Министерство образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра гидромашиностроения

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
ГИДРОМЕХАНИКА

Векторное исчисление. Теория поля. Кинематика

Методические указания

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2012

УДК 532:533 (075.8)
ББК 22.253я73
Ж 352

Механика жидкости и газа. Гидромеханика. Векторное исчисление. Теория поля. Кинематика: Метод. указания / Сост.: А.А. Жарковский, А.В. Грачев. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2012. 49 с.

Методические указания соответствуют содержанию общепрофессиональной дисциплины Ф.02.05 «Механика жидкости и газа» (федеральный компонент) государственного образовательного стандарта по направлению 150400 «Технологические машины и оборудование».

Рассмотрены вопросы и примеры практического применения векторного исчисления, теории поля и кинематики. Даны задания для самостоятельного выполнения.

Предназначены для студентов, изучающих учебную дисциплину «Механика жидкости и газа», специальности 150802 «Гидромашины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика» и студентов других специальностей, изучающих теорию жидкости и газа и лопастные турбомашины.

Табл. 3. Ил. 21. Библиогр.: 4 назв.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

1. Основы векторного исчисления

В гидромеханике рассматриваются физические величины двух основных типов: скалярные и векторные.

Скаляром называется величина, которая характеризуется одним числом. Например: масса, температура, энергия, давление.

Вектором называется величина, которая характеризуется числом и направлением в пространстве (скорость, ускорение, сила). Численное значение вектора называется величиной вектора или его модулем.

Единичный вектор, величина которого равно единице, называется ортом.

Любой вектор можно записать в виде:

$$\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a,$$

где $\vec{e}_a$ - орт вектора $\vec{a}$; $a = \left|\vec{a}\right|$ - модуль вектора $\vec{a}$.

Два вектора равны, если равны их величины (модули) и они имеют одинаковое направление.

Скалярные величины складываются арифметически, а векторные величины складываются геометрически (рис. 1.1):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Рис. 1.1

Из рис. 1.1 видно, что для построения результирующего вектора $\vec{c}$ необходимо сначала построить вектор $\vec{a}$, а из его конца вектор $\vec{b}$, тогда начало вектора $\vec{c}$ совпадет с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора $\vec{b}$. Можно наоборот сначала отложить второй вектор, а потом первый – результат будет тот же самый:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Разность векторов $\vec{c}$ и $\vec{b}$ даст вектор $\vec{a}$:

$$\vec{c}-\vec{b}=\vec{a}.$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется скалярная величина λ, равная:

$$\lambda=(\vec{a}\cdot\vec{b})=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.1.2).

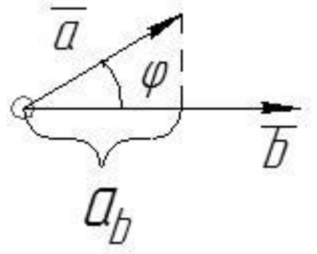


Рис. 1.2

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\cos\varphi=\cos 90^{\circ}=0$ и скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ – условие нормальности двух векторов.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется результирующий вектор $\vec{c}$, который нормален плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и, модуль которого численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi.$$

При этом направление вектора $\vec{c}$ выбирается так, чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составляли правую систему координат (рис. 1.3).

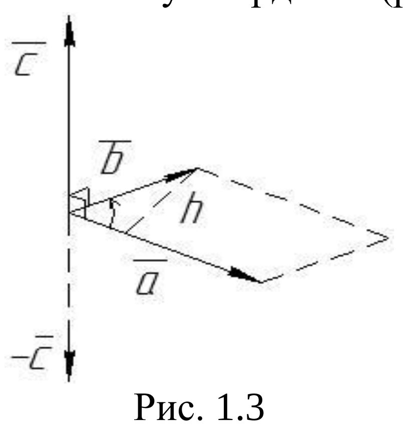


Рис. 1.3

Угол отсчитывается от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ против часовой стрелки:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b};$$

$$\left|\vec{b} \times \vec{a}\right| = b \cdot a \cdot \sin\varphi = b \cdot a \cdot \sin(360^\circ - \varphi) = b \cdot a \cdot \sin(-\varphi) = -b \cdot a \cdot \sin\varphi;$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}.$$

Если два вектора параллельны, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0.$$

Проекция вектора $\vec{a}$ на произвольное направление (рис. 1.4):

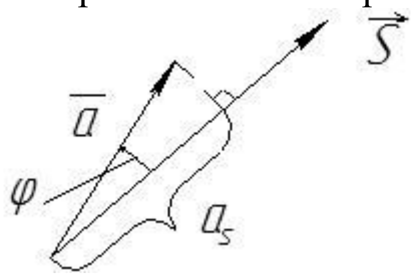


Рис. 1.4

$$a_s = a \cdot \cos(\vec{a}, \vec{s}) = a \cdot \cos\varphi = a_s.$$

Рассмотрим правую ортогональную систему координат *x*, *y*, *z*, в которой поворот оси *x* к оси *y* происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца оси *z* (рис. 1.5).

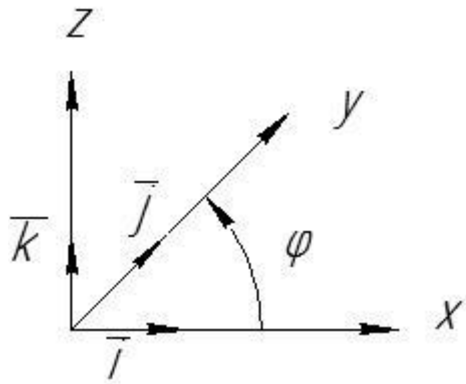


Рис. 1.5

Обозначим орты этой системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Произвольный вектор $\vec{a}$ в этой системе координат можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат.

Проекции ортов:

$$(\vec{i})_{\vec{i}} = 1,\ (\vec{j})_{\vec{i}} = 0,\ (\vec{k})_{\vec{i}} = 0;$$

$$(\vec{i})_{\vec{j}} = 0,\ (\vec{j})_{\vec{j}} = 1,\ (\vec{k})_{\vec{j}} = 0;$$

$$(\vec{i})_{\vec{k}} = 0,\ (\vec{j})_{\vec{k}} = 0,\ (\vec{k})_{\vec{k}} = 1.$$

Запишем скалярные:

$$(\vec{i} \cdot \vec{i}) = 1,\ (\vec{i} \cdot \vec{j}) = 0,\ (\vec{i} \cdot \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{j} \cdot \vec{i}) = 0,\ (\vec{j} \cdot \vec{j}) = 1,\ (\vec{j} \cdot \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{i}) = 0,\ (\vec{k} \cdot \vec{j}) = 0,\ (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1;$$

и векторные произведения ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$(\vec{i} \times \vec{i}) = 0,\ (\vec{i} \times \vec{j}) = +\vec{k},\ (\vec{i} \times \vec{k}) = -\vec{j};$$

$$(\vec{j} \times \vec{i}) = -\vec{k},\ (\vec{j} \times \vec{j}) = 0,\ (\vec{j} \times \vec{k}) = +\vec{i};$$

$$(\vec{k} \times \vec{i}) = +\vec{j},\ (\vec{k} \times \vec{j}) = -\vec{i},\ (\vec{k} \times \vec{k}) = 0.$$

С учетом вышесказанного докажем некоторые соотношения:

1) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;

2) $(\vec{a} \times \vec{b})_x = a_y b_z - b_y a_z$; $(\vec{a} \times \vec{b})_y = a_z b_x - a_x b_z$; $(\vec{a} \times \vec{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$;

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

1) Рассмотрим модуль вектора $\vec{a}$ (рис. 1.6):

$$\begin{cases} a_x = a\cos\varphi_1; \\ a_y = a\cos\varphi_2; \\ a_z = a\cos\varphi_3, \end{cases}$$

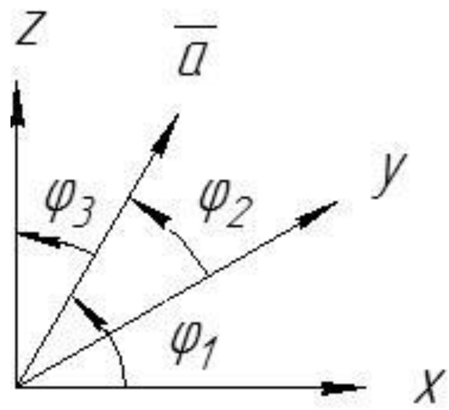


Рис. 1.6

следовательно, величина модуля равна длине вектора $\vec{a}$:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a^2\cos^2\varphi_1 + a^2\cos^2\varphi_2 + a^2\cos^2\varphi_3} = a\cdot 1 = a,$$

т.к. $\sqrt{\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3} = 1.$

Запишем скалярное произведение $(\vec{a}\cdot\vec{b})$:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$

что и требовалось доказать.

2) Запишем векторное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})$:

$$(\vec{a}\times\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j}) +$$

$$+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k}) + a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k}) + a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i}) + +a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j}) =$$

$$= a_xb_y(\vec{k}) + a_xb_z(-\vec{j}) + a_yb_x(-k) + a_yb_z(\vec{i}) + +a_zb_x(\vec{j}) + a_zb_y(-\vec{i}) =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k};$$

$$\begin{cases} (\vec{a}\times\vec{b})_x = a_yb_z - a_zb_y; \\ (\vec{a}\times\vec{b})_y = a_zb_x - a_xb_z; \\ (\vec{a}\times\vec{b})_z = a_xb_y - a_yb_x, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

3) Запишем скалярно - векторное произведение $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_x(\vec{b}\times\vec{c})_x + a_y(\vec{b}\times\vec{c})_y + a_z(\vec{b}\times\vec{c})_z =$$
$$= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x) =$$
$$= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x =$$
$$= -b_x(a_y c_z - a_z c_y) - b_y(a_z c_x - a_x c_z) - b_z(a_x c_y - a_y c_x) =$$
$$= -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично (доказать самостоятельно):

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}).$$

4) Запишем тройное векторное произведение:

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ или $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

Обозначим: $\vec{m} = (\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{m}$.

Спроектируем $\vec{d}$ на ось x:

$$d_x = a_y m_z - a_z m_y;$$
$$m_z = b_x c_y - b_y c_x, (\vec{m} = \vec{b}\times\vec{c});$$
$$m_y = b_z c_x - b_x c_z;$$
$$d_x = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z) =$$
$$= a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + a_z b_x c_z =$$
$$= b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Таким образом: $d_x = b_x(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_x(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Аналогично (сделать самостоятельно) можно получить выражения для d_y и d_z.

Тогда:

$$\begin{cases} d_x = b_x(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_x(\vec{a}\cdot\vec{b}); \\ d_y = b_y(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_y(\vec{a}\cdot\vec{b}); \\ d_z = b_z(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_z(\vec{a}\cdot\vec{b}). \end{cases}$$

Откуда: $\vec{d} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Следовательно: $\vec{d} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, что и требовалось доказать.

