Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ – ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д.А. Тархов, К.А. Дубаренко, Е.С. Единова,
А.М. Никулин, Т.А. Шемякина

МАТЕМАТИКА

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.
ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГПУ
2012

УДК 512.8

ББК

Т

Д.А. Тархов, К.А. Дубаренко, Е.С. Единова, А.М. Никулин, Т.А. Шемякина **Математика. Комплексные числа. Геометрия на плоскости**: Учебное пособие / Д.А. Тархов, К.А. Дубаренко, Е.С. Единова, А.М.Никулин, Т.А. Шемякина, 2012. — 60с.

Учебное пособие соответствует содержанию Федерального Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования дисциплины «Высшая математика» направления подготовки и переподготовки бакалавров по специальности 280700.62 «Техносферная безопасность».

В пособии кратко изложены теоретические основы по курсу «Высшая математика», который представлен разделами «Комплексные числа. Геометрия на плоскости». Приведены многочисленные примеры с методическими рекомендациями по их решению.

Предназначено для студентов высших учебных заведений технических и экономических направлений, изучающих дисциплину «Высшая математика». Пособие может быть использовано при подготовке бакалавров и в системе дополнительного профессионального образования, а также оно будет полезно для преподавателей дневных, вечерних и заочных отделений вузов и технических университетов.

Ил. 7., Библиогр.: 5 назв.

Публикуется по решению методического совета факультета Комплексной Безопасности Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия на плоскости составляет важнейшую часть основы высшей математики. В аналитической геометрии геометрические объекты (точки, линии, поверхности и т.д.) и их расположение на плоскости или в пространстве изучаются с помощью алгебры, т.е. аналитически методом координат.

Целью данного пособия является помощь в усвоении математики, развитие навыков и умения в решении студентами задач аналитической геометрии по указанным в нем темам в объеме действующих программ курса высшей математики.

В пособии кратко изложен теоретический материал по разделу «Комплексные числа. Геометрия на плоскости». При изложении теории приведены многочисленные примеры с методическими рекомендациями по их решению.

В пособии содержатся теоретические вопросы для подготовки к коллоквиуму по разделу «Комплексные числа. Геометрия на плоскости».

I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Математика как наука начиналась с арифметики, т.е. с натуральных чисел и операций с ними. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ заданы две основные операции – сложение (a + b) и умножение (a · b) со знакомыми из начальной школы свойствами:

a · 1 = a,

a + (b + c) = (a + b) c – ассоциативный закон,

a (b + c) = ab + ac – дистрибутивный закон,

a + b = b + a – коммутативный закон,

a · b=b · a – коммутативный закон.

Однако, со временем, натуральных чисел стало не хватать. Для записи состояния должников потребовались отрицательные числа, а для неимущих – число ноль. Математически это выразилось в не замкнутости множества $\mathbb{N}$ относительно операции обратной к сложению, т.е. вычитания. Таким образом, пришлось множество натуральных чисел расширить до множества целых чисел $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Расширение множества чисел приводит к появлению новых свойств:

a + 0 = a; a · 0 = 0; a – a = 0.

Дальнейшее развитие, например делёж добычи, привёло к появлению дробей, т.е. к рациональным числам: $\underset{+-}{\mathbb{N}} \subset \underset{-}{\mathbb{Z}} \subset \underset{:}{\mathbb{Q}}$.

Напомним, что ***рациональные числа*** представляются в виде дробей $\frac{n}{m}$, где $n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}$. Правила действий с дробями хорошо известны из курса средней школы:

$$\frac{m_1}{n_1} \div \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_2 n_2}{n_1 m_2}; \qquad \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}.$$

Важнее всего то, что старые свойства продолжают работать!

Для землемерных работ рациональных чисел оказалось недостаточно: длина диагонали квадрата с единичной стороной не выражается рациональным числом. Действительно, пусть число $\sqrt{2}$ представлено несократимой дробью $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Возводя в квадрат и избавляясь от знаменателя, получаем $\frac{n^2}{m^2} = 2 \Rightarrow n^2 = 2m^2$.

Из данного равенства видно, что n должно быть чётным, тогда левая часть равенства делится на 4, но тогда и m должно быть чётным, т.е. дробь не является несократимой.

Таким образом, множество рациональных чисел приходится расширять до множества вещественных: $\underset{+-}{\mathbb{N}} \subset \underset{-}{\mathbb{Z}} \subset \underset{:}{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$.

В школьной математике вещественные числа вводятся как бесконечные десятичные дроби, далее при рассмотрении пределов обсуждается немного другой подход. Сейчас нам важно, что все основные свойства арифметических операций переносятся на вещественные числа.

Однако, для извлечения корней одних вещественных чисел недостаточно. Рассмотрим простое уравнение $x^2+1=0$. Очевидно, что оно не имеет вещественных корней. Но если его решить нельзя, но очень хочется, то придётся эти корни ввести в рассмотрение, расширив множество чисел так же, как и ранее.

Решим уравнение $x^2 = -1$, обозначив $i=\sqrt{-1}$, тогда получаем $x_{1,2}=\pm i$. Аналогично, можно решить любое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D=b^2-4ac.$$

При $D\geq 0$ получаем вещественные корни, а при $D<0$ – новые корни, которые называются комплексными: $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{i\sqrt{-D}}{2a}$.

Таким образом, чтобы решать любые квадратные уравнения необходимо рассматривать ***комплексные числа*** вида $c=a+bi$. Это выражение называется алгебраической формой комплексного числа, где a, b – ***действительная и мнимая части*** его соответственно. Для них вводят арифметические действия. Операция сложения вводится по правилу:

$$\left.\begin{matrix} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{matrix}\right\} z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i.$$

Эти выкладки не являются доказательством соответствующей формулы. Сложение комплексных чисел мы определяем так, чтобы удовлетворялись свойствам арифметических операций.

Аналогично введём умножение:

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+b_1a_2i+a_1b_2i+b_1b_2i^2=a_1a_2-b_1b_2+i(b_1a_2+a_1b_2),$$

воспользовавшись равенством $i^2=-1$.

Данные выкладки не являются выводом формулы для умножения комплексных чисел. Мы определяем умножение этой формулой так, чтобы сохранить свойства арифметических операций.

Легко видеть, что $z+0=z$ если определить 0 : $0+0i$, $a+bi=a+b\cdot i$, $1=1+0i$, $i=0+1i$, $a=a+0i$ и выполняются все свойства арифметических операций:

$z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$ - коммутативность,

$z\cdot 1=(a+bi)\cdot(1+0i)=a+bi=z$,

$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ - ассоциативность

$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ дистрибутивность и т.д.

Упражнение. Проверить этих свойства самостоятельно.

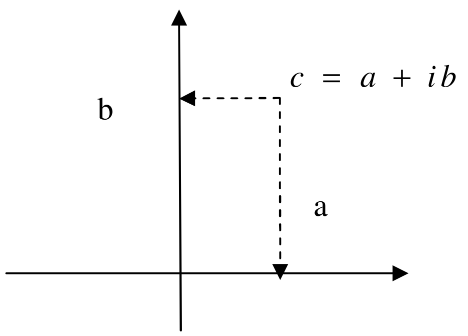
Деление комплексных чисел определяется после несложных преобразований:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2-b_2^2(-1)}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\left(\frac{a_2b_1-b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)i$$

Таким образом, получаем цепочку вложенных друг друга числовых множеств $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Дальнейшее расширение множества чисел с сохранением свойств арифметических операций невозможно.

Для геометрической наглядности комплексные числа можно изобразить на плоскости.

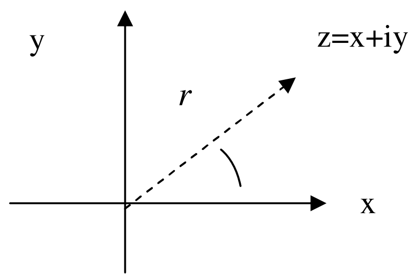


Легко видеть, что такое сопоставление задаёт взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости.

Симметричная относительно оси OX точка соответствует так называемому ***комплексно сопряжённому числу***: $\overline{c}=a-bi$.

Переходя к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r < +\infty$; $0 \le \varphi < 2\pi$, получаем ***тригонометрическую форму комплексного числа***

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



При этом $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется ***модулем числа z*** и обозначается $|z|$, а угол φ – ***аргументом*** и обозначается $\varphi = arg\ z$. При этом $\varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}$ для первой четверти, для второй и третьей нужно добавить π, а для четвёртой 2π. В тригонометрической форме удобно перемножать комплексные числа:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 (\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi\sin\varphi)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогичная формула справедлива для произведения n комплексных чисел:

$$z_1\ z_2 \dots z_n = r_1\ r_2 \dots r_n\ [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].$$

Эта формула доказывается по индукции, опираясь на формулу произведения двух комплексных чисел.

Упражнение. Доказать самостоятельно.

Перемножая n одинаковых чисел, получаем $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ — ***формула Муавра***.

Пример. Вычислить $(1 + i)^4$. Здесь z=1 + i , x = 1; y = 1.
Для применения формулы Муавра, вычислим модуль и аргумент z:

$$r = |\ 1 + i\ | = \sqrt{2}, \quad \varphi = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right) = 4(-1+0) = -4.$$

Из формулы Муавра несложно получить формулу извлечения корня, как обратной операции для возведения в степень.

Пусть $w = z^n$; $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, тогда $z = \sqrt[n]{w}$; ρ – ***модуль*** w , ψ — ***аргумент***. Тогда $r^n = \rho;\ n\varphi = \psi + 2\pi k$, откуда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi = \dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, т.е. корней n-й степени из любого ненулевого комплексного числа ровно n. В итоге получаем формулу

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right).$$

Пример.

Вычислить $\sqrt[4]{1}$; $|1| = 1$ x = 1; y = 0; arg 1 = 0; т.е. ρ = 1; ψ = 0.
Получаем четыре корня.

k = 0, $\sqrt[4]{1} = 1(\cos 0 + i sin 0) = 1$, первый $\sqrt[4]{1} = 1$;

k = 1, $\sqrt[4]{1} = 1\left(\cos\left(0 + \dfrac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(0 + \dfrac{2\pi}{4}\right)\right) = i$, второй $\sqrt[4]{1} = i$;

k = 2, $\sqrt[4]{1} = 1\left(\left(\cos\dfrac{2\pi\cdot 2}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi\cdot 2}{4}\right)\right) = -1$, третий $\sqrt[4]{1} = -1$;

k = 3, $\sqrt[4]{1}=1\left(\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi\cdot 3}{4}\right)\right)=-i$, четвёртый $\sqrt[4]{1}=-i$.

1.2. МНОГОЧЛЕНЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Определение.* Многочленом (полиномом)** $n-й$ ***степени называется функция вида:

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n,$$

где $z\in\mathbb{C}, a_i - const, i=0,1,...,n; a_0\neq 0, n\in\mathbb{N}.$

Определение.* Алгебраическим уравнением** $n-й$ ***степени называется уравнение вида:

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n=0,\quad a_0\neq 0, \tag{1}$$

а число z_0 называется ***корнем многочлена или уравнения***, если выполняется $P_n(z_0)=0.$

Основная теорема высшей алгебры утверждает, что всякое алгебраическое уравнение степени $n>0$ имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный. При этом теорема не указывает способов нахождения корня; она говорит только об его существовании.

При делении многочлена $n-й$ степени $P_n(z)$ на двучлен $(z-z_0)$ мы получим в частном многочлен $Q_{n-1}(z)$ степени $(n-1)$ и в остатке число R_n:

$$P_n(z)=(z-z_0)Q_{n-1}(z)+R_n.$$

Подставляя в это тождество вместо z число z_0, получим $P_n(z_0)=R_n$, т.е. что остаток от деления многочлена на двучлен $(z-z_0)$ равен значению этого многочлена при $z=z_0$. Если z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$, то $R_n=P_n(z_0)=0$ и $P_n(z)=(z-z_0)Q_{n-1}(z)$.

Пусть z_1 - корень уравнения (1) , тогда $P_n(z)=(z-z_1)\tilde{Q}_{n-1}(z)$, где $\tilde{Q}_{n-1}(z)$ – многочлен степени $(n-1)$, при этом его старший коэффициент равен старшему коэффициенту многочлена $P_n(z)$, т.е. a_0.

Если степень многочлена $\tilde{Q}_{n-1}(z)$ не равна нулю, то к нему можно снова применить основную теорему. Повторяя процесс n раз, мы получи разложение многочлена $P_n(z)$ на линейные множители:

$$P_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n).$$

При таком получении корней $z_1,z_2,...,z_n$ некоторые из них могут совпадать. Если какой-либо корень встретиться k раз, то он называется ***корнем кратности*** k. Если $k=1$ – корень встретиться только один раз, то он называется ***простым корнем***.

Пусть корень z_1 имеет кратность k_1, а корень z_2 – кратность k_2 и т.д. Тогда разложение многочлена $P_n(z)$ можно записать в виде:

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_r)^{k_r}, \tag{2}$$

где r – число различных корней, а сумма кратностей всех корней равна n:

$$n = k_1 + k_2 + ... + k_r.$$

Следовательно, получаем:

Алгебраическое уравнение степени n имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Рассмотрим алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \tag{3}$$

Тогда комплексные корни уравнения (3) (если они есть) попарно сопряжены. Действительно, если коэффициенты многочлена $P(x)$ – действительные числа, то, вычисляя его значения при комплексно сопряженных значениях x, мы получаем комплексно сопряженные числа: $P(a-ib) = \overline{P(a+ib)}$. Это означает, что если $P(a+ib) = 0; \Rightarrow P(a-ib) = 0$. Легко проверить, что корни $(a+ib), (a-ib)$ имеют одинаковую кратность. Отсюда следует:

Любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

В разложении (2) перемножим множители, соответствующие комплексно сопряженным корням кратности k, тогда получим:

$$(x-a-ib)^k(x-a+ib)^k = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^k = (x^2 + px + q)^k,$$

где $p = -2a, \quad q = a^2 + b^2$.

Дискриминант квадратного трехчлена $D = p^2 - 4q < 0$, так как его корни комплексные.

Таким образом, получим разложение многочлена $P(x)$ на линейные и квадратичные действительные множители:

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}...(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}... \tag{4}$$

где k_i, l_j – кратности действительных и комплексно сопряженных корней соответственно; причем $(k_1 + ...) + 2(l_1 + ...) = n$.

Замечание:

1. *Если многочлен $P(x) \equiv 0$, то все его коэффициенты равны нулю:* $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.

В самом деле, если $a_0 \neq 0$, то $P(x)$ имел бы n корней; если $a_0 = 0, a_1 \neq 0$, то $P(x)$ имел бы $(n-1)$ корень и т.д.; В условии сказано, что многочлен имеет бесчисленное множество корней. Из этого следует, что если многочлен n степени имеет больше чем n корней, то он тождественно равен нулю.

2. *Если два многочлена равны при любых значениях x:*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m,$$

то равны их степени и равны между собой коэффициенты при одинаковых степенях x.

Пусть $n > m$, тогда

$$a_0x^n + ... + a_{n-m-1}x^{m+1} + (a_{n-m} - b_0)x^m + ... + (a_{n-1} - b_{m-1})x + (a_n - b_m) \equiv 0.$$

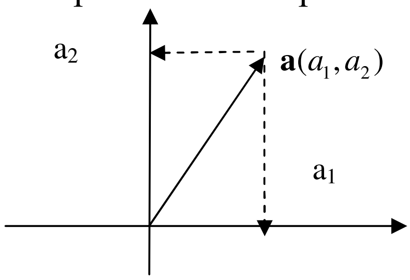
По первому замечанию следует, что $a_0 = a_1 = ... = a_{n-m-1} = 0$, т.е. старший член первого многочлена есть $a_{n-m}x^m$; а также, что $a_{n-m} = b_0, ...a_{n-1} = b_{m-1}, a_n = b_m$. При этих условиях оба многочлена тождественны.

