Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет

Г. А. ШНЕЕРСОН

ОСНОВЫ ТЕХНИКИ ПОЛУЧЕНИЯ СИЛЬНЫХ И СВЕРХСИЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки магистров «Техническая физика».

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2011

УДК

Рецензенты:
Директор института проблем электрофизики РАН,
Доктор технических наук, академик РАН
Ф.Г. Рутберг
Доктор технических наук, профессор
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета *Н.В. Коровкин*

Шнеерсон Г.А. **Основы техники получения сильных и сверхсильных импульсных магнитных полей**. Учеб. пособие. — СПб: изд-во Политехн. ун-та, 2011. — 310 с.

ISBN

В учебном пособии излагаются основные проблемы, возникающие при разработке и эксплуатации установок для получения сильных и сверхсильных импульсных магнитных полей. Описаны методы расчёта нестационарных полей в основных элементах магнитных систем, предназначенных для получения импульсных полей, а также для ускорения и деформирования проводников электромагнитными силами. Приведены решения задач, возникающих при конструировании магнитных систем: выбор источника энергии и согласование его с соленоидом, расчет диффузии поля, адиабатического нагрева, а также механических нагрузок, воздействующих на обмотку. Описаны конструкции неразрушаемых магнитов и изложены новые принципы создания таких магнитов, основанные на применении квазибессиловых обмоток. Значительная часть пособия посвящена анализу физических процессов, сопровождающих получение сверхсильных («мегагауссных») магнитных полей как путем разряда накопителя энергии на одновитковую катушку, так методом магнитной кумуляции. Рассмотрены нелинейная диффузия поля, формирование гидродинамических течений и электрический взрыв поверхностного слоя проводников.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Техническая физика». Пособие может быть полезно для студентов, обучающихся по другим специальностям.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики»

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

Оглавление

Введение

В течение более ста последних лет среди физиков и инженеров не убывает интерес к проблеме получения всё более сильных магнитных полей. Этот интерес вызван, в первую очередь, различными применениями сильных полей в исследованиях и в технологии. Вместе с тем эффекты, сопровождающие получение таких полей настолько разнообразны и интересны, что их изучение позволяет получить много новых сведений о диффузии поля в проводящую среду, о возникновении и развитии разнообразных магнитогидродинамических течений, о фазовых переходах в металлах и об их свойствах при высоких температурах и давлениях.

Целью настоящей книги является изложение современных представлений о технологии получения сильных и сверхсильных импульсных полей и о физических процессах, которые имеют место при воздействии этих полей на проводники, используемые в магнитных системах. Необходимо дать как качественное описание этих процессов, так и дать их количественную трактовку.

Далее, следуя установившейся традиции, ***сильными*** будем называть поля с индукцией выше 10 Т. ***Сверхсильными*** (или ***мегагауссными***) целесообразно называть поля с индукцией выше 100 Т (1 млн. Гаусс). В этом диапазоне можно выделить ***мультимегагауссные*** поля, индукция которых превышает 400-500 Т.

Особенность сверхсильных полей состоит в том, что при их воздействии на проводящие тела в условиях выраженного скин-эффекта, оказываются превзойдёнными как механический прочностной порог, так и порог плавления поверхностного слоя. В мультимегагауссном поле наступает взрыв скин-слоя - его испарение, сопровождаемое потерей проводимости.

Амплитуда индукции поля, получаемого в магнитах различного типа, ограничивается нагревом обмотки выше допустимого уровня и ее разрушением под действием электромагнитных сил. Проблема нагрева особенно существенна в магнитах, предназначенных для получения постоянных полей и не использующих сверхпроводники. Уровень полей, достигнутых в таких магнитах со сложными системами охлаждения, ограничен значениями индукции масштаба 20 Т. Применение сверхпроводников, работающих при температуре жидкого гелия, позволяет снять проблему нагрева, что дает возможность создавать стационарное поле с индукцией до приблизительно 20 Т. Наиболее высокие значения индукции могут быть получены при использовании высокотемпературных сверхпроводников с высоким критическим полем и большим критическим током. Дальнейший прогресс в области применения сверхпроводящих магнитов в значительной степени связан с решением проблем их прочности.

Нагрев обмотки можно значительно уменьшить, если сократить длительность протекания в ней тока, то есть создавать поле в виде достаточно коротких импульсов. Этому направлению техники сильных магнитных полей здесь уделено основное внимание. Оно начало развиваться в 20-е годы прошлого века благодаря работам П.Л. Капицы [1, 2] и Уэлла [3]. В опытах с длительностью импульса, составлявшей сотые доли секунд и меньше, были получены поля с индукцией масштаба 30-40 Т. При этом удалось обеспечить допустимый адиабатический нагрев обмотки, и основным препятствием для получения еще более сильного поля стала ее недостаточная прочность. Дальнейшее развитие технологии неразрушаемых магнитов связано с созданием все более совершенных конструкций обмоток и применением самых прочных материалов. Тем не менее, несмотря на усилия многих лабораторий, не удается создать магниты многократного использования, в которых амплитуда индукции превышает 80-90 Т.

Существенно более сильное импульсное поле можно получить в разрушаемых магнитах и методом магнитной кумуляции. Первое из этих направлений начало развиваться в конце 50-х годов благодаря тому, что к этому времени был достигнут значительный прогресс в разработках мощных генераторов импульсных токов, использующих малоиндуктивные высоковольтные конденсаторные батареи. В пионерской работе Фюрза, Левина и Ванека [4] было получено поле с индукцией 160 Т. Эта работа дала толчок многочисленным исследованиям, в которых импульсное поле с малым временем нарастания создавалось в одновитковых магнитах с характерными размерами внутреннего радиуса и длины порядка одного сантиметра и менее. В настоящее время этим методом в опытах с применением генераторов с относительно небольшой энергией (масштаба 1 МДж и менее) достигнуты поля с индукцией, близкой к 400 Т [5, 6]. Применение мегавольтных формирующих линий с запасом энергии масштаба 10^7 Дж позволило увеличить характерный размер области, где создается поле, и дало возможность достижения мультимегагауссных полей, несмотря на взрыв скин-слоя [7].

Наиболее сильное поле достигнуто в настоящее время методом магнитной кумуляции. Этот метод, основанный на быстром сжатии магнитного потока стенками проводящего цилиндра, впервые реализован группами А.Д. Сахарова в СССР и Фаулера в США в конце 50-х годов. Дальнейшее развитие этой технологии, основанное на глубоком изучении физики процесса и усовершенствовании методики эксперимента, позволило достичь поля с индукцией до 2800 Т [8].

Физике и технике сильных магнитных полей посвящено несколько обзорных статей и монографий. Большая часть из них рассматривает, главным образом, неразрушаемые магнитные системы. В обзоре Г.М. Страховского и Н.В. Кравцова [9], в книгах Паркинсона и Малхолла [10], Монтгомери [11], В.Р. Карасика [12], А.С. Лагутина и В.И. Ожогина [13], описаны методы расчёта полей систем с заданным распределением тока, приведены методики расчётов механических напряжений в многовитковых магнитах различной конфигурации. Импульсные поля занимают основное место в книге Кнопфеля [14], в монографии, изданной под редакцией

В.С. Комелькова [15]. Эти книги охватывает основные аспекты техники сильных полей, описанные в литературе, вышедшей до 1970 года. Весьма полный сборник рефератов работ по получению сильных магнитных полей, опубликованных до 1970 года, содержится в книге [16]. Дальнейший прогресс в технологии импульсных полей нашел отражение в книге [17], в обзорах [18, 19], в книге, вышедшей под редакцией Герлаха и Миуры [20]. Эта книга содержит также статьи, в которых описаны применения сильных импульсных магнитных полей в различных областях науки.

Создание установки для получения сильного магнитного поля включает в себя следующие этапы.

1. Расчёт поля соленоида и выбор его геометрической формы, обеспечивающей требуемую конфигурацию поля, а также расчёт тока, необходимого для питания магнитной системы.

2. Выбор источника энергии и согласование его с нагрузкой.

3. Расчёт механических напряжений в обмотке соленоида.

4. Анализ тепловых процессов в катушках.

Все эти вопросы в определённой мере рассматриваются в главах 1-4. Здесь описывается постановка задач и расчёта поля магнитных систем, и приводятся некоторые важные расчётные формулы (глава 1). Особое внимание уделено задачам, в которых граничные условия соответствуют резко выраженному скин-эффекту, что свойственно импульсным полям (глава 2). Вопросы диффузии поля излагаются в третьей главе, где уделено внимание джоулеву нагреву и способам его снижения, описывается нелинейная диффузия. В четвёртой главе рассматриваются некоторые вопросы энергетики магнитных систем: оптимизация системы магнит – емкостной накопитель; оптимизация по Фабри магнитных систем со стационарным полем, энергетика систем, предназначенных для ускорения проводников электромагнитными силами. Пятая, шестая и седьмая главы содержат материал, касающийся неразрушаемых магнитных систем. Кратко рассматриваются вопросы расчёта сил и напряжений в традиционных многовитковых магнитных системах с азимутальным током, включая обмотки с равнонагруженными слоями. Приводятся оценки напряжений в магнитах при коротких импульсах, когда играют роль инерционные эффекты (глава 5).Вместе с тем, в рамках книги рассматриваются теоретические аспекты создания квазибессиловых магнитов, в которых возможно резкое снижение механических напряжений. Это достигается благодаря выбору распределения тока в слоях обмотки и созданию конфигурации, обеспечивающей равновесие слоёв. Есть основания считать, что такие магниты могут позволить преодолеть прочностные ограничения и выйти на мегагауссный уровень полей в неразрушаемых магнитных системах без чрезмерного увеличения их размеров и энергии. Поэтому в шестой главе уделено внимание изложению идей, развиваемых в последние годы в этом направлении в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

В седьмой главе кратко описаны конструкции неразрушаемых магнитов различных типов, включая как многовитковые магнитные системы, так и одновитковые магниты. В этой главе даны также примеры применений сильных импульсных магнитных полей в задачах, где осуществляется силовое воздействие поля на проводящие тела для целей их деформирования или ускорения.

Последние три главы посвящены созданию сверхсильных полей. В восьмой главе рассмотрены физические эффекты, проявляющиеся при получении поля в разрушающихся одновитковых магнитах. Здесь приводятся описание экспериментов, обзор экспериментальных данных и описываются качественные особенности разрушения одновитковых магнитов. Совокупность процессов, выступающих при взрыве витка, в конечном счёте, проявляется в том, когда начинается и насколько быстро происходит спад геометрического фактора - отношения мгновенных значений индукции и тока. Картина взрыва витков рассматривается в этой главе как в случае полного (тонкостенные витки), так и в случае частичного разрушения (толстостенные магниты).

Количественное описание этих процессов выполняется в указанной главе в рамках простой гидродинамической модели, описывающей разрушение коротких толстостенных витков как двухмерное течение идеальной несжимаемой жидкости. Вместе с тем здесь приведены результаты более полного компьютерного моделирования разрушения тонкостенных витков.

Девятая глава содержит анализ процессов одномерного течения в полях мегагауссного диапазона, когда формируется ударная волна, и возможен электрический взрыв скин-слоя. Этот процесс рассматривается как в рамках простейшей модели течения среды с идеальной проводимостью, так и в более точной постановке с учётом нагрева среды в скин-слое и потери ею проводимости при расширении. Аналитические расчёты здесь сопоставлены с результатами компьютерного моделирования. Итогом анализа являются оценки параметров источников энергии, используемых для генерирования поля в разрушающихся одновитковых магнитах.

Последняя глава книги содержит описание метода магнитной кумуляции, оценки длительности импульса и анализ факторов, препятствующих достижению расчётного значения индукции. Аналитические оценки и в этой части сопоставлены с известными результатами компьютерных расчётов.

В основу данной книги легли лекции автора по курсу « Физика и техника сильных магнитных полей» для студентов кафедры «Электроэнергетика и Техника высоких напряжений» Электромеханического факультета СПбГПУ. Она может быть полезна также для физиков и инженеров, использующих сильные магнитные поля и создающих магнитные системы для их получения.

1. МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ СИЛЬНЫХ ПОЛЕЙ. МЕТОДЫ РАСЧЕТА, УЧЁТ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ

1.1. Магнитные поля систем с заданным распределением тока

Как правило, габариты импульсных установок $R_{\max}$ не превышают нескольких метров, поэтому при характерных частотах порядка 10^6 Гц и ниже допустимо считать режимы разряда квазистационарными. Это справедливо, если $\lambda >> R_{\max}$ (λ - длина электромагнитной волны в пустоте) здесь не будут рассматриваться, поэтому допущение о квазистационарности использовано во всех разделах книги. Вектор индукции в пространстве вне проводников при этих условиях удовлетворяет уравнениям Максвелла [21, 22]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = 0; \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{1.2}$$

В данной главе рассмотрены часто встречающиеся конфигурации соленоидов, используемых при получении сильных и сверхсильных полей. В осесимметричных конфигурациях (рис. 1.1) возможно два типа магнитного поля: полоидальное и азимутальное. В табл. 1.1 представлены компоненты векторного потенциала и векторов индукции и плотности тока для этих двух конфигураций поля:

При заданном распределении тока индукция тороидального поля, имеющая только одну компоненту, может быть рассчитана, исходя из закона полного тока:

$$B_{\varphi}(N) = \mu_0 i(r\ )/(2\pi r\ ), \tag{1.3}$$

где r - радиальная координата точки N, $i(r) = \int_0^r \delta_z(r) 2\pi r dr$ - полный ток, проходящий через круг с радиусом r.

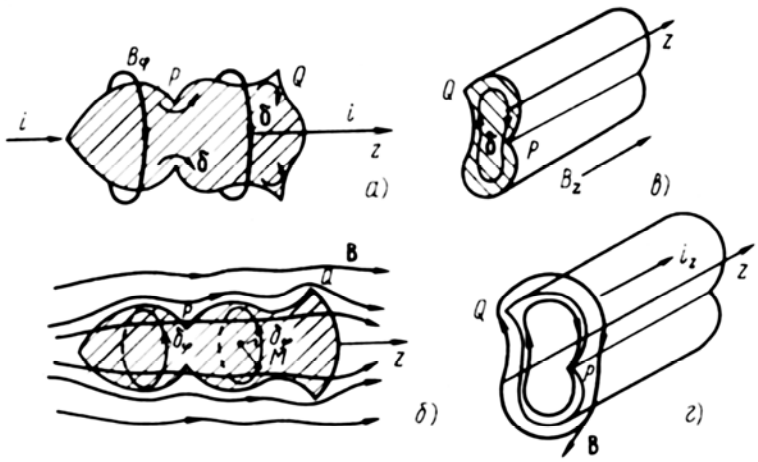


Рис. 1.1. Магнитные системы с полем, зависящим от двух координат:

а - осесимметричное тороидальное поле с $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, 0)$, $\delta = (\delta_r, 0, \delta_z)$;
б - осесимметричное полоидальное поле с $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$, $\delta = (0, \delta_\varphi, 0)$;
в - плоский аналог тороидального поля с $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, $\delta = (\delta_x, \delta_y, 0)$;
г - плоский аналог полоидального поля с $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$, $\delta = (0, 0, \delta_z)$.

Таблица 1.1

Два типа магнитных полей: полоидальное и тороидальное

Тип поля	Коорд.	**A**	**B**	**δ**
Полоидальное поле	r	0	B_r	0
	φ	A_φ	0	δ_φ
	z	0	B_z	0
Тороидальное поле	r	A_r	0	δ_r
	φ	0	B_φ	0
	z	A_z	0	δ_z

Азимутальная компонента векторного потенциала A_φ, функция потока $\psi = rA_\varphi$ и скалярный магнитный потенциал акиально-симметричного полоидального поля удовлетворяют следующим уравнениям, являющимся следствием уравнений Максвелла;

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right) - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = 0\,; \tag{1.4}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0\,; \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_M}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U_M}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1.6}$$

Вектор индукции полоидального поля вне проводника выражается через функции U_M, A_φ и ψ известными формулами:

$$B_r = -\frac{\partial U_M}{\partial r} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{1.7}$$

$$B_z = -\frac{\partial U_M}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\,. \tag{1.8}$$

При известном аксиально-симметричном распределении тока по сечению обмотки соленоида векторный потенциал полоидального поля в произвольной точке N с цилиндрическими координатами r, z выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\varphi(r,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_T \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi-\varphi_t)\ \ \delta_\varphi(r_t,z_t) r_t dr_t dz_t}{(r_t^2 + r^2 - 2r_t r\cos(\varphi-\varphi_t) + (z-z_t^2))^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\int_T \sqrt{\frac{r_t}{r}}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)\mathrm{K}(k) - \frac{2}{k}\mathrm{E}(k)\right]\delta_\varphi(r_t,z_t)\,dT(r_t,z_t), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где r_t, z_t, φ_t - координаты точки t, принадлежащей сечению проводника T; $\mathrm{K}(k)$, $\mathrm{E}(k)$ - полные эллиптические интегралы с модулем $k = 2(rr_t)^{1/2}\left[(z - z_t)^2 + (r + r_t)^2\right]^{-1/2}$.

Можно получить выражение для индукции на оси соленоида:

$$B_z(z,0) = \left[(1/r)\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]_{r=0} = \frac{\mu_0}{2}\int_T \frac{r_t^2 \delta_\varphi(r_t, z_t) dT(r_t, z_t)}{\left[r_t^2 + (z - z_t)^2\right]^{3/2}} \quad (1.10)$$

и важные формулы для поля на больших расстояниях от центра соленоида (r, $z \gg g_{\max}$, где $g_{\max}$ - наибольший осевой или радиальный размер соленоида):

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 r M}{4\pi\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}; \quad (1.11)$$

$$(B_z)_{r=0} = \frac{\mu_0 M}{2\pi z^3}, \quad (1.12)$$

где $M = \pi\int\limits_T \delta_\varphi r_t^2 dT(r_t, z_t)$ — магнитный момент соленоида.

Формулы для индукции, рассчитанные при известном распределении тока по сечению для обмоток различной конфигурации, приведены в книгах [11, 14] и в других источниках. Ограничимся лишь выражением для индукции в центре катушки прямоугольного сечения с длиной l, внешним радиусом R_2 и внутренним R_1:

$$B(0,0) = \frac{\mu_0 i w}{2(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2 + \sqrt{(l/2)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(l/2)^2 + R_1^2}} \quad (1.13)$$

и для индукции на оси тонкостенного соленоида [$R_2 - R_1 = \Delta \ll R_1$ (рис. 1.2)]:

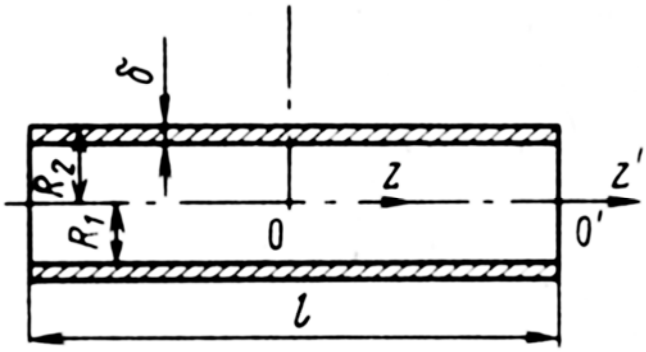


Рис. 1.2. Тонкостенный соленоид

$$B(0,z)=\frac{\mu_0 J_\varphi}{2}\left[\frac{l/2-z}{\sqrt{(l/2-z)^2+R_1^2}}+\frac{l/2+z}{\sqrt{(l/2+z)^2+R_1^2}}\right], \tag{1.14}$$

где z - расстояние, отсчитываемое от центра соленоида; $J_\varphi = iw/l$ - линейная плотность тока. Из формулы (1.11) следуют выражения для индукции в центре соленоида B_C, на оси в плоскости торца B_T и для их отношения:

$$\left.\begin{aligned} B_C &= B(0,0)=\frac{\mu_0 iw}{2}\left[(l/2)^2+R_1^2\right]^{-1/2};\\ B_T &= B(0,l/2)=\frac{\mu_0 iw}{2}\left(l^2+R_1^2\right)^{-1/2};\\ \frac{B_T}{B(0,0)} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2+4R_{12}}{l^2+R_1^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Распределение индукции у края полубесконечного соленоида с равномерной плотностью тока имеет вид

$$B(0,z_1)=\frac{B_\infty}{2}\left(1-\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+R_1^2}}\right), \tag{1.16}$$

где z_1 - координата, отсчитываемая от края соленоида (рис. 1.2); $B_\infty = \mu_0 J_\varphi$ - индукция в рабочем объёме соленоида вдали от края.

В ряде случаев удобно пользоваться интегральными представлениями потенциалов. Если скалярный потенциал является абсолютно интегрируемой функцией координат, его можно представить в виде:

$$U_M(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j\lambda z} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_0(\lambda r) \\ \mathrm{K}_0(\lambda r) \end{pmatrix} \mu(\lambda) d\lambda, \tag{1.17}$$

так как подынтегральное выражение удовлетворяет уравнению Лапласа. Здесь функция Бесселя мнимого аргумента I_0 используется, если потенциал ограничен при $r=0$, а функция Макдональда K_0 - если потенциал ограничен при $r=\infty$. Экспонента с мнимым показателем может быть заменена функцией $\sin(\lambda z)$ или $\cos(\lambda z)$, если $U_M(r,z)$ есть, соответственно, нечётная или чётная функция z. Возможно также представление $U_M(r,z)$ при $z>0$ в виде интеграла Фурье-Бесселя

$$U_M(r,z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda z} \mathrm{J}_0(\lambda r) \chi(\lambda) d\lambda. \tag{1.18}$$

Для векторного потенциала справедливы выражения, отличающиеся от (1.17) и (1.18) лишь заменой функций Бесселя нулевого порядка на функции Бесселя первого порядка.

Функция потока полоидального поля описывается такими же формулами, как и функция потока стационарного при стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости. В частности, при известном распределении индукции на оси магнита $B(0,z)=b(z)$ можно рассчитать поле в окрестности оси с помощью известной в гидродинамике формуле Уиттекера:

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int_0^r rdr\int_0^\pi b(z + jr\cos\omega)d\omega\,, \tag{1.19а}$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Из формулы (1.19а) можно получить представление индукции в виде ряда, справедливое в окрестности произвольной точки на оси вплоть до поверхности витков:

$$B_z(r,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}\frac{\partial^{2k}b(z)}{\partial z^{2k}}\,; \tag{1.19б}$$

$$B_r(r,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k+1}\frac{\partial^{2k+1}b(z)}{\partial z^{2k+1}}\,. \tag{1.19в}$$

Этой формулой можно воспользоваться для случая, когда начало отсчета находится на краю полубесконечного соленоида, и распределение индукции описывается формулой (1.16). Дифференцируя выражение (1.16) нетрудно убедиться, что все члены ряда для B_z, кроме первого ($k = 0$), обращаются в нуль, если $z_1 = 0$. Отсюда следует постоянство B_z в плоскости торца полубесконечного соленоида:

$$B_z = B_\infty/2 \qquad \text{при } z_1 = 0,\ 0 \le r \le R_1. \tag{1.20}$$

1.2. Постановка задачи расчёта магнитного поля при малой глубине проникновения

Несмотря на широкий диапазон изменения параметров установок, используемых для получения сильных импульсных токов и магнитных полей (ток от 10^3 до 10^7 А, частота от 10^2 до 10^7 Гц, энергия от единиц джоулей до 10^7 Дж), есть общая черта, отличающая их, например, от аппаратуры промышленной частоты. Это, как правило, резко выраженный поверхностный эффект, проявляющийся в ряде случаев в переходном режиме.