2. Основы теории поля

Физическим полем называется часть пространства, в каждой точке которого в каждый момент времени задана определенная физическая скалярная или векторная величина.

Например, распределение температуры, давления, энергии в пространстве:

1) Скалярное поле температур $t = f(x, y, z, t)$.

2) Векторное поле скоростей $\vec{V} = f(x, y, z, t)$.

Неоднородность скалярного физического поля $\varphi(x, y, z, t)$ в данный момент времени характеризуется величиной градиента $\mathrm{grad}\,\varphi$.

Если задано скалярное поле какой-либо физической величины, то можно в пространстве провести поверхности $\varphi = \mathrm{const}$, т.е. поверхности постоянного уровня (рис. 2.1).

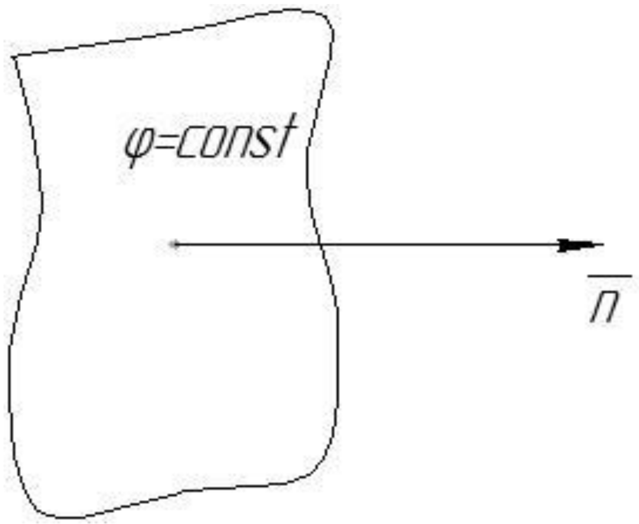


Рис. 2.1

Проведем нормали к поверхности $\varphi = \mathrm{const}$:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ - орт нормали; $\mathrm{grad}\varphi$ - вектор, направленный по нормали к поверхностям уровня $\varphi = \mathrm{const}$.

Вектор $\mathrm{grad}\varphi$ можно записать в декартовой системе координат:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орты.

Обозначим $\vec{a} = \text{grad}\,\varphi$, тогда:

$$\begin{cases} a_x = \text{grad}_x \varphi(x,y,z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}; \\ a_y = \text{grad}_y \varphi(x,y,z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}; \\ a_z = \text{grad}_z \varphi(x,y,z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Для произвольного направления s:

$$a_s = (\text{grad}\,\varphi)_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s};$$

$$\text{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\vec{s}_0.$$

Оценка неоднородности векторного поля осуществляется векторными операциями:

$$\text{div}\,\vec{F}(x,y,z) \text{ и } \text{rot}\,\vec{F}.$$

Дивергенция векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ является в каждой точке пространства скалярной величиной, равной, в декартовой системе координат:

$$\text{div}\,\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Ротор вектора $\vec{F}(x,y,z)$ определяется в декартовой системе координат x, y, z по формуле:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ротор от векторной величины является также вектором в каждой точке пространства, т.е. имеет величину и направление.

Для упрощения вычисления $\text{grad}\,\varphi$, $\text{div}\,\vec{F}$ и $\text{rot}\,\vec{F}$ в теории поля вводится символический вектор ∇ (набла), который сам по себе не имеет физического смысла и представляет собой операцию:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k};$$

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y},\ \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Составим скалярное произведение:

$$(\nabla\cdot\vec{F}) = \nabla_x F_x + \nabla_y F_y + \nabla_z F_z = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z};$$

$$(\nabla\cdot\vec{F}) = \operatorname{div}\vec{F}.$$

Составим векторное произведение:

$$\vec{b} = \nabla\times\vec{a};$$

$$\begin{cases} b_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} = \operatorname{rot}_x\vec{a}; \\ b_y = \nabla_z a_x - \nabla_x a_z = \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} = \operatorname{rot}_y\vec{a}; \\ b_z = \nabla_x a_y - \nabla_y a_z = \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} = \operatorname{rot}_z\vec{a}, \end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Докажем, что:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0.$$

С учетом того, что смешанное скалярно-векторное произведение:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$$

получим:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = -\vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla});$$

Следовательно: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$.

Теорема Гаусса

Рассмотрим замкнутую поверхность σ, ограничивающую объем τ (рис 2.2). Обозначим орт внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности σ. Пусть задано некоторое скалярное или векторное поле *X (x, y, z, t)*. Тогда формула Гаусса будет иметь следующий вид:

$$\int_{\tau}(\nabla X)d\tau = \oint_{\sigma} X\,\vec{n}\,d\sigma\,. \qquad (2.1)$$

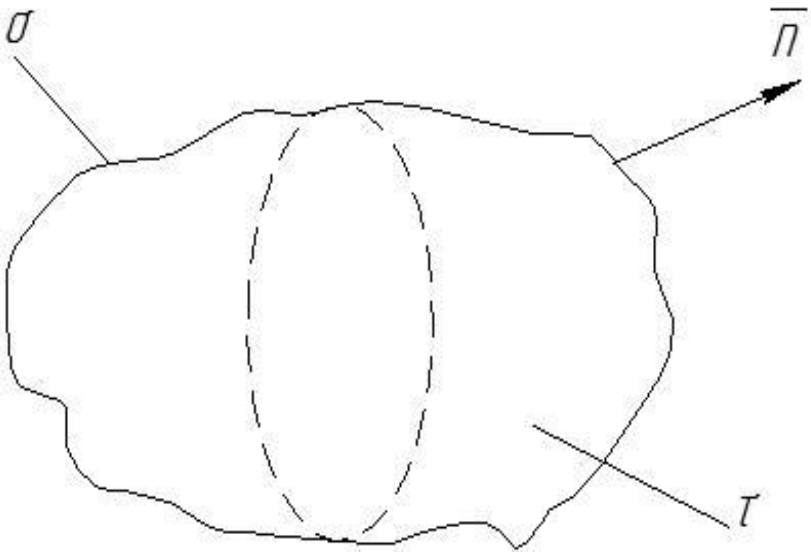


Рис. 2.2

Если $X = \mathrm{const}$, то $\nabla X = 0$,

$$\int_{\sigma}\vec{n}\,d\sigma = 0\,.$$

Формула (2.1) позволяет перейти от объемного интеграла к поверхностному и определить $\mathrm{grad}\,\varphi$, $\mathrm{div}\,\vec{F}$, $\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Если $X = \varphi$ (φ - скалярная величина):

$$\int_{\tau}(\nabla\varphi)\,d\tau = \int_{\tau}\mathrm{grad}\,\varphi\,d\tau = \int_{\sigma}\varphi\,\vec{n}\,d\sigma\,,$$

откуда следует:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x}d\tau = \oint_{\sigma}\varphi\,n_x d\sigma = \oint_{\sigma}\varphi\cos(n,x)\,d\sigma; \\ \displaystyle\int_{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial y}d\tau = \oint_{\sigma}\varphi\,n_y d\sigma = \oint_{\sigma}\varphi\cos(n,y)\,d\sigma; \\ \displaystyle\int_{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial z}d\tau = \oint_{\sigma}\varphi\,n_z d\sigma = \oint_{\sigma}\varphi\cos(n,z)\,d\sigma. \end{cases}$$

Если $X = \vec{a}$ - векторная величина:

$$\int_\tau (\nabla\cdot\vec{a})\,d\tau=\int_\tau \operatorname{div}\vec{a}\,d\tau=\oint_\sigma(\vec{a}\cdot\vec{n})\,d\sigma=\oint_\sigma a_n d\sigma.$$

Если $\operatorname{div}\vec{a}=0$, то $\oint_\sigma a_n d\sigma=0$- перенос вектора $\vec{a}$ через поверхность σ равен нулю.

Если $X=\times\vec{a}$:

$$\int_\tau (\nabla\times\vec{a})\,d\tau=\int_\tau \operatorname{rot}\vec{a}\,d\tau=\oint_\sigma(\vec{n}\times\vec{a})\,d\sigma.$$

Пусть объем τ является бесконечно малым, в пределах которого рассматриваемая физическая величина может быть принята постоянной, например $\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{div}\vec{a},\ \operatorname{rot}\vec{a}$, тогда:

$$\int_\tau \operatorname{grad}\varphi\,d\tau=\operatorname{grad}\varphi\cdot\tau=\oint_\sigma\varphi\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Аналогично для операций дивергенции и ротора и в результате:

$$\operatorname{grad}\varphi=\lim_{\tau\to 0}\frac{\oint_\sigma \varphi\cdot\vec{n}\,d\sigma}{\tau};$$

$$\operatorname{div}\vec{a}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\oint_\sigma (\vec{a}\cdot\vec{n})d\sigma}{\tau};$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\lim_{\tau\to 0}\frac{\oint_\sigma (\vec{n}\times\vec{a})d\sigma}{\tau}.$$

Упражнения по разделу 2

1) Вычислить: $\operatorname{div}\vec{r}=?$

Радиус-вектор $\vec{r}$ произвольной точки поля, равен

$$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k};$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad \vec{r}=\vec{r_0}\cdot r$$

Тогда:

$$div\,\vec{r}=\frac{\partial(\vec{r})_x}{\partial x}+\frac{\partial(\vec{r})_y}{\partial y}+\frac{\partial(\vec{r})_z}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3.$$

2) Вычислить: $\operatorname{rot}\vec{r} = ?$

$$\begin{cases} (\operatorname{rot}\vec{r})_x = (\frac{\partial r_z}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial z}) = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0; \\ (\operatorname{rot}\vec{r})_y = 0; \\ (\operatorname{rot}\vec{r})_z = 0. \end{cases}$$

Следовательно: $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$.

3) $\operatorname{grad}(r)$ =?

$$\operatorname{grad}(r) = \vec{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial r}{\partial z} =$$

$$= \vec{i}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x + \vec{j}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2y + \vec{k}\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2z =$$

$$= \frac{x\cdot\vec{i}}{r} + \frac{y\cdot\vec{j}}{r} + \frac{z\cdot\vec{k}}{r} = \frac{1}{r}(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r_0},$$

где $\vec{r_0}$ - орт радиус-вектора $\vec{r}$.