Из курса средней школы известно, как решать алгебраические уравнения с произвольными коэффициентами при значениях $n=1$, $n=2$. Для значений $n=3$, $n=4$, также имеются общие формулы решения (формулы Кардано и Феррари), однако они редко применяются, так как довольно громоздкие. В общем виде для уравнений пятой степени и выше доказано, что не существует формул, пользуясь которыми можно было бы при помощи конечного числа алгебраических действий выразить корни через коэффициенты таких уравнений. Хотя возможны частные случаи (чаще всего, когда левую часть уравнения удается разложить на произведение многочленов меньших степеней), когда решение уравнения можно получить в радикалах.

II. ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

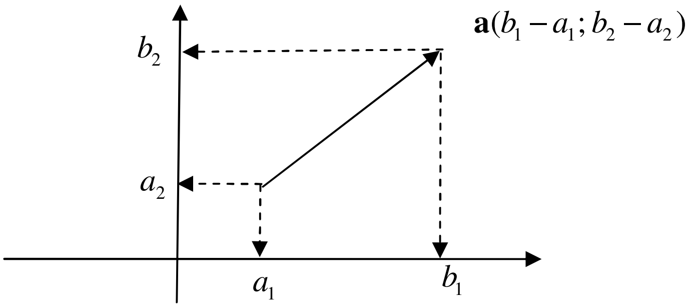
2.1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Кроме комплексных чисел на плоскости можно ввести ещё один математический объект – векторы. ***Вектором*** называется направленный отрезок, который можно переносить параллельно самому себе.



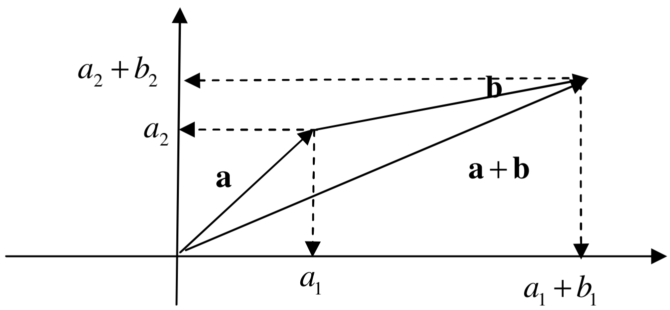
Здесь **a** – вектор, a_1 и a_2 – его координаты (когда начало вектора – в нуле).

Если начало вектора находится в точке с координатами (a_1, a_2), а конец – в точке с координатами (b_1, b_2), то координаты вектора вычисляются как координаты конца минус координаты начала.

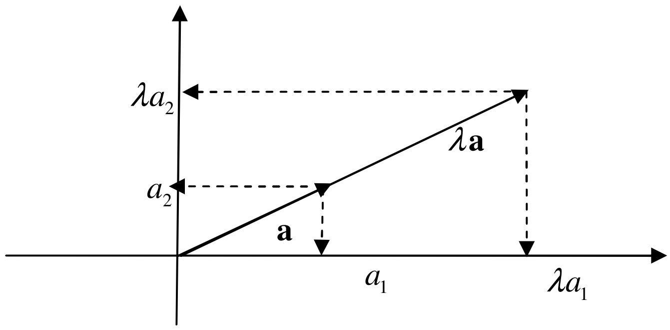


На множестве векторов на плоскости вводятся две стандартные векторные операции – сложение векторов и умножение вектора на вещественное число:

Легко видеть, что при сложении векторов координаты складываются: $\vec{a}+\vec{b}(a_1+b_1;a_2+b_2)$, если $\mathbf{a}(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}(b_1,b_2)$;



а при умножении на вещественное число $\lambda \in \mathbb{R}$ – умножаются на это число: $\lambda\mathbf{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.



Картинки иллюстрируют известные из школьной программы определения данных операций. Сложение векторов осуществляется по правилу треугольника, а при умножении на положительное число направление вектора сохраняется, его длина $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ умножается на это число, а при умножении на отрицательное число направление вектора меняется на противоположное, а длина умножается на модуль числа: $|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda|\cdot|\mathbf{a}|$

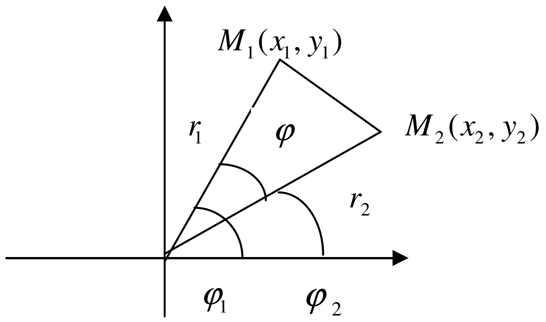
Сложение и умножение на число удовлетворяют известным свойствам:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
2) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a};\quad \mathbf{0}(0,0)$
3) $0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$
4) $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$
5) $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{a})=\lambda_1\lambda_2\cdot\mathbf{a}$
6) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$
7) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$
8) $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$

Упражнение. Проверить свойства самостоятельно.

Используя ***полярные координаты*** (r,φ): $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, легко получить формулу площади треугольника через координаты его вершин.

Рассмотрим случай, когда одна из вершин находится в начале координат.



Пользуясь формулой площади треугольника (половина произведения основания на высоту), получаем

$$S_\Delta = 0,5 r_1 r_2 \sin\varphi,$$

$$S_\Delta = 0,5 r_1 r_2 (\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = 0,5 r_1 r_2 (\cos\varphi_2 \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$

$$= 0,5\left(r_1 \overset{y_1}{\cancel{\sin\varphi_2}} \cdot r_2 \overset{x_2}{\cancel{\cos\varphi_2}} - r_1 \overset{x_1}{\cancel{\cos\varphi_1}} \cdot r_2 \overset{y_2}{\cancel{\sin\varphi_2}} \right) = 0,5(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

$$S_\Delta = 0,5\,| y_1 x_2 - x_1 y_2 | = 0,5\,| x_1 y_2 - x_2 y_1 | = 0,5 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь использована ***формула определителя второго порядка***, служащая его определением:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Если вершинами треугольника являются точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$, то формула для площади треугольника приобретает следующий вид:

$$S_\Delta = 0,5 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Кроме операций сложения векторов и умножения на число, можно определить ***скалярное произведение векторов*** формулой

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Непосредственно из определения вытекает формула

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\, np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\, np_{\mathbf{b}}\mathbf{a},$$

где $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b});\quad np_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Переход к полярным координатам позволяет выразить ***скалярное произведение через координаты сомножителей***:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) = r_1 r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \overbrace{r_1\cos\varphi_1}^{a_1}\overbrace{r_2\cos\varphi_2}^{b_1} + \overbrace{r_1\sin\varphi_1}^{a_2}\overbrace{r_2\sin\varphi_2}^{b_2} = a_1b_1 + a_2b_2$$

где $|\mathbf{a}| = r_1$, $|\mathbf{b}| = r_2$, $\mathbf{a}(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}(b_1,b_2)$.

Непосредственно из определения и данной формулы следуют ***свойства скалярного произведения:***

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
2) $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ – свойство линейности
3) $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$
4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
5) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$

Выражая косинус угла между векторами, из определения скалярного произведения и подставляя выражения через координаты, получаем:

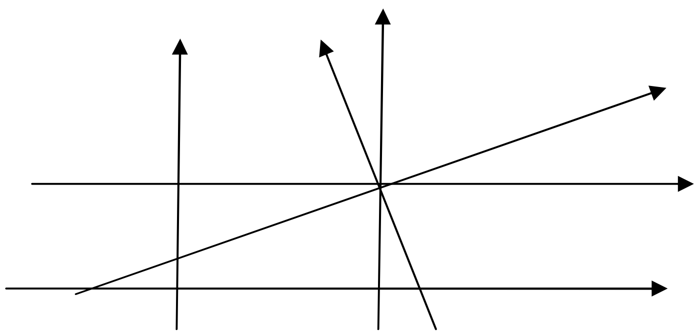
$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_2^2+b_1^2}}$$

Из определения скалярного произведения следует, что если $\mathbf{a}\ и\ \mathbf{b} \ne \mathbf{0}$, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, откуда следует условие перпендикулярности двух векторов через их координаты: $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

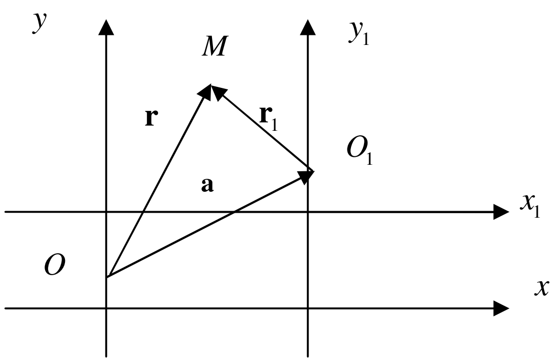
2.2. ЗАМЕНА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ.

На плоскости можно ввести сколько угодно декартовых систем координат. Интересно получить связь между одними и другими координатами.

Переход от одной системы координат к другой можно представить как комбинацию переноса и поворота.



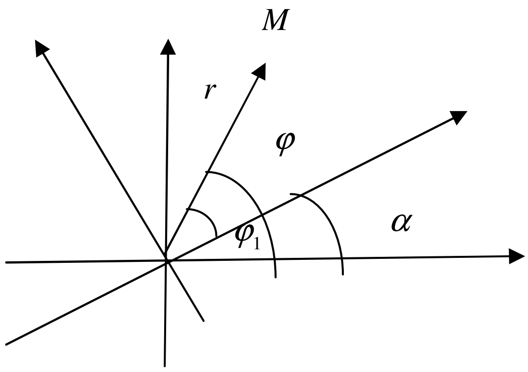
Прежде, чем вывести общую формулу, рассмотрим эти операции по отдельности. Начнём с переноса.



Пусть точка M имеет в исходной системе координаты $(x;y)$, соответствующие радиус-вектору $\mathbf{r}(x;y)$, а в новой – координаты $(x_1;y_1)$, соответствующие радиус-вектору $\mathbf{r}_1(x_1;y_1)$, а перенос производится на вектор $\mathbf{a}(a;b)$. Имеем очевидное векторное равенство $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{r}_1$, которое в координатах приобретает вид:

$$\begin{array}{l|l} x=x_1+a & x_1=x-a \\ y=y_1+b & y_1=y-b \end{array}$$

Немного сложнее получается формула для пересчёта координат при повороте. Её удобнее выводить, используя полярные координаты.



Если в исходной системе точка M имеет координаты $(r;\varphi)$, а в новой – $(r_1;\varphi_1)$, то выполняются очевидные равенства $r_1=r$, $\varphi_1=\varphi-\alpha$ или $\varphi=\varphi_1+\alpha$. Переходя от полярных координат к декартовым координатам, получаем:

$$x=r\cos\varphi=r\cos(\varphi_1+\alpha)=r\cos\varphi_1\cos\alpha-r\sin\varphi_1\sin\alpha=$$
$$=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha$$

$$y=r\sin\varphi=r\sin(\varphi_1+\alpha)=r\sin\varphi_1\cos\alpha+r\cos\varphi_1\sin\alpha=$$
$$=y_1\cos\alpha+x_1\sin\alpha$$

Таким образом, формулы замены координат запишем в виде:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{cases}$$

Обратный переход получается заменой α на (–α):

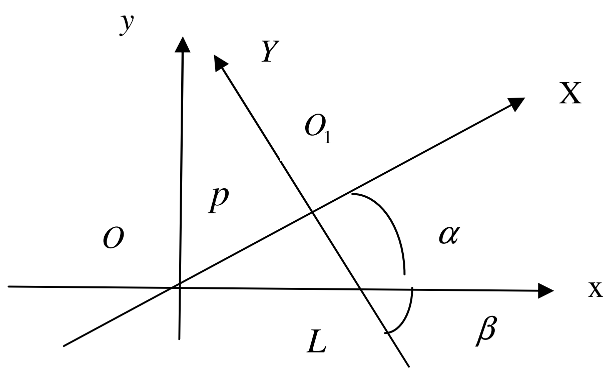
$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Объединяя формулы для переноса и поворота, получаем ***общие формулы замены координат на плоскости:***

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + a \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + b \end{cases}.$$

2.3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Выберем на плоскости новую систему координат, в которой ось OY направлена по прямой, а ось OX направлена перпендикулярно этой прямой и проходит через старое начало координат:



Тогда уравнение прямой может быть записано в виде $x_1 = 0$, откуда, воспользовавшись формулами замены координат, получим ***нормальное уравнение прямой на плоскости:***

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, $p = a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha$, $p = \left|\overrightarrow{OO_1}\right|$.

Решив это уравнение относительно y, получаем известное из средней школы уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$y = \underbrace{-ctg\alpha}_{k}\, x + \underbrace{\frac{p}{\sin\alpha}}_{b}$; $y = kx + b$; так как $-ctg\ \alpha = tg\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = tg\beta = k$.

Легко видеть, что нормальное уравнение является частным случаем уравнения вида Ax + By + C = 0.

Если коэффициенты A, B не обращаются одновременно в 0, то его снова можно привести к ***нормальному виду прямой***:

$$\pm\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} \pm \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Знак выбирается таким образом, чтобы свободный член удовлетворял условию $\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\le 0$.

Рассмотрим ***частные случаи.***

Если $A=0;\ B\ne 0$, то из нормального уравнения получаем:

$y=-\frac{C}{B}$, –. ***прямая является горизонтальной***,

если $A\ne 0;\ B=0$, то

$x=-\frac{C}{A}$, ***– прямая является вертикальной***.

Если A = B = 0, то прямой не получается.

Если $C\equiv 0$, то $\mathbb{R}$ (решение — вся плоскость);

если $C\ne 0\ \Rightarrow\ \emptyset$ (пустое множество).

Предположим, что прямая проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0)$. Подставим в ***общее уравнение прямой*** $Ax+By+C=0$, координаты точки: $Ax_0+By_0+C=0$ и вычтем из первого уравнения второе, тогда получим:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Выясним геометрический смысл данного уравнения. Пусть $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\, y-y_0)$ – вектор из заданной точки прямой в произвольную, тогда уравнение прямой запишется в виде $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0\Rightarrow\mathbf{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$, где $\mathbf{n}(A,B)$ ***– вектор нормали*** к заданной прямой.

Предположим, известен ***направляющий вектор*** $\mathbf{l}$, т.е. вектор, направленный вдоль прямой. Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0)$. Это условие запишется в виде $\overrightarrow{M_0M}\parallel\mathbf{l}$. Так как вектора параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, получаем так называемое ***каноническое уравнение прямой***

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$.

Из этого уравнения легко выводится ***уравнение прямой, проходящей через две точки –*** $M_0(x_0;\, y_0)$ и $M_1(x_1;\, y_1)$. В этом случае в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$:

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$.

Уравнение ***прямой в отрезках***. Если в качестве двух точек задать точки пересечения с осями координат, $M_0(a;0)$ и $M_1(0;b)$, то уравнение прямой запишется в виде:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Расстояние d **от точки** $M\left(x_0, y_0\right)$ **до** $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле $\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$.

Координаты точки $M(x;y)$**, делящей отрезок** AB в отношении $M_1M : M_2M = \lambda$, $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, **при делении пополам**, то есть в отношении $\lambda = 1:1 = 1$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Взаимное расположение двух прямых.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где угловые коэффициенты являются тангенсами улов наклона соответствующих прямых по отношению к оси OX: $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$. При этом **угол между прямыми** $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,

$$tg\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg\varphi_1 - tg\varphi_2}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$$

Рассмотрим ***частные случаи.***

1) $k_1 = k_2$ – ***прямые параллельны*** (совпадают при $b_1 = b_2$),

2) $k_1k_2 = -1$ – ***прямые перпендикулярны***.

Рассмотрим ту же задачу в случае, когда прямые заданы общим уравнением:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Из уравнений получаем координаты векторов нормалей $\mathbf{n}_1(A_1, B_1)$; $\mathbf{n}_2(A_2, B_2)$.

Прямые параллельны, если параллельны вектора их нормалей, т.е. координаты $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};\ A_1B_2 = A_2B_1, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 = 0,\ \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow |A_1B_1| = 0.$$

Прямые совпадают, если все коэффициенты пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то вектора $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ не параллельны, т.е. прямые пересекаются и имеют одну общую точку.