Известно, что 63 % тока, меняющегося во времени по синусоидальному закону с круговой частотой ω, сосредоточено в слое толщиной $\Delta_0 = [2\rho/(\mu\omega)]^{1/2}$, где ρ — удельное сопротивление среды, и 86 % — в слое $2\Delta_0$. Параметр Δ_0 есть «классическая» глубина проникновения поля [22]. Для инженерных расчётов скин-эффект можно считать резко выраженным, если минимальный характерный размер проводника или системы проводников $R_{\min}$ (толщина стенки, радиус кривизны поверхности, расстояние между проводниками и т. д.) удовлетворяет условию $R_{\min} >> \Delta$. Здесь Δ — толщина слоя, в котором сосредоточена основная часть тока (толщина скин-слоя). В режиме гармонических колебаний тока эта величина примерно равна $2\Delta_0$. Проводящие тела, удовлетворяющие указанному условию, в электротехнике принято называть «массивными» проводниками.

При характерных частотах порядка 10^4 Гц и выше $\Delta_0 \le 0{,}7$ мм (для меди), так что условие резко выраженного скин-эффекта во многих случаях выполняется. В переходном режиме определение глубины проникновения следует уточнить. Ею можно считать, например, одну из величин $\Delta' = \Phi'/B_e$ или $\Delta'' = B_e/[\mu_0\delta(0)]$, где B_e и $\delta(0)$ — индукция и плотность тока на поверхности; Φ' — поток, проникший в проводник (в расчёте на единицу длины).

При резко выраженном поверхностном эффекте можно пренебречь влиянием искривления границы на распределение тока в скин-слое и считать, что плотность тока $\boldsymbol{\delta}$ изменятся по нормали к границе так же, как в случае проводника с плоской границей. Из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}$ вытекает известная связь напряжённости на границе проводника $\mathbf{H}_e$ и поверхностной плотности тока [20]:

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty \boldsymbol{\delta}(x)dx = [\mathbf{n}_e, \mathbf{H}_e]; \qquad (1.21)$$

$$|\mathbf{J}| = |\mathbf{H}_e|. \qquad (1.22)$$

Здесь координата x направлена по нормали внутрь проводника, точка $x = 0$ лежит на границе. В формуле (1.21) использовано условие затухания тока: $\delta(\infty) = 0$.

Наряду с поверхностной плотностью тока при изучении распределения тока в тонких листах (толщина листа много меньше других характерных размеров) будет использовано понятие линейной плотности тока

$$\mathbf{J}(N) = \int_{N_1}^{N_2} \boldsymbol{\delta} dn, \qquad (1.23)$$

где интеграл взят по нормали к срединной поверхности листа; $N_{1,\ 2}$ — точки, лежащие на пересечении нормали с границами проводника. При резко выраженном скин-эффекте

$$\mathbf{J}(N) = \mathbf{J}_1(N_1) + \mathbf{J}_2(N_2), \qquad (1.24)$$

где $\mathbf{J}_{1,\ 2}$ — поверхностная плотность тока в точках $N_{1,\ 2}$.

Резко выраженный поверхностный эффект позволяет при расчёте поля вне проводников и внешней индуктивности контуров принять в первом приближении допущение об идеальной проводимости, а конечную глубину проникновения учитывать в следующем приближении при определении потерь в проводниках и поля в них.

Допущение об идеальной проводимости означает равенство нулю касательной составляющей электрического поля и нормальной составляющей индукции:

$$E_\tau = 0; \qquad (1.25)$$

$$B_n = 0. \qquad (1.26)$$

В задачах с резко выраженным скин-эффектом распределение тока по поверхности проводников не задано, а определяется в ходе решения с помощью формулы (1.21). В этих задачах расчёт поля сводится к решению какого-либо из уравнений (1.4-1.6). В приближении идеальной проводимости граничное условие (1.26) переходит в условия для функций U_M, A_φ и ψ:

$$\frac{\partial U_M}{\partial n}(s)=0; \tag{1.27}$$

$$r_s A_\varphi(s)=\psi(s)=\text{const}, \tag{1.28}$$

где s — точка, принадлежащая контуру продольного, то есть проходящего через ось z, сечения проводника. Условие (1.28) означает постоянство потока сквозь любой круг радиуса r_s, опирающийся на контур сечения витка (рис. 1.3). Кроме условий (1.27), (1.28) должны быть заданы значения искомых функций на бесконечности и полные токи в проводниках или дополнительные условия, позволяющие найти эти токи (например, электродвижущие силы в цепи питания магнитов).

Токовое условие имеет вид:

$$\oint_G \vec{H}\,\overrightarrow{dl}=i, \tag{1.29}$$

где интеграл взят по контуру G, охватывающему проводник (рис. 1.3).

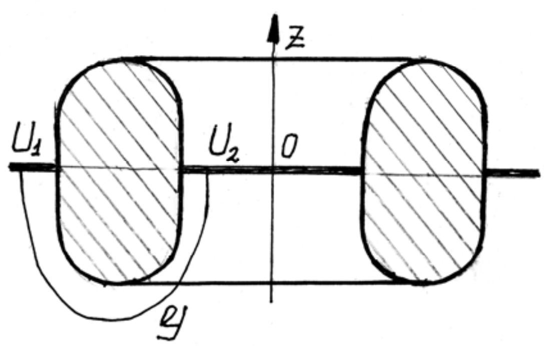


Рис. 1.3. Продольный разрез соленоида, имеющего вид тела вращения

При расчёте полей одновитковых магнитов в большинстве случаев приходится прибегать к приближённым аналитическим и численным методам. Для непосредственного решения уравнения (1.6) могут быть использованы известные конечно-разностные методы и современные программы, основанные на методе конечных элементов. Применение уравнения для скалярного магнитного потенциала (1.6) при численных расчётах наиболее удобно тогда, когда известны поверхности, на которых касательная составляющая индукции равна нулю, и поэтому можно задать граничное условие $U_M = \mathrm{const}$. Примером может быть симметричная конфигурация (рис. 1.4), где достаточно найти поле в половине области (например, при $z < 0$), при этом граничными условиями являются $U_M = U_1$ при $z = 0$, $r \le R - a$; $U_M = U_2$ при $z = 0$, $r \ge R + a$; $\partial U_M / \partial n = 0$ на поверхности витка. Токовое условие $\oint \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = i$ при этом имеет вид:

$$U_1 - U_2 = -\int_{G_1} \nabla U_M \, dl = \frac{\mu_0}{2} i, \tag{1.30}$$

где G_1 — путь интегрирования, охватывающий половину витка.

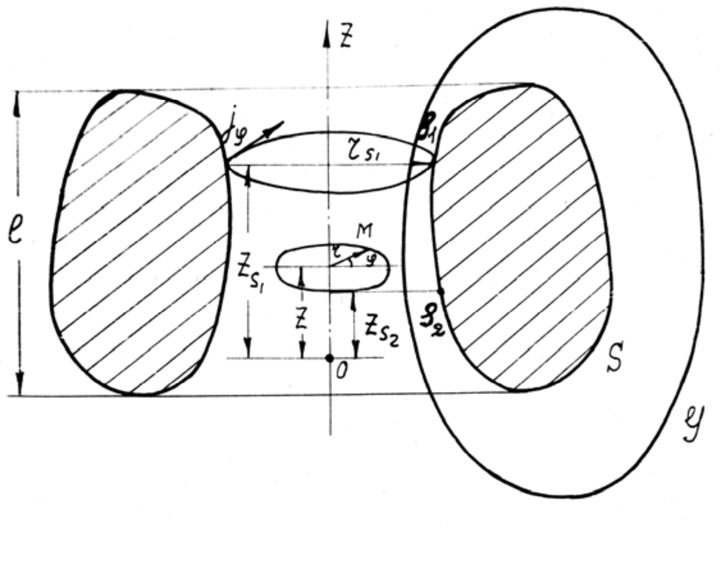


Рис. 1.4. К выводу интегрального уравнения для поверхностной плотности тока при условии идеальной проводимости одновиткового магнита

Расчёт магнитного поля в осесимметричной системе легко свести к решению интегрального уравнения I или II рода, подобно тому, как это делается в электростатике.

Интегральное уравнение I рода можно получить непосредственно из выражения для векторного потенциала (1.9), если считать, что точки r, z и r_t, z_t расположены на поверхности витка S. В этих точках справедливо граничное условие (1.21), следовательно, имеет место уравнение:

$$\begin{gathered}\Phi(s)=\mu_0\int\limits_S\sqrt{(z_s-z_s')^2+(r_s+r_s')^2}\times\\ \times\left[\left(1-k^2/2\right)\mathrm{K}(k)-\mathrm{E}(k)\right]J_\varphi(s')dS(s')+\Phi_e(s)=\mathrm{const}\end{gathered}, \tag{1.31}$$

где $k=2(r_s r_s')^{1/2}\left[(r_s+r_s')^2+(z_s-z_s')^2\right]^{-1/2}$, $\Phi_e(s)$ — составляющая потока через круг радиуса r_s, созданная внешними источниками. Приближённое аналитическое решение этого уравнения получено для короткого тонкостенного цилиндра [23].

Ядро интегрального уравнения I рода (1.31) является симметричным, квадратично-суммируемым и имеет логарифмическую особенность. Если решение этого уравнения квадратично-суммируемо, что имеет место в тех случаях, когда контур сечения — замкнутая кривая, для определения $J(s)$ может быть использован итерационный процесс. Решение уравнения (1.31) при дополнительном условии (1.29) можно найти путём сведения его к системе алгебраических уравнений разбивкой контура S на участки и заменой интеграла суммой.

В идеально проводящем соленоиде с исчезающе малой толщиной стенки точки s_1' и s_2' (рис. 1.5) сливаются, и в уравнении (1.31) фигурирует суммарная плотность тока $J_\varphi(s')=J_\varphi(s_1')+J_\varphi(s_2')=J_i(s')+J_e(s')$, где J_i и J_e — плотность тока с внутренней и наружной сторон стенки соленоида.

Дифференцируя выражение для векторного потенциала (1.9), можно найти нормальную составляющую индукции на поверхности проводника. Приравнивая её к нулю, получаем следующее уравнение:

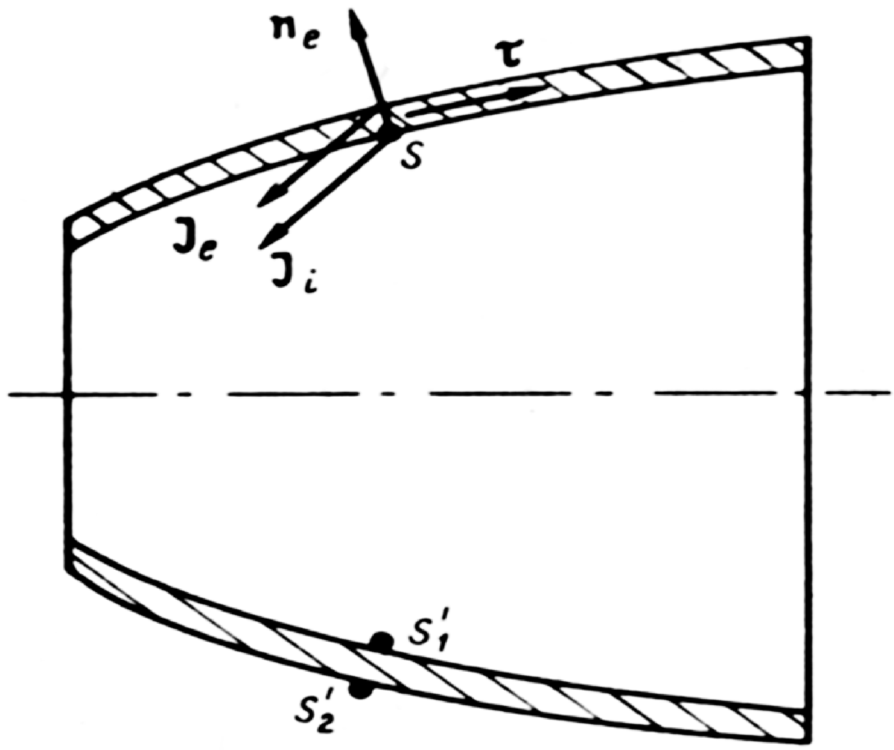


Рис. 1.5. К расчёту плотности тока на внешней и внутренней поверхностях тонкостенного соленоида

$$\int\limits_S \frac{(z_s' - z_s) f_1(k)\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) + \left[r_s f_1(k) + r_s' f_2(k)\cos(\mathbf{n},\mathbf{z})\right]}{2r_s\sqrt{r_s r_s'}} J_\varphi(s')dS(s') = 0\,, \tag{1.32}$$

где $f_1(k) = k\left[\mathrm{K} - \dfrac{2-k^2}{2\left(1-k^2\right)}\mathrm{E}\right]$; $\qquad f_2(k) = \dfrac{k^3\,\mathrm{E}}{2\left(1-k^2\right)}$,

модуль эллиптических интегралов тот же, что в уравнении (1.31).

Уравнение (1.32) может быть использовано для расчёта распределения тока в тонкостенном цилиндре при дополнительном условии $\int J_\varphi dS = i$

При расчёте поля проводников с отличной от нуля толщиной стенки задачу можно свести к решению интегрального уравнения II рода для азимутальной компоненты линейной плотности тока J_φ [1]:

$$-J_\varphi(s) + \frac{1}{\pi}\int_S J_\varphi(s')\left[Q(s,s') - \pi/\Pi\right]dS(s') = -i/\Pi \qquad (1.33)$$

В приведенных формулах $\Pi -$ периметр границы аксиального сечения витка S, $i -$ ток, $\tau -$ орт касательной к контуру сечения в точке s с координатами z_s, r_s, $n -$ орт нормали,

$$Q(s,s') = \frac{-(z_s - z_s')f_1(k)\cos(\boldsymbol{\tau},\mathbf{r}) + \left[r_s f_1(k) + r_s' f_2(k)\right]\cos(\boldsymbol{\tau},\mathbf{z})}{2r_s\sqrt{r_s r_s'}}.$$

1.3. Определение параметров индукторных систем при резко выраженном скин-эффекте по упрощённой картине поля

Грубая оценка индукции вдали от краёв соленоида и оценка индуктивности могут быть в ряде случаев получены с помощью упрощённой картины поля, не учитывающей краевые эффекты. Построение упрощённой картины поля основано на интуитивных представлениях, использующих условие непроницаемости идеально проводящих стенок для магнитного потока. При таком расчёте принимается, что вся энергия магнитного поля сосредоточена в некоторой фиксированной области, где распределение индукции считается известным и за пределами которой индукция принимается равной нулю.

---

[1] Вывод этого уравнения представлен в книге [23].

Использование заранее заданной упрощенной картины поля имеет место в расчётах электрических аппаратов и машин. Эта методика применена для расчёта поля массивных индукторов, причём в книге [23] введены поправки, учитывающие краевой эффект. В простейшем случае поля длинного одновиткового соленоида замена истинной картины поля упрощённой соответствует допущению о равенстве нулю индукции вне цилиндрического объёма, ограниченного внутренней цилиндрической поверхностью и плоскостями торцов соленоида, и о постоянстве индукции внутри этого объёма (рис. 1.2). Тогда $B = \mu_0 \, i/l$, отсюда находим известное приближённое выражение для индуктивности длинного соленоида

$$L = \mu_0 \pi R^2 / l. \tag{1.34}$$

Далее приведём три примера, иллюстрирующих методику расчёта с помощью упрощённой картины поля.

Поле одновиткового соленоида (плоского кольца) над идеально проводящей плоскостью ***(***$h << r_1$***)***. Из условия «непроницаемости» стенок (1.26) и допущения о равномерном распределении поля по высоте зазора (рис. 1.6,а) следует выражение для индукции в точке A:

$$B(A) = \frac{\Phi}{2\pi h r(A)} = \mu_0 J_\varphi. \tag{1.35}$$

Далее можно рассчитать ток и индуктивность:

$$i = \int_{r_1}^{r_2} J_\varphi dr = \frac{\Phi}{2\pi \mu_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}; \tag{1.36}$$

$$L = \frac{2\pi \mu_0 h}{\ln(r_2/r_1)}. \tag{1.37}$$

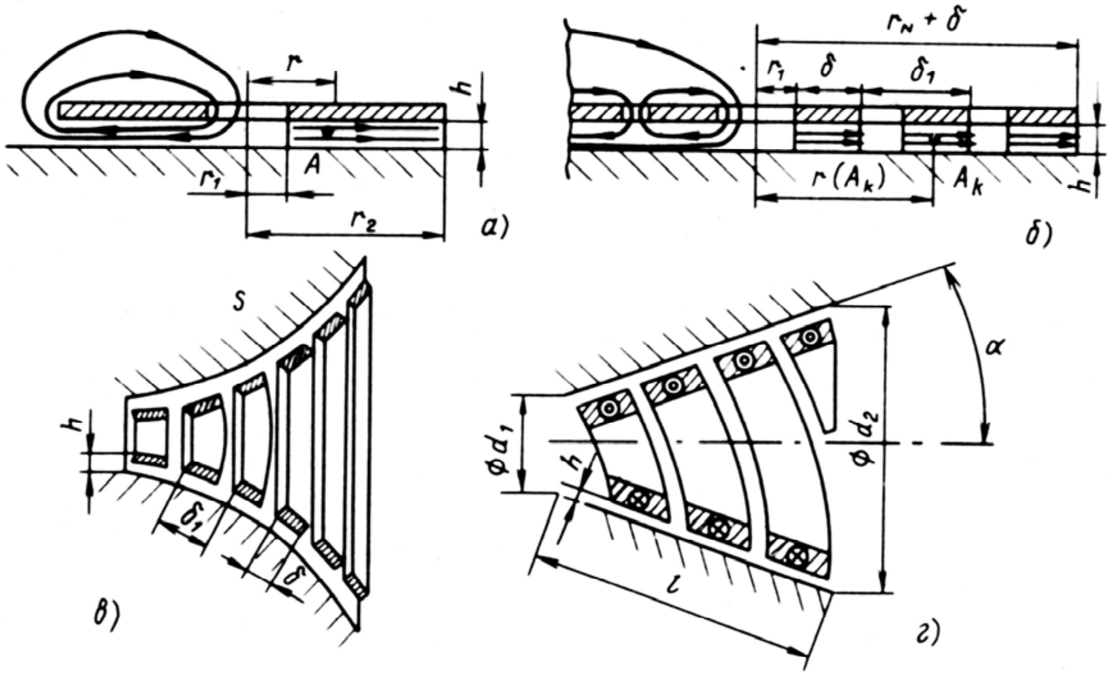


Рис. 1.6. Расчётные схемы соленоидов, используемые для вычисления индуктивности по упрощённой картине поля: ***а*** - диск над плоскостью; ***б*** - плоская спираль над плоскостью; ***в*** - многовитковый соленоид, расположенный вблизи поверхности вращения; ***г*** - соленоид, отделённый узким зазором от конуса.
В примерах ***а*** и ***б*** в левой части показана качественная картина поля, в правой - упрощённая картина поля

Поле многовиткового соленоида в виде плоской спирали над плоскостью (рис. 1.6,***б***). Эта задача легко решается при условии $h << \delta_1 - \delta,\ \delta$, когда можно считать поле сосредоточенным под витками; в точке A_k под k-м витком индукция определяется по формуле (1.36): $B(A_k) = \Phi_k / [2\pi h r(A_k)]$, отсюда индуктивность k-го витка $L_k = 2\pi\mu_0\, h / \ln(1 + \delta / r_k)$, а полная индуктивность*

* Взаимной индуктивностью между витками при условии $h << \delta$, $h << \delta_1 - \delta$ пренебрегаем.

$$L = 2\pi\mu_0 h \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\ln \frac{r_k + \delta}{r_k}}, \tag{1.38}$$

где $r_k = r_1 + (k-1)\delta$.

Если шаг спирали $\delta_1 << r_1$, то $\ln(1 + \delta/r_k) \approx \delta/r_k$, поэтому

$$L \approx \frac{2\pi\mu_0 h}{\delta} \sum_{k=1}^{N} r_k = \frac{2\pi\mu_0 hN}{\delta}\left[r_1 + \frac{(N-1)\delta_1}{2}\right], \tag{1.39}$$

где N — число витков.

Если внешний радиус велик и $N >> 1$, то

$$L \approx \pi\mu_0 hN^2 \delta_1/\delta. \tag{1.40}$$

О точности формул (1.39) и (1.40) можно судить, сравнивая результаты расчётов по ним с более точными, учитывающими «просачивание» потока между витками. Такие расчеты приведены в книге [23].

Формула (1.40) является частным случаем более общего соотношения для индуктивности многовиткового соленоида, отделённого от поверхности тела вращения S весьма малым зазором h (рис. 1.6, в):

$$L \approx \frac{\mu_0 V}{\delta\delta_1}, \tag{1.41}$$

где V — объём, заключённый между индуктором и поверхностью S; δ_1 — шаг обмотки. Этот результат можно получить, если считать поле сосредоточенным под витком ($H = i/\delta$) и считать энергию магнитного поля $\mu_0 i^2 V/(2\delta\delta_1)$ равной $Li^2/2$. В случае конической катушки, расположенной вблизи идеально проводящего конуса (рис. 1.6,г), $V = \pi h(r_1 + r_2)l$; $l = w\delta_1$, поэтому

$$L=\mu_0 \pi w^2 h\frac{(d_1+d_2)\delta_1}{2l\delta}. \tag{1.42}$$

Эта формула переходит в выражение для индуктивности плоской спирали (1.40), если $\alpha=\pi/2$, $d_1 << d_2$, так как при этом $d_2 \approx 2l$.

Поле соленоида в разгружающем цилиндрическом экране. Из упрощённой картины поля (рис. 1.7) следует: $B(A_1)=\Phi/F_1$; $B(A_2)=-\Phi/F_2$, где $F_1=\pi r_i^2$, $F_2=\pi\left(R^2-r_e^2\right)$.