4) $\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a}) = ?$

$$\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a}) = \frac{\partial\varphi a_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi a_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi a_z}{\partial z} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + a_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + a_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\,(\nabla\varphi) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}\varphi;$$

$$\operatorname{div}(\varphi\,\vec{r}) = \varphi\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi = 3\varphi + \vec{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r_0} = 3\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

5) $\operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a}) = ?$

Обозначим $\vec{b} = \operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a})$, тогда:

$$b_x = \frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial z} = \varphi\frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$$b_x = \varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + a_z(\text{grad }\varphi)_y - a_y(\text{grad }\varphi)_z;$$

$$b_x = \varphi(\text{rot }\vec{a})_x - (\vec{a}\times\text{grad }\varphi)_x;$$

$$\cdots$$

$$\vec{b} = \text{rot }(\varphi\,\vec{a}) = \varphi\text{ rot }\vec{a} - \vec{a}\times\text{grad }\varphi = \varphi\text{ rot }\vec{a} + \text{grad }\varphi\times\vec{a}.$$

6) $\text{grad}(\varphi\psi) = ?$

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \vec{i}\,\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z} =$$

$$= \vec{i}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \varphi\,\text{grad}\,\psi + \psi\,\text{grad}\,\varphi.$$

7) $\text{div}\,(\vec{a}\times\vec{b}) = ?$

$$\text{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = -\vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b}) = -\vec{a}\cdot\text{rot }\vec{b} =$$

$$= -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\nabla) = \vec{b}\cdot\text{rot }\vec{a}.$$

<u>Задача 1</u>

При какой функции $f(r)$ дивергенция $\text{div }[f(r)\,\vec{r}\,] = 0$.

Ранее было получено, что $\text{div}(\varphi\,\vec{r}) = 3\varphi + r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$, тогда:

$$\text{div }[f(r)\,\vec{r}\,] = 3f(r) + r\frac{\partial f(r)}{\partial r}.$$

Следовательно, $\text{div }[f(r)\,\vec{r}\,] = 3f(r) + r\dfrac{\partial f(r)}{\partial r} = 0,$ тогда:

$$\frac{\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}}{f(r)} = -\frac{3}{r};$$

$$\frac{\partial f(r)}{f} = -\frac{3dr}{r};\ \ln f(r) = -3\ln r + \ln c = \ln\frac{c}{r^3};\ \ f(r) = \frac{c}{r^3}.$$

<u>Задача 2</u>

Вычислить $\text{grad }(\vec{c}\cdot\vec{r}\,)$, где $\vec{c}$ - постоянный вектор:

$$\text{grad}\,(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \vec{i}\,\frac{\partial(c_x x)}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial(c_y y)}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial(c_z z)}{\partial z} =$$

$$= \vec{i}\,(x\cdot\frac{\partial c_x}{\partial x} + c_x\frac{\partial x}{\partial x}) + \vec{j}\,(y\cdot\frac{\partial c_y}{\partial y} + c_y\frac{\partial y}{\partial y}) + \vec{k}\,(z\cdot\frac{\partial c_z}{\partial z} + c_z\frac{\partial z}{\partial z}) =$$

$$= (\vec{i}\,x\cdot 0 + \vec{j}\,y\cdot 0 + \vec{k}\,z\cdot 0) + (\vec{i}\,c_x + \vec{j}\,c_y + \vec{k}\,c_z) = \vec{c}\,.$$

Задача 3

Вычислить $\text{rot}\,[f(r)\vec{r}]$. Функция $f(r)$ зависит только от радиуса $\vec{r}$.

Ранее было получено: $\text{rot}\,(\varphi\,\vec{a}) = \varphi\;\text{rot}\,\vec{a} + \text{grad}\,\varphi\times\vec{a}$, тогда:

$$\text{rot}[f(r)\,\vec{r}\,] = f(r)\text{rot}\,\vec{r} + \text{grad}\,f(r)\times\vec{r} = f(r)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial r}\vec{r}_0\times\vec{r} = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $\text{rot}[f(r)\vec{r}] = 0.$

Задача 4

Вычислить вихрь $\text{rot}\,[\vec{b}\,(\vec{r}\cdot\vec{a})]$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы.

Ранее было получено, что $\text{rot}(\varphi\,\vec{a}) = \varphi\;\text{rot}\,\vec{a} + \text{grad}\,\varphi\times\vec{a}$.

Так как, $(\vec{r}\cdot\vec{a})$ – скаляр, то:

$$\text{rot}\,[\,\vec{b}(\,\vec{r}\cdot\vec{a})] = \text{rot}\,[(\,\vec{r}\cdot\vec{a})\,\vec{b}\,] = (\,\vec{r}\cdot\vec{a})\,\text{rot}\,\vec{b} + \text{grad}\,(\,\vec{r}\cdot\vec{a})\times\vec{b}\,.$$

Выше показано, что grad $(\vec{c}\cdot\vec{r})=\vec{c}$ ($\vec{c}$ - постоянный вектор), тогда:

$$\text{grad}\,(\,\vec{r}\cdot\vec{a}) = \text{grad}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}\,) = \vec{a}\,.$$

Следовательно, т.к. вектор $\vec{b} = \text{const}$, то $\text{rot}\;\vec{b} = 0$ и окончательно:

$$\text{rot}\,[\vec{b}\cdot(\,\vec{r}\cdot\vec{a})] = \vec{a}\times\vec{b}\,.$$

Производная от вектора $\vec{a}$ по направлению *S*

Вычислим производную $\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial S}$:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial S} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\vec{a}}{\partial z}\frac{dz}{ds};$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \cos(x \hat{,} S) = (\vec{S_0})_x; \\ \dfrac{dy}{ds} = \cos(y \hat{,} S) = (\vec{S_0})_y; \\ \dfrac{dz}{ds} = \cos(z \hat{,} S) = (\vec{S_0})_z, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}(\vec{S_0})_x + \frac{\partial \vec{a}}{\partial y}(\vec{S_0})_y + \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}(\vec{S_0})_z = S_{0x}\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + S_{0y}\frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + S_{oz}\frac{\partial \vec{a}}{\partial z} =$$

$$= [(S_{0x} \cdot \nabla_x a) + (S_{0y} \cdot \nabla_y a) + (S_{0z} \cdot \nabla_z a)] = (\vec{S_0} \cdot \nabla)\,\vec{a};$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial S} = (\vec{S_0} \cdot \nabla)\,\vec{a};$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$ - лапласиан.

Вычислим $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = ?$

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{a}; \ \vec{b} = \operatorname{rot} \vec{\Omega};$$

$$b_x = \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial z}; \Omega_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}; \Omega_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};$$

$$b_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z \partial x} -$$

$$-\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial a_x}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right);$$

$$\begin{cases} b_x = \dfrac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta a_x; \\ b_y = \dfrac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta a_y; \\ b_z = \dfrac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta a_z, \end{cases}$$

$$\vec{b} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta\,\vec{a}.$$

Если $\vec{a} = \vec{V}$, то $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ и тогда:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{V}) = -\Delta\vec{V}.$$

Пусть:

$$\vec{a_k} = V_x \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial\vec{V}}{\partial z},$$

где $\vec{a_k}$ - конвективная часть полного ускорения.

Доказать, что:

$$\vec{a_k} = \mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\vec{V}\times\vec{V}.$$

Обозначим $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}} = \vec{\Omega}$;

$$(\vec{a_k})_x = V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z} = V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z} +$$

$$+\left(V_y\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}\right) - \left(V_y\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial V_x^{\;2}}{\partial x} + V_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + V_z\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial V_y^2}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial V_z^2}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + V_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + V_z\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) + V_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + V_z\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) = \left(\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2}\right)_x + (V_z\mathrm{rot}_y\vec{V} - V_y\mathrm{rot}_z\vec{V});$$

$$(\vec{a_k})_x = \left(\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2}\right)_x + (\mathrm{rot}\vec{V}\times\vec{V})_x;$$

$$\vec{a_k} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\vec{V}\times\vec{V}.$$

Доказать:

1) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) = 0.$

Запишем данное выражение в операторном виде:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) = \nabla\cdot[\nabla\times\vec{a}].$$

Вспомним, что: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$, тогда:

$$\nabla \cdot [\nabla \times \vec{a}] = -\vec{a} \cdot (\nabla \times \nabla) = 0.$$

2) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$.

Запишем данное выражение в символьном виде:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi).$$

Символьные операции набла ∇ – это операции дифференцирования, поэтому их можно записать рядом и применить к скалярной функции φ:

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi.$$

Результатом векторного произведения двух символьных векторов ∇ будет нуль, поэтому искомое выражение также будет равно нулю:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi = 0.$$

Такой же результат можно получить, непосредственно применяя операции rot и grad к скалярной функции φ:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\vec{j} +$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]\vec{k} = 0.$$

Таким образом, если $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$, то $\vec{a}$ имеет потенциал φ и может быть представлен как $\vec{a} = \mathrm{grad}\,\varphi$, т.е. поле вектора $\vec{a}$ является потенциальным.

3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = ?$

Запишем данное выражение в символьном виде и тогда получим:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = (\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

4) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{a})$.

Данное выражение не выражается через операции первого порядка.

5) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) = ?$

Запишем выражение в символьном виде и преобразуем тройное векторное произведение по формуле $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \vec{a}(\nabla\cdot\nabla) =$$
$$= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \nabla^2\vec{a} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}.$$

Если вектор $\vec{a}$ - вектор скорости, то тогда:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V}) - \Delta\vec{V} = -\Delta\vec{V}.$$

Таблица 2.1

Сводная таблица формул

$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{c}$	$\operatorname{div}\vec{r} = 3$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = -\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$	$\operatorname{rot}\vec{r} = 0$
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$	$\operatorname{grad}\lvert\vec{r}\rvert = \vec{r}_0$
$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$	$\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}\varphi$
$\begin{cases} a_x = \operatorname{grad}_x\varphi(x,y,z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ a_y = \operatorname{grad}_y\varphi(x,y,z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ a_z = \operatorname{grad}_z\varphi(x,y,z) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$ $a_s = \dfrac{\partial\varphi}{\partial s}$	$\operatorname{div}(\varphi\vec{r}) = 3\varphi + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi =$ $= 3\varphi + r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$
$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} = -\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$	$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\vec{a}$
$\operatorname{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \vec{c}$, где $\vec{c} = \mathrm{const}$	$\vec{a}_k = \operatorname{grad}\left(\dfrac{V^2}{2}\right) + \operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}$
$\operatorname{rot}[f(r)\vec{r}] = 0$	$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$
$\operatorname{rot}[\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})] = \vec{a}\times\vec{b}$	$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$
$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$	$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V}) = -\Delta\vec{V}$
$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}$	$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ - не выражается

3. Кинематика

Уравнение лини тока в дифференциальной форме:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}.$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Проекции ротора скорости $rot\vec{V}$:

$$\begin{cases} (rot\vec{V})_x = \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z}; \\ (rot\vec{V})_y = \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x}; \\ (rot\vec{V})_z = \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Циркуляция скорости:

$$\Gamma = \oint_l (\vec{V} \cdot dl) = \int_l V_x dx + V_y dy + V_z dz.$$

Функция тока:

$$\psi(x, y) = \int_{y_0}^{y} V_x dy - \int_{x_0}^{x} V_y dx + c.$$

Проекции скорости:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Уравнение линии тока в интегральной форме:

$$\psi = \text{const}.$$

Расход при плоском течении:

$$\Delta Q = (\psi_1 - \psi_2) \cdot 1.$$

Потенциал скорости:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Циркуляция скорости по отрезку произвольной формы, соединяющему точки 1 и 2:

$$\Gamma = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Задача 1

Заданы проекции скорости:

$$V_x = ax + by, V_y = cx + dy.$$

Определить, при каких условиях возможно движение жидкости и когда оно будет потенциальным. Найти уравнения линий тока.

