}' \times \vec{H}' \cdot \vec{n}_0 ds \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Но, если с момента возникновения поля прошел конечный промежуток времени, можно утверждать, что поверхность S_r лежит вне той области, которую заняло поле к моменту $t > t_0$, распространяясь в пространстве с конечной скоростью. В этом случае последнее условие, безусловно, удовлетворяется.

Итак, рассмотрен вопрос о необходимых и достаточных условиях для единственности решения уравнений Максвелла в общем случае произвольной зависимости векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$ от времени. В эти условия входят как условия на границе, так и начальные условия, требующие задания поля во всем пространстве для момента $t = 0$. Однако необходимость в задании начальных значений поля отпадает, если речь идет о решении для так называемого установившегося режима, когда составляющие поля меняются со временем по периодическому закону.

4.ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим некоторые методы подхода к решению прямых задач электродинамики. В этих задачах требуется найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам.

Прежде всего, получим уравнения для каждого из векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по отдельности. Умножим все члены первого уравнения Максвелла на ε^{-1}, а второе – на μ^{-1} и применим к векторам операцию rot (т.е. $\nabla\times\vec{g}$):

$$\nabla\times\left(\varepsilon^{-1}\nabla\times\vec{H}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right)+\nabla\times\varepsilon^{-1}\vec{j},$$

$$\nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$

Заменим $\nabla\times\vec{E}$ и $\nabla\times\vec{H}$ в правых частях уравнений выражениями, вытекающими из первых двух уравнений Максвелла. В результате получим

$$\nabla\times\left(\varepsilon^{-1}\nabla\times\vec{H}\right)+\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\nabla\times\varepsilon^{-1}\vec{j},$$

$$\nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}\right)+\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t},$$

где обозначено $\varepsilon_o\mu_o=c^{-2}$. Правые части этих уравнений в общем случае нельзя рассматривать как известные. Для идеального диэлектрика, когда $\sigma=0$, $\vec{j}=\vec{j}^{\,s}$ и правые части определяются заданными источниками. Если среда однородна ($\varepsilon=\mathrm{const}$, $\mu=\mathrm{const}$), уравнения могу быть записаны в виде

$$\nabla^2\vec{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{j}$$

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\nabla\rho+\mu_0\mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

Здесь использовано тождество

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{a} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{a} \right) - \nabla^2 \vec{a}$$

и учтено также, что $\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho/(\varepsilon_0 \varepsilon)$. Если $\vec{j} = \vec{j}^{\,S}$, то $\rho = \rho^S$, причем эти величины связаны законом сохранения заряда.

Таким образом, для каждого из векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получено уравнение второго порядка. Уравнения с левыми частями такого вида называются уравнениями Даламбера. Уравнения позволяют найти векторы электромагнитного поля по заданным источникам. Однако из-за сложности правых частей эти уравнения оказываются неудобными для решения задачи. Обычно их используют в тех случаях, когда в рассматриваемой области нет сторонних источников, т.е. когда они являются однородными. Такие уравнения называются волновыми.

В общем случае решение задачи существенно упрощается, если предварительно определить некоторые вспомогательные функции, которые принято называть электродинамическими потенциалами. Их можно ввести различным образом в зависимости от специфических особенностей анализируемой задачи, однако, принцип их построения один и тот же.

Так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю ($\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{a} \right) = 0$), то из уравнения $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ следует, что вектор $\vec{B}$ можно представить в виде ротора некоторого вектора $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{A}$- векторный потенциал. При известном векторе $\vec{A}$ вектор $\vec{B}$ определяется однозначно. Однако в определении вектора $\vec{A}$ по заданному вектору $\vec{B}$ существует некоторый произвол. Если вместо вектора $\vec{A}$ взять вектор $\vec{A}_1 = \vec{A} + \nabla \psi$, то значение вектора $\vec{B}$ не изменится, так как $\nabla \cdot \nabla \psi = 0$. Таким образом, вектор $\vec{A}$ определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Вектор напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \vec{A}.$$

Подстановка этого выражения $\vec{H}$ во второе уравнение Максвелла приводит к равенству $\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$. Векторная функция, стоящая в скобках, является потенциальной. Приравняв эту функцию величине -∇φ, получаем

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (4.1)$$

Таким образом, векторы, характеризующие электромагнитное поле, выражаются через две функции: векторный потенциал $\vec{A}$ и скалярный потенциал φ. Остается найти уравнения, которым они удовлетворяют.

Заменим в первом уравнении Максвелла напряженности поля их выражениями через потенциалы. Для однородной среды получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_0 \mu \vec{j}$$

При помощи векторного тождества $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$, введем оператор Лапласа. Это дает

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} \right) - \mu_0 \mu \vec{j}$$

Упростим это уравнение. Уже отмечалось, что вектор $\vec{A}$ определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Следовательно, можно потребовать, чтобы вектор удовлетворял добавочному условию. Потребуем, чтобы $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Это уравнение называют условием калибровки (или калибровкой Лоренца). При этом для потенциала $\vec{A}$ получаем векторное уравнение Даламбера

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\vec{j} \tag{4.2}$$

Аналогичное уравнение получаем для скалярного потенциала φ. Подставив в третье уравнение Максвелла выражение вектора $\vec{E}$ через потенциалы и, используя условие калибровки, приходим к уравнению

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon} \tag{4.3}$$

Таким образом, векторный и скалярный потенциалы, как и векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяют неоднородным уравнениям Даламбера. Однако правые части уравнений для потенциалов имеют более простой вид. Скалярный потенциал φ зависит лишь от распределения зарядов, а векторный потенциал $\vec{A}$ - от распределения токов проводимости.