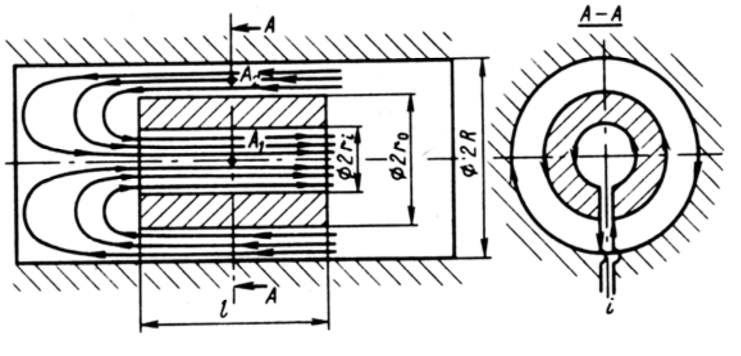


Рис. 1.7. Переход от истинной к упрощённой картине поля при расчёте поля соленоида в разгружающем экране

Суммируя токи на внешней и внутренней сторонах цилиндра, получаем:

$$i \approx \frac{\Phi l}{\mu_0 F_1}+\frac{\Phi l}{\mu_0 F_2}=\frac{\Phi l}{\mu_0}\cdot\frac{R^2-r_e^2+r_i^2}{r_i^2\left(R^2-r_e^2\right)};$$

$$L \approx \frac{\mu_0 r_i^2\left(R^2-r_e^2\right)}{l\left(R^2-r_e^2+r_i^2\right)}. \tag{1.43}$$

Условие разгрузки соленоида от электромагнитных сил выполнено, если $F_1=F_2$ или $r_i^2=R^2-r_e^2$.

Зная асимптотическую зависимость напряженности поля от координат, можно ею воспользоваться для расчёта тока. Например, как отмечено в § 2.2, поле диска с отверстием радиуса R_1 на больших расстояниях от центра характеризуется соотношением $B(M) = \left[\Phi/\left(2\pi r^2\right)\right]\left(\vec{\rho}/\rho\right)$*. Если для оценки индуктивности принять, что плотность тока всюду на диске (а не только вдали от его края) определяется по формуле $J_\varphi = \Phi/\left(2\pi\mu_0\rho^2\right)$, то полный ток есть $i = \Phi/\left(\mu_0\pi R_1\right)$. Отсюда получаем приближенное значение индуктивности $L = \pi\mu_0 R_1$ вместо точного значения $L = 2\mu_0 R_1$. Погрешность в этом случае велика, так как неверно вычисляется основная часть тока, сосредоточенная в области у края, где зависимость J_φ отлична от асимптотической.

Погрешность может быть меньше при расчёте концентраторов потока и других устройств, где асимптотическая зависимость используется лишь для вычисления относительно небольшой части полного тока, например, тока на конической части концентратора.

1.4. Краевые эффекты в одновитковых магнитах. Модельные задачи

Магнитное поле систем, работающих в условиях резко выраженного скин-эффекта, характерно тем, что в тех местах, где граница проводников имеет излом, возможен существенный рост индукции. Этот эффект имеет место в полоидальном аксиально-симметричном поле, где, как, как показывает рис. 1.1, вектор индукции, лежащий в плоскости rz, ортогонален окружности, являющейся линией излома граничной поверхности. В тороидальном поле вектор индукции направлен параллельно кромке. В этом случае наличие кромки не влияет на поле вне проводника, определяемое формулой (1.3).

Среди рассматриваемых ниже примеров большое место занимают такие идеализированные системы, как бесконечно тонкие

* $\vec{\rho}$ - радиус-вектор из центра до точки M (см. рис. 2.11)

шины и провода с прямоугольными кромками. Расчёт этих систем в ряде случаев даёт приближённое выражение для параметров реальных устройств. Например, индуктивность тонких шин мало изменяется при переходе к шинам нулевой толщины. Однако учёт конечной толщины шины или радиуса скругления кромки имеет принципиальное значение при расчёте напряженности поля вблизи края проводников. Здесь уже недостаточно знать закон нарастания напряжённости при приближении к вершине двугранного угла и константу, характеризующую её рост, но надо иметь возможность учесть реальную геометрию области вблизи края проводника. Её необходимо учитывать и при расчёте энергии, выделяющейся при нагреве среды в скин-слое. Это особенно важно в случае тонких шин, когда в приближении нулевой толщины листа не только локальное значение мощности, выделяемой на единице длины, но и её интегральное значение неограниченно растёт. Задача состоит в том, чтобы найти простые соотношения, позволяющие сразу переходить от напряжённости поля вблизи вершины угла к напряжённости на реальной кромке. Отношение указанных напряжённостей есть постоянная, если соответствующий характерный размер (толщина шины, радиус скругления) достаточно мал по сравнению с другими размерами магнитной системы. Например, радиус скругления кромки ρ много меньше расстояния между проводниками d. При этом условии можно рассматривать окрестность кромки как уединённую краевую область, считая, что поле в этой области является плоским. В идеальном случае остроугольной кромки поле в окрестности точки O (вершины двугранного угла) можно описывать в локальной системе координат $z_1 = x_1 + jy_1$ (рис. 1.8,***а***). При условии $\theta < \pi$ индукция полоидального поля в точке M неограниченно растёт, если расстояния от этой точки до вершины угла стремится к нулю, подобно тому, как это имеет место в электростатическом поле. В реальных условиях край проводника всегда «скруглён», поэтому индукция поля остаётся конечной.

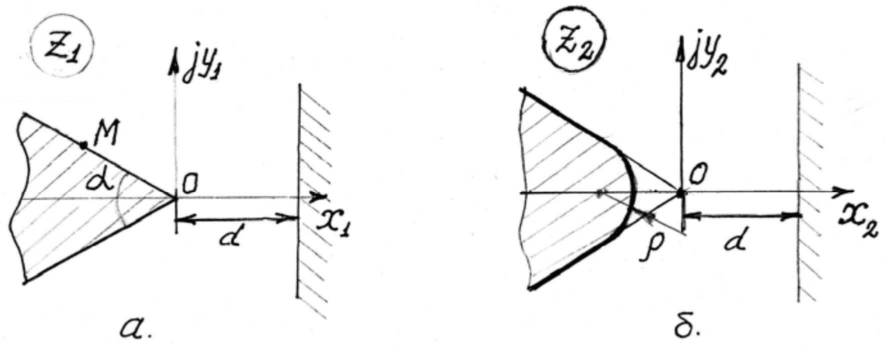


Рис. 1.8. Остроугольная и скругленная кромки проводника

Вместе с тем можно считать, что в приближении идеальной проводимости закон изменения индукции и поверхностной плотности тока при удалении от точки O остаётся таким же, как и в случае, когда имеет место резкий излом границы, то есть отсутствует скругление.

Метод конформных отображений позволяет найти закон изменения индукции в этой системе. Она отображается на полуплоскость $w > 0$ с помощью функции $w = jCz_1^{\pi/(2\pi-\theta)}$, где C — вещественная константа. Модуль индукции поля можно рассчитать по формуле

$$|B| = \left|\frac{dw}{dz_1}\right| = C_1 z_1^{(\theta-\pi)/(2\pi-\theta)}. \tag{1.44}$$

Из приведённой формулы видно, что в случае $\theta = 0$ напряжённость растёт как $|z_1|^{-1/2}$; в случае $\theta = \pi/2$ она растёт пропорционально $|z_1|^{-1/3}$.

Аналитический расчёт для идеализированной системы, например, для магнита со стенкой нулевой толщины, гораздо проще, чем для магнита с реальной формой границы. Этот расчёт позволяет найти параметр C_1, который определяется общей конфигурацией магнитной системы и заданными в ней токами. Зная этот параметр, можно далее рассчитать поле в окрестности реальной кромки, которая представлена в локальной системе координат $z_2 = x_2 + jy_2$

(рис. 1.8,***б***). Для расчёта поля в области z_2 её необходимо отобразить на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w(z_2)$. При удалении от кромки ($|z_2| >> \rho$) выполняется условие $z_2 \to z_1$. Функция $w(z_2)$ должна удовлетворять условию $w(z_2) = w(z_1)$, если $|z_1| >> \rho$. Если поле в области z_1 рассчитано, то далее возможен пересчёт индукции по следующей формуле:

$$|B(z_2)| = |B(z_1)| \left|\frac{dz_1}{dz_2}\right|_{z_1 \to 0} . \qquad (1.45)$$

Практически важным случаем является упомянутая конфигурация магнита с тонким краем (рис. 1.9). Примеры аксиально-симметричных систем, у которых в первом приближении можно принять допущение о нулевой толщине стенки, рассмотрены ниже.

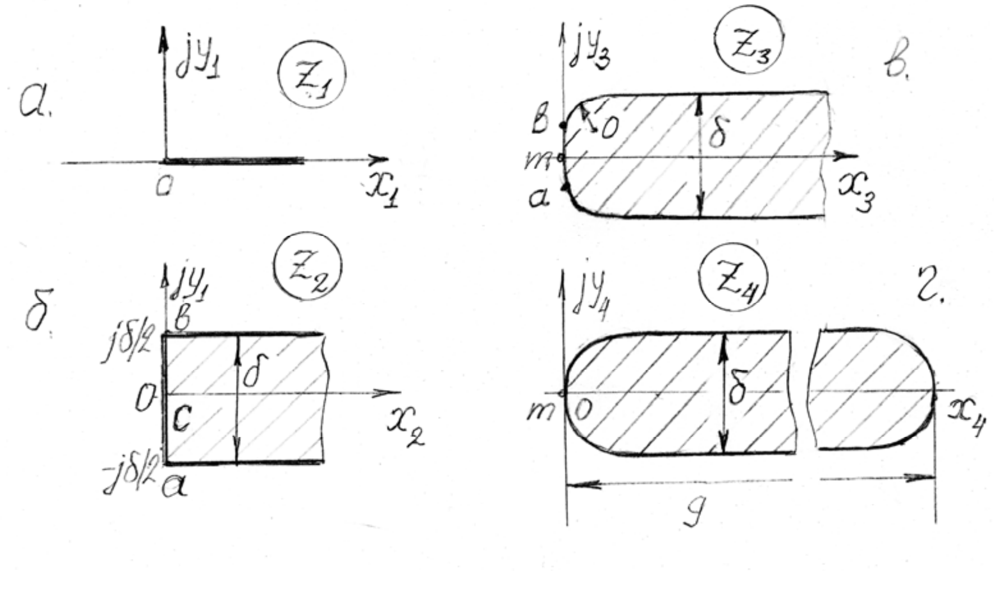


Рис. 1.9. К расчету поля и потерь вблизи края плоского листа
при условии резко выраженного скин-эффекта

Во всех них используется одинаковая методика оценки поля вблизи края, где проводник имеет конфигурацию, представленную на рис. 1.9,***а,б***. Области z_1 и z_2 отображаются на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ с помощью функций

$$z_1 = \frac{\delta}{\pi} w^2; \qquad z_2 = \frac{\delta}{\pi}\left[w\sqrt{w^2-1} - \ln\left(w + \sqrt{w^2-1}\right)\right] + j\frac{\delta}{2}, \quad (1.45)$$

где δ — толщина плоского проводника. Исключая w, находим

$$z_2 = \frac{\delta}{\pi}\left[\sqrt{\frac{\pi z_1}{\delta}\left(\frac{\pi z_1}{\delta} - 1\right)} - \ln\left(\sqrt{\frac{\pi z_1}{\delta}} + \sqrt{\frac{\pi z_1}{\delta} - 1}\right)\right] + j\frac{\delta}{2}. \qquad (1.46)$$

Индукция в окрестности кромки листа нулевой толщины изменяется в соответствии с зависимостью

$$|B(z_1)| = C_1 z_1^{-1/2} \qquad (1.47)$$

Значения индукции в точке z_2 и в соответствующей точке z_1 связаны соотношением:

$$B(z_2) = B(z_1)\left|\frac{dz_1}{dz_2}\right| = B(z_1)\left|\frac{\pi z_1}{\delta}\right|^{1/2}\left|\frac{\pi z_1}{\delta} - 1\right|^{-1/2}. \qquad (1.48)$$

В частности, следующее выражение связывает индукцию в точке c ($z_2 = 0$) посредине грани листа конечной толщины и индукцию в точке z_1 вблизи края бесконечно тонкого листа:

$$B(c) = B(z_1)\sqrt{\frac{|\pi z_1|}{\delta}}. \qquad (1.49)$$

Из формулы (1.49) следует, что для расчёта индукции на краю тонких идеально проводящих шин конечной толщины достаточно знать закон изменения индукции у края шин нулевой толщины $B(z_1)$.

Воспользовавшись формулой (1.47), получаем

$$|B(c)| = C_1\sqrt{\pi/\delta}. \qquad (1.50)$$

В качестве примера использования этой формулы рассмотрим плоское поле полосковой линии — проводника шириной g и толщиной $\delta \ll g$ (рис. 1.10).

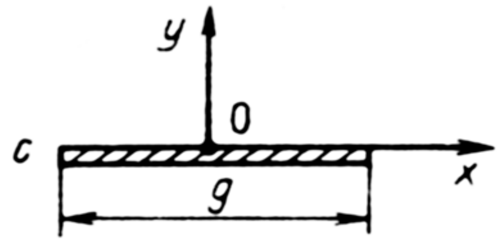


Рис. 1.10. Уединённая плоская шина

Поверхностная плотность тока на каждой стороне идеально проводящего листа в пределе $\delta = 0$ определяется зависимостью вида:

$$J = \frac{B}{\mu_0} = \frac{i}{\pi g \sqrt{1 - (2x/g)^2}}. \tag{1.51}$$

Вблизи края, где $z_1 = g/2 - x \ll g/2$, $B(z_1) = \mu_0 i \Big/ \left[2\pi (g z_1)^{1/2}\right]$; $C_1 = \mu_0 i \Big/ \left(2\pi g^{1/2}\right)$, поэтому можно по приведенным формулам рассчитать индукцию в точке *c*, расположенной посредине плоской кромки:

$$B(c) = \frac{\mu_0 i}{2\sqrt{\pi \delta g}}. \tag{1.52}$$

Вполне очевидно, что описанная методика расчета сохраняет значение и в случае тонких проводников другой формы, отличной от рассмотренной (например, в случае неплоских листов). Необходимо лишь, чтобы их толщина δ была много меньше всех других характерных размеров, в частности, — радиуса кривизны тонкого листа и расстояния от его края до других проводников.

Зная индукцию в точке *c*, можно рассчитать распределение индукции в точках области z_2 вблизи грани *ав* (рис. 1.9,***б***), так как отношение $B(z_2)/B(c)$ определяется лишь формой кромки, если δ мало. В частности, нетрудно найти распределение касательной составляющей индукции магнитного поля или нормальной составляющей напряжённости электрического поля по плоскости грани.

Практический интерес представляет расчёт поля на скруглённой кромке (рис. 1.9,***в***, область z_3). Край плоского листа может быть скруглен частично или полностью. В первом случае скруглены лишь прямые углы и имеется плоский участок *ab* (рис. 1.9,***в***). Во втором случае профиль краевого участка представляет собой плавную кривую и плоский участок отсутствует. Примером, относящимся ко второму случаю, является задача о поле на кромке тонкого электрода длиной g и толщиной δ (при этом $g >> \delta$), скруглённого по дуге окружности радиуса $\delta/2$ (рис. 1.9,*г*). А.Б. Новгородцевым получено точное решение этой задачи. Максимум индукции имеет место в точке m: $B(m) = B_e \cdot 1{,}0725[\pi g/(2\delta)]^{1/2}$. Здесь B_e - индукция внешнего однородного поля, огибающего край листа. Составим отношение $B(m)/B(c)$, где $B(c) = B_e[\pi g/(4\delta)]^{1/2}$ - индукция в точке *c* шины длиной g с плоской кромкой, внесённой в поле B_e. Это отношение, рассчитанное для предельного случая $g >> \delta$, не зависит от конкретного вида конфигурации магнитной системы и определяется лишь формой кромки. Таким образом, для шины, скруглённой по дуге радиуса $\delta/2$, имеем выражение, связывающее индукцию в точке m с индукцией на середине плоской кромки,

$$B(m)/B(c) = 1{,}0725\sqrt{2} = 1{,}517 \,. \qquad (1.53)$$

Для полного скругления по циклоиде, рассчитанного Кокрофтом, получено значение $B(m)/B(c) = \sqrt{1 + \pi/2} = 1{,}603$.

Определёнными преимуществами обладают шины, края которых выполнены так, что на скруглённой кромке индукция постоянна и равна B_1. При неизменной толщине проводника в такой системе краевой эффект наименее резко выражен, что важно как с точки зрения тепловых и механических воздействий, так и с точки зрения электрической прочности. При таком полном скруглении с постоянным модулем индукции отношение $B_1/B(c)$ принимает значение

$$B_1/B(c) = \sqrt{2}\,. \tag{1.54}$$

Числовые значения индукции, полученные при полном скруглении, выполненном разными способами, мало различаются между собой. Это говорит о том, что основное влияние на индукцию оказывает размер скругляемого участка, а не детальная геометрия профиля. Вместе с тем следует отметить принципиально важное значение скругления, на котором индукция постоянна: в этом случае индукция на скругляемом участке минимальна.

Широкий класс задач о построении электродов со скругленным прямым углом и с постоянной напряжённостью на участке скругления, аналогичных задачам теории струй идеальной жидкости, решён в работах Кокрофта, Фелиси, А.Б. Новгородцева. Криволинейный участок границы (рис. 1.11) описывается уравнением

$$x_1^{3/2} + y_1^{3/2} = r_0^{3/2}\,. \tag{1.55}$$

Профиль скруглённого участка при этом близок к четверти окружности радиуса r_0: разность $\Delta r = r_0 - r$ не превышает значения $\Delta r = \left(1{,}5 - \sqrt{2}\right)r_0 = 0{,}086 r_0$ в точке m. На участке ab (рис. 1.11) имеет место следующее выражение для индукции:

$$\frac{B(ab)}{B(\sigma)} = 2^{2/3}\left(\frac{\sigma}{r_0}\right)^{1/3}, \tag{1.56}$$

где $B(\sigma)$ — индукция в точке, отстоящей на расстояние σ от вершины прямого (нескруглённого) угла. Таким образом, как и в случае тонкого края, поле у скруглённого прямого угла (при малом радиусе скругления) выражается через решение идеализированной задачи, справедливое вблизи ребра.

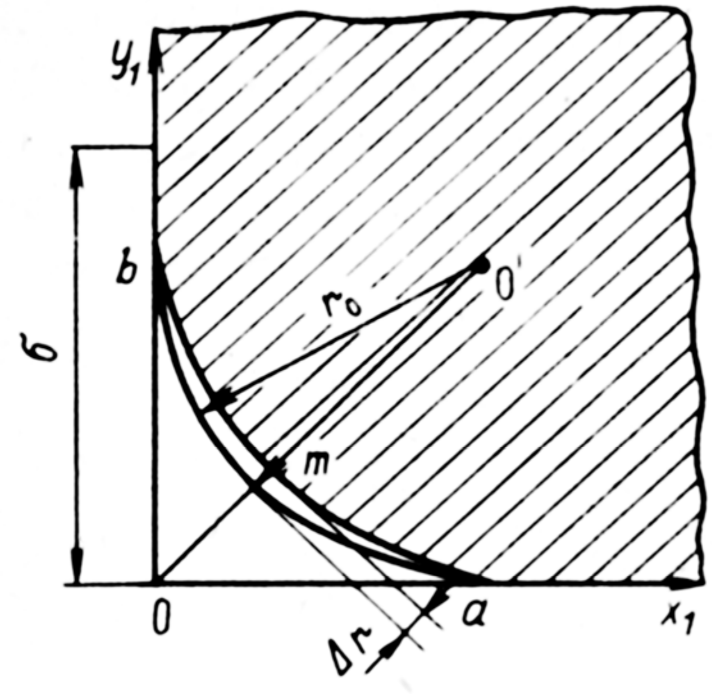


Рис. 1.11. Скруглённый прямой угол

Аналогичная задача в случае аксиальной симметрии может быть решена с помощью специально разработанных численных методов. Например, в работе Г.Н. Капорской, А.Б. Новгородцева и В.А. Чураева рассчитаны профили скруглённого участка толстостенного одновиткового магнита при различных отношениях толщины стенки к радиусу.

2. РАСЧЁТНЫЕ ФОРМУЛЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ ПОЛЕЙ ТИПИЧНЫХ ОДНОВИТКОВЫХ МАГНИТОВ

В этой главе приведены формулы, графики и таблицы, позволяющие рассчитать индукцию в центре одновиткового магнита и его индуктивность.

Для некоторых из рассмотренных конфигураций имеются решения в аналитическом виде, однако основная часть приведённых данных получена численно путём решения уравнений (1.6) для скалярного магнитного потенциала.

2.1. Поле плоского кольца как пример одновиткового магнита с резко выраженным краевым эффектом

В первой главе был описан ряд методов, используемых при расчётах магнитов. Было показано, что при малой глубине проникновения можно в первом приближении использовать допущение об идеальной проводимости проводника. Это позволяет в некоторых случаях использовать упрощённую картину поля. Вместе с тем, показано, что в этом приближении имеют место краевые эффекты, приводящие к локальному усилению поля. Примером системы, в которой эти эффекты резко проявляются, является плоское кольцо с разрезом (рис. 2.1).