Таким образом, система $\begin{cases} Ax_1 + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение только когда $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Прямые перпендикулярны, если $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \ (n_1 \perp n_2)$, что в координатах выражается в виде $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Уравнение пучка прямых. Пусть две пересекающиеся прямые заданы общими уравнениями. Пучком прямых называется множество прямых, пересекающихся в той же точке. Докажем, что уравнение пучка прямых имеет вид:

$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$,

где конкретизация α и β задаёт прямую из пучка.

Очевидно, что при любых α и β ($\alpha^2+\beta^2\neq 0$) получаем прямую (уравнение линейно), проходящую через точку пересечения исходных прямых. Так как координаты точки пересечения удовлетворяют обоим уравнениям, то обе скобки будут равны нулю. Для любой прямой из пучка найдутся такие α и β, что формула будет выполняться.

Прямая будет однозначно задаваться вектором нормали, так как проходит через фиксированную точку (пересечение исходных прямых). Возьмём любой вектор нормали $\mathbf{n}(A,B)$, разложим его по базису – представим в виде линейной комбинации векторов нормалей исходных прямых $\mathbf{n}=\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2$. В итоге получим уравнение искомой прямой в виде

Ax + By + C = 0, т.е. $(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)+C=0$,

где $C=\alpha C_1+\beta C_2$ из условия прохождения прямой через заданную точку.

2.4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

<u>Определение.</u>

Кривой линией второго порядка называется геометрическое место точек, координаты которого удовлетворяют уравнению

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ – общее уравнение кривой второго порядка

Для исследования данного уравнения изучим три конкретных типа кривых второго порядка.

Первый тип кривых – эллипс.

<u>Определение.</u> **Эллипс** – это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов) есть величина постоянная: $|\overrightarrow{F_1M}|+|\overrightarrow{F_2M}|=const=2a.$

Выберем систему координат таким образом, чтобы фокусы располагались на оси OX симметрично относительно начала координат и оси OY. Обозначим расстояние между фокусами $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|$ через 2c. Тогда определение эллипса алгебраически запишется в виде:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

Перенесём один из корней в правую часть уравнения:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Возведём в квадрат обе части равенства:

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2+(x-c)^2+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2}\ .$$

При такой операции могут появиться лишние корни. Почему они не возникают в данном случае? Сокращаем:

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}=4a^2+\cancel{x^2}=2xc+\cancel{c^2}=4a\sqrt{(x-c)^2}\ ,$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\cancel{4}a^2-4xc$$

Снова возводим в квадрат: $a^2((x-c)^2+y^2)=a^4\cdot 2a^2xc+x^2c^2$

Снова сокращаем: $a^2(x^2-\cancel{2xc}+c^2+y^2)=a^4-\cancel{2a\cdot c}+x^2c^2$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2,$$

$$x^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}+a^2y^2=a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}$$

Так как a > c из геометрических соображений, можно ввести обозначение: $a^2 - c^2 = b^2$.

В результате получаем ***каноническое уравнение эллипса***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как $\dfrac{x^2}{a^2}\ge 0\ \Rightarrow\ \dfrac{y^2}{b^2}\le 1\Rightarrow\ b\le y\le b$, аналогично $\dfrac{x^2}{a^2}\le 1$, откуда $-a\le x\le a$.

Второй тип кривых – гипербола.

<u>Определение.</u>

Гипербола – это геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов) есть величина постоянная: $|\overrightarrow{F_1M}|-|\overrightarrow{F_2M}|=const=\pm 2a.$

После выкладок, аналогичных случаю эллипса, получаем каноническое ***уравнение гиперболы***:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Разложим на множители, воспользовавшись формулой для разности квадратов $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=1$.

Если одна скобка стремиться к бесконечности, то вторая должна стремиться к нулю, откуда получаем уравнения асимптот:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{b}{a}x \\ y&=-\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\}$$

<u>Определение.</u>

Парабола (третий тип кривых) – геометрическое место точек, расстояние от которых до фиксированной точки (фокуса) и до директрисы одинаково.

Выберем систему координат, в которой ось OX проходит через фокус перпендикулярно директрисы, расстояние между директрисой и фокусом обозначим p. Тогда, из определения параболы, получаем:

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

Возводим обе части равенства в квадрат $x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$.

Откуда $y^2-2px=0;\ y^2=2px$ – каноническое уравнение параболы.

Перенесём начало координат в полюс и перейдём в полярные координаты $x=r\cos\varphi;$ из геометрического определения параболы $r=p+x=p+r\cos\varphi\Rightarrow\Rightarrow r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$.

Выведем уравнения кривых, удовлетворяющих уравнению $\lambda r=p+x$ для некоторого параметра λ. Переходя к декартовым координатам, получаем уравнение $\lambda\sqrt{x^2+y^2}=p+x$.

Возводим в квадрат $\lambda^2(x^2+y^2)=P^2+2px+x^2$, откуда $x^2(\lambda^2-1)-2px+\lambda^2y^2=p^2$. Выделяем полный квадрат:

$$(\lambda^2-1)\left(x^2-\frac{2p}{\lambda^2-1}x+\frac{p^2}{(\lambda^2-1)^2}-\frac{p^2}{(\lambda^2-1)^2}\right)=(\lambda^2-1)\underbrace{\left(x-\frac{p}{\lambda^2-1}\right)^2}_{x'}-\frac{p^2}{\lambda^2-1}.$$

Откуда $(\lambda^2-1)x'^2+\lambda^2y^2=p^2\left(1+\frac{1}{\lambda^2-1}\right)=\frac{p^2\lambda^2}{\lambda^2-1}$, $(\lambda^2-1)x'^2+\lambda^2y^2=\frac{p^2\lambda^2}{\lambda^2-1}$,

$$\frac{(x')^2}{\frac{p^2\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}}+\frac{y^2}{\frac{p^2}{\lambda^2-1}}=1;$$

Если $-1<\lambda<1$, то получается гипербола; если $\lambda>1$ или $\lambda<-1$ – то эллипс.

Упражнение. Определить, что получается при $\lambda=\pm1$?

Вернёмся к ***общему уравнению второго порядка***, начиная его упрощение с квадратичной части $\underline{Ax^2+Bxy+Cy^2}+Dx+Ey+F=0$. Повернём систему координат таким образом, чтобы новое уравнение не содержало произведения xy:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$
$$A(x'^2\cos^2\alpha-2x'y'\cos\alpha\sin\alpha+y'^2\sin\alpha)+$$
$$B(x'^2\cos\alpha\sin\alpha+x'y'\underbrace{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}_{\cos2\alpha}-y'^2\cos\alpha\sin\alpha)+$$
$$+C(x'^2\sin^2\alpha+xx'y'\sin\alpha\cos\alpha+y'^2\cos^2\alpha)$$

Подбираем угол поворота таким образом, чтобы

$$x'y'\underbrace{(-A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha)}_{\substack{\parallel\\0}},$$

$$B\cos 2\alpha = (A-C)\sin 2\alpha, \text{ т.е. } ctg 2\alpha = \frac{A-C}{B}.$$

Таким образом, квадратичная часть уравнения приобретает вид:

$$x'^2\underbrace{(A\cos^2\alpha - B\cos^2\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha)}_{A_1} + y'^2\underbrace{(A\sin^2\alpha + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha)}_{C_1}$$

В получившемся уравнении $A_1x'^2 + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0$ рассмотрим различные ***варианты соотношений коэффициентов***.

1) $A_1 \neq 0;\ C_1 \neq 0$. Выделяем полные квадраты по x' и y':

$$A_1x'^2 + D_1x' = A_1\left(x'^2 + \frac{D_1}{A_1}x_1 + \left(\frac{D_1}{2A_1}\right)^2 - \left(\frac{D_1}{2A_1}\right)^2\right) = A_1\underbrace{\left(x' + \frac{D_1}{A_1}\right)^2}_{\substack{\parallel\\x''}} - \frac{D_1}{4A_1}$$

В результате, получаем уравнение $A_1x''^2 + C_1y''^2 + F_1 = 0$.

Если $F_1 \neq 0$, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x''^2}{\underbrace{\frac{-F_1}{A_1}}_{a^2}} + \frac{y''^2}{\underbrace{\frac{-F_1}{C_2}}_{b^2}} = 1$$

Рассмотрим частные случаи:

а) $\frac{F_1}{A_1} < 0;\ \frac{F_1}{C_1} < 0.$ В этом случае получается уравнение эллипса.

б) $\frac{F_1}{A_1} < 0;\ \frac{F_1}{C_1} > 0$ или $\frac{F_1}{A_1} > 0;\ \frac{F_1}{C_1} < 0$. В этом случае получается уравнение гиперболы. Данному случаю соответствует соотношение: $A_1C_1 < 0$.

в) $\frac{F}{A_1} > 0\ \ \frac{F_1}{C_1} > 0$. Множество точек, удовлетворяющих уравнению – $\varnothing$.

г) Если $F_1 = 0$, то уравнение имеет вид $C_1y''^2 = -A_1x''^2$.

I) Если $A_1C_1 > 0$, то множество решений является точкой $x'' = y'' = 0$.

II) Если $A_1C_1 < 0$, то $y'' = \pm\sqrt{\frac{A_1}{C_1}}\,x''$, получаем две пересекающиеся прямые.

2) При $A_1 = 0$; $C_1 \neq 0$ получаем уравнение $D_1x'' + C_1y''^2 + F_1 = 0$.

а)Если $D_1 \neq 0$, то получаем уравнение параболы: $y''^2 = \underbrace{-\frac{D_1}{C_1}}_{2p}\underbrace{\left(x' - \frac{F_1}{D}\right)}_{x''}$

б) Если $D_1 = 0$, то уравнение приобретает вид $y''^2 = -\frac{F_1}{C_1}$.

Теперь возможны три случая.

I) Если $\frac{F_1}{C_1} > 0$, то получаем $y'' = \pm\sqrt{\frac{-F_1}{C_1}}$, т.е. две параллельные прямые.

II) Если $\frac{F_1}{C_1} < 0$, то получаем $\emptyset$

III) Если $\frac{F_1}{C_1} = 0$, то получаем $y'' = 0$, т.е. прямую.

3)Если $A_1 \neq 0;\ C_1 = 0$, то получаем то же, что и в случае 2) только у заменяется на х.

4) Если $A_1 = C_1 = 0$, то получаем линейное уравнение общего вида, т.е. множество решений образуют прямую, пустое множество $\varnothing$, или всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

Таким образом, в зависимости от коэффициентов, множество решений уравнения второго порядка с двумя переменными образует:

1) ⬭ — эллипс;
2))(— гиперболу;
3) $\subset$ — параболу;
4) // — две параллельные прямые;
5) $\times$ — две пересекающиеся прямые
6) / — прямую;
7) $(\cdot)$ — точку;
8) $\mathbb{R}$ — всю плоскость;
9) $\varnothing$ — пустое множество.

Ш. ПРАКТИКУМ

3.1. ПРАКТИКУМ ПО КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМ

Пример 1. При каких действительных значениях x и y выполняется равенство $x(2-i)+y(2i-1)=4-5i$?

Решение. Раскрывая скобки в левой части уравнения и группируя действительные и мнимые части, получим: $(2x-y)+i(-x+2y)=4-5i$. Приравняем действительные и мнимые части справа и слева:

$2x-y=4$, $-x+2y=-5$, следовательно, $x=1$, $y=-2$.

Пример 2. Вычислить $(1+i)\left(\sqrt{5}-2i\right)$.

Решение. Перемножая почленно и учитывая, что $i^2=-1$, находим $(1+i)\left(\sqrt{5}-2i\right)=\sqrt{5}+i\sqrt{5}-2i+2=\left(\sqrt{5}+2\right)+i\left(\sqrt{5}-2\right)$.

Пример 3. Вычислить $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$. Выписать $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$z=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)}{\left(2-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}+2i+3i-\sqrt{3}}{4+3}=\frac{\sqrt{3}}{7}+i\frac{5}{7},$$

отсюда $\operatorname{Re} z=\frac{\sqrt{3}}{7}$, $\operatorname{Im} z=\frac{5}{7}$.

Пример 4. Какие комплексные числа сопряжены своим кубам?

Решение. Так как $z^3=(x+iy)^3=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)$, а по условию задачи $z^3=\overline{z}=x-iy$, то, приравнивая действительные и мнимые части, получим систему уравнений для x и y: $x^3-3xy^2=x$, $3x^2y-y^3=-y$.

Нетрудно проверить, что эта система имеет следующие действительные решения: $(x,y)=(0,0),(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$.

Следовательно, своим кубам сопряжены следующие комплексные числа: $z_1=0,\quad z_2=1,\quad z_3=-1,\quad z_4=i,\quad z_5=-i.$

Пример 5. Изобразить на комплексной плоскости числа $z=3+2i$ и $z=3-2i$. Найти их модули и аргументы.

Решение. Точки $z=3+2i$ и $z=3-2i$ построены на рис.1.

Заметим, что $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. На этом примере, сопряженным числам соответствуют точки комплексной плоскости, симметрично расположенные относительно действительной оси; поэтому для них $\arg z=-\arg z$. В данном случае:

$$\arg z=arctg\frac{2}{3},\ \arg z=-arctg\frac{2}{3},\ \operatorname{Arg} z=arctg\frac{2}{3}+2\pi k.$$

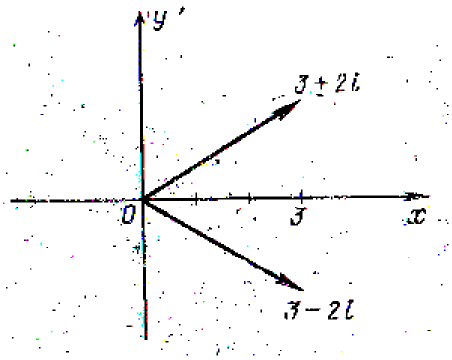


Рис.1

Пример 6. Какой геометрический смысл имеет модуль разности двух комплексных чисел?

Решение. Модуль разности двух комплексных чисел равен

$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ — это расстояние между точками z_1 и z_2.

Пример 7. Определить и начертить в комплексной плоскости линии, заданные уравнениями: а) $|z|=1$; б) $|z-2+i|=3$.

Решение. а) По определению, $|z|$ - расстояние от начала координат до точки z. Для данного множества точек это расстояние должно быть одним и тем же, равным 1. Поэтому искомая линия является окружностью с центром в начале координат и радиусом 1.

б) Так как $|z_1-z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2, то из равенства $|z-(2-i)|=3$ следует, что точки данной линии удалены от точки $2-i$ на расстояние, равное 3, то есть данная линия – окружность с центром в точке $2-i$ радиуса 3 (Рис.2).

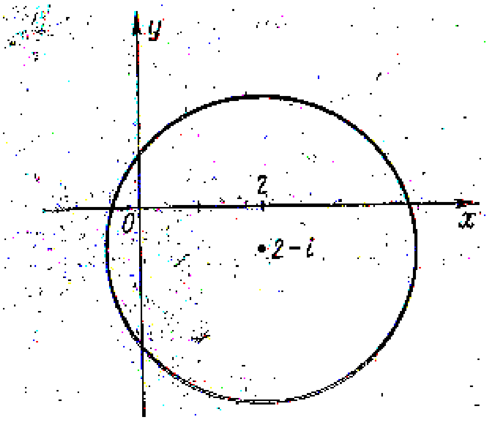


Рис.2

Пример 8. Определить геометрические места точек, для которых:

а) $\operatorname{Re} z=5$; *б*) $\operatorname{Re} z^2=a^2$; *в*) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение.

а) По определению, $\operatorname{Re} z=x$, поэтому уравнение можно переписать в виде $x=5$. Это уравнение определяет прямую, параллельную оси Oy.

б) Так как $z^2=x^2-y^2+i2xy$, то $\operatorname{Re} z^2=x^2-y^2$, поэтому условие $\operatorname{Re} z^2=a^2$ равносильно уравнению $x^2-y^2=a^2$, которое, как известно, определяет равностороннюю гиперболу (Рис. 3).