5.ПРОСТЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

Предположим, что в рассматриваемой области пространства сторонние силы не действуют. Если при этом найдено физически осмысленное решение уравнений поля, то оно выражает свободное электромагнитное поле, т.е. поле, не обязанное своим происхождением процессу преобразования какого либо вида энергии в электромагнитную. В отсутствии сторонних источников любая декартова компонента векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Рассмотрим его решение, зависящее только от одной координаты z и времени t. Для $u = u\ (z,t)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ или } \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(z,t) = 0,$$

в котором оператор Даламбера записан в виде произведения двух сомножителей. Введем новые переменные $\xi == z - vt$; $\eta = z + vt$, так, что обратное преобразование даст $z = \frac{\xi + \eta}{2}$, $t = \frac{\eta - \xi}{2v}$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2v}\frac{\partial}{\partial t}$$

В результате волновое уравнение в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0.$$

Проинтегрируем уравнение по переменной ξ: $\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} = F(\eta)$. Интегрируя еще раз по переменной η, находим $u(\xi,\eta) = g(\eta) + h(\xi)$. Здесь $\frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} = F(\eta)$, $h(\xi)$ играет роль постоянной интегрирования по η, которая может зависеть от второй переменной как от параметра. Вид функций g и h не определяется из решения уравнения, а устанавливается путем задания начальных условий.

Возвратившись к исходным переменным, получим

$$u(z,t) = g(z + vt) + h(z - vt), \tag{5.1}$$

т.е. решение уравнения представляет собой наложение двух возмущений, каждое из которых распространяется вдоль z в сторону возрастания или убывания z со скоростью v

$$u(z,t) = u^{+}(t - z/v) + u^{-}(t + z/v), \tag{5.2}$$

$u^{\pm}$ - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Это математическое описание некоторого волнового процесса. При распространении волны среда вовлекается в физический процесс, в результате чего происходит передача энергии в пространстве. Пусть физический процесс в точке $M(\vec{r}_1)$ характеризует функция $u(\vec{r}_1, t) = f(t)$. В другой точке $P(\vec{r}_2)$ процесс не наблюдается, т.е. u = 0, пока он не передан средой. Потом $u(\vec{r}_2, t) = f_1(t)$. В простейшем случае в точке P обнаружится лишь запаздывание, т.е. $f_1(t) = f(t - \tau)$, где τ - время прохождения пути $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = l$ со скоростью v.

Если изменения в пространстве происходят только в направлении z, то процесс характеризуется волной $u(z, t) = f(t - z/v)$. При z = 0 $u(0, t) = f(t)$, при z = l $u(l, t) = f(t - l/v) = u(0, t - l/v)$ - временная зависимость, отличающаяся только сдвигом. Рассмотренный волновой процесс – бегущая плоская однородная волна в среде, которая ее не деформирует (в любой точке плоскости z=const процесс описывается этой функций). Считая v положительной величиной, для волны, движущейся в направлении, противоположном z, надо заменить аргумент $u(z, t) = f(t + z/v)$. Итак, общее решение волнового уравнения можно представить в виде наложения прямой и обратной волн.

Определим взаимную ориентацию векторов $\vec{E}, \vec{H}$ в плоской волне. Для векторного потенциала $\vec{A}$ справедливо волновое уравнение. Для описания поля в отсутствии зарядов можно выбрать такую калибровку потенциалов, при которой φ = 0 тождественно, а также $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. При этом, полагая $\vec{A} = \vec{A}(z, t)$, получаем $\dfrac{\partial A_z}{\partial z} = 0$. Поскольку z входит в аргумент $\vec{A}$ в линейных комбинациях $(z \pm vt)$, последнее равенство дает A_z = const (z,t). Следовательно

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0, \quad H_z = \frac{1}{\mu_0 \mu}\left(\nabla \times \vec{A}\right)_z = 0.$$

Проекции напряженностей поля на направление распространения отсутствуют – плоские электромагнитные волны поперечны.

Далее предположим, что волна бежит в одну сторону $\vec{A}(z,t)=\vec{A}(z-vt)$. При этом

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\partial\vec{A}}{\partial z},$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{\mu_0\mu}\left(-\vec{x}_0\frac{\partial A_y}{\partial z}+\vec{y}_0\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu_0\mu}\vec{z}_0\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}=\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\vec{z}_0\times\vec{E}$$

В плоской волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно ортогональны и ортогональны направлению распространения.

6. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

При наличии сферической симметрии решение волнового уравнения можно получить в виде сферических волн. Предположим, что поле создается точечным зарядом, расположенным в начале координат. Величина этого заряда меняется со временем $q=q\ (t)$. В любой точке, кроме начала координат, потенциал φ удовлетворяет однородному уравнению Даламбера. Вне области, занятой источником, волновое уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

Если искать решение в виде $\varphi(r,\ t)=\psi(r,\ t)/\ r$, то новая функция $\psi(r,\ t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,$$

решение которого уже известно. Оно имеет вид

$$\psi(r,t) = \psi^{+}(t - r / v) + \psi^{-}(t + r / v).$$

Таким образом

$$\varphi(r,t) = \frac{\psi^{+}(t - r / v)}{r} + \frac{\psi^{-}(t + r / v)}{r}. \tag{6.1}$$

Первое слагаемое описывает расходящуюся сферическую волну, распространяющуюся из начала координат со скоростью *v*. Ее амплитуда убывает, как r^{-1}, в силу того, что заданный поток энергии распределяется на все большую площадь. Второе слагаемое описывает волну, испущенную на бесконечности и сходящуюся к центру. Функции, описывающие волновые процессы, всегда содержат множители вида $f(t \pm r/v)$, характер зависимости которых от расстояния вдоль направления распространения волны в фиксированный момент времени повторяет характер их зависимости от времени в фиксированной точке пространства.