В этом случае векторный потенциал магнитного поля при условии $R_2 >> R_1$ можно описать с помощью интеграла Фурье-Бесселя:

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R_1}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z/R_1} J_1\left(\lambda \frac{r}{R_1}\right)\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda\,. \qquad (2.1)$$

Нетрудно убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению (1.4), условию $2\pi r A_\varphi = \Phi$ при $z = 0$ и $r > R_1$ и условию

$\partial A_\varphi / \partial r = 0$ при $z = 0$ и $r < R_1$. Далее можно получить выражения для радиальной

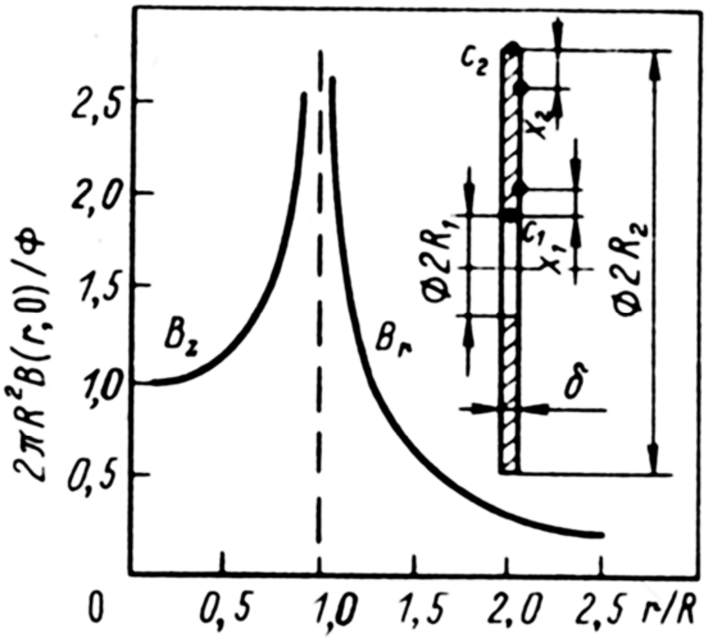


Рис. 2.1. Распределение индукции в плоскости тонкого диска с большим отношением внешнего радиуса к внутреннему

компоненты индукции на плоскости диска, аксиальной компоненты в отверстии и на оси магнитной системы:

$$B_r\big|_{z=0,\, r\ge R_1} = -\left.\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\Phi}{2\pi r\sqrt{r^2 - R_1^2}} = \mu_0 J_\varphi; \tag{2.2}$$

$$B_z\big|_{z=0,\, r<R_1} = \frac{\Phi}{2\pi R_1\sqrt{R_1^2 - r^2}}; \tag{2.3}$$

$$B_z(0,z) = \frac{\Phi}{2\pi\left(R_1^2 + z^2\right)} = \frac{\mu_0 i R_1}{\pi\left(R_1^2 + z^2\right)}; \tag{2.4}$$

Можно найти ток, протекающий по обеим сторонам плоского кольца на участке от точки с радиальной координатой r до $r = \infty$:

$i(r) = \int\limits_r^\infty 2J_\varphi dr = \frac{\Phi}{\pi\mu_0 R_1} \arcsin\frac{R_1}{r}$. Полный ток есть $i = \Phi/(\pi\mu_0 R_1)$, а индуктивность выражается простой формулой

$$L = 2\mu_0 R_1. \tag{2.5}$$

При увеличении r и z формулы (2.3) и (2.4) переходят в выражение для индукции магнитной системы, в которой поток проходит через отверстие малого радиуса в плоском листе, а затем равномерно распределяется по поверхности полусферы радиуса $\rho = \left(r^2 + z^2\right)^{1/2}$:

$$B(r, z) = \frac{\Phi}{2\pi\left(r^2 + z^2\right)}.$$

Эта система соответствует упрощенной картине поля, являющейся аналогом рассматриваемой конфигурации. Используя упрощенную картину, можно рассчитать полный ток и найти соответствующее значение индуктивности:

$$\widetilde{L} = \pi\mu_0 R_1. \tag{2.6}$$

В отличие от примеров, рассмотренных в § 1.3, в рассматриваемом случае, когда краевой эффект проявляется весьма резко, расчет по упрощенной картине поля приводит к значительной погрешности в расчете индуктивности. Формула (2.4) дает следующее выражение для индукции в центре витка

$$B_c = B(0,0) = \mu_0 i/(\pi R_1). \tag{2.7}$$

Это значение лишь множителем $2/\pi$ отличается от поля в центре тонкого кольцевого витка радиуса R_1 вследствие того, что ток на поверхности диска ток сосредоточен вблизи края отверстия.

Поле у кромки имеет «корневую» особенность: $B(R_1 + x_1, 0) = [\Phi/(2\pi R_1)](2R_1 x_1)^{-1/2}$. Можно найти индукцию в точке c_1 витка с конечной толщиной стенки δ с помощью формул § 1.4, поскольку поле в окрестностях точки c_1 близко к плоскому. В частности, в случае прямоугольной кромки индукция в её середине равна (рис. 2.1):

$$B(c_1) = \frac{\Phi}{2R_1\sqrt{2\pi R_1 \delta}}. \quad (2.8)$$

В предельном случае $R_2 \geq R_1$ можно рассчитать поле вблизи внешнего края кольца ($r \approx R_2$), воспользовавшись математической аналогией с задачей об электростатическом поле точечного заряда, расположенного в центре круглого отверстия радиуса R_2 в бесконечном плоском проводящем листе [23]. Аналогом половины заряда в данной задаче будет поток Ф, проходящий через отверстие, исчезающее малого радиуса R_1. Расчёт даёт следующее выражение для индукции, справедливое при $r >> R_1$:

$$B_z = \frac{\Phi R_2}{\pi^2 r^2 \sqrt{r^2 - R^2}} \text{ — при } r > R_2, \quad z = 0; \quad (2.9)$$

$$B_r = \frac{-\Phi}{2\pi r^2} + \frac{\Phi}{\pi^2 r R_2}\left(\frac{R_2^2}{r\sqrt{R_2^2 - r^2}}\operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{R_2^2 - r^2}} - 1\right) \text{ - при } r > R_2,\ z = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда находим поле на расстоянии x_2 от края:

$$B_r(R_2 - x_2, 0) \approx \frac{\Phi}{2\pi R_2\sqrt{2x_2 R_2}}. \quad (2.11)$$

Как и в других подобных случаях, можно теперь найти индукцию на краю плоского кольца конечной толщины δ, воспользовавшись тем, что поле в окрестности края близко к плоскому. Индукция в точке c_2 витка прямоугольного сечения с $R_2 >> R_1$ и $\delta << R_2$

$$B(c_2) = \frac{\Phi}{2R_2\sqrt{2\pi\delta R_2}} \quad (2.12)$$

Поле двух встречно включённых плоских колец, разделённых весьма тонким зазором (рис. 2.2), также можно найти с помощью преобразования Фурье-Бесселя:

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda z/R_1} J_1\left(\lambda \frac{r}{R_1}\right) J_0(\lambda) d\lambda . \qquad (2.13)$$

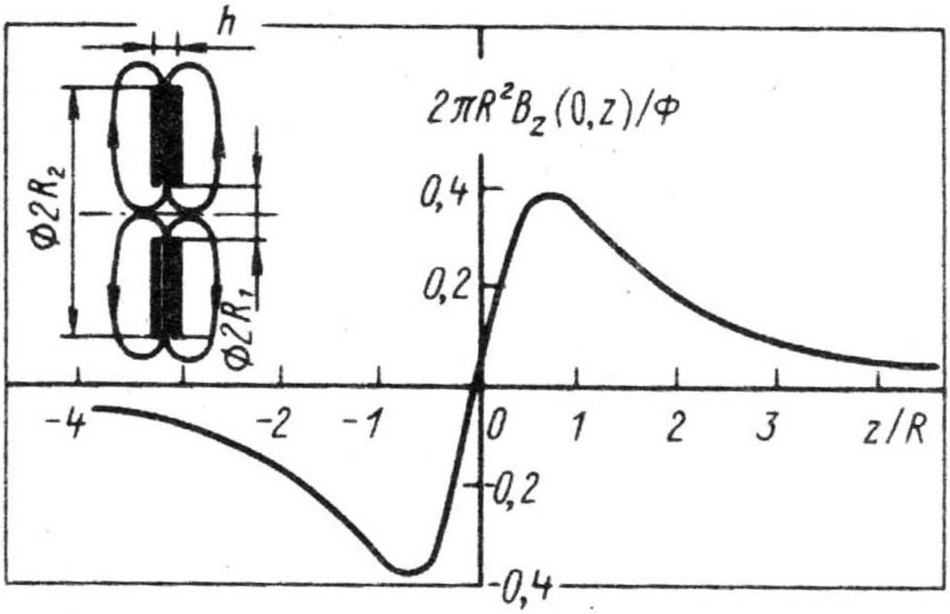


Рис. 2.2. Распределение индукции по оси магнитной системы, состоящей из двух тонких дисков со встречно направленными токами, разделённых узким изоляционным зазором($R_2 >> R_1$)

В плоскости $z = 0$ формула (2.13) даёт $A_\varphi = \Phi/(2\pi r)$ при $r > R_1$ и $A_\varphi = 0$ при $r < R_1$. Индукция на оси этой системы

$$B_z(0, z) = \frac{\Phi}{2\pi R_1^2}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda z/R_1} J_0(\lambda) d\lambda = \frac{\Phi z}{2\pi\left(R_1^2 + z^2\right)^{3/2}} . \qquad (2.14)$$

В формулах (2.13) и (2.14) Ф - это половина потока, выходящего из зазора.

2.2. Виток круглого сечения (идеально проводящий тороид)

Поле витка, имеющего форму тора (рис. 2.3), рассчитано В.А. Фоком. Распределение плотности тока по поверхности тора с малым радиусом a и большим радиусом R можно рассчитать по формуле:

$$J_{\varphi} = \frac{iL}{8\sqrt{2}\pi^3 \mu_0 a^2} \left(\frac{g - \cos\beta}{g^2 - 1} \right)^{3/2} \left[\frac{1}{P'_{-1/2}(g)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\beta)}{P'_{n-1/2}(g)} \right], \qquad (2.15)$$

где $g = R/a$, i — ток в витке, L — индуктивность, определяемая по формуле

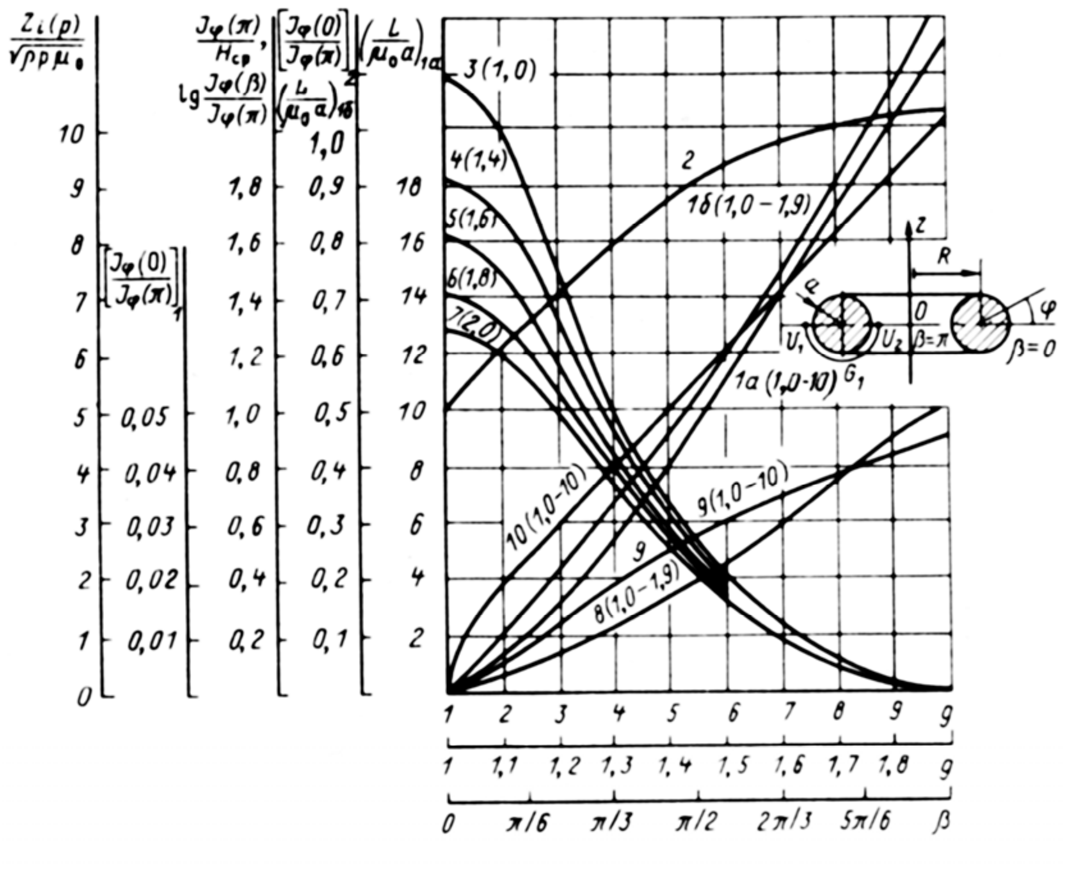


Рис. 2.3. Параметры тороидального витка (в скобках даны значения g):
1а - $L/(\mu_0 a) = f(g)$; 1б - $L/(\mu_0 a) = f(g)$; 2 - $J_\varphi(\pi)/H_{ср} = f(g)$;
3-7 - $\lg[J_\varphi(\beta)/J_\varphi(\pi)] = f(\beta)$; 8 - $[J_\varphi(0)/J_\varphi(\pi)]_1 = f(g)$;
9 - $[J_\varphi(0)/J_\varphi(\pi)]_2 = f(g)$; 10 - $Z_i(p)(\mu_0 p\rho)^{-1/2} = f(g)$

$$L = \frac{\pi^2 \mu_0 a}{2} \sqrt{g^2 - 1} \left[\frac{Q'_{-1/2}(g)}{P'_{-1/2}(g)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{Q'_{n-1/2}(g)}{P'_{n-1/2}(g)} \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

В качестве координаты точки на поверхности в формуле (2.15) и на графиках использована тороидальная координата β, связанная с φ (рис. 2.3) соотношением $\sin\beta = \left(g^2 - 1\right)^{1/2} \sin\varphi / (g + \cos\varphi)$. Очевидно, $\beta(0) = 0$, $\beta(\pi) = \pi$ и $\beta \approx \varphi$, если $g >> 1$. Значения параметров L и J_φ приведены на графиках рис. 2.3. Там же построены зависимости для переходного поверхностного сопротивления $Z_i(p)$ [23].

В формулах (2.15) и (2.16) P'_ν и Q'_ν — присоединённые функции Лежандра. Кривые *3*, *9*, представленные на рис. 2.3, показывают, что выравнивание распределения тока по поверхности при росте отношения R/a происходит медленно: даже для $R/a = 10$ отношение $J_\varphi(0)/J_\varphi(\pi)$ составляет 0,45. Напротив, индуктивность (кривая *1*) в уже при $R/a = 10$ лишь на 3 % отличается от индуктивности, рассчитанной в предположении равномерного распределения тока по поверхности витка. Как и следовало ожидать, поверхностная плотность тока на внутренней поверхности витка $J_\varphi(\pi)$ при условии $R/a \approx 1$ приближается к средней напряжённости в зазоре витка $H_{cp} = \Phi / \left[\pi\mu_0 (R - a)^2\right]$ (кривая *2*).

2.3. Тонкостенные одновитковые магниты

Аналитические решения задачи о расчёте поля одновиткового магнита, имеющего форму тонкостенного цилиндра, получены для короткого витка ($l \le 2R$) и для «полубесконечного» магнита.

Распределение тока по длине цилиндра описывается интегральным уравнением (1.31), ядро которого в этом случае зависит лишь от разностного аргумента:

$$
\frac{L}{\mu_0 R} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{g_0^2 (x_1 - x_2)^2}{4}} \left\{ \mathrm{K}(k)\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) - \mathrm{E}(k) \right\} y_\varphi (x_1) dx_1 =
$$

$$
= \int_{-1}^{1} T'(|x_1 - x_2|) y_\varphi (x_1) dx_1. \tag{2.17}
$$

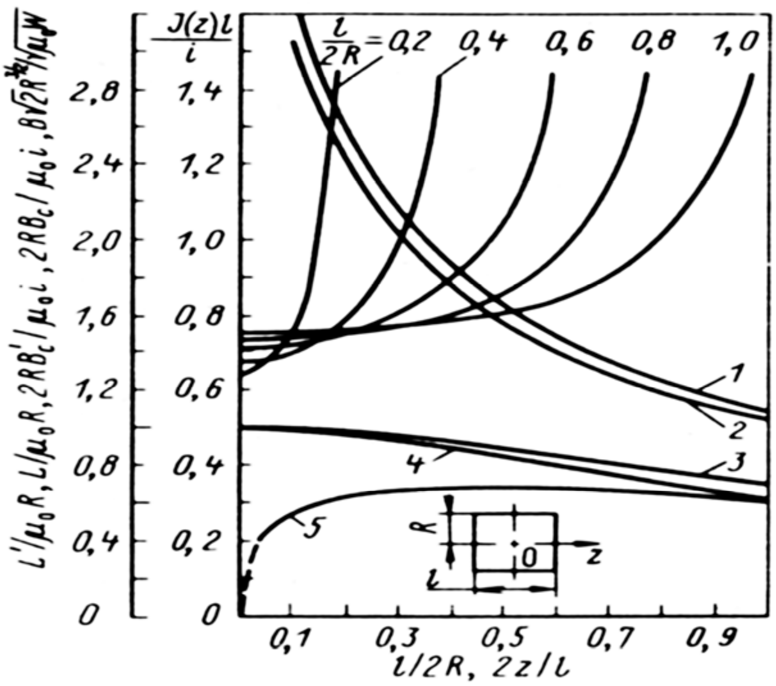


Рис. 2.4. Зависимости, характеризующие магнитное поле в коротком тонкостенном витке: ***1*** - $L'/(\mu_0 R) = f[l/(2R)]$;
2 - $L/(\mu_0 R) = f[l/(2R)]$; ***3*** - $2RB'_C/(\mu_0 i) = f[l/(2R)]$;
4 - $2RB_C/(\mu_0 i) = f[l/(2R)]$; ***5*** - $B_C\sqrt{2}R^{3/2}(\mu_0 w)^{-1/2} = f[l/(2R)]$.
Остальные кривые - $J(x)l/i = f(2z/l)$ при различных значениях $l/(2R)$

Здесь $L = \Phi/i$ - индуктивность системы; $g_0 = l/(2R)$; $k = \left[1 + g_0^2 (x_1 - x_2)^2 /4\right]^{-1/2}$ - модуль полных эллиптических интегралов K и E; $y_\varphi = (J_e + J_i)l/i$; J_e и J_i - поверхностная плотность тока на наружной и, соответственно, внутренней сторонах цилиндра; $x_{1,2} = (2z_{1,2} - l)/l$ (рис. 2.4). Приближённое решение уравнения (2.17) получено для коротких витков.

Ядро интегрального уравнения (2.17) $T'(|x_1 - x_2|) = T(t)$, где $t = |x_1 - x_2|/2$, переходит в функцию $(1/2)\ln[4/(g_0 t)] - 1$ при $t \to 0$. Поэтому в случае $g_0 \le 1$ удобно использовать его приближённое представление на промежутке $0 \le |t| \le 1$:

$$T(t) \approx T''(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{g_0 t} - 1 + a_0 P_0(t) + a_2 P_2(t).$$

Коэффициенты a_0 и a_2 при полиномах Лежандра P_0 и P_2 находятся из условия минимума среднеквадратичного отклонения $T''(t)$ от T:

$$a_{0,2} = \int_0^1 \left[T(t) + 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{g_0 t} \right] P_{0,2}(t)\,dt,$$

после чего уравнение (2.17) принимает вид:

$$-\frac{2L}{\mu_0 R} = \int_{-1}^{1} \left[\ln(x-s) + 2 - 3\ln 2 + \ln g_0 - 2a_0 + a_2 - \frac{3}{4}a_2 (x-s)^2 \right] y_\varphi(s)\,ds. \tag{2.18}$$

Это уравнение может быть решено аналитически. В результате получаем выражения для линейной плотности тока и индуктивности*

$$J_\varphi(x) = \frac{2i}{l}\frac{1 + b/2 - bx^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}; \tag{2.19}$$

$$L = \mu_0 R\left(\ln\frac{16}{g_0} - 2 + 2a_0 - \frac{a_2}{4} - \frac{9a_2^2}{4} \right) = \mu_0 R\left(\ln\frac{16}{g_0} - 2 + t' \right),$$

где $b = 3a_2/2$.

---

* Мерой погрешности расчёта может служить сравнение его результатов с более точным приближением с полиномами Лежандра II порядка. Такое сравнение для наиболее неблагоприятного случая $g_0 = 1$ даёт поправку для плотности тока менее 1 %, а для индуктивности - около 0,5 %.

Параметры, характеризующие поле в коротком соленоиде, приведены в табл. 2.1.

Как видно из рис. 2.4, линейная плотность тока резко возрастает вблизи краев витка. На расстоянии около $0{,}6R$ от края распределение плотности тока практически выравнивается. В книге [15] даны формулы для распределения индукции на оси соленоида и приведены результаты измерений, которые хорошо согласуются с расчётом.

Таблица 2.1

Параметры, характеризующие поле в коротком тонкостенном одновитковом магните

$l/(2R)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$L/(2\mu_0 R)$	∞	3,082	2,402	2,020	1,757	1,563	1,412	1,280	1,188	1,101	1,027
t'	0	0,007	0,02	0,043	0,068	0,077	0,129	0,151	0,192	0,223	0,254
b	0	0,014	0,040	0,086	0,125	0,168	0,206	0,247	0,292	0,330	0,372
$2B_c R/(\mu_0 i)$	1,000	0,991	0,963	0,936	0,900	0,848	0,806	0,761	0,713	0,674	0,635
ε'	0	0,410	0,444	0,476	0,495	0,505	0,513	0,519	0,523	0,527	0,530

Усиление тока у краёв соленоида приводит к более равномерному распределению индукции на оси и к некоторому уменьшению индукции в центре

$$B_c = B\left(0, \frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0 i}{\pi R\sqrt{1+g_0^2}}\left(1+\frac{b}{2}\right)\mathrm{E}\left(\frac{g_0}{\sqrt{1+g_0^2}}\right) - \frac{b}{g_0^2}\left[\mathrm{K}\left(\frac{g_0}{\sqrt{1+g_0^2}}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{g_0}{\sqrt{1+g_0^2}}\right)\right] \tag{2.20}$$

по сравнению со значением B_c', рассчитанным при постоянной вдоль образующей цилиндра плотности тока. Для $g_0 = 1$ расхождение составляет около 10 %. Расхождение в индуктивности значительно меньше (рис. 2.4). В пределе $l/(2R) \to 0$ имеем $L' - L \to \mu_0 R(1{,}5 - 2\ln 2) = 0{,}114\mu_0 R$.

Решение для полубесконечного тонкостенного магнита, описано в книге [23]. Окончательные результаты получены в виде весьма громоздких формул. Приведём наиболее существенные характеристики полубесконечного магнита. В таком магните с идеально проводящей стенкой вдали от торца ток сосредоточен на внутренней поверхности. Вблизи края ток распределён, как на внутренней, так и на внешней поверхностях цилиндра.

Как и в коротком витке, у края тонкостенного цилиндра нулевой толщины поверхностная плотность тока имеет корневую особенность: на внешней и внутренней поверхности линейная плотность тока изменяется следующим образом:

$$J_e = J_i = 0{,}28\frac{\Phi}{\pi\mu_0 R^2}\sqrt{\frac{R}{z}} \qquad (2.21)$$

где Φ — поток в полости витка.

С помощью формул (1.49), (1.50) можно рассчитать индукцию в точке c, расположенной посредине плоской кромки магнита, толщина стенки которого отлична от нуля и равна $\delta << R$:

$$B(c) = \mu_0 J(c) = \frac{0{,}28\Phi}{R\sqrt{\pi\delta R}} \qquad (2.22)$$

При удалении от края поверхностная плотность тока на внешней стороне затухает на длине порядка R. Полный ток на внешней стороне составляет

$$i_e = \frac{0{,}43\Phi}{\pi\mu_0 R}. \qquad (2.23)$$

На внутренней стороне поверхностная плотность тока при удалении от края стремится к постоянному значению, равному $\Phi/\left(\pi\mu_0 R^2\right)$.