Условие

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

есть условие возможности (существования) движения, откуда:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,\ \ a + d = 0,\ \ d = -a.$$

Условие потенциальности движения плоского течения:

$$(\operatorname{rot} \vec{V})_z = 0;$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0,\ \ b - c = 0,\ \ c = b.$$

Т.е. плоское потенциальное движение будет иметь место при условии:

$$V_x = ax + by, V_y = bx - ay.$$

Найдем уравнения линий тока:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y},\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx - ay}{ax - by} = \frac{b - a\dfrac{y}{x}}{a + b\dfrac{y}{x}}.$$

Обозначим:

$$z = \frac{y}{x},\ y = xz,\ \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Тогда уравнение линии тока преобразуется к виду:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{b - az}{a + bz};$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{b - az}{a + bz} - z = \frac{b - az - az - bz^2}{a + bz} = \frac{b - 2az - bz^2}{a + bz};$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz(a + bz)}{b - 2az - bz^2} = -\frac{1}{2}\frac{d(2az + bz^2 - b)}{(bz^2 + 2az - b)}.$$

Решение этого уравнения:

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(bz^2 + 2az - b) = +c;$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(bz^2 + 2az - b) = c;$$

$$x\sqrt{bz^2 + 2az - b} = c_1;$$

$$x\sqrt{b\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a\left(\frac{y}{x}\right) - b} = c_1;$$

$$\sqrt{by^2 + 2ayx - bx^2} = c_1;$$

$$b(y^2 - x^2) + 2axy = \text{const}.$$

Таким образом, уравнения линии тока – гиперболы.

Другой способ решения:

$$V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = ax + by,\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = -V_y = ay - bx.$$

Подбираем:

$$\psi(x, y) = axy + \frac{by^2}{2} + c(x),\ \frac{\partial\psi}{\partial x} = ay + \frac{dc(x)}{dx} = ay - bx;$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = ay - ay - bx;$$

$$c(x) = -b\frac{x^2}{2};$$

$$\psi(x, y) = axy + \frac{b}{2}(y^2 - x^2).$$

Уравнение линий тока $\psi = \text{const}$:

$$\frac{b}{2}(y^2 - x^2) + axy = \text{const};$$

$$b(y^2 - x^2) + 2axy = c.$$

<u>Задача 2</u>

Потенциал скорости задан в виде:

$$\varphi = ax^2 + by^2.$$

Определить, при каких условиях возможно движение жидкости и найти уравнения линии тока. Вычислить расход между точками

А(2,6) и В(1,2) и циркуляцию скорости по контуру, соединяющему эти точки.

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2ax,\ V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2by;$$

$$div\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(2ax) + \frac{\partial}{\partial y}(2by) = 2a + 2b = 0;$$

$$a + b = 0;$$

$$b = -a \text{ (условие неразрывности).}$$

Уравнение линии тока (рис. 3.1):

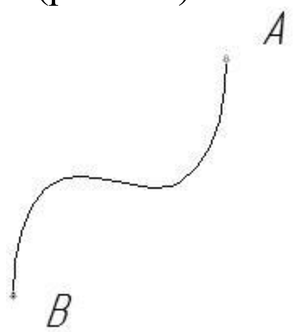


Рис. 3.1

запишется:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} = \frac{-2ay}{2ax} = -\frac{y}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x};\ \ln y = -\ln x + c;\ \ln(xy) = c;$$

$$x \cdot y = \text{const} \text{ — уравнение линий тока;}$$

$$Q_{AB} = \psi_A - \psi_B;$$

$$\psi = \int V_x dy - \int V_y dx + c = 2axy - 2byx = 2axy + 2axy = 4axy;$$

$$\psi_A = 4 \cdot a \cdot 2 \cdot 6 = 48a;\ \psi_B = 4 \cdot a \cdot 1 \cdot 2 = 8a;$$

$$\psi = \psi_A - \psi_B = 48a - 8a = 40a;$$

$$Г = \varphi_A - \varphi_B = (a \cdot 4 - a \cdot 36) - (a - 4 \cdot a) = 29a.$$

Задача 3

Неустановившееся движение задано проекциями скоростей:

$$V_x = x + t;\ V_y = -y + t;\ V_z = 0,$$

которые подчиняются уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Найти уравнение линии тока, проходящей через точку A(-1,-1) в момент времени t =0 ; уравнение траектории частицы, находящейся в момент времени t =0 в точке A(-1,-1).

В начальный момент времени:

$$t=0,\ V_x=x,\ V_y=-y;$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=V_y=-y;\ \psi=\int y dx+c(y)=xy+c(y); \\ +\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=V_x=+x. \end{cases}$$

Найдем $c(y)$ из второго уравнения $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=x$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=x=\frac{\partial}{\partial y}(xy+c(y))=x+\frac{dc(y)}{dy};$$

$$\frac{dc(y)}{dy}=0;\quad c(y)=c_0;$$

$$\psi=xy+c(y)=xy+c_0.$$

Уравнение линии тока в момент времени $t=0$:

$$\psi=xy+c_0=\text{const}$$

или

$$xy=C.$$

Для линии тока, проходящей через точку A(-1,-1):

$$(-1)(-1)=C=1.$$

Тогда окончательно уравнение линии тока, проходящей через точку А(-1,-1) в момент времени t =0, запишется:

$$xy=1$$

или

$$y=1/x.$$

Найдем траекторию частицы жидкости, проходящей через точку $A(-1,-1)$ в момент времени t = 0:

$$\begin{cases} V_x=\dfrac{dx}{dt}=x+t; \\ V_y=\dfrac{dy}{dt}=-y+t. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы для составляющей скорости V_x найдем:

$$\frac{dx}{dt}-x-t=0.$$

Уравнение относится к линейным дифференциальным уравнениям вида:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)=0,$$

которые имеют решение:

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}(c-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx).$$

Тогда решение интересующего нас уравнения запишется с учетом замены $y(x)\Rightarrow x(t),\ t\Rightarrow x,\ p(x)\Rightarrow -1,\ q(x)\Rightarrow -t$:

$$x(t)=e^{\int dt}(c-\int(-t)e^{-\int dt}dt)=e^{t}(c+\int te^{-t}dt).$$

Рассмотрим сначала интеграл:

$$\int e^{-t}dt=-\int e^{-t}d(-t)=-\int d(e^{-t})=-e^{-t}.$$

Затем возьмем интеграл $\int te^{-t}dt$ по частям:

$$u=t;\ dv=e^{-t}dt;\ du=dt;\ v=\int e^{-t}dt=-e^{-t};$$

$$\int te^{-t}dt=uv-\int vdu=t(-te^{-t})-\int(-e^{-t})dt=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t};$$

$$\int te^{-t}dt=-e^{-t}(t+1).$$

Тогда $x(t)$:

$$x(t)=e^{t}(c-e^{-t}(t+1))=ce^{t}-t-1.$$

Определим величину c из условия, что при $t=0$ $x(0)=-1$:

$$-1=c-1;\ c=0.$$

Тогда:

$$x(t)=-t-1.$$

Из уравнения для составляющей скорости V_y следует:

$$V_y=\frac{dy}{dt}=-y+t;$$

$$\frac{dy}{dt}+y-t=0.$$

Откуда найдем ($y(x)\Rightarrow y(t),\ t\Rightarrow x,\ p(x)\Rightarrow 1,\ q(x)\Rightarrow -t$):

$$y(t)=e^{-\int dt}(c_1-\int(-t)e^{\int dt}dt);$$

$$y(t)=e^{-t}(c_1+\int te^{t}dt)=e^{-t}(c_1+te^{t}-\int e^{t}dt)=e^{-t}(c_1+te^{t}-e^{t});$$

$$y(t)=e^{-t}(c_1+e^{t}(t-1))=c_1e^{-t}+(t-1)=c_1e^{-t}+t-1.$$

В момент времени $t=0$ по условию задачи: $y=-1=c_1-1,\ c_1=0.$

Тогда закон изменения $y(t)$: $y(t)=t-1$.

Уравнение траектории частицы, находившейся в момент времени $t=0$ в точке $A(-1,-1)$: $x+y=-2$ или $y=-x-2$.

Таблица 3.1

Линия тока и траектория в момент времени $t=0$

Линия тока		Траектория	
x	*y*	*x*	*y*
-0,1	-10	-4	2
-0,2	-5	-2	0
-0,5	-2	-1	-1
-1	-1	0	-2
-2	-0,5	1	-3
-5	-0,2	3	-5
-10	-0,1	5	-7

Рассмотрим другой способ нахождения уравнения линии тока:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{V_y}{V_x}.$$

В момент времени $t=0$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y+t}{x+t}=\frac{-y}{x};$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x};$$

$$\ln y=-\ln x+c;$$

$$\ln\frac{y}{x}=c;\ \frac{y}{x}=\text{const}.$$

Так как линия тока в момент времени $t=0$ проходит через точку A(-1,-1), то:

$$\frac{-1}{-1}=\text{const}=1.$$

Уравнение линии тока в момент времени $t = 0$:

$$\frac{y}{x}=1,\ y=\frac{1}{x}.$$

Вид траектории при $t = 0$ и в последующие моменты одинаков:

$$x+y=-2,$$

$$y=-2-x.$$

Найдем линии тока в момент времени $t=2$ сек. В этот момент времени частица находится в точке B с координатами, которые найдем через уравнение траектории:

$$\begin{cases} x(t)=t-1=2-1=1; \\ y(t)=-t-1=-2-1=-3. \end{cases}$$

Таким образом, координаты точки B при $t=2$ сек.

$$x_B=1; \quad y_B=-3.$$

Рассмотрим составляющие скоростей в момент времени $t=2$ сек:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=x+t=x+2;$$

$$V_y=\frac{dy}{dt}=-y+t=-y+2.$$

Выразим составляющие скорости через производные от функции тока:

$$V_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}; \; -V_y=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Тогда из первого уравнения найдем выражение для функции тока:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=x+2; \; d\psi=(x+2)dy=xdy+2dy; \; \psi=xy+2y+c(x).$$

Из второго уравнения определим $c(x)$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=y-2=\frac{\partial}{\partial x}(xy+2y+c(x))=y+\frac{dc(x)}{dx};$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=-2; \; c(x)=-2x+c;$$

$$\psi=xy+2y-2x+c=xy+2(y-x)+c.$$

Уравнение линии тока:

$$xy+2(y-x)+c=\mathrm{const}$$

или

$$xy+2(y-x)=c_1.$$

При x = 1, y = - 3:

$$1\,(-3)+2(-3-1)=c_1;$$

$$-3-8=c_1;$$

$$c_1=-11.$$

Тогда уравнение линии тока, проходящей через точку *B* в момент времени $t = 2$ сек:

$$xy + 2(y - x) = -11$$

или

$$y = \frac{2x - 11}{x + 2}.$$

Таблица 3.2

Линия тока и траектория в момент времени $t = 2$ сек

Линия тока		Траектория	
x	*y*	*x*	*y*
0	-5,5	-4	2
0,2	-4,8	-2	0
0,5	-4	-1	-1
1	-3	0	-2
2	-1,75	1	-3
5,5	0	3	-5
10	0,75	5	-7

Линия тока в момент времени $t = 0$ и $t = 2$ сек представлена на рис. 3.2.