Если источник сосредоточен в конечной области, то сходящаяся сферическая волна может возникнуть только в результате отражения расходящейся сферической волны. В однородном пространстве отраженной волны быть не может. Поэтому надо считать $\psi^{-}(t + r / v) = 0$. При этом потенциал точечного заряда

$$\varphi(r,t) = \frac{\psi^{+}(t - r / v)}{r}.$$

Очевидно, значение потенциала φ должно быть связано с интенсивностью источников поля. Последнее выражение должно быть справедливо при любом законе изменения функции $q\ (t)$. В статическом случае, если поле создается точечным неподвижным зарядом постоянной величины $q = \mathrm{const}(t)$, расположенным в начале координат, потенциал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Если заряд сосредоточен в малом элементе объема dv с плотностью ρ, то формулу следует переписать

$$\varphi = \frac{\rho\, dv}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R},$$

где R – расстояние от элемента dv до точки наблюдения.

Можно записать выражение для потенциала, создаваемого произвольным распределением зарядов в объеме V. В соответствии с принципом суперпозиции

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \int_V \frac{\rho}{R}\, dv.$$

Если источник меняется во времени $q = q(t)$, естественно предположить

$$\psi^+(t - r/v) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} q(t - r/v).$$

Тогда $\varphi = \dfrac{q(t - r/v)}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}$.

При этом скалярный потенциал, обусловленный произвольным распределением зарядов в объеме

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \int_V \frac{\rho(r', t - R/v)}{R}\, dv', \quad R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (6.2)$$

x', y', z'- декартовы координаты элемента dv, x, y, z – координаты точки наблюдения.

Это частное решение неоднородного уравнения Даламбера.

Аналогичное решение можно записать и для уравнения для векторного потенциала $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(r', t - R/v)}{R}\, dv' \quad (6.3)$$

Таким образом, для вычисления потенциалов φ и $\vec{A}$ в произвольной точке пространства в момент времени t нужно брать значения токов и зарядов в каждом элементе *dv'* в более ранний момент $t' = t - R / v$, определяемый расстоянием *R* от элемента *dv'* до точки наблюдения, т.е. влияние источников электромагнитного поля сказывается не мгновенно. Требуется время $\Delta t = R / v$, за которое электромагнитные колебания, вызванные зарядами и токами в элементе *dv'*, успевают распространиться от *dv'* до точки наблюдения. Такие φ и $\vec{A}$ называют запаздывающими потенциалами.

7. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

До сих пор мы не конкретизировали зависимость от времени электромагнитных процессов, описываемых уравнениями Максвелла. Рассмотрим один частный, но наиболее важный случай гармонической зависимости полей от времени, что соответствует одночастотному режиму. Важность отдельного рассмотрения гармонического режима связана со следующими обстоятельствами. Во-первых, большинство излучающих устройств создают поля, зависимость которых от t близка к гармонической, что определяется собственно свойствами колебательных систем. Во-вторых, почти любой процесс с произвольной зависимостью от времени может быть представлен в виде интеграла или ряда Фурье, т.е. в виде суперпозиции гармонических колебаний. В-третьих, при рассмотрении гармонических процессов существует возможность исключить из уравнений время и тем существенно их упростить. Речь идёт о применении метода комплексных амплитуд, уже известного из теории электрических цепей.

Следуя методу комплексных амплитуд, запишем векторы электромагнитного поля и плотности тока в виде:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0(x,y,z)e^{i\omega t} \quad ,$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}_0(x,y,z)e^{i\omega t} \quad ,$$
$$\vec{D}(x,y,z,t) = \vec{D}_0(x,y,z)e^{i\omega t} \quad , \qquad (7.1)$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}_0(x,y,z)e^{i\omega t},$$
$$\vec{j}(x,y,z,t) = \vec{j}_0(x,y,z)e^{i\omega t},$$

где $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{D}_0, \vec{B}_0, \vec{j}_0$ - комплексные векторы, являющиеся комплексными амплитудами, ω - круговая частота гармонического процесса. Комплексные векторы - это векторы, компоненты которых могут быть комплексными величинами. Например, комплексный вектор $\vec{A}$ может быть представлен в виде комбинации двух вещественных векторов $\vec{A}_r$ и $\vec{A}_i$, т.е.

$$\vec{A} = \vec{A}_r + i\vec{A}_i$$

Более подробные сведения о комплексных векторах можно найти в Приложении.

В дальнейшем, где это не будет вызывать недоразумений, индекс «0» в записи комплексных амплитуд мы будем опускать.

С учётом (7.1) уравнения Максвелла (1.1) и (1.2) для комплексных амплитуд можно записать в форме:

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\vec{D} + \vec{j}, \tag{7.2}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\vec{B} \tag{7.3}$$

Плотность тока $\vec{j}$, входящая в уравнение (7.2), представляет собою сумму плотности тока, связанного с проводимостью среды σ, и тока сторонних источников, не зависящих от полей в рассматриваемом объёме, т.е.

$$\vec{j} = \vec{j}_\sigma + \vec{j}^{\,стор}, \tag{7.4}$$

где $\vec{j}_\sigma = \sigma\vec{E}$.

Подставив (7.4) в (7.2), с учётом (1.7) получим

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\vec{E} + \vec{j}^{\,стор} \tag{7.5}$$

Величина

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon - i60\lambda\sigma, \tag{7.6}$$

где λ - длина волны в вакууме, имеет смысл комплексной диэлектрической проницаемости среды. Здесь учтено, что $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ и $\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$. Следует отметить, что диэлектрическая проницаемость ε, как и магнитная проницаемость μ , может быть сама величиной комплексной, что определяет потери электромагнитной энергии, не связанные с токами проводимости.

Уравнения Максвелла (7.2) и (7.3) содержат шесть функций координат- шесть компонент полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Решение этих уравнений почти всегда требует сведения их к другим уравнениям, содержащим меньшее число неизвестных функций. Для этого обычно используют электродинамические потенциалы, введённые в разделе 4. Однако, в некоторых случаях целесообразно исключить из уравнений одно из полей и перейти к уравнению второго порядка, содержащему либо $\vec{E}$, либо $\vec{H}$.