У магнита большой длины полный ток можно приближённо представить в виде

$$i \approx \frac{\Phi l}{\pi \mu_0 R^2} + 2\left(i_e + \Delta i_i\right).$$

В этой формуле, кроме тока i_e, фигурирует дополнительный ток Δi_i, который сосредоточен на внутренней поверхности цилиндра. Этот ток имеет место вследствие усиления поля вблизи края:

$$\Delta i_i = \frac{0{,}19\Phi}{\pi \mu_0 R}. \tag{2.24}$$

Таким образом, полный ток в витке большой длины можно выразить с помощью приближенной формулы

$$i \approx \frac{\Phi(l + 1.24R)}{\pi \mu_0 R^2}. \tag{2.25}$$

Из этой формулы следует приближённое выражение для индукции в центре и для индуктивности длинного одновиткового тонкостенного магнита:

$$B_c \approx \frac{\Phi}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 i}{l + 1{,}24R}; \tag{2.26}$$

$$L \approx \frac{\pi \mu_0 R^2}{l + 1{,}24R}. \tag{2.27}$$

В общем случае индуктивность можно представить в виде:

$$L = \frac{\pi \mu_0 R^2}{l + 2\varepsilon' R}, \tag{2.28}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon'_\infty = 0{,}62$, если $l/R = \infty$.

Значения ε' для коротких витков ($l/(2R) \le 1$) приведены в табл. 2.1. Для более длинных магнитов можно воспользоваться результатами численных расчетов поля соленоида при фиксированных значениях $l/(2R)$=0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 2,9; 4,0; 5,0. При $l/(2R) = 5$ имеем по этим данным $\varepsilon'(5) = 0{,}57$, что близко к ε'_∞. Кривая $\varepsilon' = f[l/(2R)]$, построенная по результатам упомянутых расчетов, приведена на рис. 2.5. Для приближённых расчётов можно принять $\varepsilon' = \varepsilon'_\infty = 0{,}62$ при $l/(2R) \geq 1$, что даёт для ε' погрешность 17 % при $l/(2R)$=1 и 9 % при $l/(2R)$=2, а для индуктивности, вычисляемой по приближённой формуле (2.27) погрешность составляет, соответственно, 6 и 2 %.

На рис. 2.5 показано распределение индукции по оси у края полубесконечного соленоида. Индукция в точке 0 (в плоскости среза цилиндра) $B(0,0) = B_T = 0{,}735\Phi/\left(\pi R^2\right)$. Заметим, что у витка с длиной, равной диаметру ($l/(2R) = 1$) отношение индукции в этой же точке к индукции в центре также составляет 0,735. Для сравнения отметим,

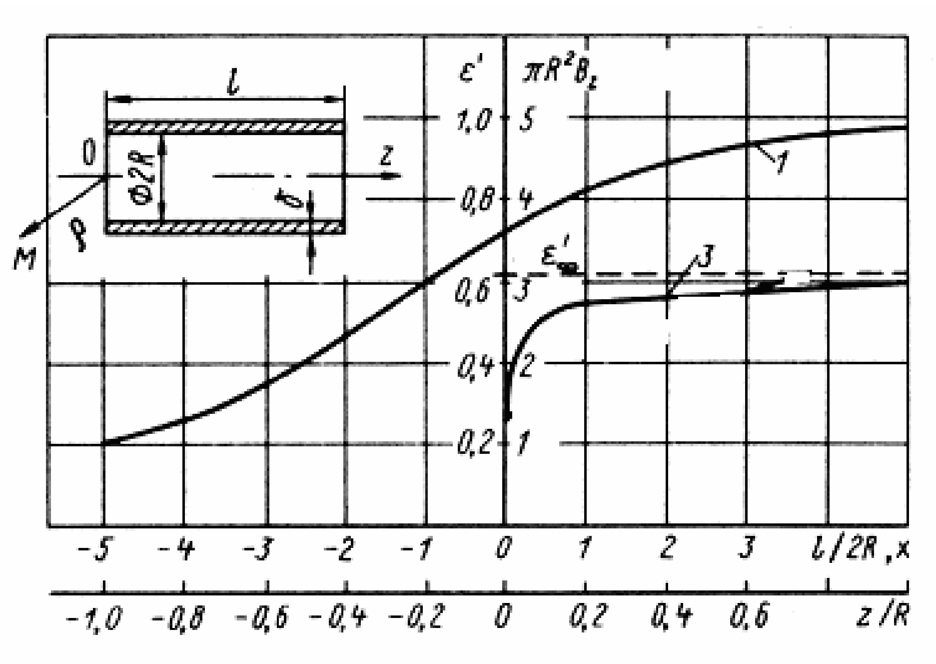


Рис. 2.5. Кривые, характеризующие поле тонкостенного одновиткового соленоида: ***1*** - $\pi R^2 B_z(0,z)/\Phi = f(z/R)$; ***2*** - $K_+(x)$; ***3*** - $\varepsilon' = f[l/(2R)]$

что при отсутствии скин-эффекта, то есть при равномерном распределении тока по длине многовиткового соленоида, $B_T/B_c = \left(1 + 4R^2/l^2\right)^{1/2}\left(4 + 4R^2/l^2\right)^{-1/2}$. Отношение B_T/B_c равно 0,632 при $l/(2R) = 1$ и 0,5 при $l/(2R) = \infty$.

2.4. Поле витков прямоугольного сечения с произвольным отношением характерных размеров

В общем случае для одиночного витка прямоугольного сечения индукция в характерных точках 1-4 (рис. 2.6) и токи i_1 и i_2 могут быть представлены в виде

$$\left[2R_1/(\mu_0 i)\right]B_{1\div 4} = f\left[l/(2R_1), R_2/R_1\right],\ i_{1,2}/i = f\left[l/(2R_1), R_2/R_1\right].$$

Результаты соответствующих расчётов, выполненных путём решения уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала методом сеток, представлены на рис. 2.6. Характерна слабая зависимость индукции в точках *1, 2, 3* от отношения R_2/R_1, если оно больше 1,5. Например, у соленоида с отношением длины к внутреннему диаметру $l/(2R_1) = 2$ значение $2B_1R_1/(\mu_0 i)$ меняется от 0,390 при $R_2 \approx R_1$ до 0,355 при $R_2/R_1 = \infty$, а в диапазоне $5 \le R_2/R_1 \le 13$ — от 0,380 до 0,360.

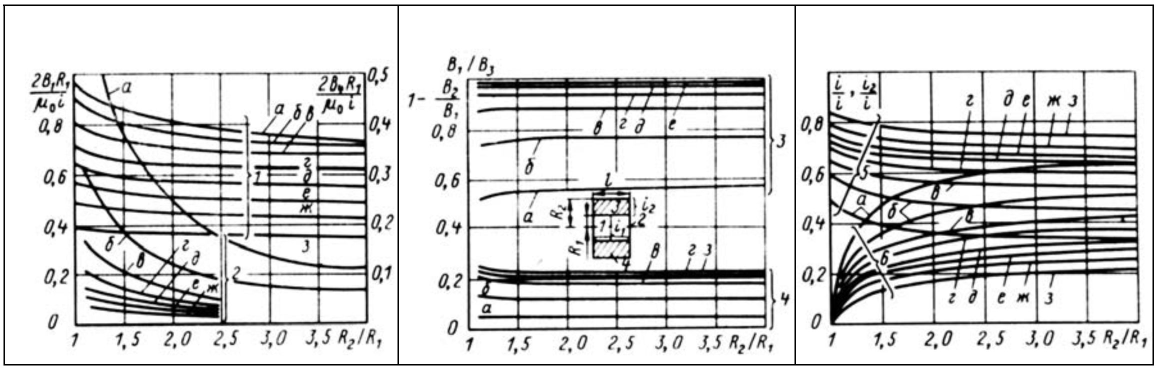


Рис. 2.6. Зависимости, характеризующие поле витка прямоугольного сечения:

1 - $B_1R_1/(\mu_0 i)$; *2* - $2B4R_1/(\mu_0 i)$; *3* - B_1/B_3; *4* - $1 - B_2/B_1$;
5 - i_1/i; *6* - i_2/i; значения параметра $l/(2R_1)$:
а - 0,2; *б* - 0,4; *в* - 0,6; *г* - 0,8;
д - 1,0; *е* - 1,2; *ж* - 1,5; *з* - 2,0

При получении сильных импульсных магнитных полей широкое применение находят толстостенные одновитковые магниты прямоугольного сечения. У таких магнитов отношение R_2 / R_1 много больше единицы. Это позволяет при расчетах принять это отношение равным бесконечности. Пример такого магнита с длиной, равной нулю, рассмотрен в § 2.1. Как следует из формулы (2.4), отношение индукции в центре витка к току (геометрический фактор) в этом магните можно рассчитать по формуле:

$$\frac{B_c}{i} = \frac{\mu_0}{\pi R_1} \tag{2.29}$$

В более общем случае геометрический фактор зависит от отношения внутреннего диаметра $2R_1$ к его длине l. Эта и другие зависимости, характеризующие поле в толстостенном витке, представлены на рис. 2.6. Следует отметить, что при изменении отношения $l/(2R_1)$ в пределах от нуля до единицы отношение $\pi R_1 B_c /(\mu_0 i)$ изменяется в достаточно узких пределах: от единицы до 0.84. Для толстостенных магнитов, у которых длина больше диаметра, индукцию в центре можно рассчитать по приближенной формуле

$$B_c \approx \frac{\mu_0 i}{l + \pi R_1 / 2}, \tag{2.30}$$

а индуктивность такого магнита при произвольном отношении длины к диаметру можно рассчитать по формуле

$$L \approx \frac{2\mu_0 R_1}{C' + 2l/(\pi R_1)}. \tag{2.31}$$

В этой формуле число C' изменяется в узких пределах: от единицы (при $l = 0$) до 1,05 (при условии $l/(2R_1) >> 1$). Отметим, что индукция на оси полубесконечного толстостенного магнита (в плоскости торца) может быть рассчитана по формуле $B_T = 0.767\Phi /(\pi R_1^2)$. Расчёты показывают, что распределение индукции вне полости магнита практически не зависит от его длины, если она превышает $0{,}6\,R_1$.

3. ДИФФУЗИЯ ПОЛЯ В ПРОВОДНИКИ И ИХ НАГРЕВ

Нагрев проводников существенно влияет на эксплуатационные характеристики магнитных систем. Устройства, работающие в стационарных условиях, нуждаются в охлаждении, и в конструкциях катушек, предназначенных для получения сильных полей, этому вопросу уделяется большое внимание [10, 11]. Тепловые процессы существенны и при получении импульсных полей малой длительности. Здесь мы, в основном, остановимся на нагреве проводников при однократных импульсах длительностью 10^{-3}-10^{-4} с и менее. При такой длительности теплообмен между элементами обмотки не играет существенной роли и нагрев можно считать адиабатическим.[2] В нестационарных условиях распределение тока по сечению проводников неравномерно из-за поверхностного эффекта. Следует выделить два предельных режима, представляющих наибольший интерес: в первом из них глубина проникновения поля в проводниках много больше, во втором - много меньше характерных размеров сечения проводника. Критерием является оценка глубины проникновения $\Delta = \sqrt{\rho\tau/\mu_0}$, где ρ - удельное сопротивление, τ - характерное время (например, полупериод колебаний тока или длительность прямоугольного импульса). Если $\Delta \ll \rho$, где ρ - радиус или другой характерный размер проводника, то поверхностный эффект не влияет на распределение тока или этот эффект выражен слабо. В этом случае можно считать плотность тока одинаковой во всех точках сечения, Противоположное неравенство соответствует резко выраженному скин-эффекту.

Обмотки многовитковых катушек в большинстве своем работают при больших длительностях импульсов, поскольку индуктивность таких катушек велика, так же как и емкость питающих

[2] Оценки допустимости модели адиабатического нагрева при резко выраженном поверхностном эффекте приведены ниже.

их относительно низковольтных конденсаторных батарей. В таких катушках скин-эффект является второстепенным фактором. Напротив, в одновитковых соленоидах практически всегда этот эффект резко выражен.

В соответствии со сказанным в этой главе вначале будет рассмотрен адиабатический нагрев проводников при отсутствии скин-эффекта, затем - с его учетом. При этом внимание будет уделено как линейным режимам, когда нагрев мал и проводимость постоянна, так и режимам с проводимостью, падающей при нагреве, что имеет место в достаточно сильном поле. Режимы с фазовыми переходами, свойственные сверхсильным полям, рассматриваются в главе 9.

3.1. Адиабатический нагрев проводников при заданной плотности тока

В соответствии с законом Джоуля-Ленца скорость изменения объемной плотности энергии в неподвижной среде с постоянной плотностью

$$\frac{dq'}{dt} = \rho\delta^2, \tag{3.1}$$

где δ - плотность тока. Удельное сопротивление у типичных проводников, используемых для изготовления обмоток, растет с увеличением температуры. Примеры такой зависимости для меди и железа представлены на рис. 3.1, где кривые построены до температур, превышающих температуру плавления, то есть охватывают твердую и жидкую фазы. Более удобна зависимость $\rho = f(q')$, зная которую, можно в следующем виде представить связь ρ и δ:

$$\psi(q') = \int\limits_{q'(0)}^{q'} \frac{dq'}{f(q')} = \int\limits_0^t \delta^2 dt = S_I, \tag{3.2}$$

где $q'(0)$ соответствует начальному состоянию проводника. Эта формула устанавливает связь q' и параметра S_I, который называется токовым интегралом действия. Этот параметр однозначно определяет как энергию, выделившуюся в единице объема проводника, таки его удельное сопротивление.

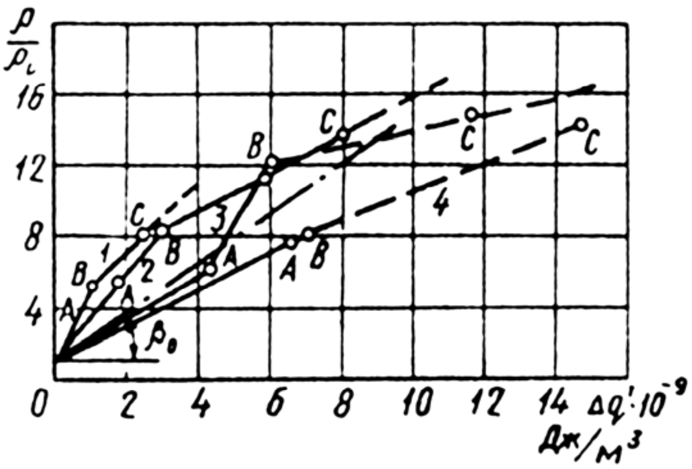


Рис. 3.1. Примеры зависимости удельного сопротивления от энергии, выделившейся в единице объёма при нагреве проводника.
А - начало плавления, В - расплав, С - начало испарения,
1 - свинец, 2 - алюминий, 3 - медь, 4 - тантал.
Штрихпунктирная линия соответствует усреднённому значению параметра β в диапазоне $\Delta q' \le Q_2$ (для меди)

Для приближенных расчетов функцию $\rho(q')$ удобно аппроксимировать линейной зависимостью:

$$\rho \approx \rho_0 \left[1 + \left(q' - q'(0)\right)\right] = \rho_0 \left(1 + \beta \cdot \Delta q'\right), \tag{3.3}$$

где ρ_0 - начальное значение удельного сопротивления, $\Delta q' = q' - q'(0)$ - объемное энерговыделение. В этой формуле β - тепловой коэффициент сопротивления, значения которого для некоторых металлов даны в табл. 3.1. В этой таблице приведены три значения коэффициента β: β_1 соответствует изменению $\Delta q'$ до завершения плавления, β_2 определяется по наклону линии $\rho/\rho_0 = f(\Delta q')$ за точкой плавления, β_3 определяется по наклону прямой, проведенной посредине между точками конца плавления и начала испарения. Для меди $\beta_1 \approx 1{,}7 \cdot 10^{-9}$, $\beta_2 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м³/Дж. В зависимости от интервала значений $\Delta q'$ при аналитических оценках следует пользоваться соответствующим значением параметра β.

Таблица 3.1

Некоторые характерные параметры металлов

Параметры		Медь	Железо	Алюминий	Тантал	Свинец
γ_0	кг/м^3	8,9	7,8	2,7	16,5	11,3
ρ_0	Ом·м·10^{-8}	1,7	10	2,9	15,5	20,6
C_1	км/с	3,96	3,80	5,25	3,37	2,03
λ		1,50	1,58	1,39	1,16	1,52
Q_1	Дж/м^3·10^9	6,0	7,3	2,9	7,7	0,78
B_{S1}	Т	123	135	85	138	44
Q_2	Дж/м^3·10^9	11,6	17,2	8	14,7	2,3
B_{S2}	Т	170	210	100	190	75
Q_3	Дж/м^3·10^9	54	67	33	22	3,1
B_{S3}	Т	370	410	320	235	88
β_1	м^3/Дж·10^{-9}	1,7	1,35	2,5	1,04	4,9
B_{01}	Т	38	43	32	49	23
β_2	м^3/Дж·10^{-9}	0,48	-	1,1	0,86	2,24
B_{02}	Т	73	-	48	54	34
β_3	м^3/Дж·10^{-9}	1,4	-	2	0,98	4,2
B_{03}	Т	43	-	36	50,5	26,5

Примечание:

$Q_{1,2,3} = \gamma_0 \varepsilon_{1,2,3}$, где ε_1 - плотность тепловой энергии (Дж/кг) расплава при температуре плавления, ε_2 - то же в точке кипения при нормальном давлении, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon$, где $\Delta\varepsilon$ - скрытая теплота испарения при нормальном давлении;

$$\beta_1 = \frac{\rho(Q_1) - \rho_0}{\rho_0 Q_1} \; ; \quad B_{01} = \sqrt{2\mu_0 / \beta_1} \; ;$$

$$\beta_2 = \frac{\rho(Q_2) - \rho(Q_1)}{\rho_0 (Q_2 - Q_1)} \; ; \quad B_{02} = \sqrt{2\mu_0 / \beta_2} \; ;$$

$$\beta_3 = \frac{\rho(Q_2) + \rho(Q_1)}{\rho_0 (Q_2 + Q_1)} \; ; \quad B_{03} = \sqrt{2\mu_0 / \beta_3} \; .$$

Подставляя (3.3) в формулу (3.2), получим:

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \rho_0 \beta S_I \quad ; \qquad \rho = \rho_0 \exp\left(\rho_0 \beta S_I\right). \tag{3.4}$$

В обмотке, где скин-эффект отсутствует, плотность тока есть i/F, где i — ток в отдельном проводнике с сечением F. В этом простейшем примере нагрев проводников обмотки в адиабатическом приближении легко вычисляется по приведенным формулам. Поскольку $\Delta q' \approx C_V \Delta T$, где C_V — теплоёмкость металла при постоянном объеме, ΔT — приращение температуры, можно, зная $\Delta q'$, найти приращение температуры при нагреве ниже точки плавления.

Для примера рассчитаем приращение температуры за импульс в проводниках, образующих однослойную обмотку соленоида с числом витков $w' = 1000$ 1/м, который создает импульс магнитного поля, имеющего форму затухающей синусоиды: $B = 20\exp\left(-t/T_0\right)\sin\left(6 \cdot 10^4 t\right)$. Медные проводники имеют в сечении форму прямоугольника со сторонами 2 и 1 мм. Амплитуда плотности тока есть $\delta_m = B_m/(\mu_0 w' F) = 7{,}95 \cdot 10^9$ А/м^2; токовый интеграл действия $S_I = \int\limits_0^\infty \delta^2 dt \approx \frac{1}{4} T_0 {\delta_m}^2$, где $1/T_0 = 10^3$ с$^{-1}$ - постоянная в экспоненциальном сомножителе. Далее находим: $S_I = 1{,}6 \cdot 10^{16}$ А^{2}м$^{-4}$с; $\rho/\rho_0 = \exp\left(\beta \rho_0 S_I\right) = \exp\left(1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{16}\right) \approx 1{,}59$; $\Delta q' = \left(\rho/\rho_0 - 1\right)/\beta = 3{,}48 \cdot 10^7$ Дж/м^3; $\quad \Delta T = 94\ {}^0$K.

3.2. Линейный режим диффузии поля в проводниках

В качестве модельной задачи рассмотрим проникновение импульсного магнитного поля в проводящее полупространство. Будем изучать диффузию в проводник сравнительно слабых магнитных полей, когда нагрев не настолько силен, чтобы следовало учитывать изменение сопротивления с ростом температуры.

Уравнения Максвелла для проводящей среды, в которую проникает магнитное поле, имеют вид [21, 22]:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \delta_y = -\mu_0 \frac{E}{\rho_0}; \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{3.6}$$

где фигурируют компонента индукции $B = B_z$, напряженность электрического поля $E = E_y$ и удельное сопротивление ρ_0. Их можно преобразовать к уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial t} - D_M \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0, \tag{3.7}$$

где $D_M = \rho_0 / \mu_0$ — коэффициент диффузии магнитного поля.

Единица измерения коэффициента диффузии $[D_M]$=м^{2}с$^{-1}$. Исходя из этого, для грубой оценки глубины проникновения можно принять

$$\Delta \approx \sqrt{D_M t} = \sqrt{\rho_0 t / \mu_0}\,. \tag{3.8}$$

Аналогичные оценки имеются в теории диффузии и теории теплопроводности, где процессы также описываются уравнениями параболического типа [49].

Вопросы нестационарной диффузии магнитного поля в среду с $\rho_0 = \text{const}$ рассмотрены во многих работах (см., например, книгу [23]).

Рассмотрим вначале простое решение в виде волны, распространяющейся с постоянной скоростью. При таком допущении все величины зависят от аргумента $x - vt$, где v - фазовая скорость. Тогда для произвольной функции $f(x,t)$ справедливы равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{df}{dz}.$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (3.7) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$D_m B_z'' + v B_z' = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$B = C \exp\left(-vz/D_m\right) = C \exp\left(-vx/D_m\right) \exp\left(v^2 t/D_m\right).$$

Это решение существует лишь в случае экспоненциального нарастания индукции поля на границе (при $x = 0$): $B(0) = B_e = B_0 \exp(t/t_0)$. В этом случае $C = B_0$, $D_m / v^2 = t_0$, или $v = \sqrt{D_m / t_0}$.

Таким образом, окончательный вид решения таков:

$$B = B_0 \exp\left(t/t_0\right) \exp\left(-x/\sqrt{Dt_0}\right). \tag{3.9а}$$

Ток в этом примере тоже распределен экспоненциально:

$$\delta = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{B_0}{\sqrt{Dt_0}} \cdot \exp\left(t/t_0\right) \cdot \exp\left(-x/\sqrt{Dt_0}\right). \tag{3.9б}$$

Расстояние, на котором ток уменьшается в е раз по сравнению с граничным значением, в данном случае не меняется, но полный ток растет экспоненциально.

В тех случаях, когда поле на границе не нарастает неограниченно, а достигает фиксированного значения, решение имеет совершенно иной характер. Поскольку поле в глубине проводника отсутствует $\left(B(\infty)=0\right)$, то при нарастании индукции B_e на границе до фиксированного значения B_0 поверхностная плотность тока также нарастает до значения $j_0 = B_0 / \mu_0$. При этом область, в которой течет ток, расширяется со временем в соответствии с формулой (3.8), следовательно, плотность тока в поверхностном слое падает.