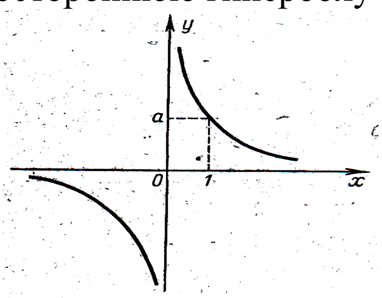


Рис.3

в) Уравнению $\arg z = \pi/3$ удовлетворяют точки, расположенные на луче, выходящем из начала координат под углом $\pi/3$ к положительному направлению оси Ox.

Пример 9. Определить множество точек, удовлетворяющих неравенствам, и построить их на плоскости:

а) $|z-i|<3$; *б*) $|z+1|\geq 1$; *в*) $1\leq |z-1-i|<3$.

Решение. а) Неравенство $|z-i|<3$ означает, что расстояние от точки i до точки z меньше трех. Этому условию удовлетворяют точки круга с центром в точке i радиуса 3, за исключением его границы, уравнение которой $|z-i|=3$.

б) Из неравенства $|z+1|\geq 1$ следует, что расстояние от точки -1 до точек z должно быть не меньше 1, поэтому искомое множество лежит вне круга с центром в точке -1 радиуса 1 (Рис.4). Окружность $|z+1|=1$ принадлежит данному множеству.

в) Искомое множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям: $1\leq |z-1-i|$ и $|z-1-i|<3$. Первое из этих условий определяет внешность единичного круга, с центром в точке $1+i$, второе – круг радиуса 3 с центром в той же точке $1+i$ (Рис.5).

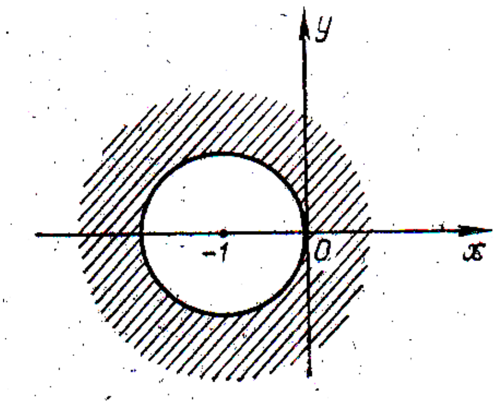


Рис.4

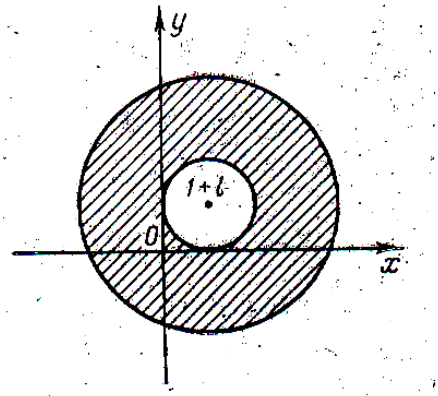


Рис.5

Поэтому данное множество – кольцо, ограниченное концентрическими окружностями радиусов 1 и 3 с центром в $1+i$.

Пример 10. Определить, какие множества точек удовлетворяют заданным неравенствам: *а*) $\operatorname{Re} z<2$; *б*) $\left|\dfrac{z+2}{z-2}\right|\leq 1$; *в*) $-\dfrac{\pi}{4}<|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. а) Так как $\operatorname{Re} z = x$, то точки искомого множества должны удовлетворять неравенству $x<2$. Это множество – левая полуплоскость, граница множества – прямая $x=2$ - ему не принадлежит.

б) Умножив обе части данного неравенства на $|z-2|$, получим равносильное неравенство $|z+2|\leq |z-2|$. Возведем обе части этого неравенства в квадрат и раскроем скобки, положив $z = x + iy$:

$$(x+2)^2 + y^2 \le (x-2)^2 + y^2; \qquad 4x \le -4x; \quad x \le 0.$$

Следовательно, искомое множество – левая полуплоскость, включая ее границу $x = 0$.

в) Для точек искомого множества значения аргументов заключены в пределах от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, поэтому данное множество – угол, ограниченный лучами $\phi = -\frac{\pi}{4}$ и $\phi = \frac{\pi}{2}$. Сами лучи в данное множество не входят.

Пример 11. Представить в тригонометрической форме числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = 2i$ и $z_4 = -5$.

Решение. Определим модули данных чисел по формуле $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$|z_1| = r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad |z_2| = r_2 = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$|z_3| = r_3 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2, \qquad |z_4| = r_4 = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Для того, чтобы найти аргументы, построим точки z_1, z_2, z_3 и z_4 на комплексной плоскости (Рис.6).

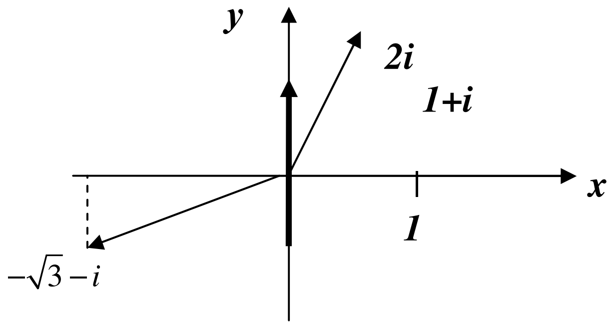


Рис.6

Заметив, что точка z_1 лежит в первой четверти, а z_2 - в третьей, по формуле (3) получаем:

$$\arg z_1 = \phi_1 = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad \arg z_2 = \phi_2 = arctg\frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Точка z_3 лежит на мнимой оси, следовательно, $\arg 2i = \frac{\pi}{2}$, а точка z_4 на отрицательной вещественной полуоси, поэтому $\arg z_4 = \pi$.

В результате получим:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right], \quad z_2 = -\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right],$$

$$z_3 = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right], \qquad z_4 = 5\left[\cos\pi + i\sin\pi\right].$$

Пример 12. Вычислить $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$.

Решение. В примере 11 мы нашли тригонометрическую форму числа $-\sqrt{3}-i$: $-\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$.

Применяя формулу Муавра, получаем

$$\left(-\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left[\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=32\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=32\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right]=16\sqrt{3}-16i.$$

Пример 13. Найти $\sqrt[3]{1+i}$.

Решение. Число $1+i$ представлено в тригонометрической форме в примере 11: $1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$.

Для вычисления кубических корней из данного числа используем формулу извлечения корня натуральной степени из комплексного числа. Мы получим три различных значения корня:

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right],\ \left(k=0,1,2\right),$$

или $z_1=\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$, $\qquad z_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right]$,

$$z_3=\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right].$$

Пример 14. Найти корни уравнения $z^8-2\sqrt{3}z^4+4=0$ и построить их на комплексной плоскости.

Решение. Обозначим $z^4=t$, тогда данное уравнение превратится в квадратное уравнение относительно t: $t^2-2\sqrt{3}t+4=0$.

Его корни $t=\sqrt{3}\pm i$, следовательно, корни z исходного уравнения $-\sqrt[4]{\sqrt{3}\pm i}$. Числа $\sqrt{3}+i$ и $\sqrt{3}-i$ - комплексно сопряженные, поэтому модули у них одинаковые, равные 2, а аргументы отличаются знаком:

$$\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\frac{\pi}{6},\quad \arg\left(\sqrt{3}-i\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

Находим корни четвертой степени из этих чисел:

$$z_{1,2,3,4}=\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\right],k=\overline{0,3},$$

$$z_{5,6,7,8} = \sqrt[4]{\sqrt{3}-i} = \sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\right], k=\overline{4,7}$$

Заметим, что все корни $z_1, z_2, ..., z_8$ имеют одинаковые модули: $|z_k| = \sqrt[4]{2}\,(k = 0,1,2,...,8)$. Отсюда следует, что все они лежат на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[4]{2}$. Аргументы этих чисел $\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$. Это значит, что аргумент числа z_2 отличается от аргумента числа z_1 на $\frac{\pi}{2}$, аргумент z_3 отличается от аргумента z_1 на π, аргумент z_4 - на $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому, построив на плоскости вектор z_1, получим точки z_2, z_3, z_4, если повернем вектор z_1 на углы $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ соответственно.

Таким образом, точки z_2, z_3, z_4 лежат в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[4]{2}$, одна из вершин которого –

точка z_1. Таким же образом строятся точки z_6, z_7, z_8: строим точку z_5 и вписываем в окружность квадрат с вершиной в этой точке, остальные его вершины дадут точки z_6, z_7, z_8 (Рис.7).

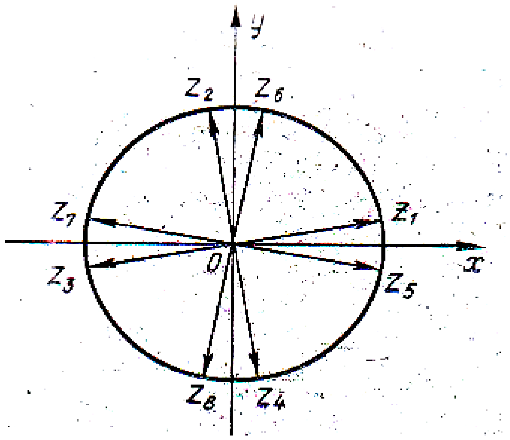


Рис.7

3.1.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I. Найти:

1) $z_1 + z_2$, найти Re и Im части;
2) $z_1 - z_2$, найти Re и Im части;
3) $z_1 \cdot z_2$, найти Re и Im части;
4) $\frac{z_1}{z_2}$, найти Re и Im части;
5) $|z_1|$, $|z_2|$, $|\overline{z}_1|$, $|\overline{z}_2|$;

6) $\operatorname{Arg} z_1$, $\operatorname{Arg} z_2$;

7) Изобразить на комплексной плоскости числа z_1, z_2, $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$;

8) Найти $\dfrac{(z_1+2z_2)\cdot z_2}{z_1}$.

1.1. $z_1=3-i$, $z_2=2+2i$, 1.2. $z_1=4+2i$, $z_2=4-3i$,

1.3. $z_1=5i$, $z_2=3-2i$, 1.4. $z_1=5-i$, $z_2=-4+i$,

1.5. $z_1=-3+i$, $z_2=2-2i$, 1.6. $z_1=-5-3i$, $z_2=4+i$,

1.7. $z_1=4+i$, $z_2=-3+2i$, 1.8. $z_1=-2-i$, $z_2=-2i$,

1.9. $z_1=-3+i$, $z_2=1+i$, 1.10. $z_1=2-2i$, $z_2=3+3i$,

1.11. $z_1=5-i$, $z_2=-3+2i$, 1.12. $z_1=-3i$, $z_2=2+2i$,

1.13. $z_1=-2$, $z_2=3-2i$, 1.14. $z_1=3-4i$, $z_2=-2+2i$,

1.15. $z_1=-1+2i$, $z_2=5+4i$, 1.16. $z_1=-3i$, $z_2=2-i$,

1.17. $z_1=2-3i$, $z_2=-3-3i$, 1.18. $z_1=4-3i$, $z_2=-1+i$,

1.19. $z_1=3$, $z_2=4-4i$, 1.20. $z_1=4i$, $z_2=-3+3i$.

II. Определить множество точек, удовлетворяющих неравенству и построить их на плоскости.

2.1. *а)* $|z-2-i|<3$; *б)* $|z+1|+|z-2|=5$.

2.2. *а)* $|z-3i|>2$; *б)* $|z+1|+|z-3|<7$.

2.3. *а)* $|z+1|\le 2$; *б)* $|z-1|+|z-3|<3$.

2.4. *а)* $|z+3+i|\ge 3$; *б)* $|z-2|+|z-2|=6$.

2.5. *а)* $|z-6|<4$; *б)* $|z-4|+|z+1|<7$.

2.6. *а)* $|z-4i|\ge 2$; *б)* $|z+1|+|z-1|>3$.

2.7. *а)* $|z+2-i|<4$; *б)* $|z-2|+|z-3|=5$.

2.8. *а)* $|z-1+i|\le 2$; *б)* $|z-1|+|z+4|>6$.

2.9. *а)* $|z+2i|>3$; *б)* $|z-3|+|z-1|<7$.

2.10. *а)* $|z-1|\le 2$; *б)* $|z-4|+|z|=6$.

2.11. *а)* $|z-2+i|\ge 3$; *б)* $|z-2|+|z+1|\ge 5$.

2.12. *а)* $|z-4|<2$; *б)* $|z+1|+|z-3|<6$.

2.13. *а)* $|z-3i|\ge 4$; *б)* $|z-1|+|z+1|=3$.

2.14. *а)* $|z+3-2i|>3$; *б)* $|z|+|z-2|>4$.

2.15. *а)* $|z-1+3i|\le 1$; *б)* $|z-1|+|z+2|\le 7$.

2.16. *а)* $|z-5i|\ge 3$; *б)* $|z+1|+|z-4|>2$.

2.17. *а)* $|z+3-i|<2$; *б)* $|z+3-i|+|z+2+2i|<3$.

2.18. *а)* $|z+4-i|\le 1$; *б)* $|z+4+2i|+|z+4-3i|>1$.

2.19. *а)* $|z-4-2i|>3$; *б)* $|z+5i|+|z+3-2i|=3$.

2.20. *а)* $|z-3+i|<2$; *б)* $|z+2-2i|+|z+3+3i|>2$.

III. Представить в показательной и тригонометрической форме.

3.1. $z = 1 + 3$; 3.2. $z = \sqrt{3} + i$;

3.3. $z = -1 + \sqrt{3}i$; 3.4. $z = 1 - i$;

3.5. $z = -\sqrt{3} - i$; 3.6. $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;

3.7. $z = -1 + i$; 3.8. $z = 2 - 2i$;

3.9. $z = -\sqrt{3} + i$; 3.10. $z = 3 + 3i$;

3.11. $z = \sqrt{3} - i$; 3.12. $z = 1 - \sqrt{3}i$;

3.13. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; 3.14. $z = \sqrt{12} - 2i$;

3.15. $z = -\sqrt{12} + 2i$; 3.16. $z = \sqrt{2} + 2i$;

3.17. $z = -\sqrt{3} + 4i$; 3.18. $z = 4 + 4i$;

3.19. $z = -5 - \sqrt{11}i$; 3.20. $z = \sqrt{11} + 5i$.

IV. Вычислить.

4.1. $\left(-\sqrt{3} + i\right)^3$; 4.2. $(2 - 2i)^4$;

4.3. $(-1 + i)^5$; 4.4. $\left(-\sqrt{3} - i\right)^5$;

4.5. $\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^4$; 4.6. $(1 - i)^5$;

4.7. $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)^3$; 4.8. $\left(\sqrt{3} + i\right)^4$;

4.9. $(1 + i)^5$; 4.10. $\left(-\sqrt{3} - i\right)^6$;

4.11. $\left(-\sqrt{12} + 2i\right)^4$; 4.12. $\left(\sqrt{12} - 2i\right)^5$;

4.13. $(-1 - i)^4$; 4.14. $\left(\sqrt{3} - i\right)^3$;

4.15. $(3 + 3i)^5$; 4.16. $(2 + 2i)^5$;

4.17. $\left(\sqrt{12} - 2i\right)^4$; 4.18. $\left(\sqrt{11} + 5i\right)^3$;

4.19. $\left(-5 - \sqrt{11}i\right)^4$; 4.20. $\left(-2 - \sqrt{12}i\right)^3$.

V. Вычислить.

5.1. $\sqrt[5]{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$; 5.2. $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$;

5.3. $\sqrt[4]{\sqrt{12} - 2i}$; 5.4. $\sqrt[5]{-2 + 2i}$;

5.5. $\sqrt[5]{1 - i}$; 5.6. $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$;

5.7. $\sqrt[5]{2 - 2i}$; 5.8. $\sqrt[3]{\sqrt{12} - 2i}$;

5.9. $\sqrt[4]{-2 - 2i}$; 5.10. $\sqrt[4]{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$;

5.11. $\sqrt[5]{-1 + i}$; 5.12. $\sqrt[4]{1 - i}$;

5.13. $\sqrt[3]{\sqrt{3} + i}$; 5.14. $\sqrt[4]{1 + i}$;

5.15. $\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{13}i}$; 5.16. $\sqrt[4]{-3 + \sqrt{7}i}$;

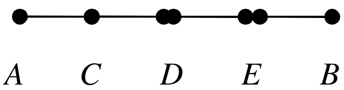
5.17. $\sqrt[5]{\sqrt{13} + \sqrt{3}i}$; 5.18. $\sqrt[4]{\sqrt{11} + 5i}$;

5.19. $\sqrt[5]{3+\sqrt{7}i}$; 5.20. $\sqrt[4]{\sqrt{7}+3i}$.