Рассмотрим решение уравнений (7.2), (7.3) для однородной среды, свободной от источников. Поскольку в этом случае ε = const, μ = const, $j = \rho = 0$, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, то, применив к уравнениям Максвелла операцию rot , можно прийти к волновым уравнениям для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \tag{7.7}$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \tag{7.8}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon\mu}$ - волновое число, λ - длина волны в вакууме.

Каждое из уравнений (7.7) и (7.8) соответствует трём скалярным уравнениям для компонент векторов в декартовой системе координат. Для составляющей E_x можно написать:

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \tag{7.9}$$

Вообще говоря, решение уравнения (7.9) можно записать, используя решение (5.2) одномерного волнового уравнения. Однако, мы применим здесь метод разделения переменных, который будет полезен в дальнейшем. Поскольку E_x является функцией координат x, y, z, её удобно представить в виде произведения трёх функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, т.е.

$$E_x(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{7.10}$$

Подставив (7.10) в уравнение (7.9) и разделив все члены на $X(x)Y(y)Z(z)$, получим:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0 \tag{7.11}$$

Слагаемое k^2 не зависит от координат, а каждое из первых трёх слагаемых зависит лишь от одной координаты. Поскольку (7.11) должно выполняться при любых x, y, z, то следует положить:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x{}^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y{}^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z{}^2,$$

где k_x, k_y, k_z - некоторые постоянные, причём $k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2 = k^2$.

Таким образом, получаем три уравнения второго порядка для определения функций $X(x), Y(y), Z(z)$:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x{}^2 X = 0,$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y{}^2 Y = 0,$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_z{}^2 Z = 0$$

Решения этих уравнений могут быть записаны в виде:

$$X(x) = A_1 e^{-ik_x x}, \; Y(y) = A_2 e^{-ik_y y}, \; Z(z) = A_3 e^{-ik_z z} \text{ и}$$

$$E_x = E_{mx} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

где $\vec{k} = \vec{x}_0 k_x + \vec{y}_0 k_y + \vec{z}_0 k_z$ - волновой вектор , $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения, $E_{mx} = A_1 A_2 A_3$ - величина, не зависящая от координат.

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для других составляющих вектора $\vec{E}$. Таким образом,

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} , \tag{7.12}$$

где $\vec{E}_m$ – постоянный вектор.

Для напряжённости магнитного поля из уравнения (7.8) получаем:

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{7.13}$$

Если среда не имеет потерь, т.е. ε и μ - вещественные величины, а $\vec{k}$ - вещественный вектор, соотношения (7.12) и (7.13) описывают волну, распространяющуюся в направлении вектора $\vec{k}$, причём $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ остаются постоянными. Поверхность равных фаз этой волны описывается уравнением $\vec{k}\cdot\vec{r} =$const, которое является уравнением плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{k}$. Такая волна называется однородной плоской волной.

Для определения связи между векторами $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ воспользуемся уравнением (7.3):

$$\vec{H} = -\frac{1}{i\omega\mu_0\mu} \nabla \times (\vec{E}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})$$

Используя известное векторное соотношение $\nabla \times (\vec{A}\varphi) = \varphi\nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla\varphi$, где $\vec{A}$ – произвольный вектор, а φ - скалярная функция, получим:

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0\mu} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \vec{k}_0 \times \vec{E}, \tag{7.14}$$

где $\vec{k}_0$ - единичный вектор в направлении $\vec{k}$, $\eta = 120\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ - волновое сопротивление среды.

Отсюда следует, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны. Поскольку в рассматриваемом случае $\nabla \cdot (\vec{E}_m e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = 0$, то $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$ и, следовательно, $\vec{E}$ перпендикулярно $\vec{k}$.

Очевидно, что $\vec{H}$ также перпендикулярно $\vec{k}$. Таким образом, плоскость, в которой лежат векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, перпендикулярна направлению распространения волны.

Мгновенные значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ можно записать в виде:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad \vec{H}(t) = \vec{H}_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

т.е. полная фаза колебания равна $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$, а фазовая скорость v_ϕ определяется дифференцированием по времени при $\phi = \mathrm{const}$, т.е.

$$\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{k} \cdot \vec{v}_\phi = \omega \tag{7.15}$$

Если фазовая скорость отсчитывается в направлении распространения волны $\vec{k}_0$, то $v_\phi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (c - скорость света в вакууме). По существу, фазовая скорость -чисто геометрическое понятие, зависящее от того, в каком направлении она отсчитывается. Предположим, что направление отсчёта фазовой скорости составляет угол β с направлением $\vec{k}$, тогда $v_\phi = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \dfrac{1}{\cos\beta}$, т.е. фазовая скорость может быть больше скорости света в вакууме.

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси Z, т.е. $\vec{k} = \vec{z}_0 k$, тогда $\vec{E}$ и $\vec{H}$ могут иметь $x-$ и $y-$ компоненты. Представим $\vec{E}$ в виде:

$$\vec{E} = (\vec{x}_0 \dot{E}_{mx} + \vec{y}_0 \dot{E}_{my}) e^{-ikz} \tag{7.16}$$

Поскольку $\vec{E}$ - комплексный вектор, его компоненты $\dot{E}_{mx}$ и $\dot{E}_{my}$ являются комплексными величинами, т.е. $\dot{E}_{mx} = E_{mx} e^{i\varphi_x}$, $\dot{E}_{my} = E_{my} e^{i\varphi_y}$. Если

$\varphi_x = \varphi_y$, то ориентация вектора $\vec{E}$ не меняется во времени. Волна поляризована в плоскости, составляющей угол $\theta = \mathrm{arctg}(E_{my}/E_{mx})$ с плоскостью XOZ (рис.7.1). Это случай *линейной* поляризации.