Классическим примером является случай режима установившихся колебаний, когда индукция на границе изменяется по синусоидальному закону. Ее можно представить в экспоненциальной форме $B_e = B_{e,m}\exp(j\omega t)$. Далее можно использовать формулу (3.9), в которой произвести замену параметра t_0 на выражение $(-j/\omega)$. Дальнейшие преобразования дают известную зависимость для индукции и плотности тока [22]:

$$B(x,t) = B_{em}\exp\left(-\frac{x}{\Delta_0}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\Delta_0}\right); \qquad (3.10а)$$

$$\delta(x,t) = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{B_{em}\sqrt{2}}{\mu_0\Delta_0}\exp\left(-\frac{x}{\Delta_0}\right)\sin\left(\omega t - \frac{x}{\Delta_0} + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (3.10б)$$

В формулах (3.10) фигурирует параметр $\Delta_0 = \left(2\rho_0 / \omega\mu_0\right)^{1/2}$ - классическая глубина проникновения, равная расстоянию, на котором амплитуды индукции и плотности тока убывают в **е** раз.

В общем случае решение уравнения (3.7) можно получить, преобразовав его по Лапласу. При нулевом начальном условии $\left(B(x,0)=0\right)$ получаем уравнение для преобразованных величин

$$\frac{d^2\overline{B}}{dx^2} - \frac{P}{D_M}\overline{B} = 0 .$$

Использовав граничные условия $B(0,t) = B_{\text{e}}(t) = \overline{B}_{\text{e}}(p)$, $B(\infty,t)=0$, получаем решение задачи

$$\overline{B}(x,p)=\overline{B}_{\text{e}}(p)\exp\left(-\sqrt{\mu_0 p/\rho_0}\,x\right). \tag{3.11}$$

Отсюда находим изображения напряженности электрического поля и плотности тока:

$$\overline{E}(x,p)=\sqrt{p\rho_0/\mu_0}\,\overline{B}(x,p); \qquad \overline{\delta}(x,p)=\sqrt{p/(\rho_0\mu_0)}\,\overline{B}(x,p). \tag{3.12}$$

3.3. Поверхностный импеданс. Потери энергии в скин-слое при синусоидальном токе

При протекании тока по границе проводящего полупространства можно ввести понятие поверхностного импеданса (переходного сопротивления) скин-слоя. Это есть сопротивление квадратного участка поверхности, ориентированного так, что линии тока параллельны стороне квадрата. Выражение для этого сопротивления имеет вид:

$$Z_0(p)=\overline{E}_e(p)\Big/\bar{j}(p), \tag{3.13}$$

где $\overline{E}_e=\overline{\delta}(0,p)$ — изображение напряженности электрического поля на границе, $\bar{j}(p)$ — изображение поверхностной плотности тока. Из формулы (3.13) следует:

$$Z_0(p)=\sqrt{p\mu_0\rho_0}\,. \tag{3.14}$$

При синусоидальном токе:

$$Z_0(p)=\sqrt{j\omega\mu_0\rho_0}=R_0+j\omega L_0, \tag{3.15}$$

где $j=\sqrt{-1}$, $R_0=\sqrt{\omega\mu\rho_0/2}$ - активное сопротивление квадратного участка поверхностного слоя проводника при переменном токе, $L_0=\sqrt{\mu\rho_0/(2\omega)}$ - его индуктивность.

Учитывая, что $\bar{j}(p)=\overline{H}_e(p)$, получаем связь между касательными составляющими напряженности электрического и магнитного полей, справедливую при условии резко выраженного поверхностного эффекта:

$$\overline{E}_\tau(p) = \overline{H}_\tau(p) \cdot Z_0(p)$$

Это условие можно использовать в качестве краевого при расчете поля вне проводника. При синусоидальном поле оно принимает вид (граничное условие М.А. Леонтовича):

$$\overline{E}_\tau = \overline{H}_\tau \sqrt{j\omega\mu\rho_0} \qquad (3.16)$$

В случае ферромагнитных сред и при высоких частотах касательная составляющая напряженности может принимать заметные значения. Например, для железа с $\mu \approx 1000\mu_0$ и $\rho_0 \approx 10^{-7}$ Ом·м при $H \approx 10^3$ А / м (в таком поле железо еще не насыщено) имеем $E_\tau \approx 10^2$ В/м при $\omega = 10^6$ Гц и $E_\tau = 10^3$ В/м при $\omega = 10^8$ Гц. В случае неферромагнитных проводников E_τ обычно мало, несмотря на то, что H_τ может быть велико. При отсутствии тока $E_\tau = 0$. Чтобы оценить наибольшие практически достижимые значения E_τ в проводниках, где плотность тока ограничена условиями нагрева, учтем, что медный проводник, нагреваемый током без теплоотвода, плавится, если выполняется условие $\delta^2\tau \approx 10^{16}$, где τ - время протекания тока. При $\tau = 10^{-6}$ с предельно допустимая плотность тока имеет порядок 10^{11} А/м^2, при этом E_τ порядка 10^3 В/м = 10 В/см, так как ρ имеет значение порядка 10^{-8} Ом·м. Нормальные компоненты напряженности могут быть на много порядков выше этого весьма малого значения. Поэтому при многих расчетах допустимо считать $E_\tau = 0$, то есть считать проводник идеально проводящим при расчете электрического поля вне проводника. Иначе говоря, допустимо принимать на его границах условие:

$$E_\tau = -\frac{\partial A_\tau}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0, \qquad (3.17)$$

где A_τ – касательная к границе компонента векторного потенциала, U – скалярный потенциал электромагнитного поля. Условие $E_\tau = 0$ является приближенным для проводников с током и точным — в том случае, когда ток отсутствует.

Зная распределение поверхностной плотности тока, рассчитанное в приближении идеальной проводимости, можно рассчитать потери энергии в скин-слое. При переменном токе средняя мощность, выделяемая в скин-слое проводника, ограниченного поверхностью S, может быть рассчитана по следующей формуле, в которой фигурирует активная составляющая поверхностного сопротивления и проводится интегрирование по поверхности:

$$< P > = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0\rho}{2}}\int_S J_m^2 dS \qquad (3.18)$$

Здесь J_m - амплитудное значение линейной плотности тока. Неограниченный рост напряженности поля у кромки проводника не приводит к расходимости интеграла (3.31), если угол $\alpha > 0$. Особый случай соответствует краю тонкого проводника, например, краю полосковой линии или одновиткового магнита, имеющего форму тонкого диска с отверстием. В малой окрестности кромки поле можно считать плоским. Если в первом приближении вместо реальной кромки конечной толщины δ считать ее толщину равной нулю, то в этом случае приходим к конфигурации, представленной на рис. 1.9,а (область z_1), в которой квадрат линейной плотности тока, рассчитанной в приближении идеальной проводимости, растет как $1/x_1$. При этом интеграл (3.18) расходится. Исходная конфигурация z_2 характеризуется комплексным потенциалом $W = u + jv$, отображающим расчетную область на каноническую (рис. 1.9,б). При этом имеют место равенства $J^{2} = \left|dW / dz_2\right|^2$, $\int J^{2} dS = \int \left|dW / dz_2\right| du$. В рассматриваемом примере функция $W(z_2) = Aw(z_2)$, где $w(z_2)$ выражается формулой (1.45). Константа A должна быть выбрана таким образом, чтобы линейная плотность тока при удалении от края не отличалась от ее значения в системе с листом нулевой толщины. Это значение задано общей конфигурацией магнитной системы и токами в ней и описывается зависимостью вида $|J| = C / \sqrt{x_1}$, где координата x_1 отсчитывается от края листа. Вместе с тем при удалении от края должны совпадать значения линейной плотности тока как в системе с листом нулевой толщины, так и в исходной системе, где модуль линейной плотности тока при $x_2 >> \delta$ принимает значение $|J| \approx A\sqrt{\pi /(4\delta x_2}$. При этом вдали $x_2 = x_1$. Приравнивая два выражения для $|J|$ находим значение константы $A = 2C\sqrt{\delta / \pi}.$ Далее находим значение интеграла, фигурирующего в формуле для мощности потерь на участке от точки c, расположенной посредине кромки, до точки n с координатой $j\delta / 2 + x_0$, где $x_0 >> \delta$:

$$\int_c^n \left|J^2\right| ds = A^2 \int_{w(c)}^{w(n)} \left|dw / dz_2\right| dw = 2C^2 \left(\int_0^1 (1 - w^2)^{-1/2} dw + \int_1^{w(n)} (w^2 - 1)^{-1/2} w\omega\right).$$

Первый из интегралов есть число $\pi / 2$, а во втором надо в качестве верхнего предела взять значение $w(n) \approx (\pi x_0 / \delta)^{1/2} >> 1$. Второй интеграл есть $\ln(w(n) + \sqrt{w(n)^2 + 1}) \approx \ln(2\sqrt{\pi x_0 / \delta})$. С учетом сказанного, получаем

$$\int_c^n \left|J^2\right| dS \approx C^2 (\pi + \ln(4\pi x_0 / \delta)). \qquad (3.19)$$

Таким образом, при расчете потерь в тонком листе можно провести интегрирование квадрата поверхностной плотности тока по поверхности листа нулевой толщины до точки x_0. При этом следует выбрать нижний предел интегрирования θ таким образом, чтобы было выполнено равенство интеграла

$$\int_{\theta}^{x_0} (C^2 / x)dx = C^2 \ln(x_0 / \theta_0),$$

рассчитанного для листа нулевой толщины, и интеграла, определяемого по формуле (3.19). В итоге приходим к уравнению, позволяющему найти число θ_0

$$\theta_0 = \frac{e^{-\pi}}{4\pi}\delta = 3.49 \cdot 10^{-3}\delta \tag{3.20}$$

Важно отметить, что полученное решение не зависит от параметра x_0. Таким образом, расчет потерь сводится к интегрированию квадрата плотности тока по всей поверхности листа нулевой толщины за исключением области шириной θ_0, примыкающей к краю листа. Этот метод расчета потерь, предложенный в работе Л.А. Вайнштейна и С.М. Журава, позволяет учесть конечную толщину листа и может быть использован, если она существенно больше толщины скин-слоя.

Для примера воспользуемся полученными формулами для расчета потерь в полосковой линии шириной g с заданным током j при условии, что толщина проводника равна δ. Воспользуемся формулой (1.51) для поверхностной плотности тока. Чтобы учесть конечную толщину проводника, при расчете по формуле (3.18) следует вместо интегрирования по всей поверхности отступить от его края на расстояние θ. В итоге получаем следующее выражение для среднего значения потерь на единицу длины:

$$\begin{aligned} < P' > &= 2\sqrt{\frac{\omega\mu_0\rho}{2}} \int_0^{g/2-\theta} \frac{i_m^2 dx}{\pi^2 g^2 (1-(2x/g)^2)} \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_0\rho}{2}} \frac{i_m^2}{\pi^2 g}\left[\ \ln\frac{g}{\delta} + \pi + \ln(4\pi)\ \right] \end{aligned}. \tag{3.21}$$

Здесь учтено условие $\theta_0 << g/2$.

Этот способ вычисления потерь можно использовать для тонкого диска с отверстием. Зависимость поверхностной плотности тока от радиуса в этом случае описывается формулой (2.2). В формуле (3.18) при интегрировании следует исключить участок поверхности, на котором радиус удовлетворяет условию $R_1 < r < R_1 + \theta_0$. Средняя мощность потерь в скин-слое при переменном токе определяется по следующей формуле

$$< P >= 2\pi\sqrt{\frac{\omega\mu_0\rho}{2}}R^2 i_m^2 \int\limits_{R_1+\theta}^{\infty} \frac{dr}{r(r^2 - R_1^2)} \approx$$

$$\approx \pi\sqrt{\frac{\omega\mu_0\rho}{2}} i_m^2 \left[\ln\frac{R_1}{\delta} + \pi + \ln(2\pi)\right] \qquad (3.22)$$

3.4. Примеры диффузии однородного поля в среду с постоянной проводимостью и энерговыделения в скин-слое

Формулы (3.11), (3.12) позволяют рассчитать распределение тока в скин-слое при различных законах изменения индукции поля на границе. Общие выражения для индукции и плотности тока можно получить с помощью интеграла Дюамеля:

$$B(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left[\frac{\partial}{\partial\tau}B(0,\tau)\right]\left(\int\limits_{(x/2)[\rho_0(t-\tau)/\mu_0]^{-1/2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, dy\right) d\tau\,; \qquad (3.23а)$$

$$\delta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\rho_0}}\int\limits_0^t \frac{\partial B(0,\tau)}{\partial\tau}\exp\left(-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0(t-\tau)}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,; \qquad (3.24б)$$

$$\delta(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\rho_0}}\int\limits_0^t \frac{\partial B(0,\tau)}{\partial\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,. \qquad (3.25в)$$

При ступенчатом импульсе поля ($B_e = 0$ при $t < 0$, $B_e = B_1 = \mathrm{const}$ при $t > 0$) имеем

$$\overline{B}(x,p) = \frac{B_1}{p}\exp\left(-\sqrt{\mu_0 p/\rho_0}\,x\right), \tag{3.26а}$$

$$B(x,t) = B_1\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\chi} \mathrm{e}^{-y^2}\,dy\right] = B_1 \operatorname{erfc}(\chi), \tag{3.26б}$$

где $\chi = x\sqrt{\mu_0/(4\rho_0 t)}$. В глубине проводника $(x \to \infty)$ индукция затухает по закону

$$B(x,t) = \frac{2B_1}{x}\sqrt{\frac{\rho_0 t}{\pi\mu_0}}\exp\left(\frac{-\mu_0 x^2}{2\rho_0 t}\right). \tag{3.27}$$

Простой вид имеет решение задачи для граничного условия в виде $B_e = B_1$ при $0 < t < t_0$, $B_e = 0$ при $t > t_0$:

$$B(x,t) = B_1\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0(t - t_0)}}\right)\right].$$

В предельном случае $t_0 << t$ можно принять, что индукция имеет вид $\delta-$функции: $B_e = B_1 t_0 \delta(t)$, $\overline{B}_e(p) = B_1 t_0$. Тогда

$$\overline{B}(x,p) = B_0 t_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu_0 p}{\rho_0}}x\right) \doteq \frac{B_1 t_0 x}{2t}\sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\rho_0 t}}\exp\left(-\mu_0\frac{x^2}{4\rho_0 t}\right). \tag{3.28}$$

Распределение индукции в толще проводника в этом примере немонотонно: индукция достигает максимума, равного $B_m = B_1(t_0/t)(2\pi\mathrm{e})^{-1/2}$, в точке с координатой $x_m = \left(2\rho_0 t_1{}' \mu_0\right)^{1/2}$.

Для граничного условия вида $B_e = B_1(t/t_0)^{\alpha}$, где $\alpha > 0$, плотность тока на поверхности имеем [14]

$$B(x,t) = \frac{B_1}{\sqrt{\rho_0 \mu_0 t}} \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1/2)}. \tag{3.29}$$

При экспоненциальном нарастании внешнего поля $B_{\text{e}} = B_1 \exp(t/t_0)$ справедливо решение, полученное выше другим способом (см. (3.9))

$$B(x,t) = B_1 \exp\left(\frac{t}{t_0} - \frac{x}{x_0}\right) = B_e \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right),$$

где $x_0 = (\rho_0 t_0 / \mu_0)^{1/2}$. В этом примере глубина проникновения поля, определяемая как отношение потока в проводнике к индукции на поверхности B_{e}, является постоянной величиной.

Рассмотрим далее важный для практики случай включения поля, меняющегося по синусоидальному закону $B_{\text{e}}(t) = B_{\text{e}m} \sin \omega t$, $t \geq 0$. В этом случае

$$\overline{B}_{\text{e}}(p) = B_{\text{e}m} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$B(x,t) = B_{\text{e}m} \exp\left(-\frac{x}{\Delta_0}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\Delta_0}\right) + \Psi_B, \tag{3.30}$$

где Ψ_B можно выразить в двух эквивалентных формах:

$$\Psi_B = -\frac{2B_{\text{e}m}}{\pi} \int_0^{\gamma_0} \sin\left(\omega t - \frac{x^2}{2\Delta_0^2 \gamma^2}\right) \exp(-\gamma^2) d\gamma, \qquad \gamma_0 = \frac{x}{\Delta_0 \sqrt{2\omega t}} \;;$$

$$\Psi_B = \frac{B_{\text{e}m}\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t)(\lambda^2 + \omega^2)^{-1} \sin\left(x \sqrt{\frac{\mu_0 \lambda}{\rho_0}}\right) d\lambda.$$

В формуле (3.41) первое слагаемое соответствует режиму установившихся синусоидальных колебаний. Слагаемое Ψ_B характеризует отличие режима включения синусоидального поля “с нуля” от режима установившихся колебаний.

На рис. 3.2 построены зависимости $B(x,t)$, рассчитанные В.Н. Бондалетовым.

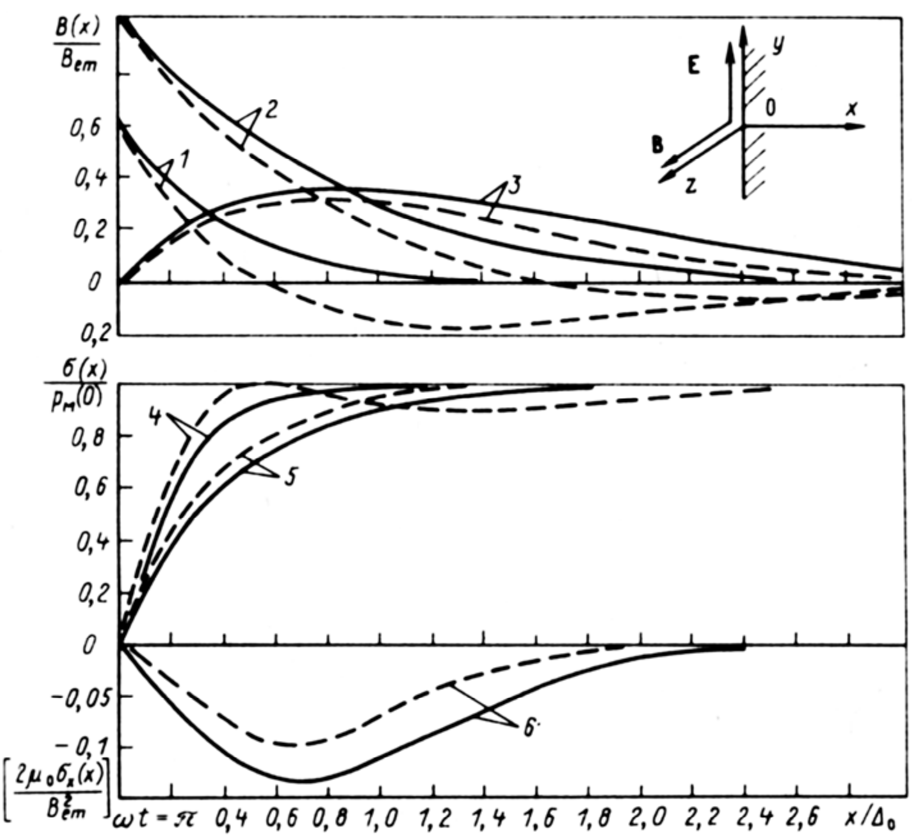


Рис. 3.2. Проникновение синусоидального поля в проводящее полупространство: сплошные линии - включение поля с нуля: $B_e = 0$ ($t < 0$); $B_e = B_{em}\sin(\omega t)$ ($t > 0$);
штриховые линии - установившийся режим:
1 - $B(x)$, $\omega t = 0{,}6$; ***2*** - $B(x)$, $\omega t = \pi/2$; ***3*** - $B(x)$, $\omega t = \pi$;
4 - $\sigma_x(x)/p_M(0)$, $\omega t = 0{,}6$; ***5*** - $\sigma_x(x)/p_M(0)$, $\omega t = \pi/2$;
6 - $2\mu_0\sigma_x(x)/B_{em}^2$, $\omega t = \pi$

Для ранней стадии процесса ($\omega t < \pi/2$) распределение индукции в нестационарном режиме и при установившихся синусоидальных колебаниях заметно различаются. В более поздних стадиях ($\omega t > \pi/2$) это различие заметно лишь в точках, где $x > \Delta_0$.

Интересно отметить, что в нестационарном режиме (включение синусоиды с нуля) имеет место монотонное затухание $B(x,t)$ при $x \to \infty$ в отличие от осциллирующего характера затухания в стационарном случае.

Асимптотическое поведение функции Ψ_B исследовано В.И. Волосовым и Б.В. Чириковым. Ими показано, что при условии $x >> \Delta_0$ и $\omega t >> x/\Delta_0$

$$\Psi_B \approx \frac{-x}{2\sqrt{\pi}\Delta_0}(\omega t)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta_0^2 \omega t}\right). \tag{3.31}$$

Функция $\Psi_B(x,t)$ при росте ωt вначале нарастает до максимума, равного $0{,}46 B_{em}(\Delta_0/x)^2$, а затем убывает как $(\omega t)^{-3/2}$. Таким образом, амплитуда индукции при $x \to \infty$ убывает в нестационарном решении как $(\Delta_0/x)^2$, а не как $\exp(-x/\Delta_0)$.

Нестационарность процесса диффузии наиболее заметно проявляется в характере изменения плотности тока и в значении энергии, поступающей в проводник в начальной стадии процесса. В пределах первого полупериода плотность тока на поверхности может быть рассчитана по формуле

$$\delta(0,t) = \frac{\sqrt{2}B_{em}}{\mu_0\Delta_0}\left[\cos(\omega t)\cdot C(\omega t) + \sin(\omega t)\cdot S(\omega t)\right], \tag{3.32}$$

где C и S - интегралы Френеля. Кривая ***1*** на рис. 3.2 показывает, что $\delta(0,t)$ вначале заметно отличается от установившегося значения, которое можно получать в пределе $\omega t >> 1$, когда $C(\omega t) = S(\omega t) = 1/2$. Например, в момент максимума индукции внешнего поля $\delta(0,t) = 0{,}86\, B_{em}/(\mu_0\Delta_0)$ вместо значения $B_{em}/(\mu_0\Delta_0)$, соответствующего режиму установившихся колебаний.

В процессе диффузии импульсного поля может измениться знак механических напряжений в скин-слое. Это имеет место после максимума внешнего поля, когда индукция в толще проводника по абсолютному значению может быть больше, чем индукция внешнего поля. Характерным параметром этого процесса является величина $\sigma_x = P_M(0) - P_M(x)$, где $P_M(x) = B^2(x)/(2\mu_0)$. Она является компонентой тензора напряжения при одноосном нагружении среды со свободными боковыми гранями. Графики, представленные на рис. 3.2, показывают, в частности, что в момент, когда индукция внешнего поля принимает значение, равное нулю ($\omega t = \pi$), максимум отношения $\left|\sigma_x \cdot 2\mu_0 / B_{em}^2\right|$ становится близким к 0,15.