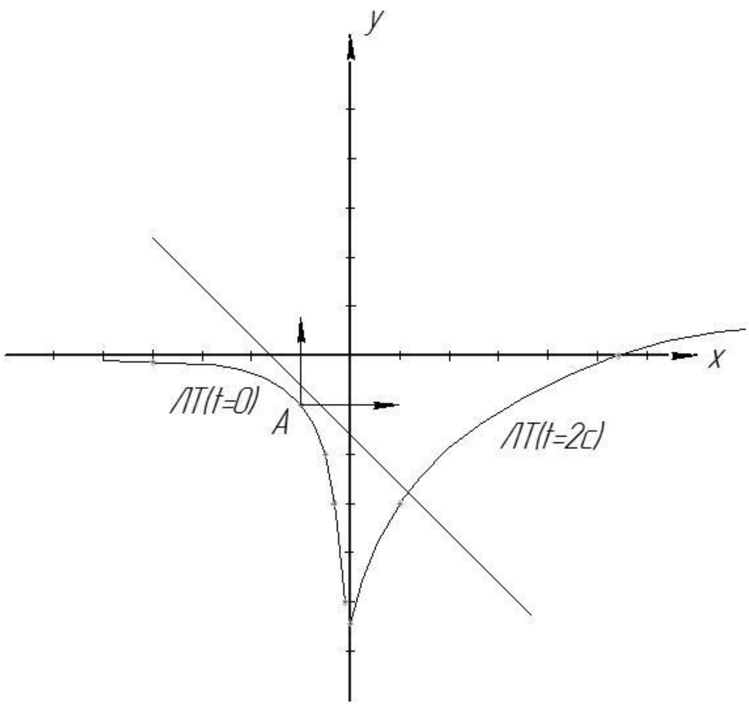


Рис. 3.2

Задача 4

При установившемся течении вязкой жидкости распределение скоростей в плоском канале с высотой B изменяется по параболическому закону: $V_x = V_{\max}\left(1 - \dfrac{4y^2}{B^2}\right)$, $V_y = V_z = 0$.

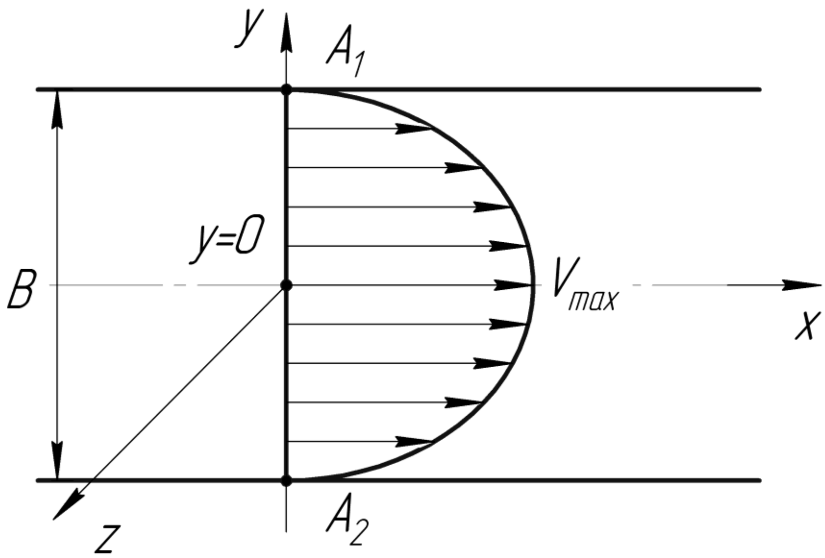


Рис. 3.3

Найти уравнение функции тока, определить, является поток потенциальным или нет. Вычислить расход Q.

Решаем задачу:

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0;\ \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0;$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial y} = -V_{\max}\frac{8y}{B^2};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y = 0;\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x = V_{\max}\left(1 - \frac{4y^2}{B^2}\right);$$

$$\psi = \psi(y);\ \psi \neq \psi(x).$$

$$\psi = \int V_{\max}\left(1 - \frac{4y^2}{B^2}\right)dy + C = V_{\max}\left(y - \frac{4y^3}{3B^2}\right) + C.$$

Первый способ:

$$Q = \psi_{A_1}\Big|_{y=+B/2} - \psi_{A_2}\Big|_{y=-B/2} =$$

$$=V_{\max}B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)-V_{\max}B\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}\right)=V_{\max}\frac{B}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)-V_{\max}\frac{B}{2}\left(-1+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=V_{\max}\left(\frac{B}{2}-\frac{4}{3}\frac{B^3}{8}\frac{1}{B^2}\right)-V_{\max}\left(-\frac{B}{2}+\frac{4}{3}\frac{B^3}{8}\frac{1}{B^2}\right)=$$

$$=V_{\max}\frac{B}{2}\left(\frac{2}{3}\right)-V_{\max}\frac{B}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)=V_{\max}\frac{B}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=V_{\max}\frac{B}{2}\frac{4}{3}=V_{\max}B\frac{2}{3}.$$

Второй способ:

$$Q=\int_{-B/2}^{B/2}V_x dy=V_{\max}\int_{-B/2}^{B/2}\left(1-\frac{4y^2}{B^2}\right)dy=V_{\max}\left(y-\frac{4}{3}\frac{y^3}{B}\right)\Bigg|_{-B/2}^{+B/2}=\frac{2}{3}V_{\max}B.$$

Задача 4

Функция тока задана в виде:

$$\psi=3(x^2-y^2).$$

Вычислить циркуляцию скорости по окружности радиусом r_0 с центром в начале координат (рис. 3.4):

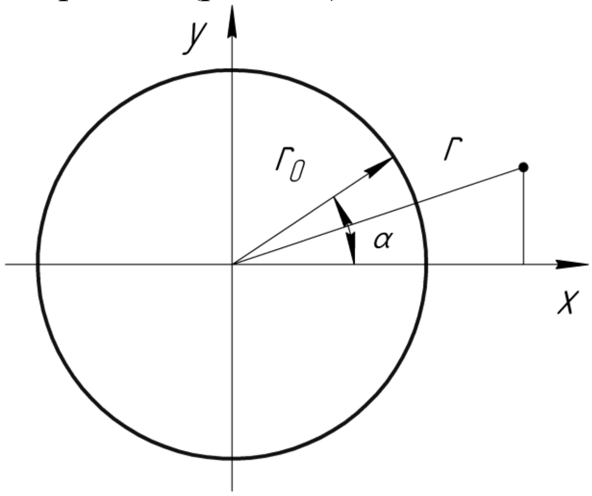


Рис. 3.4

$$\begin{cases} x=r\cos\alpha\ ; \\ y=r\sin\alpha\ . \end{cases}$$

$$\psi=3r^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=3r^2\cos 2\alpha,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial r}=V_u=6r\cos 2\alpha\ ; \\ \dfrac{\partial\psi}{r\partial\alpha}=-V_r=\dfrac{1}{r}(-2\cdot 3r^2\sin 2\alpha)=-6r\sin 2\alpha\ . \end{cases}$$

$$V_r=6r\sin 2\alpha.$$

$$\Gamma = \int\limits_0^{2\pi} V_u r_0 d\alpha = 6r_0 \int\limits_0^{2\pi} \cos 2\alpha d\alpha = 0 .$$

Вычислить циркуляцию скорости по замкнотому контуру ABCDA в виде прямоугольника (рис. 3.5):

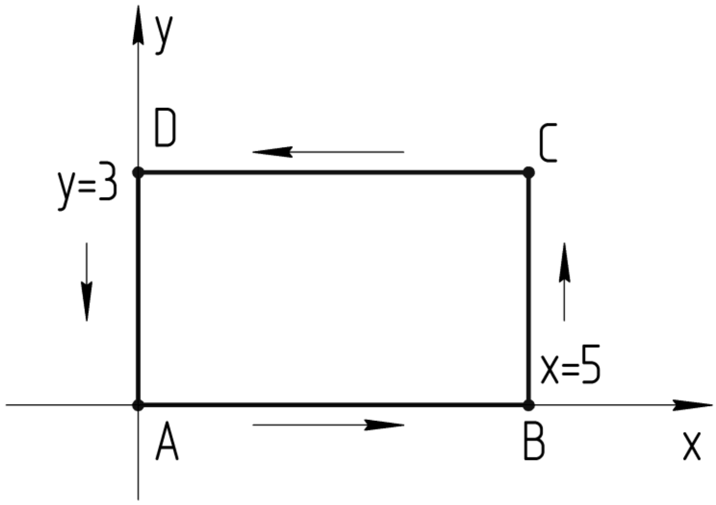


Рис. 3.5

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = -6y; \\ V_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = -6x; \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} V_x\big| = 0; \\ V_y\big|_{x=0} = 0. \end{array}$$

$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} = \int\limits_0^5 V_x\big|_{y=0} dx + \int\limits_0^3 V_y\big|_{x=5} dy + \int\limits_5^0 V_x\big|_{y=3} dx + \int\limits_3^0 V_y\big|_{x=0} dy =$$

$$= 0 + \int\limits_0^3 -30 \;\; dy + \int\limits_5^0 -6\cdot 3 \;\; dx + 0 = -90 - 18x\Big|_5^0 = -90 + 90 = 0,$$

$$(\Gamma{=}0) .$$

$$\mathrm{rot}_z \vec{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = -6 - \;\; -6 \;\; = 0 \text{, – поток потенциальный.}$$

Задача 6

Потенциал скорости φ задан в виде: $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + c$. Найти функцию тока и форму линию тока.