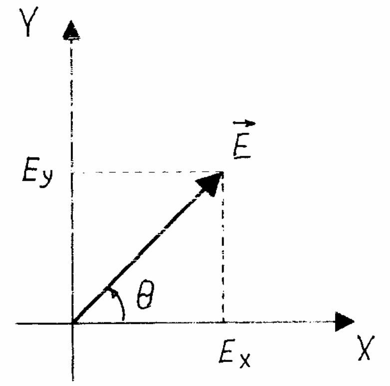

Рис.7.1

В общем случае, когда $\varphi_x \neq \varphi_y$, $E_{mx} \neq E_{my}$, волна имеет *эллиптическую* поляризацию. При этом вектор $\vec{E}$, вращаясь в плоскости $z = \mathrm{const}$, изменяет свою длину так, что его конец описывает эллипс (рис.7.2).

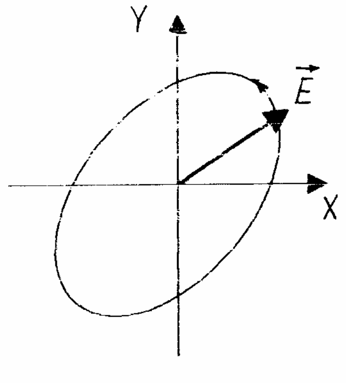

Рис.7.2

В частном случае, когда $E_{mx} = E_{my}$ и $\varphi_x - \varphi_y = \pm 90^0$, конец вектора $\vec{E}$ описывает при своём вращении окружность (рис.7.3). Такая поляризация называется *круговой.*

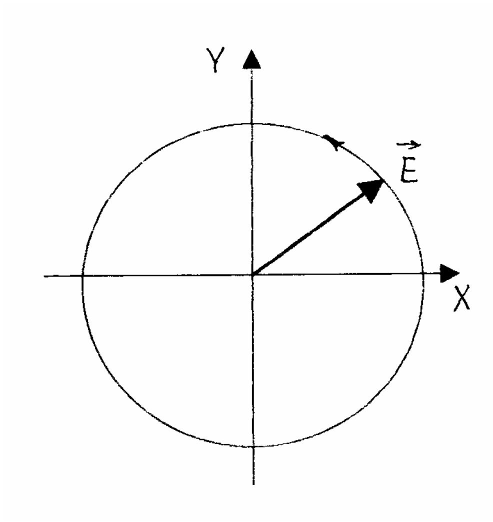

Рис.7.3

Следует заметить, что идеально плоских волн в природе не существует. Однако, введение плоских волн существенно упрощает решение многих электродинамических задач.

8. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

В предыдущих разделах рассматривалось распространение электромагнитных волн в однородных изотропных средах. Однако, как правило, распространение электромагнитных волн происходит в присутствии каких-либо объектов или границ раздела сред, обладающих различными свойствами. При сложной форме границы раздела определение результирующего поля сопряжено с большими математическими трудностями. Мы ограничимся рассмотрением простейшей задачи падения плоской электромагнитной волны на плоскую бесконечно протяжённую границу раздела двух однородных изотропных сред.

Пусть плоская волна падает на границу раздела двух полубесконечных сред , параметры которых ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 соответственно. Введём прямоугольную систему координат *x, y, z* так, чтобы плоскость XOY совпадала с поверхностью раздела, а плоскость падения – с плоскостью YOZ (рис.8.1).

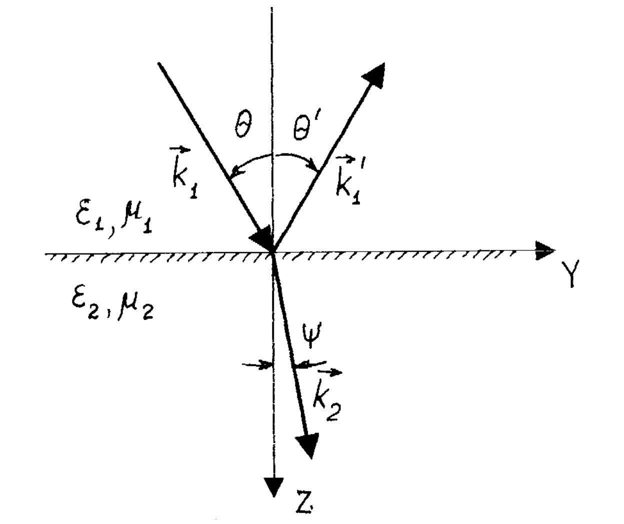

Рис.8.1

Здесь и в дальнейшем под плоскостью падения будем понимать плоскость, проходящую через нормаль к поверхности раздела сред параллельно направлению распространения волны. Рассмотрим отдельно случаи нормального и наклонного падения волны.

Нормальное падение

Нормальное падение соответствует случаю, когда угол θ, а, следовательно, и углы θ' и ψ равны нулю. В верхнем полупространстве ($z< 0$) введём в рассмотрение две волны: падающую и отражённую, а в нижнем ($z > 0$) - прошедшую волну. Не нарушая общности рассмотрения, будем считать векторы $\vec{E}$ всех волн ориентированными по оси x:

$$\vec{E}^i = \vec{x}_0 A e^{-ik_1 z}, \vec{H}^i = \vec{y}_0 \frac{A}{\eta_1} e^{-ik_1 z}$$ - поле падающей волны,

$$\vec{E}^r = \vec{x}_0 B e^{ik_1 z}, \vec{H}^r = -\vec{y}_0 \frac{B}{\eta_1} e^{ik_1 z}$$ - поле отражённой волны,

$$\vec{E}^t = \vec{x}_0 C e^{-ik_2 z}, \vec{H}^t = \vec{y}_0 \frac{C}{\eta_2} e^{-ik_2 z}$$ - поле прошедшей волны,

где k_1 и k_2 - волновые числа в верхней и нижней среде, соответственно, η_1 и η_2 - волновые сопротивления сред. Если поле падающей волны задано, неизвестные B и C находятся из условия равенства касательных составляющих напряжённостей электрического и магнитного полей на границе раздела (z= 0), т.е.

$$A + B = C, \qquad \frac{A}{\eta_1} - \frac{B}{\eta_1} = \frac{C}{\eta_2} \tag{8.1}$$

Введём коэффициенты отражения и прохождения посредством соотношений:

$$R = \frac{B}{A}, \quad T = \frac{C}{A} \tag{8.2}$$

С учётом (8.1) можно записать:

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \qquad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{8.3}$$

Следует отметить, что коэффициент отражения R и коэффициент прохождения T могут быть комплексными величинами в случае комплексных η_1 и η_2.