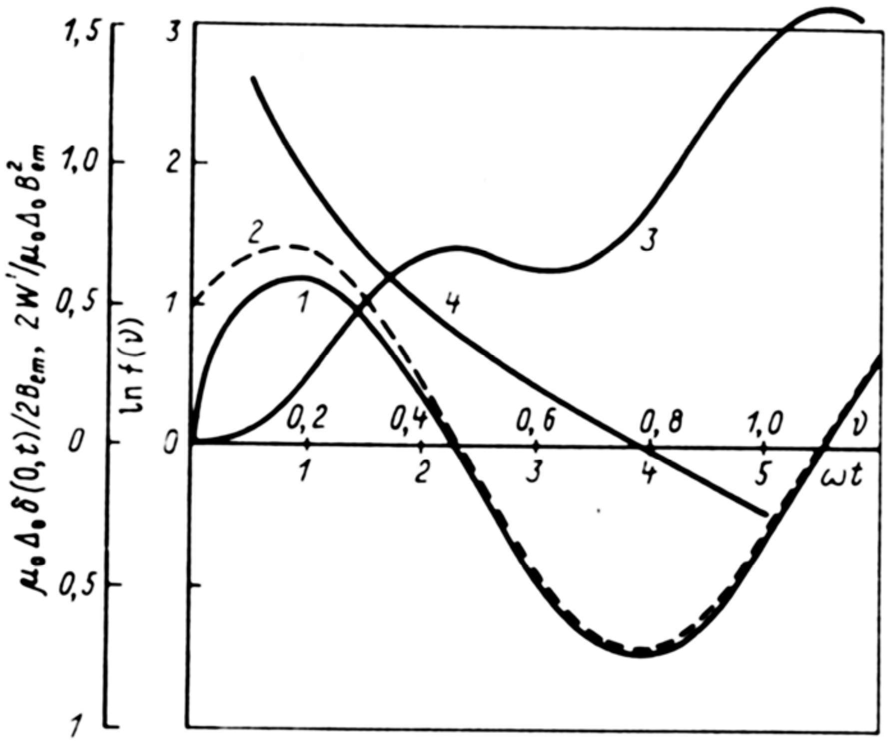


Рис. 3.3. Плотность тока на поверхности проводника и энергетические характеристики процесса диффузии синусоидального поля в проводник:
1 - $\mu_0\Delta_0\delta(0,t)/(2B_{em})$; ***2*** - то же в установившемся режиме;
3 - $2W'/\left(\mu_0\Delta_0 B_{em}^2\right)$; ***4*** - $\ln f(\nu)$

Большой практический интерес представляет нагрев проводника током при включении поля, меняющегося по синусоидальному закону. Зависимость от времени энергии, поступившей через единицу поверхности проводника в этом режиме, представлена на рис. 3.3. Эта зависимость может быть использована при расчёте энергетического баланса в цепи разряда конденсатора, содержащей проводники, в которых резко выражен скин-эффект. В момент первого максимума внешнего поля ($\omega t = \pi/2$) имеем $W' = 0{,}54 B_{em}^2 \Delta_0 / \mu_0$. Сюда входит энергия потерь $W_R' = 0{,}31 B_{em}^2 \Delta_0 / \mu_0$ и энергия магнитного поля $W_M' = 0{,}23 B_{em}^2 \Delta_0 / \mu_0$. По формуле Парсеваля можно рассчитать энергию, выделившуюся в проводнике за всё время существования внешнего поля, меняющегося по закону $B_e = B_{em} \exp(-\beta t) \sin(\omega t)$:

$$W_R' = \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_0 \delta^2(x,t) dt\, dx = \frac{\rho_0}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|\delta(js)\right|^2 ds, \tag{3.33а}$$

где

$$\bar{\delta}(js) = \frac{B_{em}\omega}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \left[\frac{p^{1/2} \exp\left(-x\sqrt{\mu_0 p/\rho_0}\right)}{(p+\beta)^2 + \omega^2} \right]_{p=js}. \tag{3.33б}$$

В результате преобразования получаем:

$$W_R' = \frac{B_{em}^2 \Delta_0}{8\sqrt{2}\mu_0} \frac{1}{\nu\sqrt{1+\nu^2}} \left[\left(\sqrt{1+\nu^2}+1\right)^{1/2} - \left(\sqrt{1+\nu^2}-1\right)^{1/2} \right] = \frac{B_{em}^2 \Delta_0}{8\sqrt{2}\mu_0} f(\nu),$$

где $\nu = \beta/\omega$. Функция $\ln f(\nu)$ представлена на рис. 3.3.

Энергия, выделяющаяся в проводнике при включении синусоидального незатухающего поля, неограниченно растёт при $t \to \infty$. Однако, остаётся конечной величина $\Delta W_R'$, равная разности энергий, выделившихся в проводнике в переходном режиме и в режиме установившихся колебаний при $t > 0$. Расчёт по формуле Парсеваля даёт следующее выражение для $\Delta W_R'$:

$$\Delta W_R' = -\frac{B_{em}^2 \Delta_0}{2\pi\mu_0} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{y} - \frac{y^2 - 3}{4} \right) \frac{dy}{\left(y^2 - 1\right)^2} = -\frac{B_{em}^2 \Delta_0}{16\mu_0}. \qquad (3.34)$$

Наряду с полной энергией практический интерес представляет объёмная плотность энергии, выделившейся в отдельных элементах проводника в процессе диффузии поля. В частности, для поверхностного элемента среды ($x = 0$) при нарастании поля по синусоидальному закону имеем:

$$\Delta q'(0,t) = \int_0^t \delta^2(0,t) \rho_0 dt = \frac{B_{em}^2}{\mu_0} \int_0^{\omega t} f^2(\omega t) d(\omega t). \qquad (3.35)$$

Как видно из этой формулы, величина $\Delta q'(0,t)$ зависит лишь от фазы синусоиды ωt и не зависит от частоты и удельного сопротивления. Отсутствие зависимости $\Delta q'(0,t)$ от ρ_0 обусловлено тем, что мощность потерь есть $\delta^2 \rho_0$, где первый сомножитель пропорционален $\rho_0^{-1/2}$ из-за увеличения глубины проникновения с ростом ρ_0. Аналогично энерговыделение за фазовый интервал ωt, равное $(1/\omega)\int_0^{\omega t} \rho_0 \delta^2(\omega t) d(\omega t)$, не зависит от ω, поскольку δ пропорционально $\omega^{1/2}$. Таким образом, независимо от частоты и проводимости для моментов максимума индукции и моментов её перехода через нуль ($\omega t = \pi/2$, π, 2π) имеем

$$\Delta q'(0, \pi/2) = 1{,}63\, B_{em}^2 / (2\mu_0);$$

$$\Delta q'(0, \pi) = 2{,}18\, B_{em}^2 / (2\mu_0); \qquad (3.36)$$

$$\Delta q'(0, 2\pi) = 5{,}51\, B_{em}^2 / (2\mu_0).$$

Здесь значения энергии, выделенной в единице объёма, сопоставлены с максимальным значением плотности энергии внешнего поля. При адиабатическом нагреве среды соответствующие приращения температуры $\Delta T = \Delta q'(0,t)/C_V$ составляют для меди, объёмная теплоёмкость которой $C_V = 3{,}7 \cdot 10^6$ Дж·м$^{-3}$К$^{-1}$, $\Delta T(0,\pi/2) = 0{,}185 B_{em}^2$; $\Delta T(0,\pi) = 0{,}234 B_{em}^2$; $\Delta T(0,2\pi) = 0{,}595 B_{em}^2$ (К, Т). В частности, в поле с индукцией 74 Т температура поверхности возрастает на 1000 ^{0}С к моменту достижения первого максимума индукции на границе.

В случае униполярного импульса, имеющего вид одного полупериода синусоиды ($B_e = B_m \sin(\omega t)$ при $0 < \omega t < \pi$; $B_e = 0$ при $t < 0$ и $t > \omega/\pi$), можно рассчитать полное энерговыделение в поверхностном элементе среды по формуле Парсеваля. Изображение индукции внешнего поля по Лапласу для рассматриваемого импульса есть $B_e(p) = \omega B_m \left(\omega^2 + p^2\right)^{-1} \left[1 + \exp(-p\pi/\omega)\right]$. Отсюда

$$\Delta q'(0,\infty) = \rho_0 \int_0^\infty \delta^2(0,t)dt = \frac{\omega^2 B_m^2}{2\pi\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| s\left[1 + \exp(-js\pi/\omega)\right]^2 \right| ds}{\left(\omega^2 - s^2\right)^2}, \qquad (3.37а)$$

или

$$\Delta q'(0,\infty) = \frac{2B_m^2}{\pi\mu_0} \int_0^\infty \frac{x(1 + \cos(\pi x))dx}{\left(1 - x^2\right)^2} = \frac{B_m^2}{\mu_0}\left[\mathrm{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}\right] = 2{,}42 \frac{B_m^2}{2\mu_0}. \qquad (3.37б)$$

Сравнение с приведенными выше данными для $\Delta q'(0,\pi)$ показывает, что после выключения внешнего поля дополнительный нагрев проводника в процессе затухания вихревых токов составляет $0{,}24 B_m^2/(2\mu_0)$.

При изменении внешнего поля по закону затухающей синусоиды $B_e = B_{em} \exp(-\beta t)\sin(\omega t)$ имеет место следующее выражение для $\Delta q'(0,\infty)$, полученное И.М. Карповой и В.В. Титковым с помощью формулы Парсеваля:

$$\Delta q'(0,\infty) = \frac{B_{em}^2}{2\mu_0}\frac{\omega}{2\beta}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{\beta^2 - \omega^2}{2\beta\omega}\right)\right]. \qquad (3.38)$$

Приведенные формулы можно использовать для расчета нагрева проводника, если пренебречь влиянием теплопроводности. Справедливость этого предположения выявляется при сравнении глубины проникновения электромагнитной и тепловой волн. Уравнение для температуры можно получить, заменив в уравнении (3.7) B на T и D_M на $D_T = \lambda / C_V$, где D_T - «коэффициент температуропроводности» (аналогичный коэффициенту диффузии), λ - коэффициент теплопроводности, C_V - теплоемкость единицы объема. При одинаковых законах изменения температуры и индукции на поверхности отношение глубин проникновения поля и температуры, согласно (3.7), есть

$$\frac{\Delta_B}{\Delta_T} = \sqrt{\frac{D_B}{D_T}} = \sqrt{\frac{\lambda\mu_0}{C_V\rho_0}} \approx 10 \qquad \text{(для меди)}.$$

Приведенная оценка дает основание при приближенных расчетах считать нагрев проводника адиабатическим.

3.5. Минимизация нагрева однородной среды при диффузии импульсного магнитного поля

Для приложений представляет интерес задача о минимизации энерговыделения в поверхностном слое путём выбора соответствующей формы импульса внешнего поля. Решение этой задачи зависит от выбранных дополнительных условий. В работе Розенблюта, Фюрза и Кези рассчитана оптимальная форма переднего и заднего фронтов импульса с плоской вершиной, обеспечивающая минимум полного энерговыделения на поверхности. На рис. 3.4 приведены примеры зависимости $\Delta q'(0,\infty)$ от характерных параметров t_0/t_1 и t_1/t_2, а также пример импульса для предельного случая $t_2 = \infty$ (импульс с задним фронтом бесконечной длительности).

В этом случае

$$k = \sqrt{t_0/t_1}\,; \qquad k_1 = \sqrt{(t_1 - t_0)/t_1}\,;$$

$$\varphi_1 = \arcsin\sqrt{t/t_0}\,; \qquad \varphi_2 = \arcsin\sqrt{t_1/t}\,,$$

а полная энергия, выделенная в поверхностном слое, близка к той, которая имеет место для импульса с косоугольным фронтом $B_e = B_m\, t/t_0$, $t < t_0$ и спадом по закону $B_e = B_m\, t_1/t$, $t > t_1$ (рис. 3.4).

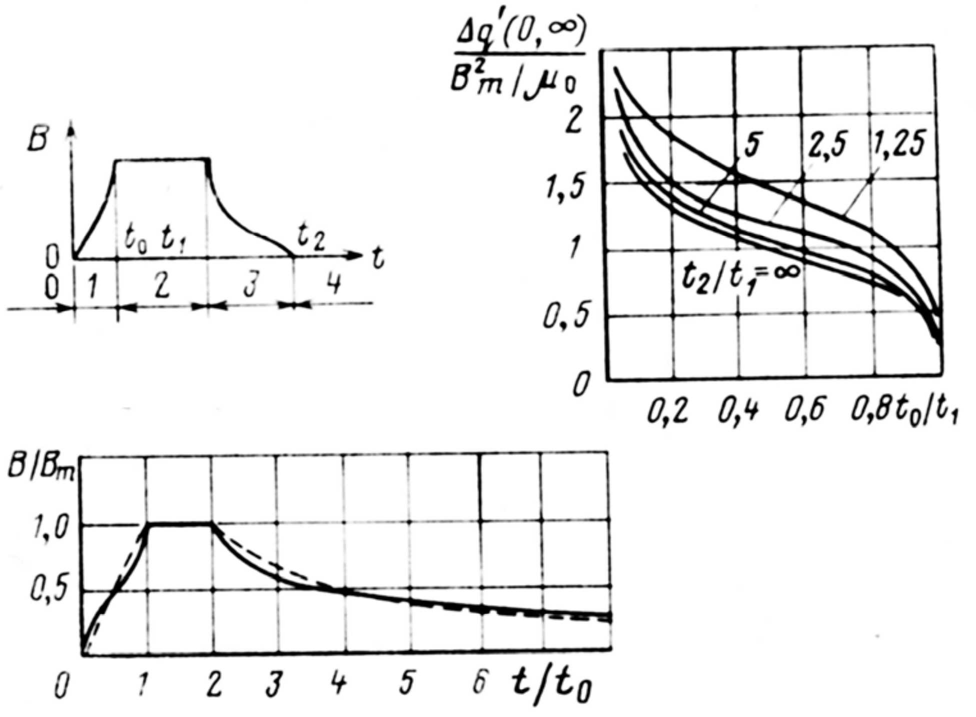


Рис. 3.4. Импульс с плоской вершиной, обеспечивающий минимум энерговыделения в поверхностном слое проводника

На рисунке показаны:

форма импульса; зависимости $\Delta q'(0,\infty)/\left(B_m^2/\mu_0\right)$ при различных значениях t_1/t_2; зависимость $B/B_m = f(t/t_0)$ для $t_2 = \infty$, $t_0 = t_1/2$ (сплошная линия) и зависимости $B/B_m = t/t_0$ при $t < t_0$,

$$B/B_m = t_2/t \text{ при } t > t_2 \text{ (штриховая).}$$

На рис. 3.5,а построена серия зависимостей $B_e/B_m = f(t/t_2)$ для симметричных импульсов ($t_0 = t_2 - t_1$), характеризуемых параметром $\beta = t_0/t_1$. Для таких импульсов $\Delta q'(0,\infty) = \left(B_m^2/\mu_0\right)\left[\mathrm{K}'(\beta)/\mathrm{K}(\beta)\right]$.

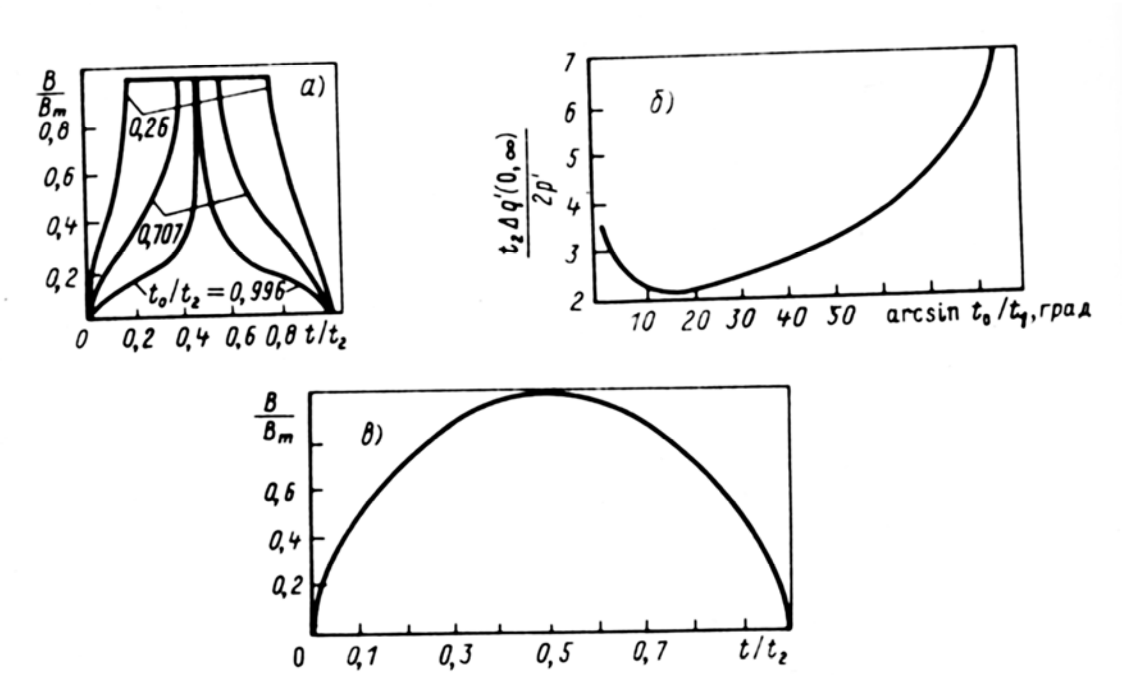


Рис. 3.5. Импульсы, обеспечивающие минимум энерговыделения:
а - примеры симметричных импульсов с плоской вершиной;
б - зависимость энерговыделения от отношения t_0/t_1 при фиксированном значении $p' = \int_0^{t_2} \left[B^2/(2\mu_0)\right]dt$ для импульсов с плоской вершиной;
в - форма импульса, обеспечивающего минимум энерговыделения при заданном p'

Можно найти условия, при которых энергия, выделенная в поверхностном элементе проводника, принимает наименьшее значение при заданном интеграле $1/(2\mu_0)\int_0^{\infty} B_e^2(t)dt = p'$, характеризующем полный импульс электромагнитной илы, воздействующей на единицу поверхности. Этому условию в случае симметричного импульса с плоской вершиной соответствует минимум функции $\Delta q' t_2 / (2p')$. Он имеет место при $\beta \approx 0{,}26$ и близок к двум (рис. 3.5,б).

Можно поставить задачу об определении закона изменения индукции на промежутке $0 < t < t_2$, обеспечивающего минимум энерговыделения при фиксированном значении p', не прибегая к дополнительному допущению о постоянстве индукции в интервале $t_0 < t < t_1$. Для нахождения условного экстремума функционала $T = -\mu_0 \pi \Delta q'(0,\infty)$ необходимо составить уравнение Эйлера для функционала $T + \lambda p' = \int\limits_0^\infty \Phi_1(\tau) d\tau$. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial B_e'(\tau)}\right] - \frac{\partial \Phi_1}{\partial B_e'(\tau)} = 0, \tag{3.39а}$$

или

$$\int\limits_{-t_2/2}^{t_2/2} \frac{B_e'(\tau')d\tau'}{t' - \tau'} = bB(t'), \tag{3.39б}$$

где $\tau' = \tau - t_2/2$, $t' = t - t_2/2$, b — множитель Лагранжа. Формальное решение сингулярного интегрального уравнения (3.39,б) известными методами приводит к однородному интегральному уравнению Фредгольма для функции $B(t)$, принимающей нулевые значения на границах интервала. При этом $B'(\tau)$ терпит разрыв на концах. Указанное уравнение имеет вид:

$$B(y) + \frac{A}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1 - xy + \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}}{1 - xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}} B(x) dx = 0, \tag{3.39в}$$

где $x = 2t'/t_2$, $y = 2\tau'/t_2$, $A = ab/\pi$. Титковым рассчитана первая характеристическая функция этого уравнения методом Келлога и найдено соответствующее собственное число $\omega_1 = A/(2\pi) \approx 0{,}2$. Зависимость $B/B_m = f(2t'/t_2)$ представлена на рис. 3.5,в. Объёмная плотность энергии, соответствующая этому импульсу, есть $\Delta q'(0,\infty) = 2{,}76\, B_m^2/(2\mu_0)$, а параметр $p' = 1{,}18\, B_m^2 t_2/(2\mu_0)$. Для сравнения отметим, что для импульса в форме полуволны синусоиды, согласно (2.42б), $\Delta q'(0,\infty) = 2{,}42\, B_m^2/(2\mu_0)$, при этом $p' = B_m^2 t_2/(2\mu_0)$. При равных значениях параметров p' и t_2 различие в энерговыделении для указанных форм импульса составляет лишь около 3,5 %.

Нельзя исключить наличие других решений уравнения (3.39б) в виде характеристических функций высших порядков с более сложной зависимостью $B(t)$.

Таким образом, импульс в форме полуволны синусоиды мало отличается от оптимального, дающего минимум энерговыделения при заданной амплитуде внешнего поля и длительности импульса.

3.6. Диффузия поля в среду с проводимостью, зависящей от координаты. Снижение энерговыделения в поверхностном слое

Исследование поверхностного эффекта в среде с проводимостью, не зависящей от времени, но меняющейся в пространстве, сводится к решению уравнения (3.7), где $D = \rho/\mu_0 = f(x)$, с граничными условиями $B(0,t) = B_e(t)$, $B(\infty,t) = 0$. Здесь будут рассмотрены наиболее простые примеры, показывающие качественные особенности диффузии поля в неоднородную среду. В простейшем случае двухслойной среды, когда $\rho = \rho_1$ при $0 \le x \le d$, $\rho = \rho_2$ при $x > d$, изображение индукции имеет вид:

$$\overline{B} = \overline{B}_1 = \overline{B}_e(p)\frac{\mathrm{ch}[a_1(d-x)] + \sqrt{\rho_2/\rho_1}\,\mathrm{sh}[a_1(d-x)]}{\mathrm{ch}(a_1 d) + \sqrt{\rho_2/\rho_1}\,\mathrm{sh}(a_2 d)}\ , 0 \le x \le d\ ; \quad (3.40а)$$

$$\overline{B} = \overline{B}_2 = \overline{B}_e(p)\frac{\exp[-a_2(x-d)]}{\mathrm{ch}(a_1 d) + \sqrt{\rho_2/\rho_1}\,\mathrm{sh}(a_2 d)}\ , \qquad x > d\ , \qquad (3.40б)$$

где $a_{1,2} = (\mu_0 p/\rho_{1,2})^{1/2}$. Это решение удовлетворяет условию непрерывности индукции и напряжённости электрического поля на границе раздела (подробнее см. [23]). Дальнейшие расчёты позволяют выбрать толщину слоя с более высокой проводимостью ($\rho_1 < \rho_2$), который наносится на плохо проводящую подложку для усиления поверхностного эффекта. Переходное сопротивление в рассматриваемом примере есть

$$z(p) = z_1(p)\frac{\sqrt{\rho_2/\rho_1} + \mathrm{th}(a_1 d)}{1 + \sqrt{\rho_2/\rho_1}\,\mathrm{th}(a_1 d)}, \qquad (3.41)$$

где $z_1(p) = (\mu_0 \rho_1 p)^{1/2}$. В пределе $d \to \infty$ $z(p) = z_1(p)$, а при $d \to 0$ $z = z_2(p) = (\mu_0 \rho_2 p)^{1/2}$.