3.2. ПРАКТИКУМ ПО ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Задача 1. Отрезок AB делится точками C, D, E на равные части. Зная точки $A(3;-2)$ и $E(6;4)$, найти точки B, C, D.

Решение.



Точка C делит отрезок AE в отношении $\lambda=\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{1}{2}$, а точка D – в отношении $\lambda=\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{2}{1}$. Полагая, что $A(x_1;y_1)$, $E(x_2;y_2)$, найдем:

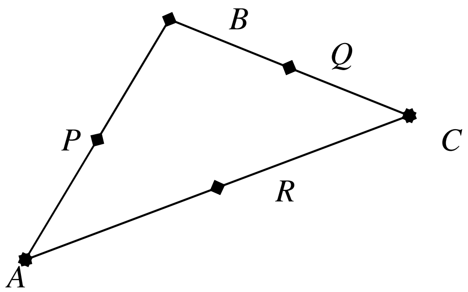
$$x_c=\frac{3+0,5\cdot 6}{1+0,5}=4,\quad y_c=\frac{-2+0,5\cdot 4}{1+0,5}=0;\quad C(4;0);$$

$$x_D=\frac{3+2\cdot 6}{1+2}=5,\quad y_D=\frac{-2+2\cdot 4}{1+2}=2;\quad D(5;2).$$

Точку $B(x_2,y_2)$ можно найти по формулам нахождения координат точки $E(x,y)$, делящей отрезок DB пополам. Считаем, что $D(x_1;y_1)$, тогда получим: $6=\dfrac{3+x_B}{2}$, $4=\dfrac{2+y_B}{2}$, $B(7;6)$.

Задача 2. Найти вершины треугольника ABC, зная середины его сторон $P(2;3)$, $Q(5;4)$, $R(6;-3)$.

Решение. Считая координаты вершин неизвестными применить к каждой из сторон $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$



$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=2,\\ \dfrac{x_2+x_3}{2}=5,\\ \dfrac{x_3+x_1}{2}=6.\end{cases}\quad x_1=3,\ x_2=1,\ x_3=9 \qquad \begin{cases}\dfrac{y_1+y_2}{2}=3,\\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=4,\\ \dfrac{y_3+y_1}{2}=-3.\end{cases}\quad y_1=3,\ y_2=10,\ y_3=-2$$

$$A(3;-4),\quad B(1;10),\quad C(9;-2).$$

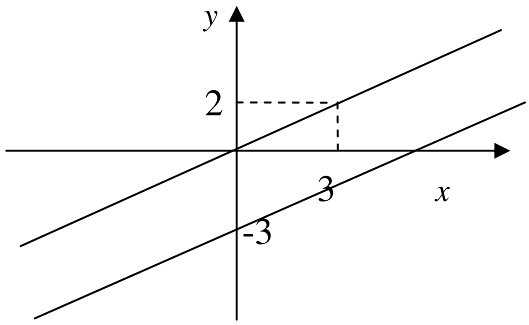
Задача 3. Построить прямую $2x-3y-9=0$ по угловому коэффициенту и отрезку, отсекаемому ею на оси ординат.

Решение. Разрешим общее уравнение относительно y, получим уравнение с угловым коэффициентом: $y=\dfrac{2}{3}x-3,\quad k=\dfrac{2}{3},\quad b=-3$.

Дальнейшее решение разобьем на два этапа.

а) Построим прямую, проходящую через $(0;0)$ и наклоненную под углом ϕ, так что $tg\phi=2/3$;

б) Так как $b=-3$, то через $B(0;-3)$ проведем прямую параллельно построенной



Задача 4. Даны вершины треугольника ABC: $A(4;3)$, $B(-3;-3)$, $C(2;7)$. Найти:

1) Уравнения сторон;

2) Уравнение высоты CH;

3) Уравнение медианы AM и ее длину; центр тяжести;

4) Уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

5) Вычислить $\angle A$ (через tgQ; через $\cos\phi$);

6) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $\boldsymbol{A}$, и образующих с BC угол $45°$;

7) Определить расстояние от точки $D(-5;8)$ до AB;

8) Найти точку симметричную с точкой $D(-5;8)$ относительно AB;

9) Составить уравнения биссектрис его внутреннего угла при вершине A;

10) Уравнение окружности описанной около треугольника ABC.

Решение.

1) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, получим:

AB: $\dfrac{x-4}{-3-4}=\dfrac{y-3}{-3-3},\quad \dfrac{x-4}{-7}=\dfrac{y-3}{-6}$ – каноническое уравнение с

направляющим вектором $\bar{S}_{AB}=\{-7;-6\}$;
или $6(x-4)=7(y-3)$, $6x-7y-3=0$ – общее уравнение прямой;

$y=\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}$ – с угловым коэффициентом, $K_{AB}=\frac{6}{7}$.

AC: $\frac{x-4}{2-4}=\frac{y-3}{7-3}, \frac{x-4}{-2}=\frac{y-3}{4}$, $\bar{S}_{AC}=\{-1;2\}$; $2x+y-11=0$; $y=-2x+11$, $K_{AC}=-2$.

BC: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+3}{7+3}$, $\frac{x+3}{5}=\frac{y+3}{10}$, $\bar{S}_{BC}=\{1;2\}$; $2x-y+3=0$; $y=2x+3$, $K_{BC}=2$.

2) Угловой коэффициент прямой AB: $k_1=\frac{6}{7}$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH угловой коэффициент высоты CH: $k_2=-\frac{7}{6}$, $(k_1\cdot k_2=-1)$. По точке $C(2;7)$ и угловому коэффициенту $k_2=-\frac{7}{6}$ составляем уравнение высоты CH: $y-7=-\frac{7}{6}(x-2)$ или $7x+6y-56=0$.

3) Найдем середину M стороны BC:

$x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{7-3}{2}=2$, то есть $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Уравнение AM: $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{y-3}{2-3}$, или $9y+2x-35=0$.

Длина медианы AM: $\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-4\right)^2+(2-3)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+1}=\frac{\sqrt{85}}{2}$.

Медианы пересекаются в точке, делящей каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, тогда имеем:

$x_N=\frac{x_A+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+2}=1$, $y_N=\frac{y_A+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{3+2\cdot 2}{3}=\frac{7}{3}$;

Центр тяжести $\vec{N}(1;7/3)$.

4) Так как угловые коэффициенты параллельных прямых между собою равны, а для прямой AB $6x-7y-3=0$ угловой коэффициент $k=\frac{6}{7}$, то и угловой коэффициент искомой прямой равен $\frac{6}{7}$.

Зная координаты точки C и $k=\frac{6}{7}$, имеем: $y-7=\frac{6}{7}(x-2)$,

или $7y-6x-37=0$.

5) За угол между прямыми возьмем угол между их нормальными векторами. AB: $6x-7y-3=0$, $\bar{n}_1\{6;-7\}$, AC: $2x+y-11=0$, $\bar{n}_2\{2;1\}$,

Тогда $\cos\phi=\frac{(\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}=\frac{12-7}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$;

отсюда $\phi=\arccos 0,243$;

С другой стороны $tg\theta = \left|\frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}}\right| = \left|\frac{\frac{6}{7} + 2}{1 + \frac{6}{7} \cdot (-2)}\right| = 4$, $\angle\theta = arctg4$.

6) Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k. Угловой коэффициент прямой BC равен 2. Так как угол между этими прямыми равен $\frac{\pi}{4}$, то

$tg\frac{\pi}{4} = \left|\frac{k-2}{1+2k}\right|$, то есть $1 = \left|\frac{k-2}{1+2k}\right|$, откуда $\frac{k-2}{1+2k} = 1$, $\frac{k-2}{1+2k} = -1$.

Решая каждое из полученных уравнений, находим $k = -3$ и $k = 1/3$.
Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется в виде

$y - 3 = -3(x-4)$, то есть $y + 3x - 15 = 0$,

а уравнение другой прямой – $y - 3 = \frac{1}{3}(x-4)$, то есть $3y - x - 5 = 0$.

7) $d = \frac{|6x_o - 7y_o - 3|}{\sqrt{36+49}} = \frac{|6(-5) - 7\cdot 8 - 3|}{\sqrt{85}} = \frac{89}{\sqrt{85}} \approx 9{,}65$.

8) Чтобы найти проекцию P точки D на AB $6x - 7y - 3 = 0$, найдем пересечение прямой, проходящей через точку $D(-5; 8)$, перпендикулярно данной прямой. Нормальный вектор AB есть $\overline{n}\{6; -7\}$, он будет коллинеарный искомой прямой, $\overrightarrow{DM}\{x+5;\ y-8\}$. Так как $\overrightarrow{DM} \parallel \vec{n}$, то $\frac{x+5}{6} = \frac{y-8}{-7}$ или $7x + 6y - 13 = 0$.

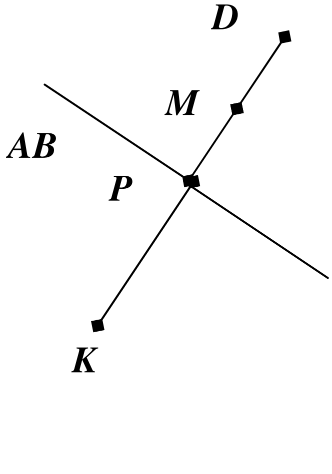
Найдем точку пересечения прямых $6x - 7y - 3 = 0$ и $7x + 6y - 13 = 0$.

$\begin{cases} 6x - 7y - 3 = 0 \\ 7x + 6y - 13 = 0 \end{cases}$, $P\left(\frac{109}{85}; \frac{57}{85}\right)$.

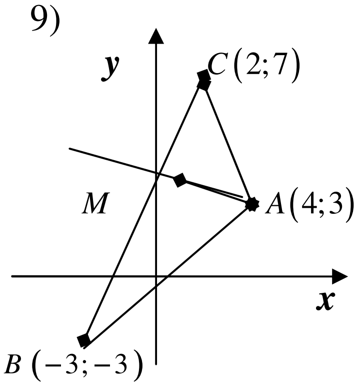
Найдем точку $K(x, y)$ симметричную точке D относительно прямой AB. Так как точка P есть середина отрезка KD то

$x_p = \frac{x_K + x_D}{2}$, $y_p = \frac{y_K + y_D}{2}$; $\qquad \frac{109}{85} = \frac{x-5}{2}$, $\frac{57}{85} = \frac{y+8}{2}$;

$x = \frac{643}{85}$, $\quad y = -\frac{566}{85}$; $K\left(\frac{643}{85}; -\frac{566}{85}\right)$.



9)



$\overrightarrow{AC}\{-2;4\}$, $\overrightarrow{AM}\{x-4;\,y-3\}$, $\overrightarrow{AB}\{-7;-6\}$

$$\cos(MAC)=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{(x-4)\cdot(-2)+(y-3)\cdot 4}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{-2x+4y-4}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\cdot\sqrt{20}}$$

$$\cos(BAM)=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AB}}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{AB}\right|}=\frac{(x-4)\cdot(-7)+(y-3)\cdot(-6)}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\cdot\sqrt{85}}=\frac{-7x-6y+46}{\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\cdot\sqrt{85}};$$

Но $\cos(MAC)=\cos(BAM)$, поэтому

$$\frac{-2x+4y-4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}}=\frac{-7x-6y+46}{\sqrt{85}\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}};$$

$$\sqrt{85}(-2x+4y-4)=\sqrt{20}(-7x-6y+46),$$

$$\sqrt{\frac{17}{4}}(-2x+4y-4)=-7x-6y+46,$$

$$\sqrt{17}(-x+2y-2)=-7x-6y+46,$$

$$x\left(7-\sqrt{17}\right)+y\left(2\sqrt{17}+6\right)-\left(2\sqrt{17}+46\right)=0.$$

10) Центр окружности, описанной около треугольника, есть точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

Пусть точка $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$ середина BC, а $N(3;5)$ – середина AC.

Серединные перпендикуляры:

$$BC:\quad y-2=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad 4y+2x-7=0;$$

$$AC:\quad y-5=\frac{1}{2}(x-3),\qquad 2y-x-7=0.$$

Точка пересечения серединных перпендикуляров K:

$$\begin{cases}4y+2x-7=0\\ 2y-x-7=0\end{cases},\ K\left(-\frac{7}{4};\frac{21}{8}\right).$$

Радиус описанной окружности $R=\left|\overrightarrow{KA}\right|$.

$$\left|\overrightarrow{KA}\right|=\left\{\frac{23}{4};\frac{3}{8}\right\},\quad \left|\overrightarrow{KA}\right|=\sqrt{\left(\frac{46}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{2125}{64}}\qquad R^2=\frac{2125}{64}.$$

Уравнение окружности $(x-x_k)^2+(y-y_k)^2=R^2$:

$$\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\left(y-\frac{21}{8}\right)^2=\frac{2125}{64}.$$

3.2.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание.

1. Отрезок AB разделить на три равные части. Определить координаты точек деления.
2. Определить координаты вершин треугольника, зная середины его сторон: P, Q, R.
3. Построить прямую $Ax+By+C=0$ по угловому коэффициенту и отрезку, отсекаемому ею на оси ординат.
4. Даны вершины треугольника ABC и точка D, найти:

1) уравнения сторон треугольника (канонические, общие, с угловым коэффициентом);
2) уравнения высот из точки A на BC;
3) уравнения медиан и их длины;
4) центр тяжести (точка пересечения медиан);
5) через точку A провести прямую, параллельную BC;
6) вычислить угол A; (через tgQ; через $\cos\phi$);
7) составить уравнения прямых, проходящих через точку A, и образующих с BC угол $45°$;
8) расстояние от точки D до AB;
9) точку симметричную с точкой $D(-3;1)$ относительно AB;
10) уравнения биссектрис углов A и B;
11) уравнение окружности описанной около треугольника ABC.

Вариант 1.

1. $\boldsymbol{A}(2;5)$; $\boldsymbol{B}(-3;1)$.
2. $\boldsymbol{P}(1;4)$; $\boldsymbol{Q}(6;1)$; $\boldsymbol{R}(4;-1)$.
3. $7\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{y}-16=0$.
4. $\boldsymbol{A}(-2;4)$, $\boldsymbol{B}(3;1)$, $\boldsymbol{C}(10;7)$; $\boldsymbol{D}(-3;1)$.

Вариант 2.

1. $\boldsymbol{A}(-5;1)$ $\boldsymbol{B}(8;-2)$.
2. $\boldsymbol{P}(3;-1)$; $\boldsymbol{Q}(7;3)$; $\boldsymbol{R}(5;8)$.
3. $5\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}-15=0$.
4. $\boldsymbol{A}(1;7)$, $\boldsymbol{B}(-3;-1)$, $\boldsymbol{C}(11;-3)$; $\boldsymbol{D}(-5;7)$.

Вариант 3.

1. $\boldsymbol{A}(1;-3)$ $\boldsymbol{B}(-2;4)$.

2. $P(3;5)$; $Q(5;8)$; $R(-1;0)$.

3. $x+5y-8=0$

4. $A(1;-2)$, $B(7;1)$, $C(3;7)$; $D(-2;2)$.

Вариант 4.

1. $A(1;4)$ $B(-8;-4)$.

2. $P(2;4)$; $Q(1;1)$; $R(3;6)$.

3. $2x-y-5=0$.

4. $A(-4;2)$, $B(-6;6)$, $C(6;2)$; $D(1;1)$.

Вариант 5.

1. $A(-7;-4)$ $B(3;2)$.

2. $P(-3;7)$; $Q(5;7)$; $R(6;9)$.

3. $x-2y+4=0$.

4. $A(4;-4)$, $B(8;2)$, $C(3;8)$; $D(-2;3)$.