Итак, задача решена: теперь на основании (8.2) и (8.3) для всякого заданного A можно выразить полное электромагнитное поле в обеих средах. Проанализируем полученный результат. Если $\eta_1 = \eta_2$, R =0, и волна полностью проходит во вторую среду. Это случай *согласования* сред. *Полное отражение* ($|R|$=1) имеет место, когда либо $\eta_1 / \eta_2 = 0$, либо $\eta_2 / \eta_1 = 0$.

Напряжённости электрического и магнитного полей в среде 1 равны сумме напряжённостей полей падающей и отражённой волн:

$$\vec{E}_1 = \vec{x}_0 A e^{-ik_1 z}(1+\mathrm{R}e^{2ik_1 z}), \vec{H}_1 = \vec{y}_0 \frac{A}{\eta_1} e^{-ikz_1}(1-\mathrm{R}e^{2ik_1 z}) \qquad (8.4)$$

Из (8.4) видно, что период пространственного распределения полей (расстояние между двумя соседними максимумами либо минимумами) равен $\Delta z = \frac{\lambda_1}{2}$ (λ_1- длина волны в среде 1). Напряжённости поля принимают максимальные значения, которые в 1+$|R|$ раз превышают напряжённости поля падающей волны, минимальные значения в 1- $|R|$ раз ниже, чем в падающей волне.

Наклонное падение

Пусть теперь угол $\theta \neq 0$. Напряжённости электрического поля падающей, отражённой и прошедшей волн могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}^i &= \vec{A} e^{-ik_1(y\sin\theta + z\cos\theta)}, \\ \vec{E}^r &= \vec{B} e^{-ik_1(y\sin\theta' - z\cos\theta')}, \\ \vec{E}^t &= \vec{C} e^{-ik_2(y\sin\psi + z\cos\psi)} \end{aligned} \qquad (8.5)$$

Здесь учтено, что волновые векторы отражённой и прошедшей волн лежат в плоскости *YOZ*, поскольку волновой вектор падающей волны лежит в этой плоскости; в противном случае поля отражённой и прошедшей волн зависели бы от координаты *x*, а поле падающей волны от *x* не зависит, что привело бы к нарушению условий на границе раздела.

Из (8.5) следует, что граничные условия при *z=0* выполняются при любых значениях *y*, если

$$k_1 \sin\theta = k_1 \sin\theta' = k_2 \sin\psi \qquad (8.6)$$

Отсюда видно, что $\theta = \theta'$, т.е. угол падения равен углу отражения. Это *первый закон Снеллиуса*. Кроме того,

$$\frac{\sin\psi}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad (8.7)$$

где n_1 и n_2 - показатели преломления первой и второй сред, соответственно. Соотношение (8.7) выражает *второй закон Снеллиуса*. Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из этого закона:

1. Пусть первая среда является оптически более плотной, т.е. $n_1 \rangle n_2$. В этом случае угол преломления ψ больше угла падения θ. Очевидно, что при θ, превышающих некоторое критическое значение $\theta_{кр}$, преломлённая волна будет отсутствовать (т.к. sin ψ не может быть больше единицы). Это явление называется *полным внутренним отражением*.
2. Если среды таковы, что $n_2 \rangle\rangle n_1$, то $\sin\psi = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta \langle\langle 1$. Это значит, что при любом угле падения преломлённая волна распространяется по направлению, близкому к нормали.
3. Пусть волна из среды без потерь падает на границу раздела с поглощающей средой (k_1 - величина вещественная, а k_2 - комплексная). В этом случае $\dfrac{k_1}{k_2}$ - комплексное число, а поскольку $k_2 \sin\psi = k_1 \sin\theta$, то $k_2 \sin\psi = \alpha_y$ - величина вещественная, но $k_2 \cos\psi$ должно быть комплексным числом. Действительно, обозначив $k_2 = k_2' - ik_2''$ (k_2', k_2'' – вещественны), находим $k_2 \cos\psi = k_2\sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{[(k_2')^2 - (k_2'')^2 - 2ik_2'k_2'' - k_1^2\sin^2\theta} = \alpha_z - i\beta$, т.е. комплексное число. Теперь прошедшую волну (8.5) можно записать в форме:

$$\vec{E}^t = \vec{C}e^{-i(\alpha_y y + \alpha_z z)}e^{-\beta z},\ \beta \rangle 0 \qquad (8.8)$$

Из соотношения (8.8) следует, что уравнение поверхности равных фаз волны в нижней поглощающей среде имеет вид:

$$\alpha_y y + \alpha_z z = \text{const},$$

а уравнение поверхности равных амплитуд: $z = \text{const}$.

Оба уравнения являются уравнениями несовпадающих плоскостей (рис.8.2). Рассматривая поверхность равных фаз как фронт волны, приходим к выводу, что волна является *неоднородной*, т.е. её амплитуда не остаётся постоянной в плоскости фронта, а экспоненциально уменьшается по мере углубления по нормали к границе раздела сред.