Проекции скорости равны:

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = x; \\ V_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -y. \end{cases}$$

С другой стороны:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x,\ \psi = xy + c(x),\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = y + \frac{dc(x)}{dx};$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y = -(-y) = y + \frac{dc(x)}{dx};$$

$$y = y + \frac{dc(x)}{dx};$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = 0;$$

$$c(x) = \text{const}.$$

$$\psi = xy + c, \text{ – функция тока.}$$

Уравнение линии тока:

$$\psi = \text{const}, \text{ т.е. } \text{const} = xy + c;\ xy = c_1.$$

$$y = \frac{c_1}{x}, \text{ – семейство гипербол.}$$

Задача 7

Заданы проекции скорости в виде: $V_x = ax^2$; $V_y = -2axy$. Определить, является ли движение жидкости вихревым или потенциальным. Вычислить циркуляцию скорости по замкнутому кругу ABCDA (рис. 3.6):

Течение подчиняется уравнению неразрывности:

$$\text{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 2ax - 2ax = 0.$$

Течение вихревое:

$$\text{rot}_z \vec{V} = \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 - 2ay \neq 0.$$

Циркуляция скорости по отдельным участкам контура *ABCDA* и всему контуру в целом:

$$\Gamma = \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC} + \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA};$$

$$\Gamma_{AB} = \int_2^6 V_x\Big|_{y=1} dx = \int_2^6 ax^2 dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_2^6 = a\left(\frac{36 \cdot 6}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{a}{3} \cdot 208;$$

$$\Gamma_{BC} = \int_1^4 V_y\Big|_{x=6} dy = -\int_1^4 2a\cdot 6\cdot y dy = -12a\frac{y^2}{2}\Big|_1^4 = -6a(16-1) = -90a\,;$$

$$\Gamma_{CD} = \int_6^2 V_x\Big|_{y=4} dx = \int_6^2 ax^2 dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_6^2 = -\frac{a}{3}\cdot 208;$$

$$\Gamma_{DA} = \int_4^1 V_y\Big|_{x=2} dy = -\int_4^1 2a\cdot 2y\, dy = -4a\frac{y^2}{2}\Big|_4^1 = -2a(1-16) = 30a\,;$$

$$\Gamma = \Sigma = \frac{208a}{3}a - 90a - \frac{208}{3}a + 30a = -60a\,.$$

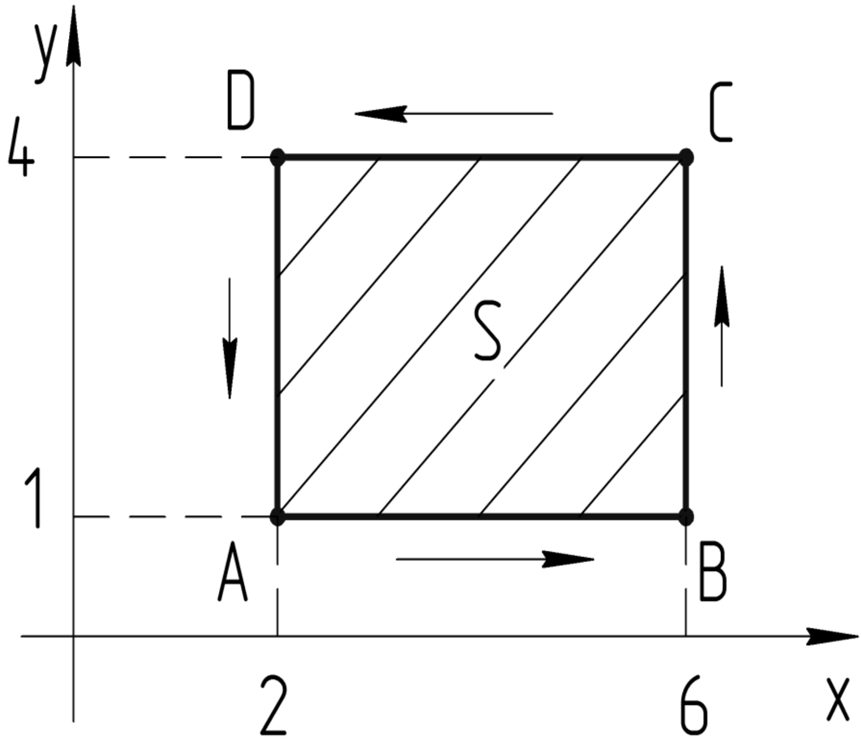


Рис. 3.6

.

По теореме Стокса:

$$\Gamma = I = \iint_S rot_z \vec{V}\, dS = -\iint_S 2aydS = -\int_2^6\left[\int_1^4 2aydy\right] =$$

$$= -\int_2^6\left[2a\frac{y^2}{2}\right]_1^4 dx = -\int_2^6 a(16-1)dx = -15a(6-2) = -60a.$$

Задача 8

Заданы два простейших потока – точечный источник Q в начале координат и поступательный поток вдоль оси x со скоростью V_∞. В результате сложения этих двух потоков одна из линий тока представляет собой симметричное полутело (рис. 3.7). Найти уравнение этого полутела и координаты точек A и B.

Функция тока источника:

$$\psi_1 = \frac{Q}{2\pi}\alpha .$$

Функция тока поступательного потока:

$$\psi_2 = V_\infty y .$$

Уравнение ЛТ суммарного потока ($c = \text{const}$):

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{Q}{2\pi}\alpha + V_\infty (r\sin\alpha) = \text{c} .$$

При $\alpha = 0$, $c = 0$ – уравнение оси x.

При $\alpha = \pi$, $\sin\alpha = 0$, $\psi = \frac{Q}{2} + 0 = c$, $c = \frac{Q}{2}$ – линия тока, крайняя на рисунке 3.7.

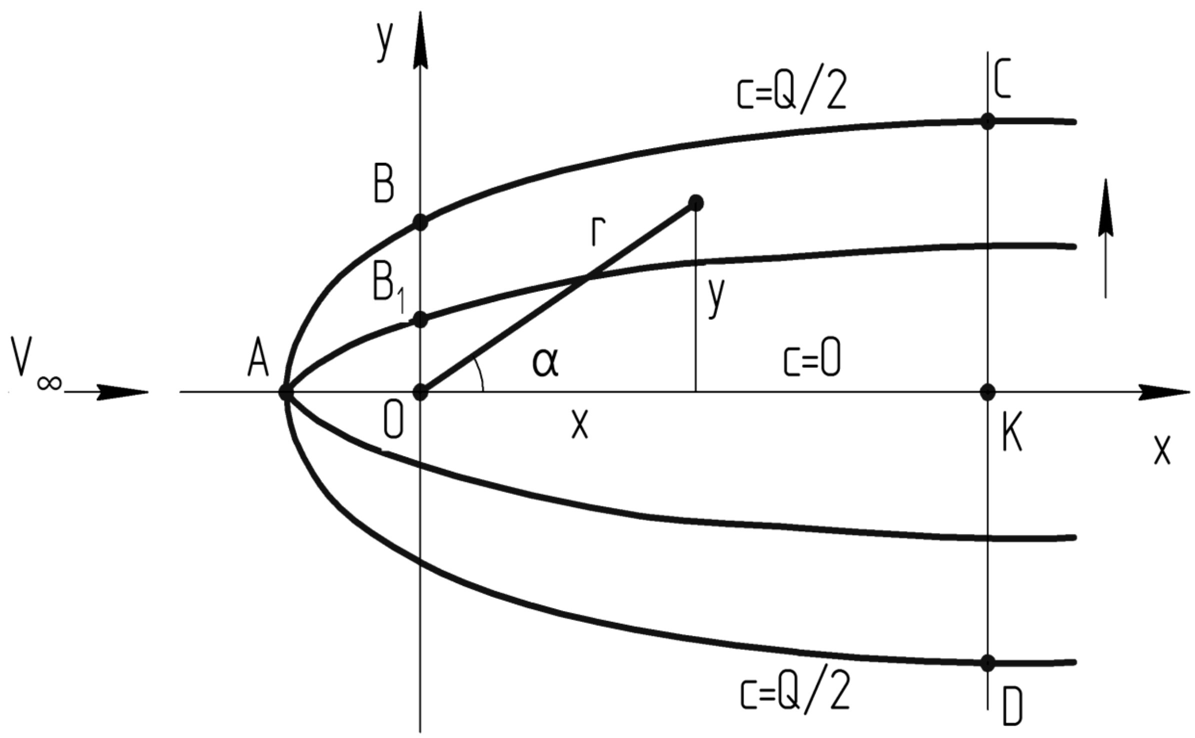


Рис. 3.7

Получим уравнение полутела $CBAD$ (при $\alpha = \pi$, $c = Q/2$):

$$\frac{Q}{2\pi}\alpha+V_{\infty}(r\sin\alpha)=\frac{Q}{2};$$

$$r(\alpha)=\frac{Q}{2}\frac{\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)}{V_{\infty}\sin\alpha}.$$

В точке A будем иметь неопределенность:

$$r_{A}=\frac{0}{0}.$$

Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя. Тогда при $\alpha=\pi$ и, соответственно, $\cos\alpha=-1$ будем иметь:

$$r_{A}=\frac{Q}{2V_{\infty}}\frac{\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)'}{\sin\alpha'}=\frac{Q}{2V_{\infty}}\frac{\left(-\frac{1}{\pi}\right)}{\cos\alpha}=\frac{Q}{2\pi V_{\infty}}.$$

Координаты точки A:

$$A\left(-\pi,\frac{Q}{2\pi V_{\infty}}\right).$$

Радиус точки B и ее координаты $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$:

$$r_{B}=\frac{Q}{2V_{\infty}}\frac{\left(1-\frac{\pi}{2\pi}\right)}{1}=\frac{Q}{2V_{\infty}}\frac{1}{2}=\frac{Q}{4V_{\infty}};$$

$$B\left(\frac{\pi}{2},\frac{Q}{4V_{\infty}}\right).$$

Вычислим расход Q, проходящий через сечение CKD $(\alpha_{C}=30°)$:

$$\begin{cases} r_{C}=\dfrac{Q}{2}\dfrac{\left(1-\frac{\pi}{6\pi}\right)}{V_{\infty}\frac{1}{2}}=\dfrac{5Q}{6V_{\infty}}; \\ y_{C}=r_{C}\sin\alpha_{C}=\dfrac{5Q}{12V_{\infty}}. \end{cases}$$

$$Q_{1}=2\int_{0}^{y_{C}}V_{x}dy;\quad V_{x}=V_{\infty}+(V_{x})_{\text{ист}};\quad (V_{x})_{\text{ист}}=\frac{\partial\psi_{1}}{\partial y};$$

$$\psi_1 = \frac{Q}{2\pi}\alpha = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

$$V_{x\ \text{ист}} = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\frac{1\cdot\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{x}\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{Q\,x}{2\pi(x^2+y^2)};$$

$$V_x = V_\infty + (V_x)_{\text{ист}} = V_\infty + \frac{Q\,x}{2\pi(x^2+y^2)}.$$

$$Q_1 = 2\int_0^{y_C}\left(\frac{Q\,x_C}{2\pi(x_C^2+y_C^2)} + V_\infty\right)dy,\ (\text{при } x = \text{const} = x_C);$$

$$Q_1 = \left(\frac{2Q\,x_C}{2\pi}\right)\frac{1}{x_C}\operatorname{arctg}\frac{y}{x_C}\Bigg|_0^{y_C} + 2V_\infty y_C = \frac{Q}{\pi}\alpha_C + 2V_\infty y_C =$$

$$= \frac{Q}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2V_\infty\left(\frac{5Q}{12V_\infty}\right) = \frac{Q}{6} + \frac{5Q}{6} = Q;$$

$$Q_1 = Q.$$

Необходимо обратить внимание, что:

$$Q \neq \Psi_D - \Psi_C = 0,$$

т.к. внутри есть сток.

Вычислим циркуляуию скорости по контуру B_1B (рис. 3.7).

На контуре B_1B (рис. 3.8) $y_{B_1} = r_A$ (так выбираем точку B_1), $y_B = r_B,\ x = 0$.