Вариант 6.

1. $A(3;-8)$ $B(-4;6)$.

2. $P(2;-1)$; $Q(1;6)$; $R(3;-9)$.

3. $x+3y-6=0$.

4. $A(1;-6)$, $B(3;4)$, $C(-3;3)$; $D(-3;-3)$.

Вариант 7.

1. $A(-2;-6)$ $B(-3;5)$.

2. $P(1;-1)$; $Q(3;5)$; $R(5;8)$.

3. $3x-2y-7=0$.

4. $A(-5;2)$, $B(0;-4)$, $C(5;7)$; $D(6;1)$.

Вариант 8.

1. $A(-4;-5)$ $B(8;1)$.

2. $P(-2;4)$; $Q(3;1)$; $R(10;7)$.

3. $6x+5y-7=0$.

4. $A(-3;8)$, $B(-6;2)$, $C(0;-5)$; $D(2;2)$.

Вариант 9.

1. $A(4;5)$ $B(3;-6)$.

2. $P(-5;6)$; $Q(5;-3)$; $R(-2;4)$.

3. $2x-5y+3=0$.

4. $A(1;3)$, $B(-1;4)$, $C(-2;-3)$; $D(3;4)$.

Вариант 10.

1. $A(-2;3)$ $B(4;-3)$.

2. $P(-4;6)$; $Q(3;-5)$; $R(2;6)$.

3. $2x+4y-5=0$.

4. $A(3;-2)$, $B(-6;-2)$, $C(1;1)$; $D(4;6)$.

Вариант 11.

1. $A(-4;6)$ $B(3;-2)$.
2. $P(-5;1)$; $Q(6;-4)$; $R(4;-5)$.
3. $-4x+6y+3=0$.
4. $A(7;5)$, $B(-4;-5)$, $C(2;-3)$; $D(-4;6)$.

Вариант 12.

1. $A(7;5)$ $B(-4;-5)$.
2. $P(5;8)$; $Q(-5;3)$; $R(-3;5)$.
3. $5x+y-4=0$.
4. $A(-5;-4)$, $B(7;3)$, $C(6;-2)$; $D(4;6)$.

Вариант 13.

1. $A(7;4)$ $B(1;-2)$.
2. $P(-4;-7)$; $Q(-4;-5)$; $R(2;-3)$.
3. $3x+2y+1=0$.
4. $A(5;2)$, $B(-3;5)$, $C(1;-5)$; $D(9;-3)$.

Вариант 14.

1. $A(5;3)$ $B(-3;-4)$.
2. $P(5;-4)$; $Q(-4;-6)$; $R(3;2)$.
3. $6x+2y-9=0$.
4. $A(-7;-6)$, $B(5;1)$, $C(8;-4)$,; $D(3;4)$.

Вариант 15.

1. $A(-6;-3)$ $B(5;1)$.
2. $P(7;4)$; $Q(-5;3)$; $R(1;-5)$.
3. $7x-9y+1=0$.
4. $A(-8;2)$, $B(3;-5)$, $C(2;4)$; $D(4;6)$.

Вариант 16.

1. $A(4;3)$ $B(2;7)$.
2. $P(-9;-7)$; $Q(-4;3)$; $R(5;-4)$.
3. $3x+4y+4=0$.
4. $A(3;5)$, $B(-3;2)$, $C(-3;-2)$; $D(7;8)$.

3.3. ПРАКТИКУМ ПО КРИВЫМ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ЭЛЛИПС)

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Если центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = r^2$.

Если же начало координат перенесено в точку$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, то уравнение окружности имеет вид: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$,

где a и b - координаты центра окружности, а r - радиус окружности.

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных фиксированных точек (фокусов) есть для всех точек эллипса одна и та же постоянная величина (эта постоянная величина должна быть больше, чем расстояние между фокусами). Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где a - большая полуось эллипса; b - малая полуось эллипса.
Если $2c$ - расстояние между фокусами, то между a, b и c (если $a > b$) существует соотношение $a^2 - b^2 = c^2$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большей оси $e = c / a$.

У эллипса эксцентриситет $e < 1$ (так как $c < a$). Фокусы эллипса лежат на большой оси.

Задача 1. Написать уравнение окружности с центром в точке $C(2, -3)$ и радиусом, равным 6.

Решение.
По уравнению (1), полагая в нем $a = 2,\ b = 3,\ r = 6$, сразу имеем $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$, или $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$.

Задача 2. Записать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок MN, где $M(2, -3)$, $N(-6, 3)$.

Решение.
Так как MN диаметр, то середина отрезка будет центром окружности $C\left(\frac{2-6}{2}; \frac{-3+3}{2}\right) = C(-2, 0)$.

Найдем радиус окружности: $\overline{MN}\{-8, 6\}$, $\left|\overline{MN}\right| = \sqrt{64+36} = 10 \quad \Rightarrow \quad r = 5$.

Уравнение окружности: $(x+2)^2 + y^2 = 25$.

Задача 3. Найти координаты центра и радиус окружности
$2\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{y}^2 - 8\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} - 4 = 0$.

Решение. Разделив уравнение на 2, и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2 - 4x + y^2 + \frac{5}{2}y = 2$.

Дополним выражения $x^2 - 4x$ и $y^2 + \frac{5}{2}y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму $\left(\frac{5}{4}\right)^2$, (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}\right)=2+4+\frac{25}{16},$$

или $(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$.

Таким образом, координаты центра окружности $a=2,\ b=-5/4$, а радиус окружности $r=11/4$.

Задача 4. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены симметрично на оси Ox относительно начала координат, если:

1) большая полуось равна $\boldsymbol{a}=6$; малая полуось $b=4$;
2) расстояние между фокусами $2c=10$, а большая ось $2a=16$;
3) малая полуось $b=4$, и расстояние между фокусами $2c=10$;
4) большая полуось $a=12$, а эксцентриситет $e=0,5$;
5) малая полуось $b=8$, а эксцентриситет $e=0,6$;
6) сумма полуосей $a+b=12$, а расстояние между фокусами $2c=6\sqrt{2}$.

Решение.

1) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Подставляя сюда $\boldsymbol{a}=6$, $b=4$, получим $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

2) $2c=10$; $c=5$; $2a=16$; $a=8$.

Чтобы написать уравнение эллипса, следует найти малую полуось $\boldsymbol{b}$. Между величинами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ у эллипса существует зависимость вида $a^2-b^2=c^2$, или $b^2=a^2-c^2$. В нашем случае $b^2=64-25=39$, и уравнение эллипса будет иметь следующий вид $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$.

3) Так как $b=4$, $2c=10$; $c=5$ $a^2=b^2+c^2=16+25=41$.

Поэтому $\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$.

4) $\boldsymbol{a}=12$; $\boldsymbol{e}=0,5$; известно, что $e=c/a$; в этой формуле неизвестно $\boldsymbol{c}$. Для его определения получаем уравнение $0,5=c/12$; отсюда $c=6$.

Теперь зная, что $\boldsymbol{a}=12$, $\boldsymbol{c}=6$, пользуясь соотношением $a^2-c^2=b^2$, найдем, что $b^2=144-36=108$; $a^2=144$.

Уравнение будет иметь вид $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$.

5) $b=8$; $e=0,6$; $\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$, отсюда $c/a=0,6$, $c=0,6a$.

Напишем соотношение $a^2-c^2=b^2$ и подставим в него $c=0,6a$, $b=8$.

Получим $a^2-0,36a^2=64$; $0,64a^2=64$; $a^2=100$.

Уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

$a+b=12$; $2c=6\sqrt{2}$. Для определения уравнения эллипса надо знать a и b. Нам известно, что $c=3\sqrt{2}$; $c^2=18$; $a^2-b^2=c^2$. Поэтому $(a+b)(a-b)=18$. Подставляя сюда $a+b=12$, найдем, что $a-b=1{,}5$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} a+b=12 \\ a-b=1{,}5 \end{cases}$, получим, что $a=6{,}75$, $b=5{,}25$.

Уравнение эллипса запишется в виде $\frac{x^2}{(6{,}75)^2}+\frac{y^2}{(5{,}25)^2}=1$.

3.3.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание.

I) 1. Записать уравнение окружности радиусом r с центром в точке C.
2. Записать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок MN.
3. Найти координаты центра, радиус окружности, построить:
1) – 4) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

II) Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если: 1) –4). (Построить).

III) Преобразовать в канонический вид уравнение эллипса. Построить.

Найти координаты его фокусов (в новой и старой системе) и эксцентриситет: 1) – 5) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Вариант 1.

I. 1. $r=7$, $C(-3;5)$. 2. $M(2,-3)$, $N(-6,3)$.

3. 1) $x^2+y^2+6x-8y-11=0$,
2) $x^2+y^2-6x-7=0$,
3) $4x^2+4y^2-8x+12y-3=0$,
4) $3x^2+3y^2-16y=0$.

II. 1).большая полуось равна 8, малая полуось равна 6;
2). расстояние между фокусами равно 10, большая ось равна 26;
3).большая ось равна 20, эксцентриситет равен 0,6;
4).расстояние между фокусами равно 14, эксцентриситет равен. $7/9$

III. 1) $25x^2+36y^2=900$,
2) $4x^2+16x+y^2+8y-4=0$,
3) $9x^2+36x+4y^2+8y-104=0$,
4) $16x^2-32x+9y^2-72y+16=0$,
5) $16x^2+96x+36y^2-144y-288=0$.

Вариант 2.

I. 1. $\boldsymbol{r}=3$, $C(-2;7)$. 2. $M(-3,-4)$, $N(9,4)$.

3. 1) $x^2+y^2-10x=0$,

2) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$,

3) $8x^2+8y^2-16x+24y-6=0$,

4) $x^2+y^2-10x-12y+16=0$.

II. 1).большая полуось равна $3\sqrt{2}$, малая полуось равна $2\sqrt{3}$;

2). расстояние между фокусами равно 24, большая ось равна 10;

3). малая ось равна 12, эксцентриситет равен 0,8;

4). расстояние между фокусами равно 6, сумма полуосей равна 9.

III. 1) $4x^2+16y^2=64$,

2) $36x^2-144x+25y^2+100y-656=0$,

3) $25x^2+50x+49y^2+98y-1151=0$,

4) $36x^2+144x+9y^2+72y-36=0$,

5) $4x^2-16x+25y^2+50y-59=0$.

Вариант 3.

I. 1. $r=5$, $C(4;-3)$. 2. $M(-1,3)$, $N(5,-3)$.

3. 1) $\boldsymbol{y}^2-12\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^2+11=0$

2) $x^2+y^2-6x+8y-15=0$

3) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$

4) $3x^2+3y^2-18x-24y+63=0$

II. 1) большая ось равна 15, малая полуось равна 13;

2) расстояние между фокусами равно 20, большая ось равна 24;

3) большая ось равна 16, эксцентриситет равен $11/13$,

4) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/4.

III. 1) $25x^2+16y^2=400$

2) $144x^2+16y^2-128y-2048=0$

3) $4x^2-40x+49y^2+98y-47=0$

4) $25x^2-150x+9y^2-18y+9=0$

5) $16x^2+32x+36y^2+144y-416=0$

Вариант 4.

I. 1. $r=4$, $C(-1;6)$. 2. $M(1,3)$, $N(-1,1)$.

3. 1) $x^2+8x+y^2-65=0$,

2) $x^2+y^2-4x-6y+4=0$,

3) $6x^2-12x+6y^2+24y-24=0$,

4) $x^2+y^2+10x-4y+20=0$.

II.

1) большая полуось равна 4, малая полуось равна 3;

2) расстояние между фокусами равно 18, малая ось равна 4;

3) малая ось равна 8, эксцентриситет равен 0,5;
4) расстояние между фокусами равно 8, сумма полуосей равна 8.

III. 1) $16x^2+81y^2=1296$,
2) $x^2-2x+4y^2+16y-19=0$,
3) $49x^2+196x+16y^2-32y-572=0$,
4) $4x^2+24x+36y^2+72y-72=0$,
5) $64x^2-256x+16y^2-768=0$.

Вариант 5.

I. 1 $r=6$; $C(3;-5)$. 2. $M(3,4)$, $N(-3,0)$.

3. 1) $x^2-6x+y^2=0$
2) $x^2+y^2+8x+2y+9=0$
3) $x^2+y^2+14x-6y-46=0$
4) $2x^2+2y^2+4x-8y-8=0$

II.
1) большая полуось равна 13, малая полуось равна 4;
2) расстояние между фокусами равно 12, большая ось равна 28;
3) большая ось равна 40, эксцентриситет равен 0,4;
4) расстояние между фокусами равно 16, эксцентриситет равен $8/9$.

III. 1) $4x^2+81y^2=324$
2) $9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$
3) $36x^2+144x+25y^2-50y-731=0$
4) $25x^2-50x+16y^2+32y-359=0$
5) $9x^2-18x+4y^2-24y-99=0$

Вариант 6.

I. 1. $r=2$; $C(-4;5)$. 2. $M(-3,1)$, $N(3,-5)$.

3. 1) $x^2+y^2-2y-3=0$
2) $x^2+y^2-4x+2y-31=0$
3) $x^2+y^2-6x-8y+21=0$
4) $2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$

II.
1) большая полуось равна 6, малая полуось равна 2;
2) расстояние между фокусами равно 12, малая ось равна 6;
3) малая ось равна 8, эксцентриситет равен 0,7;
4) расстояние между фокусами = 12, сумма полуосей равна14.

III. 1) $9x^2+36y^2=324$
2) $9x^2-18x+36y^2+144y-171=0$
3) $36x^2-72x+16y^2-96y-396=0$
4) $16x^2-96x+49y^2-98y-591=0$
5) $16x^2+64x+4y^2+24y+36=0$

Вариант 7.

I. 1. $r=3$; $C(5;-2)$. 2. $M(0,-2)$, $N(4,2)$.

3. 1) $x^2+y^2-6y=0$

2) $2x^2+2y^2+4x-8y+2=0$

3) $x^2+y^2-6x-8y=0$

4) $x^2+y^2-4x+2y-31=0$

II.

1) большая полуось равна 7, малая полуось равна 5;
2) расстояние между фокусами равно 14, большая ось равна 30;
3) большая ось равна 14, эксцентриситет равен $5/7$;
4) расстояние между фокусами равно 12, эксцентриситет равен $6/7$...

III. 1) $16x^2+9y^2=144$

2) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$

3) $16x^2-32x+4y^2+16y-32=0$

4) $4x^2+8x+25y^2+150y+129=0$

5) $9x^2+36x+16y^2-32y-92=0$

Вариант 8.

I. 1. $r=4$; $C(-4;-2)$. 2 $M(-3,-2)$, $N(1,2)$.

3. 1) $x^2-12x+y^2+11=0$

2) $x^2+y^2-4x-8y+11=0$

3) $6y^2+6x^2-12x+24y+6=0$

4) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$

II.

1) большая полуось равна 8, малая полуось равна 6;
2) расстояние между фокусами равно 8, малая ось равна $4\sqrt{5}$;
3) малая ось равна 8, эксцентриситет равен $\sqrt{3}/2$;
4) расстояние между фокусами равно $4\sqrt{7}$, сумма полуосей равна 14.

III. 1) $225x^2+4y^2=900$

2) $9x^2+4y^2+30x-12y-2=0$

3) $4x^2+3y^2+18y+15=0$

4) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

5) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$

Вариант 9.

I. 1. $r=5$; $C(-5;2)$. 2 $M(-6,3)$, $N(2,5)$.

3. 1) $x^2+y^2-6x+3=0$

2) $x^2+y^2-7x+4y-4=0$

3) $2x^2+2y^2-6x+8y-4=0$

4) $3x^2+3y^2+5y=0$

II.

1) большая полуось равна 6, малая полуось равна 3;

2) расстояние между фокусами равно 8, малая ось равна $3\sqrt{5}$;

3) малая ось равна 5, эксцентриситет равен 0,4;

4) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{7}$, сумма полуосей равна 10.

III. 1) $4x^2-8x+25y^2+400y+1504=0$

2) $9x^2-126x+4y^2+8y+409=0$

3) $4x^2+72x+16y^2+32y+276=0$

4) $360x^2-720x+25y^2+50y-515=0$

5) $x^2+4x+9y^2-162y+724=0$

Вариант 10.