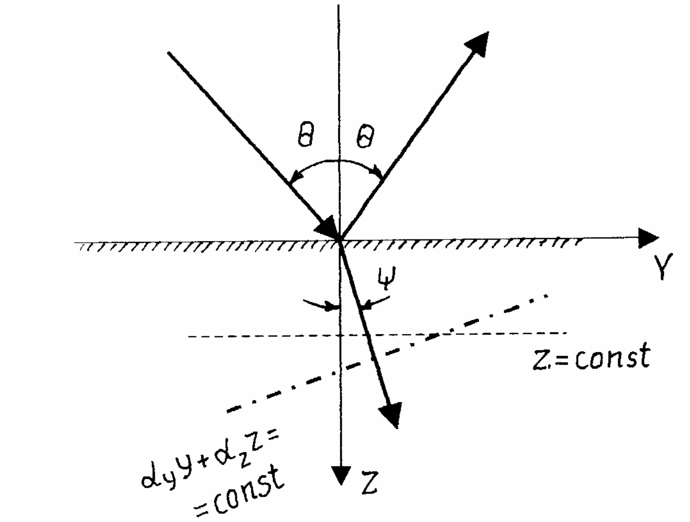

Рис.8.2

Получим теперь соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты отражения и прохождения волны при наклонном падении. Очевидно, что эти коэффициенты должны зависеть от параметров сред $\varepsilon_1, \mu_1, \varepsilon_2, \mu_2$, от поляризации и угла падения волны на границу раздела. Поскольку произвольно поляризованная электромагнитная волна может быть представлена в виде двух ортогонально поляризованных волн, распространяющихся в одном направлении, рассмотрим отдельно случаи параллельной и перпендикулярной поляризации. Под параллельно поляризованной волной будем понимать волну, вектор $\vec{E}$ которой параллелен плоскости падения. У перпендикулярно поляризованной волны вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости падения.

Параллельная поляризация (рис.8.3).

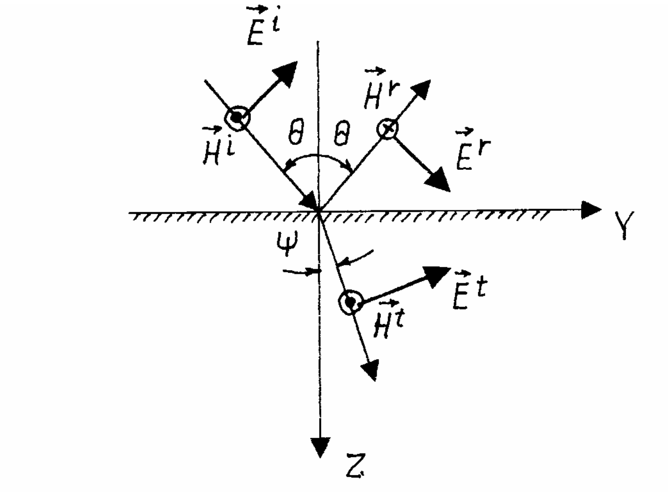

Рис.8.3

Для определения коэффициентов A,B,C в (8.5) используем условия равенства касательных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе раздела ($z=0$):

$$A\cos\theta + B\cos\theta = C\cos\psi\,,$$

$$\frac{A}{\eta_1} - \frac{B}{\eta_1} = \frac{C}{\eta_2}\,. \tag{8.9}$$

Здесь учтено, что векторы напряжённости электрического поля имеют касательные составляющие, параллельные оси *Y*, а векторы напряжённости магнитного поля параллельны оси *X*.

Введя коэффициенты отражения и прохождения посредством (8.3), на основании (8.9) получим:

$$R_{//} = \frac{\eta_2\cos\psi - \eta_1\cos\theta}{\eta_2\cos\psi + \eta_1\cos\theta}, \quad T_{//} = \frac{2\eta_2\cos\theta}{\eta_2\cos\psi + \eta_1\cos\theta} \tag{8.10}$$

Пусть магнитные проницаемости обеих сред одинаковы, т.е. $\mu_1 = \mu_2$, тогда используя соотношение, вытекающее из второго закона Снеллиуса (8.7), $\cos\psi = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta}$, получаем:

$$R_{//} = -\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta}} \qquad (8.11)$$

Следует отметить, что при угле падения волны θ_B, удовлетворяющем соотношению $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_B}$, или $\cos\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}}$, коэффициент отражения $R_{//}$ равен нулю. В этом случае отражение отсутствует, и волна полностью проходит во вторую среду. Угол θ_B обычно называют углом Брюстера.

Перпендикулярная поляризация (рис.8.4).

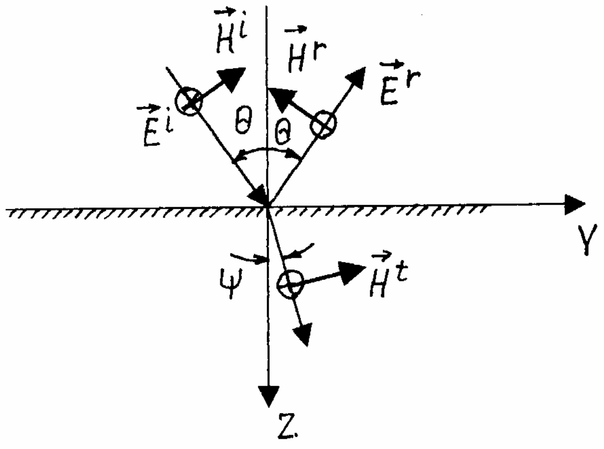

Рис.8.4

Как следует из рисунка, граничные условия при *z=0* имеют вид:

$$A + B = C \quad \text{и} \quad \frac{A}{\eta_1}\cos\theta - \frac{B}{\eta_1}\cos\theta = \frac{C}{\eta_2}\cos\psi .$$

Поэтому коэффициенты отражения и прохождения принимают иной по сравнению с (8.10) вид:

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos\theta - \eta_1 \cos\psi}{\eta_2 \cos\theta + \eta_1 \cos\psi}, \; T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta}{\eta_2 \cos\theta + \eta_1 \cos\psi} \qquad (8.12)$$

Если среды немагнитные или $\mu_1 = \mu_2$, то из (8.12) следует:

$$R_{\perp} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta}} \qquad (8.13)$$

Из соотношения (8.13) видно, что для немагнитных сред при $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$ не существует угла падения θ, при котором коэффициент отражения $R_{\perp}$ равен нулю.