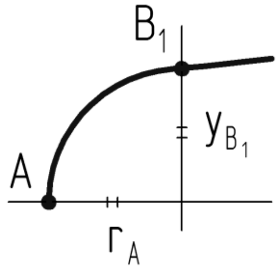


Рис. 3.8

Тогда циркуляция на участке BB_1 будет равна:

$$\Gamma = \int_{y_{B1}}^{y_B} V_y\,dy;$$

$$V_y = (V_y)_\infty + (V_y)_{\text{ист}} = (V_y)_{\text{ист}};$$

$$(V_y)_{\text{ист}} = -\frac{\partial\psi_1}{\partial x};\ \psi_1 = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$(V_y)_{\text{ист}} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1 \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right)}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2};$$

$$(V_y)_{\text{ист}} = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$(V_y)_{\text{ист}} = \frac{Q}{2\pi y} \quad (x = 0);$$

$$\Gamma = \int_{y_{B1}}^{y_B} \frac{Q dy}{2\pi y} = \frac{Q}{2\pi} (\ln y_B - \ln y_{B1}) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{y_B}{y_{B1}} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_B}{r_A} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{Q}{4V_\infty} \left(\frac{2\pi V_\infty}{Q} \right) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

4. Распределение коэффициента давления по цилиндру. Измерение скорости потока 3-х точечным зондом

Для определения величины и направления скорости плоскопараллельного потока можно воспользоваться цилиндрическим зондом, в котором имеются 3 небольших приемных отверстия 1, 2, 3, равномерно распределенных по окружности (рис. 4.1). К этим отверстиям подсоединены датчики давления, с помощью которых можно измерить величины давлений в трёх точках цилиндра 1, 2, 3.

Поворачивая зонд вокруг оси z до тех пор, пока давления в отверстиях 2 и 3 не уравняются

$$p_2 = p_3,$$

найдем угол α направления скорости V_∞ в точке 1.

Распределение коэффициента давления по цилиндру подчиняется закону:

$$\bar{p} = 1 - 4\sin^2\theta.$$

Для точек 2 и 3:

$$\theta_3 = -\theta_2, \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_3.$$

В точке 1:

$$\theta_1 = 0, \; \bar{p}_1 = 1 - 0 = 1, \; \bar{p}_1 = \frac{p_1 - p_\infty}{\rho \frac{V_\infty^2}{2}} = 1.$$

Откуда находим A_1 – избыточное давление в точке 1:

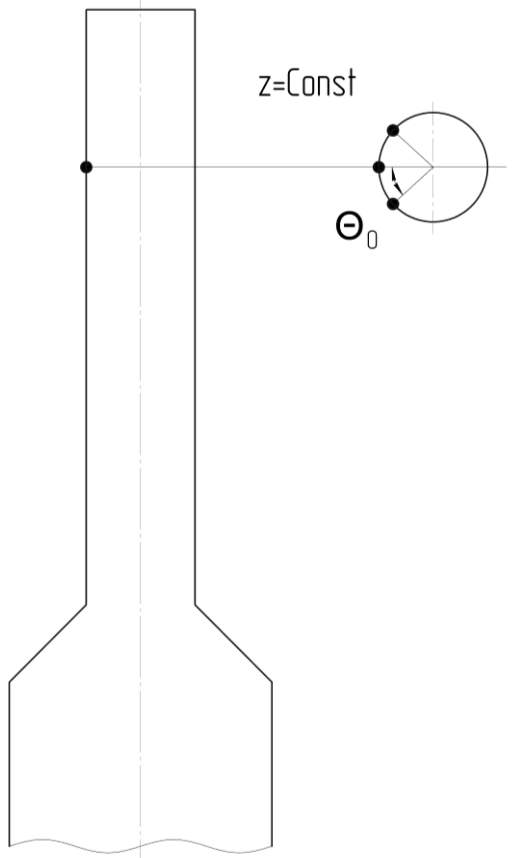
$$A_1 = (p_1 - p_\infty) = \rho \frac{V_\infty^2}{2},$$

где A_1 – измеряемая величина.

Тогда скорость вычисляется по формуле:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2A_1}{\rho}}.$$

а)



б)

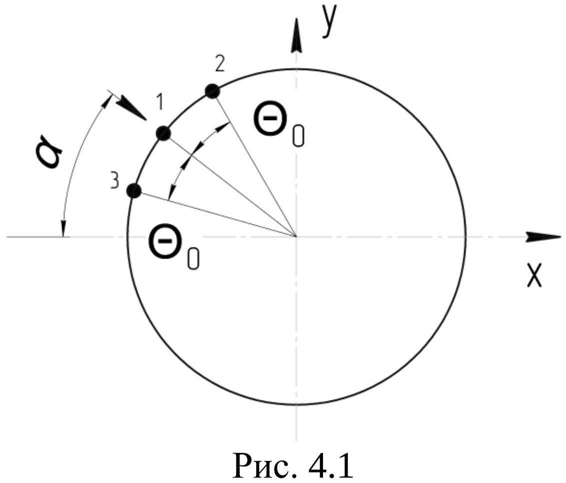


Рис. 4.1

5. Уравнение Бернулли. Измерение скорости потока трубкой Пито и расхода методом Вентурри

Трубка Пито (рис. 5.1) используется для измерения величины скорости при установившемся движении жидкости.

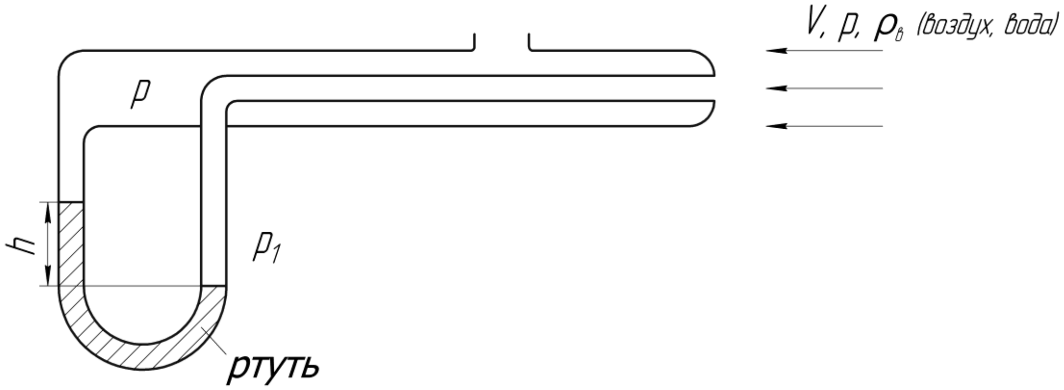


Рис. 5.1

Уравнение Бернулли для двух сечений запишется:

$$\frac{p_1}{\rho_{\text{в}} g} + 0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho_{\text{в}} g},$$

где p_1 – полное давление, $V_1 = 0$.

Тогда

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_1 - p}{\rho_{\text{в}} g};$$

$$p_1 - p = \rho_{\text{в}} \frac{V^2}{2}.$$

С другой стороны из уравнения гидростатики:

$$p_1 = p + \rho_{\text{рт}} g h,$$

$$p_1 - p = \rho_{\text{рт}} g h.$$

Приравняем правые части выражений для $p_1 - p$:

$$\rho_{\text{в}} \frac{V^2}{2} = \rho_{\text{рт}} g h,$$

$$V = \sqrt{\frac{\rho_{\text{рт}}}{\rho_{\text{в}}} \, 2gh}.$$

Трубка Пито позволяет определить скорость с точностью до 1%, если направление оси трубки совпадает с направлением скорости.

Расходомер Вентурри позволяет определить расход в трубе (рис. 5.2).

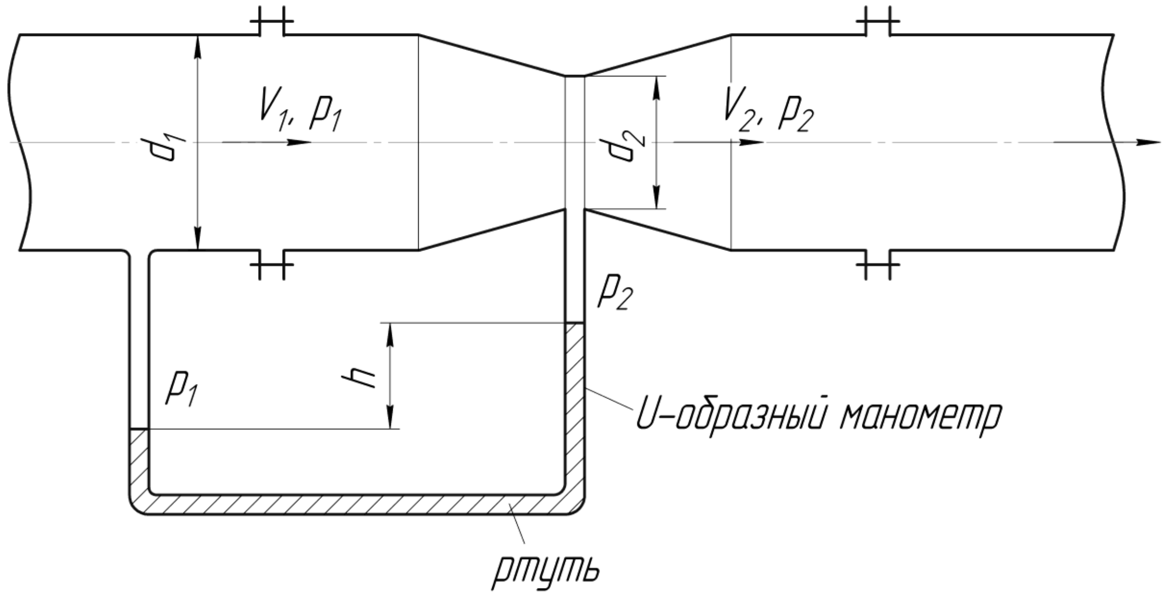


Рис. 5.2

Уравнение Бернулли для широкого и узкого сечений трубы:

$$\frac{p_1}{\rho_{\text{в}} g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho_{\text{в}} g} + \frac{V_2^2}{2g}. \tag{5.1}$$

Расходы жидкости в сечениях 1 и 2 одинаковы, тогда:

$$V_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi d_2^2}{4};$$

$$V_1 d_1^2 = V_2 d_2^2;$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2. \tag{5.2}$$

Из уравнения (5.1) получаем:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_{\text{в}} g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right] \tag{5.3}$$

или

$$p_1 - p_2 = (\rho_{\text{в}} g)\frac{V_1^2}{2}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right]. \tag{5.4}$$

Уравнение гидростатики для U-образного манометра:

$$p_1 - p_2 = \rho_{\text{рт}} g h. \tag{5.5}$$

Приравняв (5.4) и (5.5) и учтя соотношение (5.2) получим:

$$(\rho_{\text{в}} g)\frac{V_1^2}{2g}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1\right] = (\rho_{\text{рт}} g)h;$$

$$\frac{2\rho_{\text{рт}} g h}{\rho_{\text{в}}} = V_1^2 \left[\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right];$$

$$V_1^2 = \frac{2g\,\rho_{\text{рт}} h}{\rho_{\text{в}} \left[\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right]};$$

$$V_1 = K\sqrt{h},$$

где $K = \sqrt{\dfrac{2g\,\rho_{\text{рт}}}{\rho_{\text{в}} \left[\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right]}}$.