I. 1. $r=4$; $C(4;-1)$. 2. $M(5,4)$, $N(3,-2)$.

3. 1) $x^2+y^2-8y=0$

2) $x^2+y^2-5x+6y-9=0$

3) $2x^2+2y^2-4y+3x-4=0$

4) $3x^2+3y^2+5x=0$

II.

1) большая полуось равна 8, малая полуось равна 6;

2) расстояние между фокусами равно 10, большая ось равна 26;

3) большая ось равна 12, эксцентриситет равен $5/7$;

4) расстояние между фокусами равно 16, эксцентриситет равен 0,5.

III. 1) $16x^2+96x+4y^2-24y+116=0$

2) $4x^2-16x+36y^2+72y-92=0$

3) $25x^2-50x+49y^2+98y-1151=0$

4) $4x^2+32x+9y^2-36y+64=0$

5) $49x^2-490x+4y^2+16y+1045=0$

Вариант 11.

I. 1. $r=7$; $C(-4;2)$. 2. $M(2,-7)$, $N(4,3)$.

3. 1) $x^2+y^2-5x=0$

2) $x^2+y^2-4x+12y-4=0$

3) $2x^2+2y^2-4x-6y-9=0$

4) $3x^2+3y^2+15y=0$

II.

1) большая полуось равна 12, малая полуось равна 8;

2) расстояние между фокусами равно 10, малая ось равна 6;

3) малая ось равна 4, эксцентриситет равен 0,4;

4) расстояние между фокусами равно 14, сумма полуосей равна 20.

III. 1) $16x^2+160x+4y^2-8y+340=0$

2) $9x^2-54x+16y^2+64y+1=0$

3) $4x^2-16x+9y^2+126y+421=0$

4) $4x^2-16x+25y^2-50y-56=0$

5) $16x^2-32x+49y^2+196y-572=0$

Вариант 12.

I. 1. $r=3$; $C(-2;5)$. 2. $M(3,5)$, $N(-2,3)$.

3. 1) $x^2+y^2+2x=0$

2) $x^2+y^2-4x-3y^2-4=0$

3) $2x^2+2y^2-14x+6y-9=0$

4) $3x^2+3y^2-27y=0$

II.

1) большая полуось равна 8, малая полуось равна 3;

2) расстояние между фокусами равно 16, большая ось равна 24;

3) большая ось равна 16, эксцентриситет равен 0,5;

4) расстояние между фокусами равно 12, эксцентриситет равен $5/6$.

III. 1) $16x^2+32x+49y^2+294y-327=0$

2) $9x^2+36x+16y^2-32y-92=0$

3) $4x^2-8x+9y^2+36y+4=0$

4) $9x^2-72x+16y^2-64y+64=0$

5) $16x^2+96x+4y^2-8y+84=0$

Вариант 13.

I. 1. $r=5$; $C(-3;8)$. 2. $M(3,-5)$, $N(4,1)$.

3. 1) $x^2+y^2-5x-4y=0$

2) $x^2+y^2-6x+y-9=0$

3) $6x^2+6y^2-6x-12y-6=0$

4) $2x^2+2y^2+x=0$

II.

1) большая полуось равна 5, малая полуось равна 3;

2) расстояние между фокусами равно 12, малая ось равна 6;

3) малая ось равна 6, эксцентриситет равен $3/4$;

4) расстояние между фокусами равно 10, сумма полуосей равна 10.

III. 1) $4x^2+16x+25y^2-150y+141=0$

2) $25x^2+50x+9y^2-54y-119=0$

3) $4x^2+16x+49y^2-98y-131=0$

4) $4x^2-24x+16y^2+32y-12=0$

5) $16x^2-128x+4y^2-16y+208=0$

Вариант 14.

I. 1. $r=4$; $C(7;-2)$. 2. $M(-3,2)$, $N(6,-4)$.

3. 1) $x^2+y^2-6y+9=0$

2) $x^2+y^2-4x-10y-4=0$

3) $2x^2+2y^2-4x-6y=0$

4) $4x^2+4y^2-5x=0$

II.

1) большая полуось равна 9, малая полуось равна 5;
2) расстояние между фокусами равно 16, большая ось равна 20;
3) большая ось равна 24, эксцентриситет равен $9/11$;
4) расстояние между фокусами равно 8, эксцентриситет = $4/5$.

III. 1) $25x^2-50x+4y^2+24y-39=0$

2) $16x^2+96x+9y^2-36y+36=0$

3) $9x^2-90x+4y^2+24y+225=0$

4) $9x^2-36x+16y^2+64y-44=0$

5) $4x^2-32x+9y^2+18y+37=0$

Вариант 15.

I. 1. $r=4$; $C(-3;6)$. 2. $M(4,-3)$, $N(-8,0)$.

3. 1) $x^2+y^2+6x=0$

2) $x^2+y^2+3x-8y-36=0$

3) $5x^2+5y^2+10y-15x-5=0$

4) $3x^2+3y^2-3x+6y=0$

II.

1) большая полуось равна $2\sqrt{3}$, малая полуось равна $\sqrt{2}$;
2) расстояние между фокусами равно 20, малая ось равна 8;
3) малая ось равна 10, эксцентриситет равен 0,6;
4) расстояние между фокусами равно 8, сумма полуосей равна 11.

III. 1) $16x^2-128x+9y^2-54y+193=0$

2) $4x^2+48x+49y^2-294y+389=0$

3) $4x^2-8x+16y^2-288y+1236=0$

4) $9x^2+54x+36y^2-72y-207=0$

5) $25x^2+100x+16y^2+160y+100=0$

Вариант 16.

I. 1. $r=3$; $C(-7;4)$. 2. $M(1,7)$, $N(-4,9)$.

3. 1) $x^2+y^2+2x-7y-1=0$

2) $x^2+y^2-4x-3y-4=0$

3) $2x^2+2y^2-4x+2y-16=0$

4) $4x^2+4y^2-8y=0$

II.

1) большая полуось равна 7, малая полуось равна 4;
2) расстояние между фокусами равно 8, больная ось равна 24;
3) большая ось равна 18, эксцентриситет равен 0,6;
4) расстояние между фокусами равно 12, эксцентриситет равен $6/11$.

III.

1) $16x^2-64x+4y^2+48y+144=0$

2) $4x^2 - 40x + 36y^2 - 72y - 8 = 0$
3) $16x^2 + 96x + 9y^2 - 126y + 441 = 0$
4) $4x^2 - 8x + 25y^2 + 300y + 804 = 0$
5) $36x^2 + 144x + 16y^2 - 32y - 416 = 0$

3.4. ПРАКТИКУМ ПО КРИВЫМ ВТОРОГО ПОРЯДКА (ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА)

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина. Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами. Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Здесь a - действительная полуось гиперболы, b - мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ - расстояние между фокусами гиперболы, то между $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ существует соотношение $a^2 + b^2 = c^2$.

При $b = a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси $e = c / a$.

Асимптоты гиперболы – две прямые, определяемые уравнениями $y = \pm(b / a)x$.

Напомним, что асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, которая обладает тем свойством, что когда точка по кривой удаляется в бесконечность, ее расстояние до этой прямой стремится к нулю.

Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от заданной фиксированной точки и от заданной фиксированной прямой. Точка, о которой идет речь в определении, называется фокусом параболы, а прямая – ее директрисой. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Входящая в это уравнение величина p называется параметром параболы. Параметр параболы равен расстоянию от директрисы параболы до ее фокуса. Координаты фокуса F параболы $F\left(p/2, 0\right)$.

Уравнение директрисы параболы $x = -p/2$. (7)

Эксцентриситет параболы $e = 1$.

Задача 1. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами ее равно 20, а расстояние между фокусами равно 30.

Решение. Вершины гиперболы лежат на ее действительной оси. По условию $2a = 20$; $2c = 30$. Значит, $a = 10$; $c = 15$; $a^2 = 100$; $c^2 = 225$.

Величины a, b и c гиперболы связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, отсюда $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100$; $b^2 = 125$.

Значит, уравнение гиперболы будет $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$.

Задача 2. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет $e = 1{,}4$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. $a = 5$, $a^2 = 25$; $e = c / a = 1{,}4$; $c = 1{,}4a = 1{,}4 \cdot 5 = 7$; $c^2 = 49$; $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$.

Искомым уравнением будет $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$.

Задача 3. $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти:
а) координаты фокусов; б) эксцентриситет; в) уравнения асимптот.

Решение. Разделив обе части уравнения на 144, получим $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Полуоси гиперболы $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{16} = 4$.

а) Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $c = \sqrt{9 + 16} = 5$. Фокусы данной гиперболы есть $F_2(-5; 0)$ и $F_1(5; 0)$.

б) эксцентриситет $e = c / a$, значит $e = 5 / 3$.

в) уравнения асимптот $y = \pm(b / a)x$. Поэтому $y = \pm(4 / 3)x$.

Задача 4. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти координаты фокуса.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что $2p = 6$, $p = 3$. Так как уравнение директрисы имеет уравнение $x = -p / 2$, а фокус – координаты $p / 2$ и 0, то для рассматриваемого случая получим уравнение директрисы $x = -3 / 2$ и фокус $F(3 / 2; 0)$.

3.4.1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание.

I. Записать каноническое уравнение гиперболы, если 1) – 4).

II. Построить. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты каждой гиперболы, заданной уравнением 1) – 6).

III. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу. Найти координаты ее центра C, полуоси, эксцентриситет, фокусы, уравнение асимптот (в новой и старой системах). Построить: 1) – 3).

IV. Найти фокус и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением: 1) – 8).

V. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что:

1) фокус находится в точке F_1;

2) фокус находится в точке F_2;

3) директриса имеет уравнение $Ax + C = 0$;

4) директриса имеет уравнение $By + C = 0$.

VI. Записать каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если известно, что:

1) парабола расположена в левой полуплоскости, симметрична относительно оси Ox, ее параметр p_1;

2) парабола расположена в верхней полуплоскости, симметрична относительно оси Oy, ее параметр p_2;

3) парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку A;

4) парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку B.

VII. Исследовать расположение параболы. Найти координаты F, директрисы, построить: 1) – 4).

Вариант 1.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $2\sqrt{5}$, мнимая полуось равна $3\sqrt{2}$;
2) расстояние между фокусами равно 10, мнимая ось равна 8;
3) мнимая ось равна 16, эксцентриситет равен $5/3$;
4) расстояние между фокусами равно 26, сумма полуосей равна 17.

II. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$ 3) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

4) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$ 5) $16x^2 - 9y^2 = 144$ 6) $9y^2 - 4x^2 = 36$

III. 1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$

2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

IV. 1) $y^2 = 8x$ 2) $y^2 = -10x$ 3) $x^2 = 2y$ 4) $x^2 = -4y$

5) $3x^2 - 4y = 0$ 6) $5x^2 + 8y = 0$ 7) $7y^2 + 20x = 0$ 8) $9y^2 + 16x = 0$

V. 1) $F(4,0)$; 2) $F(0,3)$; 3) $x - 3 = 0$; 4) $y - 2 = 0$.

VI. 1) $p = 2{,}5$; 2) $p = 0{,}5$; 3) $A(1;-3)$; 4) $B(1;-2)$.

VII. 1) $4x^2 - y + 8 = 0$ 2) $2x^2 + 3x + y = 0$

3) $3y^2 - 2y + 3x = 0$ 4) $5y^2 + 5y - 4x = 0$

Вариант 2.

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 14, мнимая полуось равна 10;
2) расстояние между фокусами равно 20, действительная ось равна 12;
3) действительная ось равна 6, эксцентриситет равен $5/3$;
4)расстояние между фокусами равно 26, эксцентриситет равен 2,6.

II. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 3) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

4) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$ 5) $25x^2-4y^2=100$ 6) $12y^2-3x^2=300$

III. 1) $16x^2-96x-4y^2-16y+64=0$

2) $4x^2+8x-25y^2+100y-196=0$

3) $9y^2-54y-16x^2-32x-79=0$

IV. 1) $y^2=2x$ 2) $y^2=-7x$ 3) $x^2=-4y$ 4) $x^2=8y$

5) $6x^2-5y=0$ 6) $4x^2+7y=0$ 7) $3y^2-5x=0$ 8) $6y^2+7x=0$

V. 1) $F(5,0)$; 2) $F(0,2)$; 3) $x-5=0$; 4) $y+2=0$.

VI. 1) $p=1{,}4$; 2) $p=1/5$; 3) $A(2;-5)$; 4) $B(3;-6)$.

VII. 1) $3x^2-5y+3=0$ 2) $7x^2+7x+y=0$

3) $3y^2-5y-4x=0$ 4) $2y^2+2y+3x=0$

Вариант 3.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $2\sqrt{6}$, мнимая полуось = $2\sqrt{3}$;
2) расстояние между фокусами равно 12, мнимая ось равна 8;
3) мнимая ось равна 14, эксцентриситет равен $6/5$;
4) расстояние между фокусами равно 28, сумма полуосей = 19.

II. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ 3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$

4) $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{9}=1$ 5) $9x^2-16y^2=144$ 6) $25y^2-4x^2=100$

III. 1) $4x^2-16x-9y^2+144y-596=0$

2) $25x^2-150x-16y^2-32y-191=0$

3) $4x^2-8x-36y^2+360y-1040=0$

IV. 1) $y^2=3x$ 2) $y^2=-4x$ 3) $x^2=-5y$ 4) $x^2=6y$

5) $3x^2-8y=0$ 6) $4x^2+3y=0$ 7) $2y^2-7x=0$ 8) $4y^2+5x=0$

V. 1) $F(4,0)$; 2) $F(0,5)$; 3) $x-3=0$; 4) $y+8=0$.

VI. 1) $p=1{,}2$; 2) $p=1/4$; 3) $A(3;-4)$; 4) $B(4;-1)$.

VII. 1) $5x^2-7y+5=0$ 2) $4x^2+6x+y=0$

3) $2y^2-7y-3x=0$ 4) $5y^2-5y+2x=0$

Вариант 4.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 12, мнимая полуось равна 8;
2) расстояние между фокусами равно 18, мнимая ось равна 8;
3) мнимая ось равна 5, эксцентриситет равен $4/3$;
4) расстояние между фокусами равно 24, сумма полуосей равна 2,3.

II. 1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 3) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

4) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{49}=1$ 5) $25y^2-16x^2=400$ 6) $4x^2-16y^2=64$

III. 1) $25x^2-300x-9y^2+18y+666=0$

2) $4x^2+8x-25y^2+350y-1321=0$

3) $16x^2-64x-4y^2-48y-144=0$

IV. 1) $\boldsymbol{y^2=8x}$ 2) $\boldsymbol{y^2=-3x}$ 3) $\boldsymbol{x^2=7y}$ 4) $x^2=-6y$

5) $7x^2-9y=0$ 6) $7x^2+4y=0$ 7) $3y^2-4x=0$ 8) $2y^2+7x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,4)$; 3) $x-2=0$; 4) $y+9=0$.

VI. 1) $p=1{,}4$; 2) $p=1/3$; 3) $A(2;-2)$; 4) $B(2;-6)$.

VII. 1) $3x^2-2y+3=0$ 2) $2x^2+4x+y=0$

3) $5y^2-4y-2x=0$ 4) $2y^2-2y+3x=0$

Вариант 5.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $2\sqrt{6}$, линейная полуось равна $2\sqrt{2}$;
2) расстояние между фокусами равно 12, мнимая ось равна 10;
3) линейная ось равна 18, эксцентриситет равен $6/5$;
4) расстояние между фокусами равно 24, сумма полуосей равна 14.