В заключение заметим, что соотношения (8.10) - (8.13) часто называют коэффициентами Френеля.

ПРИЛОЖЕНИЕ
О КОМПЛЕКСНЫХ ВЕКТОРАХ

Во многих приложениях электродинамики чаще всего рассматривают электромагнитные процессы, изменяющиеся во времени по гармоническому закону, что соответствует одночастотному режиму. В этом случае источники порождают токи, заряды и поля, периоды колебаний которых совпадают. Для описания таких процессов обычно вводят комплексные векторы, что существенно упрощает запись уравнений и анализ их решений.

Комплексные векторы – это векторы, компоненты которых могут быть комплексными величинами. Они были введены Гиббсом одновременно с алгеброй вещественных векторов в начале 1880-х годов. Гиббс назвал эти векторы «бивекторами». Комплексные векторы были удобны в оптике при анализе распространения волн в кристаллах.

Вектор гармонического поля $\vec{A}(t)$ есть некоторая функция времени, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{A}(t)+\omega^2\vec{A}(t)=0 \tag{П.1}$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено двумя не зависящими от времени векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$:

$$\vec{A}(t)=\vec{A}_1\cos\omega t+\vec{A}_2\sin\omega t \tag{П.2}$$

Введём комплексный вектор $\vec{a}$, представимый в виде комбинации двух вещественных векторов $\vec{a}_r$ и $\vec{a}_i$:

$$\vec{a}=\vec{a}_r+i\vec{a}_i \tag{П.3}$$

Очевидно, что между векторами $\vec{a}$ и $\vec{A}(t)$ может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Действительно,

$$\vec{A}(t) = \mathrm{Re}\{\vec{a}e^{i\omega t}\} = \vec{a}_r \cos\omega t - \vec{a}_i \sin\omega t\,, \tag{П.4}$$

и

$$\vec{a} = \vec{A}(0) - i\vec{A}(\pi/2\omega) = \vec{A}_1 - i\vec{A}_2\,, \tag{П.5}$$

т. е. $\vec{a}_r = \vec{A}_1$ и $\vec{a}_i = -\vec{A}_2$. Если подставить (П.4) в (П.5), то получим $\vec{a} = \vec{a}_r + i\vec{a}_i$, т.е. (П.3).

Введение комплексных векторов позволяет избежать операций с тригонометрическими функциями и упростить запись уравнений для векторов электромагнитного поля.

Вектор $\vec{A}(t) = \vec{A}_1 \cos\omega t + \vec{A}_2 \sin\omega t$ описывает эллипс в пространстве; причём в зависимости от $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ эллипс может вырождаться либо в линию, либо в окружность. Это видно из следующего:

1. Если $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = 0$, то векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ либо параллельны, либо один из них равен нулю. Следовательно, конец вектора $\vec{A}(t)$ движется вдоль линии (рис.П.1,a), что соответствует *линейной поляризации*, когда речь идёт о векторах электромагнитного поля.
2. Пусть $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 \neq 0$. В этом случае оба вектора лежат в плоскости, в которой вектор $\vec{A}(t)$ вращается с угловой скоростью ω. Действительно, введя вспомогательные векторы $\vec{b} = \vec{A}_1 \times (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)$ и $\vec{c} = \vec{A}_2 \times (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)$, можно получить соотношение:

$$(\vec{b}\cdot\vec{A}(t))^2 + (\vec{c}\cdot\vec{A}(t))^2 = (\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2)^4 - 2A_1^2A_2^2(\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2)^2 + A_1^4A_2^4 = \left|\vec{A}_1\times\vec{A}_2\right|^4$$

которое является уравнением второго порядка относительно $\vec{A}(t)$. Очевидно, что решение этого уравнения конечно при всех *t*, и траектория, описываемая вектором $\vec{A}(t)$ при вращении, есть эллипс (рис.П.1,b). В этом случае говорят об *эллиптической поляризации.*

3.Если скалярное произведение

$\vec{A}(t)\cdot\vec{A}(t) = A_1{}^2\cos^2\omega t + A_2{}^2\sin\omega t + \vec{A}_1\cdot\vec{A}_2\cos 2\omega t$ постоянно при всех *t*,

то, полагая *t = 0* и $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$, получаем $A_1{}^2 = A_2{}^2$ и $\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2 = 0$. Это

соответствует *круговой поляризации* (рис.П.1,с).

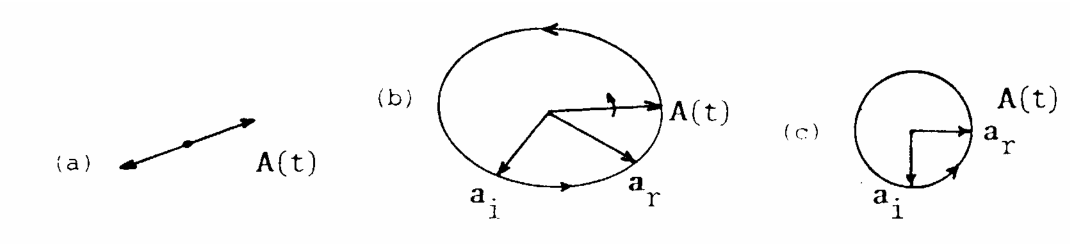

Рис.П.1

Отметим, что большинство правил операций над вещественными векторами справедливы и для алгебры комплексных векторов.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Никольский В.В. Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. Пособие. М.: Наука, 1989. 544 с.

2.*Вольман В.И.. Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика: Учебник. М.: Связь, 1971. 487 с.

3.*Тамм И.Е.* Основы теории электричества: Учеб. Пособие. М.: Наука, 1966. 624 с.

4.*Lindell I.V.* Methods for Electromagnetic Field Analysis. Clarendon Press, Oxford, 1992. 290 p.

Оглавление