Расход воды $Q = \dfrac{\pi d_1^2}{4} V_1$:

$$Q = K_1 \sqrt{h},$$

где $K_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\dfrac{2g\,\rho_{\text{рт}}}{\rho_{\text{в}} \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)}}$ – постоянная расходомера Вентурри.

6. Задача о максимально возможном повышении давления при внезапном расширении круглой трубы

При внезапном расширении круглой трубы (рис. 6.1) происходит повышение давления. При каком соотношении диаметров $\dfrac{d_1}{d_2}$ перепад давлений при внезапном расширении будет наибольшим. Скорости по сечению трубы будем принимать постоянными.

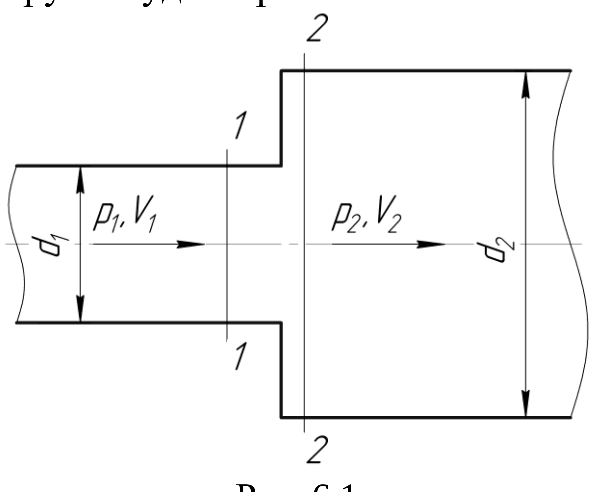


Рис. 6.1

Запишем уравнение Бернулли для сечений трубы 1 и 2:

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+h. \qquad (6.1)$$

Потери напора при внезапном расширении по формуле Борда – Карно определяются как кинетическая энергия дефекта скорости в широком сечении по сравнению с узким:

$$h=\frac{(V_2-V_1)^2}{2g}. \qquad (6.2)$$

Подставляя выражение (6.2) для потерь h в уравнение Бернулли (6.1) получим выражение для определения перепада давления $\Delta p = p_1 - p_2$:

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g}=\frac{V_2^2-V_1^2}{2g}+\frac{(V_2-V_1)^2}{2g};$$

$$\Delta p=\frac{\rho}{2}\left[V_2^2-V_1^2+(V_2^2-2V_2V_1+V_1^2)\right]=\rho(V_2^2-V_2V_1)=\rho V_2(V_2-V_1). \qquad (6.3)$$

Заменим скорости в уравнении (6.3) через расходы в соответствующих сечениях:

$$Q=V_1\frac{\pi d_1^2}{4}=V_2\frac{\pi d_2^2}{4};$$

$$V_2=V_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2.$$

Обозначим $K=\frac{d_1}{d_2}$, тогда $V_2=V_1K^2$ и $\frac{V_2}{V_1}=K^2$.

Выражение для перепада давления Δp будет иметь вид:

$$\Delta p=\rho V_1K^2(V_1K^2-V_1)=\rho V_1^2(K^4-K^2).$$

Найдем максимальное значение Δp:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial K}=0;$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial K}=4K^3-2K=0;$$

$$2K^2=1;\; K^2=0{,}5;$$

$$K_{\max}=\frac{d_1}{d_2}=\sqrt{0{,}5}.$$

$$d_1=0{,}7071d_2$$

$$d_2=1{,}414d_1.$$

7. Использование теоремы об изменении количества движения

Для установившегося движения жидкости теорема об изменении количества движения записывается в виде:

$$\vec{R} = -\rho \oint_{S_K} \vec{V} V_n dS - \oint_{S_K} p\,\vec{n}\,dS, \qquad (7.1)$$

где $\vec{R}$ – сила, действующая на тело, находящееся внутри контрольной поверхности $S_к$; $\vec{V}, V_n$ – вектор скорости и его проекция на внешнюю нормаль $\vec{n}$ к контрольной поверхности $S_к$; $\vec{n}$ – орт внешней нормали к $S_к$, p – давление на поверхности $S_к$.

Массовые силы тяжести можно учесть, если под давлением p понимать величину модифицированного давления $p_M = p + \rho g z$.

Требуется определить силу, действующую на участок криволинейного канала (рис. 7.1) при протекании через него установившегося потока жидкости с объёмным расходом Q.

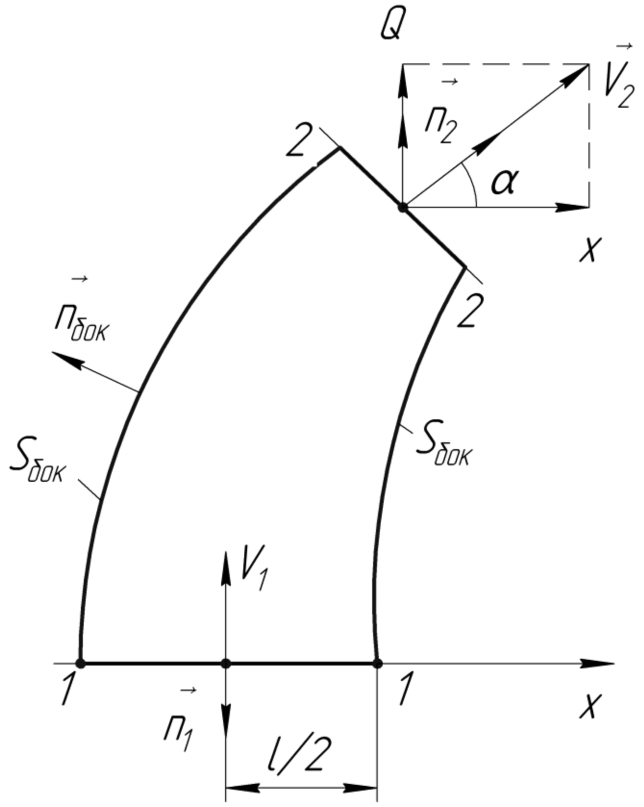


Рис. 7.1

Известны расход Q; S_1 и S_2 – площади входного сечения *1-1* и выходного *2-2*; α – угол наклона выходного сечения *2-2*; p_1 – давление во входном сечении *1-1*. При решении задачи будем полагать, что жидкость идеальная (в канале нет потерь); скорости и давления в сечениях *1-1* и *2-2* постоянны; сила $\vec{R}=0$, т.к. внутри поверхности $S_к$ нет обтекаемого тела.

При данных условиях уравнение (7.1) запишется:

$$-\rho\int\limits_{S_1+S_2}\vec{V}V_n dS-\int\limits_{S_{бок}}\vec{V}V_n dS-\int\limits_{S_1+S_2}p\,\vec{n}\,dS-\int\limits_{S_{бок}}p\,\vec{n}\,dS=0.$$

Интеграл $\int\limits_{S_{бок}}\vec{V}V_n dS=0$, т.к. $V_n=0$ на боковых поверхностях; $\int\limits_{S_{бок}}p\,\vec{n}\,dS=\vec{R}_{ст}$ – есть сила, действующая со стороны жидкости на боковые стенки канала, тогда

$$\vec{R}_{ст}=-\rho\int\limits_{S_1+S_2}\vec{V}V_n dS-\int\limits_{S_1+S_2}p\,\vec{n}\,dS \tag{7.2}$$

Проекции силы на оси координат *x*, *y*:

$$(\vec{R}_{ст})_x=-\rho\int\limits_{S_1+S_2}V_xV_n dS-\int\limits_{S_1+S_2}pn_x dS \tag{7.3}$$

$$(\vec{R}_{ст})_y=-\rho\int\limits_{S_1+S_2}V_yV_n dS-\int\limits_{S_1+S_2}pn_y dS \tag{7.4}$$

На поверхности *2-2* (S_2):

$$V_x=V_2\cos\alpha=\frac{Q}{S_2}\cos\alpha;\ V_y=V_2\sin\alpha=\frac{Q}{S_2}\sin\alpha;\ V_n=\frac{Q}{S_2}=V_2;$$

$$n_x=n\cos\alpha=\cos\alpha;\ n_y=n\sin\alpha=\sin\alpha;\ \left|\vec{n}\right|=1{,}0.$$

Найдем p_2 из уравнения Бернулли (7.4), полагая $z_1\approx z_2$:

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2;$$

$$p_2=p_1+\frac{\rho}{2}(V_1^2-V_2^2);$$

$$p_2=p_1+\frac{\rho}{2}\left(\frac{Q^2}{S_1^2}-\frac{Q^2}{S_2^2}\right)=p_1+\frac{\rho Q^2}{2}\left(\frac{1}{S_1^2}-\frac{1}{S_2^2}\right).$$

Тогда проекции силы R_x и R_y и сила R:

$$R_x = -\rho \underbrace{V_2 \cos\alpha}_{V_x} \underset{V_n}{\frac{Q}{S_2}} S_2 - p_2 \cos\alpha \cdot S_2 = -\rho \underset{V_2}{\left(\frac{Q}{S_2} \right)} \cos\alpha \cdot Q - p_2 \cos\alpha \cdot S_2;$$

$$R_x = -\rho \frac{Q^2}{S_2} \cos\alpha \cdot Q - p_2 \cos\alpha \cdot S_2;$$

$$R_y = -\rho \underset{V_{y1}}{\frac{Q}{S_1}} \underbrace{\left(-\frac{Q}{S_1} \right)}_{V_n} S_1 - \rho \underbrace{\frac{Q}{S_2} \sin\alpha}_{V_{y2}} \underset{V_n}{\frac{Q}{S_2}} \cdot S_2 - p_1 \;\; -1{,}0 \;\; S_1 - p_2 \sin\alpha \cdot S_2;$$

$$R_y = \rho \frac{Q^2}{S_1} - \rho \frac{Q}{S_2} \sin\alpha + p_1 S_1 - p_2 \sin\alpha \cdot S_2;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. 840 с.

2. Кочин Н.Е. [и др.]. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М. : Физматгиз, 1963. – 583 с.

3. Соковишин Ю.А. Гидродинамика и газодинамика в примерах и задачах. Методическое пособие. Л.: ЛПИ, 1973. 131 с.

4. Жарковский А.А. Механика жидкости и газа. Гидромеханика: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн ун-та, 2011. 229 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
ГИДРОМЕХАНИКА

Векторное исчисление. Теория поля. Кинематика

Методические указания

Составители: Жарковский Александр Аркадьевич
Грачев Александр Владимирович

Лицензия ЛР №02000593 от 07.08.97

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч. - изд. л.
Тираж 50 Заказ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.
Издательско-полиграфический центр СПбГПУ.
Адрес университета и ИПЦ:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.