II. 1) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 3) $\frac{x^2}{25}-y^2=1$

4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 5) $9y^2-49x^2=441$ 6) $25x^2-4y^2=100$

III. 1) $4x^2-40x-36y^2+72y-80=0$

2) $16x^2+96x-9y^2+126y-441=0$

3) $4x^2-25y^2-8x-300y-996=0$

IV. 1) $y^2=3x$ 2) $y^2=-8x$ 3) $x^2=5y$ 4) $x^2=-4y$

5) $7x^2-2y=0$ 6) $3x^2+5y=0$ 7) $2y^2-5x=0$ 8) $3y^2+4x=0$

V. 1) $F(2,0)$; 2) $F(0,7)$; 3) $x+6=0$; 4) $y-7=0$.

VI. 1) $p=1{,}6$; 2) $p=1/4$; 3) $A(3;-1)$; 4) $B(2;-7)$.

VII. 1) $2x^2-5y+6=0$ 2) $3x^2+2x+y=0$

3) $4y^2-3y-6x=0$ 4) $4y^2-4y+5x=0$

Вариант 6.

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 18, мнимая полуось равна 16;
2) расстояние между фокусами равно 22, действительная ось равна 14;
3) действительная ось равна 8, эксцентриситет равен $5/3$;
4) расстояние между фокусами равно 28, эксцентриситет равен 2,4.

II. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ 3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$

4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ 5) $36x^2-4y^2=144$ 6) $25y^2-9x^2=225$

III. 1) $36x^2+144x-16y^2+32y-448=0$

2) $16x^2-128x-9y^2+54y+31=0$

3) $4x^2+48x-49y^2+294y-493=0$

IV. 1) $y^2=5x$ 2) $y^2=-7x$ 3) $x^2=6y$ 4) $x^2=-7y$

5) $3x^2-4y=0$ 6) $2x^2+7y=0$ 7) $5y^2-8x=0$ 8) $2y^2+5x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,4)$; 3) $x-4=0$; 4) $y+5=0$.

VI. 1) $p=1,4$; 2) $p=2/3$; 3) $A(2;-4)$; 4) $B(3;-5)$.

VII. 1) $3x^2-4y+7=0$ 2) $2x^2+3x+y=0$

3) $4y^2-4y-5x=0$ 4) $2y^2-y+3x=0$

Вариант 7.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $3\sqrt{5}$, линейная полуось равна $3\sqrt{3}$;
2) расстояние между фокусами равно 12, мнимая ось равна 8;
3) линейная ось равна 18, эксцентриситет равен $4/3$;
4) расстояние между фокусами равно 28, сумма полуосей равна 18.

II. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 3) $\frac{y^2}{4}-x^2=1$

4) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$ 5) $25x^2-9y^2=225$ 6) $4y^2-16x^2=64$

III. 1) $4x^2-8x-16y^2+288y-1356=0$

2) $9x^2+54x-36y^2+72y-279=0$

3) $25x^2+100x-16y^2-160y-700=0$

IV. 1) $y^2=3x$ 2) $y^2=-6x$ 3) $x^2=4y$ 4) $x^2=-5y$

5) $2x^2-7y=0$ 6) $3x^2+6y=0$ 7) $4y^2-5x=0$ 8) $3y^2+8x=0$

V. 1) $F(2,0)$; 2) $F(0,7)$; 3) $x+3=0$; 4) $y-2=0$.

VI. 1) $p=1,8$; 2) $p=1/4$; 3) $A(3;-2)$; 4) $B(4;-5)$.

VII. 1) $4x^2-2y+5=0$ 2) $x^2+5x+y=0$

3) $2y^2+5y-4x=0$ 4) $3y^2-7y+5x=0$

Вариант 8.

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 16, мнимая полуось равна 12;
2) расстояние между фокусами равно 20, действительная ось равна 14;
3) действительная ось равна 8, эксцентриситет равен $9/8$;
4) расстояние между фокусами равно 28, эксцентриситет равен 2,8.

II. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$ 3) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

4) $\frac{y^2}{25}-x^2=1$ 5) $36y^2-4x^2=144$ 6) $9x^2-16y^2=144$

III. 1) $25x^2-50x-4y^2-24y-111=0$

2) $16x^2+96x-9y^2+36y-36=0$

3) $9x^2-90x-4y^2-24y+153=0$

IV. 1) $y^2=6x$ 2) $y^2=-5x$ 3) $x^2=3y$ 4) $x^2=-2y$

5) $2x^2-5y=0$ 6) $4x^2+3y=0$ 7) $3y^2-6x=0$ 8) $9y^2+11x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,4)$; 3) $x-2=0$; 4) $y+3=0$.

VI. 1) $p=1{,}5$; 2) $p=1/3$; 3) $A(2;-1)$; 4) $B(1;-3)$.

VII. 1) $3x^2-2y+3=0$ 2) $x^2+3x+y=0$

3) $2y^2-3y+5x=0$ 4) $4y^2+5y-x=0$

Вариант 9.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $3\sqrt{3}$, линейная полуось равна $2\sqrt{2}$;
2) расстояние между фокусами равно 12, мнимая ось равна 10;
3) линейная ось равна 18, эксцентриситет равен $7/4$;
4) расстояние между фокусами равно 24, сумма полуосей равна 15.

II. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ 3) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

4) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1$ 5) $4x^2-16y^2=64$ 6) $36x^2-9y^2=324$

III. 1) $9x^2-36x-16y^2-64y-172=0$

2) $4x^2-32x-9y^2-18y+19=0$

3) $25x^2+50x-9y^2+54y-281=0$

IV. 1) $y^2=9x$ 2) $y^2=-5x$ 3) $x^2=-3y$ 4) $x^2=6y$

5) $3x^2-7y=0$ 6) $2x^2+3y=0$ 7) $2y^2-6x=0$ 8) $3y^2+8x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,4)$; 3) $x-7=0$; 4) $y+3=0$.

VI. 1) $p=1{,}8$; 2) $p=1/3$; 3) $A(3;-4)$; 4) $B(2;-7)$.

VII. 1) $2x^2-6y+5=0$ 2) $3x^2+3x+y=0$

3) $5y^2-3y-7x=0$ 4) $3y^2-3y+5x=0$

Вариант 10.

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 16, мнимая полуось равна 12;
2) расстояние между фокусами равно 18, действительная ось равна 10;
3) действительная ось равна 8, эксцентриситет равен $5/2$;
4) расстояние между фокусами равно 24, эксцентриситет равен 2,2.

II. 1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$ 3) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

4) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{49}=1$ 5) $25x^2-4y^2=100$ 6) $9x^2-16y^2=144$

III. 1) $4x^2+16x-25y^2+150y-309=0$

2) $16x^2-128x-4y^2+16y+176=0$

3) $9x^2+36x-16y^2+32y-124=0$

IV. 1) $y^2=4x$ 2) $y^2=-5x$ 3) $x^2=-5y$ 4) $x^2=6y$

5) $5x^2-8y=0$ 6) $3x^2+2y=0$ 7) $4y^2-3x=0$ 8) $6y^2+5x=0$

V. 1) $F(4,0)$; 2) $F(0,7)$; 3) $x+6=0$; 4) $y-2=0$.

VI. 1) $p=1{,}6$; 2) $p=1/2$; 3) $A(4;-3)$; 4) $B(5;-7)$.

VII. 1) $6x^2-4y+4=0$ 2) $7x^2-x+y=0$

3) $2y^2-4y-3x=0$ 4) $3y^2+3y+5x=0$

***Вариант 11*.**

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $3\sqrt{5}$, линейная полуось равна $2\sqrt{3}$;
2) расстояние между фокусами равно 12, мнимая ось равна 8;
3) мнимая ось равна 14, эксцентриситет равен $5/3$;
4) расстояние между фокусами равно 32, сумма полуосей равна 21.

II. 1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$ 2) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 3) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}=1$

4) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 5) $25y^2-16x^2=400$ 6) $16x^2-4y^2=64$

III. 1) $16x^2+32x-49y^2-294y-1209=0$

2) $4x^2-8x-9y^2-36y-68=0$

3) $9x^2-72x-16y^2+64y-64=0$

IV. 1) $y^2=4x$ 2) $y^2=-5x$ 3) $x^2=-5y$ 4) $x^2=6y$

5) $3x^2-8y=0$ 6) $2x^2+5y=0$ 7) $6y^2-7x=0$ 8) $3y^2+2x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,4)$; 3) $x-4=0$; 4) $y+8=0$.

VI. 1) $p=1{,}8$; 2) $p=1/2$; 3) $A(3;-1)$; 4) $B(4;-5)$.

VII. 1) $4x^2-6y+3=0$ 2) $2x^2+4x+y=0$

3) $2y^2-7y-3x=0$ 4) $4y^2+4y+5x=0$

***Вариант 12*.**

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 16, мнимая полуось равна 10;
2) расстояние между фокусами равно 22, действительная ось равна 14;
3) действительная ось равна 8, эксцентриситет равен $6/5$;
4) расстояние между фокусами равно 32, эксцентриситет равен 1,8.

II. 1) $\frac{x^2}{25}-y^2=1$ 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}=1$ 3) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$

4) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{49}=1$ 5) $25y^2-36x^2=900$ 6) $36x^2-y^2=36$

III. 1) $4x^2+16x-49y^2+98y-229=0$

2) $16x^2+96x-4y^2+8y+76=0$

3) $4x^2-24x-16y^2-32y-44=0$

IV. 1) $y^2=3x$ 2) $y^2=-8x$ 3) $x^2=-5y$ 4) $x^2=6y$

5) $7x^2-2y=0$ 6) $6x^2+5y=0$ 7) $9y^2-5x=0$ 8) $8y^2+3x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,5)$; 3) $x-6=0$; 4) $y+3=0$.

VI. 1) $p=1{,}6$; 2) $p=1/2$; 3) $A(3;-6)$; 4) $B(4;-7)$.

VII. 1) $2x^2-6y+5=0$ 2) $7x^2-14x+y=0$

3) $2y^2-6y-5x=0$ 4) $3y^2+3y+7x=0$

***Вариант 13*.**

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $3\sqrt{5}$, линейная полуось равна $2\sqrt{3}$;
2) расстояние между фокусами равно 12, мнимая ось равна 8;
3) мнимая ось равна 18, эксцентриситет равен $5/3$;
4) расстояние между фокусами равно 30, сумма полуосей равна 18.

II. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ 2) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{4}=1$ 3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$

4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ 5) $25x^2-9y^2=225$ 6) $49y^2-4x^2=196$

III. 1) $16x^2+160x-4y^2+8y+332=0$

2) $9x^2-54x-16y^2-64y-127=0$

3) $4x^2-16x-9y^2-126y-461=0$

IV. 1) $y^2=3x$ 2) $y^2=-6x$ 3) $x^2=-5y$ 4) $x^2=6y$

5) $3x^2-4y=0$ 6) $2x^2+9y=0$ 7) $6y^2-5x=0$ 8) $3y^2+8x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,5)$; 3) $x+4=0$; 4) $y-3=0$.

VI. 1) $p=1{,}8$; 2) $p=1/2$; 3) $A(3;-1)$; 4) $B(8;-2)$.

VII. 1) $3x^2-5y+2=0$ 2) $6x^2+8x+y=0$

3) $2y^2-3y-7x=0$ 4) $3y^2+3y+5x=0$

Вариант 14.

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 16, мнимая полуось равна 12;
2) расстояние между фокусами равно 26, действительная ось равна 14;
3) действительная ось равна 8, эксцентриситет равен $7/4$;
4) расстояние между фокусами равно 24, эксцентриситет равен 2,2.

II. 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$

4) $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{16}=1$ 5) $36x^2-4y^2=144$ 6) $25y^2-49x^2=1229$

III. 1) $4x^2-16x-25y^2+50y-109=0$

2) $16x^2-32x-49y^2-196y-964=0$

3) $49x^2-490x-4y^2-16y+1013=0$

IV. 1) $y^2=3x$ 2) $y^2=-5x$ 3) $x^2=-5y$ 4) $x^2=6y$

5) $2x^2-7y=0$ 6) $3x^2+8y=0$ 7) $3y^2-4x=0$ 8) $2y^2+5x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,4)$; 3) $x+4=0$; 4) $y-7=0$.

VI. 1) $p=1{,}6$; 2) $p=1/2$; 3) $A(3;-4)$; 4) $B(2;-1)$.

VII. 1) $2x^2-7y+2=0$ 2) $6x^2+6x+y=0$

3) $2y^2-6y-7x=0$ 4) $3y^2+3y+2x=0$

Вариант 15.

I. Фокусы расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна $\sqrt{8}$, мнимая полуось равна $\sqrt{3}$;
2) расстояние между фокусами равно 16, мнимая ось равна 10;
3) мнимая ось равна 11, эксцентриситет равен $7/4$;
4) расстояние между фокусами равно 28, сумма полуосей равна 18.

II. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{49}=1$ 3) $\frac{y^2}{25}-x^2=1$

4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$ 5) $4x^2-49y^2=196$ 6) $25y^2-4x^2=100$

III. 1) $16x^2+96x-4y^2+24y+44=0$

2) $4x^2-16x-36y^2-72y-164=0$

3) $25x^2-50x-49y^2-98y-1249=0$

IV. 1) $y^2=5x$ 2) $y^2=-7x$ 3) $x^2=-8y$ 4) $x^2=5y$

5) $3x^2-8y=0$ 6) $6x^2+11y=0$ 7) $2y^2-7x=0$ 8) $3y^2+5x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,7)$; 3) $x+4=0$; 4) $y-7=0$.

VI. 1) $p=1{,}8$; 2) $p=1/2$; 3) $A(3;-1)$; 4) $B(5;-2)$.

VII. 1) $2x^2-7y+2=0$ 2) $6x^2+6x+y=0$

3) $2y^2-7y-8x=0$ 4) $3y^2+3y+5x=0$

Вариант 16.

I. Фокусы расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат и

1) действительная полуось равна 18, мнимая полуось равна 16;
2) расстояние между фокусами равно 16, действительная ось равна 10;
3) действительная ось равна 8, эксцентриситет равен $5/3$;
4) расстояние между фокусами равно 28, эксцентриситет равен 2,6.

II. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{64}=1$

4) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$ 5) $4y^2-36x^2=144$ 6) $12x^2-3y^2=300$

III. 1) $4x^2+32x-9y^2+36y-8=0$

2) $x^2+4x-9y^2-162y-734=0$

3) $360x^2-720x-25y^2-50y-565=0$

IV. 1) $y^2=2x$ 2) $y^2=-6x$ 3) $x^2=-6y$ 4) $x^2=5y$

5) $4x^2-3y=0$ 6) $3x^2+4y=0$ 7) $3y^2-8x=0$ 8) $2y^2+5x=0$

V. 1) $F(3,0)$; 2) $F(0,6)$; 3) $x+3=0$; 4) $y-5=0$.

VI. 1) $p=1{,}8$; 2) $p=1/6$; 3) $A(3;-6)$; 4) $B(2;-4)$.

VII. 1) $2x^2+4y-7=0$ 2) $3x^2+6x+y=0$

3) $2y^2-7y+5x=0$ 4) $3y^2+3y+2x=0$

Вопросы к коллоквиуму

1) Определения и различные формы комплексных чисел.
2) Арифметические операции и свойства операций комплексных чисел.
3) Формула Муавра и формула возведения в натуральную степень комплексного числа.
4) Определение многочлена и уравнения n- ой степени. Корни многочлена, решение уравнения n- ой степени.
5) Разложение многочлена на множители.
6) Геометрические вектора на плоскости и арифметические операции над ними.
7) Скалярное произведение векторов и его свойства.
8) Определитель второго порядка.
9) Замена координат на плоскости.
10) Различные уравнения прямой на плоскости.
11) Взаимное расположение двух прямых.
12) Пучок прямых.
13) Эллипс.

14) Гипербола.
15) Парабола.
16) Общее уравнение кривых второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по математике для втузов. Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. — М.: Физматлит, 2004.— 288 с.

2. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии .— 15-е изд., испр .— М. : Наука. Физматлит, 1998.— 223 с.

3. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс. Учебное пособие / А.В.Кузнецов, Д.С.Кузнецова и др. — Мн.В.ш., 1994.

4. В.С. Шипачев Высшая математика. Базовый курс: учебное пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 447 с. : ил.; 21 см. - (Бакалавр).

5. В.С. Шипачев. Полный курс: учебник для бакалавров / В. С. Шипачев. -4-е изд., испр. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 607 с. : ил.; 22 см. - (Бакалавр. Базовый курс).