Переходное сопротивление остаётся конечным в случае, когда слой проводника с проводимостью ρ_1 нанесён на сверхпроводник: при $\rho_2 = 0$ $z(p) = z_1(p)\mathrm{th}(a_1 d)$. В пределе $a_1 d << 1$, который соответствует поздней стадии процесса ($d << (\rho_1 t/\mu_0)^{1/2}$), переходное сопротивление двухслойного проводника с идеально проводящей подложкой становится чисто индуктивным: $Z(p) = \mu_0 d p$, и изображение плотности тока на поверхности в этом случае есть $\overline{\delta}(0,p) = (d/\rho_1)\overline{B}_e(p)p$ или $\delta(0,t) = (d/\rho_1)(dB_e/dt)$.

При непрерывной зависимости $\rho(x)$ точное решение уравнения диффузии возможно лишь в частных случаях. Качественные особенности поверхностного эффекта в среде с монотонно возрастающей проводимостью можно проследить на примере степенной зависимости $\rho = \rho_0 (x/x_0)^{-\alpha}$, где $\alpha \ge 0$. Преобразованное по Лапласу выражение для индукции при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$\overline{B}(x,p) = 2\overline{B}_e(p)\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^{\nu} p_1^{\nu/2} x_1^{(1+\alpha)/2} \times \mathrm{K}_{\nu}\left[\sqrt{p_1}\,\frac{2x_1^{1+\alpha/2}}{2+\alpha}\right], \qquad (3.42)$$

где $p_1 = \left(\mu_0 x_0^2 / \rho_0\right)p$; $x_1 = x/x_0$; $\nu = (1+\alpha)/(2+\alpha)$. При мгновенном нарастании внешнего поля до значения B_0 индукция и плотность тока описываются следующими формулами:

$$B(x,t) = \frac{2B_0}{\Gamma(\nu)} \int_u^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, u^{2\nu-1} du\ ; \qquad (3.43а)$$

$$\delta(x,t) = \frac{B_0}{\mu_0 x_0 \Gamma(\nu)} t_1^{-\nu} \left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} x_1^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-u^2}, \qquad (3.43б)$$

где $u = x_1^{(2+\alpha)/2} \Big/ \left[(2+\alpha)\sqrt{t_1}\right]$, $t_1 = t\rho_0 / \left(\mu_0 x_0^2\right)$.

Случай $\alpha = 0$ рассмотрен выше [см. формулы (3.26)]. Как видно из формулы (3.43б), вблизи поверхности ($x \to 0$) плотность тока изменяется как x^{α}, то есть пропорционально проводимости. При больших значениях аргумента u основную роль играет экспоненциальный множитель, определяющий затухание плотности тока при $x \to 0$. При возрастании проводимости ($\alpha > 0$) имеет место максимум плотности тока в точке $x_{1m} = [t_1 \alpha (2+\alpha)]^{1/(2+\alpha)}$. Координата точки максимума $x = x_0 x_{1m}$ монотонно растёт со временем, а амплитуда плотности тока убывает пропорционально $t^{-1/(2+\alpha)}$. Сказанное подтверждается примерами токораспределения, приведёнными на рис. 3.6 для значений $\alpha = 2$ и 1.

Смещение максимума плотности тока в среде с возрастающей по глубине электропроводностью приводит к более равномерному выделению энергии и к снижению общего уровня джоулевых потерь.

В рассмотренном примере полное энерговыделение за неограниченное время не зависит от координаты и составляет при мгновенном скачке внешнего поля

$$\Delta q'(\infty) = \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2+\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)} 2^{-\frac{\alpha}{2+\alpha}} \ . \qquad (3.44в)$$

В среде с постоянной проводимостью $\Delta q'(0,\infty) = \infty$, а с ростом показателя α величина $\Delta q'(0,\infty)$ уменьшается, приближаясь к предельному значению $\Delta q'(0,\infty) = B_0^2 / (2\mu_0)$ при $\alpha \to \infty$ (рис. 3.6).

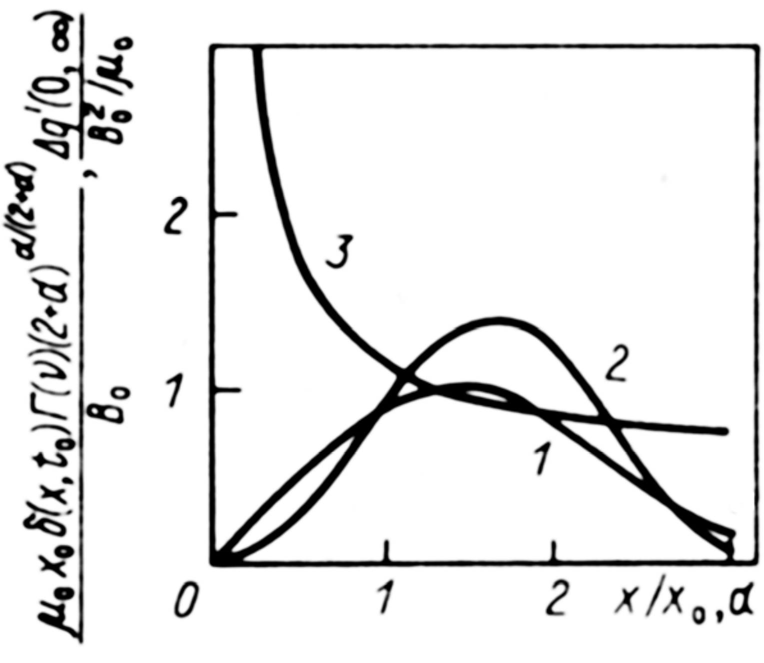


Рис. 3.6. Диффузия поля в среду с проводимостью, возрастающей по степенному закону:
1, ***2*** - распределение плотности тока в момент $t_0 = \mu_0 x_0^2 / \rho_0$
(***1*** - $\alpha = 1$; ***2*** - $\alpha = 2$);
3 - зависимость $\mu_0 \Delta q'(0,\infty) / B_0^2 = f(\alpha)$.

Аналитическое решение можно получить и при экспоненциальной зависимости удельного сопротивления от координаты $\rho = \rho_0 \exp(-x/x_0)$. Если $B(0,t) = B_0$ при $t > 0$, то

$$B(x,t) = B_0 \exp\left[-\frac{\mu_0 x_0^2}{\rho_0 t} \exp\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]; \tag{3.44а}$$

$$\delta(x,t) = \frac{B_0 x_0}{\rho_0 t_2} \exp\left[\frac{x}{x_0} - \frac{\mu_0 x_0^2}{\rho_0 t} \exp\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]; \tag{3.44б}$$

$$\Delta q'(x,t) = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \exp\left[-\frac{2\mu_0 x_0^2}{\rho_0 t} \exp\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]. \tag{3.44в}$$

При $t \to \infty$ $\Delta q'(x,t) \to B_0^2/(2\mu_0)$.

Возможность снижения нагрева в неоднородной среде при синусоидальном изменении внешнего поля ($B_e = B_m \sin(2\pi t/T)$) изучалась численно. Расчёты выполнены для среды с экспоненциальной зависимостью вида $\rho(x) = \rho_\infty + \Delta\rho \exp(-x/d)$, а также для двух- и трёхслойной среды. В первом случае максимальное энерговыделение $\Delta q'_m$ к моменту $t = T/2$ имеет место в глубине проводника. Отношение $\Theta_q = \mu_0 \Delta q'_m (T/2) / B_m^2$ есть функция двух безразмерных параметров $P_1 = \rho_0 T / \left(2\mu_0 d^2\right)$ и $P_2 = \rho_\infty / \Delta\rho$. Как видно из кривых рис. 3.7,а, минимальное значение указанного отношения можно уменьшить от значения 1,09, соответствующего однородной среде ($P_2 >> 1$), до значения, близкого к 0,3 при $P_2 \approx 10^{-2}$, то есть более чем втрое.

В двухслойной среде пространственное распределение объёмной плотности энергии для фиксированной фазы синусоиды определяется двумя параметрами: $P_1 = \rho_1 T / \left(2\mu_0 d^2\right)$ и $P_2 = \rho_2 / \rho_1 < 1$. При заданном P_2 в двух предельных случаях $P_1 = 0$ и $P_1 = \infty$ энерговыделение является таким же, как и в однородной среде, то есть не зависящим от ρ_1 и ρ_2. В первом из этих предельных случаев ток практически не проникает в подложку и сосредоточен в поверхностном слое с удельным сопротивлением ρ_1, а максимум энерговыделения имеет место на границе проводника. Во втором случае ток распределён в подложке, и максимум энерговыделения находится на границе сред. В общем случае функция $\Delta q'(x, T/2)$ имеет два максимума - на обеих границах. Наименьшее энерговыделение при заданном P_2 происходит при некотором значении P_1, когда оба максимума становятся равными между собой (рис. 3.7,б).* Численные расчёты показывают, что абсолютный минимум энерговыделения имеет место при $P_2 \approx 0{,}1 \div 0{,}2$ и $P_1 \approx 10$ и составляет около $0{,}67\, B_m^2 / \mu_0$, что примерно на 40 % меньше, чем для однородного проводника, но существенно больше, чем при экспоненциальном распределении проводимости.

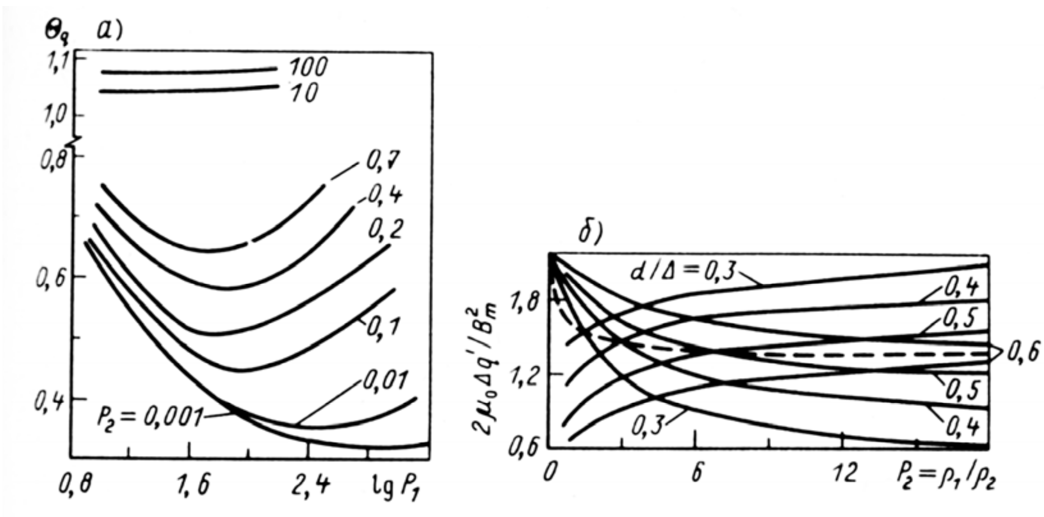


Рис. 3.7. Энерговыделение в двухслойной среде:
а - зависимость максимального энерговыделения для среды, в которой $\rho(x) = \rho(\infty) + \Delta\rho \exp(-x/d)$, от параметра P_1 при различных $P_2 = \rho_\infty / \Delta\rho$;

* На рис. 3.9, б параметром кривых является отношение $d/\Delta = \sqrt{1/P_1}$, где $\Delta = \sqrt{\rho_0 T / (2\mu_0)}$ - глубина проникновения.

б - энерговыделение в момент $t = T/2$ на границе слоёв [рост $\Delta q'(0,\infty) = f(\rho_1/\rho_2)$] и на поверхности (снижение $\Delta q'$) в зависимости от P_2 при различных d/Δ (штриховая кривая - линия оптимума).

Численные расчёты для трёхслойной среды, выполненные Титковым, показали, что и в этой системе наименьшее энерговыделение имеет место при условии его равенства на всех границах раздела и составляет $0{,}54 B_m^2/\mu_0$, при этом $\rho_2/\rho_1 \approx 0{,}35$; $\rho_3/\rho_1 \approx 0{,}1$; $d_1/d_2 \approx 0{,}5$ и $\rho_1 T\left(\mu_0 d_1^2\right) \approx 9$. Здесь $\rho_{1,\,2,\,3}$ - соответственно удельные сопротивления первого, второго слоя и подложки; $d_{1,\,2}$ - толщины первого и второго слоёв.

3.7. Нелинейная диффузии магнитного поля в проводник, нагреваемый вихревым током

Как было отмечено в § 3.1, зависимость удельного сопротивления от приращения энергии в единице объема можно аппроксимировать прямой. Введем характерное магнитное поле B_0, в котором плотность энергии равна $1/\beta$:

$$B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0}{\beta}}\,. \tag{3.45}$$

Для меди характерная индукция равна 42 Т, если параметр β, представленный в табл. 3.1, принимает значение $\beta = \beta_3$. Исходя из качественных соображений можно ожидать, что магнитное поле, монотонно нарастающее во времени, не будет приводить к существенному нагреву проводника, пока индукция меньше B_0. В таком поле сопротивление будет близко к ρ_0. Наоборот, в поле, индукция которого много больше B_0, изменение сопротивления будет существенным. Поэтому параметр B_0 является характерным с точки зрения влияния нелинейных эффектов на диффузию магнитного поля. Нелинейная диффузия сильного магнитного поля изучалась во многих работах (например, [14]). Чтобы обойти математические трудности, которые возникают при решении задачи, будем искать его в виде бегущей волны. Примем, что все характерные физические величины, являющиеся функциями пространственной координаты x и времени, будут зависеть лишь от аргумента $z = x - vt$. Будем считать, что волна, распространяющаяся с постоянной скоростью v, движется в полубесконечной среде, и при $z \to \infty$ выполняются условия $B \to 0$ и $E \to 0$. Решение не будет носить общий характер, а будет соответствовать частному виду граничных условий. В рассматриваемом примере частные производные по времени и координате заменяются производными по переменной z:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{d}{dz}\ , \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dz}.$$

Тогда уравнения (3.5) и (3.6) принимают вид:

$$\frac{dB}{dz} = -\mu_0\delta(z) = -\frac{\mu_0 E(z)}{\rho(z)}; \tag{3.46}$$

$$v\frac{dB}{dz} = \frac{dE}{dz} \tag{3.47}$$

Из уравнения (3.47) и условий при $z \to \infty$ следует простая связь напряженности электрического поля и индукции магнитного поля:

$$E = vB\ . \tag{3.48}$$

Нагрев проводника описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta q') = -v\frac{d}{dz}(\Delta q') = E\delta = -\frac{vB}{\mu_0}\cdot\frac{dB}{dz}.$$

Отсюда следует

$$\Delta q' = \frac{B^2}{2\mu_0}. \tag{3.49}$$

В поле бегущей волны плотность энергии, выделенной в элементе проводника при адиабатическом нагреве, равна плотности энергии магнитного поля. Отсюда, согласно (3.3), находим

$$\rho = \rho_0\left(1 + \beta\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \rho_0\left(1 + \frac{B^2}{B_0{}^2}\right). \tag{3.50}$$

После подстановки E и ρ в уравнение (3.46) получаем уравнение с разделяющимися переменными для B:

$$\frac{1}{B}\left(1 + \frac{B^2}{B_0{}^2}\right)dB = -\frac{\mu_0 v}{\rho_0}dz.$$

Его решение имеет вид

$$\ln B + \frac{B^2}{2B_0{}^2} = -\frac{\mu_0 vz}{\rho_0} + C. \tag{3.51}$$

На поверхности проводника $(x = 0,\ z = -vt)$ в начальный момент имеем $B_\mathrm{e}(t) = B_\mathrm{e}(0)$. Полагая $x = 0$ и $t = 0$, находим постоянную интегрирования: $C = \ln B_\mathrm{e}(0) + B_\mathrm{e}{}^2(0)/2B_0{}^2$. Далее получаем закон изменения индукции, обеспечивающий режим волны с постоянной скоростью:

$$\ln\frac{B_\mathrm{e}(t)}{B_\mathrm{e}(0)} + \frac{B_\mathrm{e}{}^2(t) - B_\mathrm{e}{}^2(0)}{2B_0{}^2} = \frac{\mu_0 v^2 t}{\rho_0}. \tag{3.52}$$

В момент $t = 0$ индукция скачком нарастает до значения $B_\mathrm{e}(0)$. Если $B_\mathrm{e}(0) << B_0$, то после скачка индукция растет экспоненциально, а затем при $B_\mathrm{e} > B_0$ изменяется пропорционально $t^{1/2}$. Эта часть процесса наиболее интересна для изучения диффузии в сильном поле. Таким образом, можно утверждать, что в поле, индукция которого растет по закону

$$B_{\text{e}}(t) = B_0 (t/t_0)^{1/2}, \tag{3.53}$$

и мгновенное значение индукции удовлетворяет условию $B_{\text{e}} > B_0$, волна тока распространяется в проводнике с постоянной скоростью v, которую можно найти из уравнения (3.52), отбросив в левой части все члены, кроме $B_{\text{e}}^2 / 2B_0^2$:

$$v = \sqrt{\frac{\rho_0}{2\mu_0 t_0}}. \tag{3.54}$$

Распределение индукции по глубине можно получить, исключив член $\mu_0 v^2 t / \rho_0$ из (3.51) и (3.52):

$$\ln \frac{B(x,t)}{B_{\text{e}}(t)} + \frac{B^2(x,t) - B_{\text{e}}^2(t)}{2B_0^2} = -\frac{\mu_0 v x}{\rho_0}. \tag{3.55}$$

Как следует из этой формулы, индукция вблизи поверхности убывает по линейному закону, а при $x \to \infty$ убывает по экспоненте $B \approx B_{\text{e}} \exp(-\mu_0 v x / \rho_0)$. Если построить зависимость для $B(x,t)$ для некоторого выбранного момента времени t, то при меньших значениях времени ее легко получить, смещая график влево на отрезок $-vt$. Это следует из вида полученного решения, где все искомые величины зависят от аргумента $z = x - vt$.

Зависимость для плотности тока $\delta(x,t)$ немонотонна (рис. 3.8). Это вытекает из выражения для δ:

$$\delta = \frac{E}{\rho} = \frac{vB}{\rho_0 \left(1 + B^2 / B_0^2\right)}. \tag{3.56}$$

Из равенства (3.56) следует, что при условии $B_e > B_0$ плотность тока имеет максимум в точке, где выполняется равенство $B(x,t) = B_0$. Максимальное значение плотности тока есть

$$\delta_m = \frac{vB_0}{2\rho_0}. \tag{3.57}$$

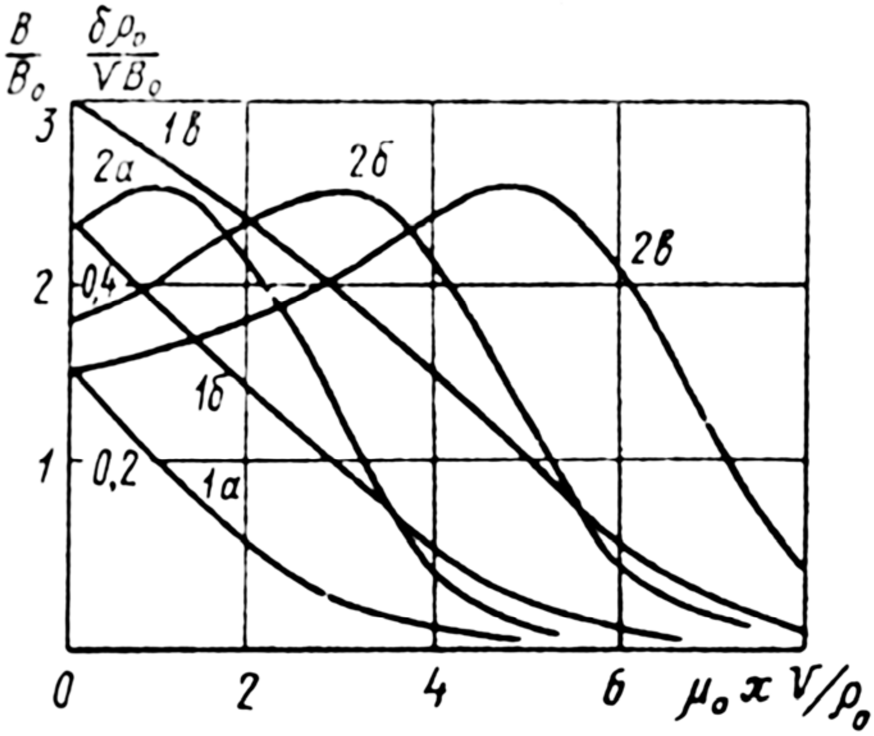


Рис. 3.8. Распределение индукции и плотности тока при диффузии сильного магнитного поля в проводник (модель волны с постоянной фазовой скоростью v):
1 - $B/B_0 = f(\mu_0 xv/\rho_0)$; ***2*** - $\rho_0\delta/(vB) = f(\mu_0 xv/\rho_0)$,
кривые ***а, б*** и ***в*** соответствуют $B_e(t)/B_0$ =1,5; 2,3 и 3,0

Физический смысл немонотонной зависимости $\delta(x)$ состоит в том, что в сильном поле, когда $B_e > B_0$, слои проводника, прилегающие к поверхности, сильно нагреваются, их проводимость падает, и часть тока переходит в более глубокие, холодные слои с высокой проводимостью. Этот процесс конкурирует со скин-эффектом -

вытеснением тока к поверхности под действием вихревого электрического поля. Результатом совместного действия указанных факторов является то, что основная часть тока сосредоточена в области, где $B \approx B_0$. При этом на границе проводника плотность тока падает как $t^{-1/2}$:

$$\delta(0,t) \approx \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \beta t}}. \tag{3.58}$$

Эти закономерности сохраняются и при других законах нарастания внешнего поля. Численные расчеты показывают, что при степенном законе роста внешнего поля $\left(B_\mathrm{e} = \mathrm{const} \cdot t^\alpha\right)$ и при изменении показателя степени в диапазоне $0{,}5 < \alpha < 2$ плотность энергии, выделившейся на поверхности, близка к значению

$$\Delta q'(0,t) = \chi\, B_\mathrm{e}{}^2 \big/ 2\mu_0, \tag{3.58}$$

где число χ меняется в узком диапазоне $1 > \chi > 0{,}83$ для $B_\mathrm{e} \geq 2B_0$. Вместе с тем, для оценки глубины проникновения монотонно нарастающего поля можно и при нелинейной диффузии пользоваться формулой (3.8), где вместо ρ надо подставить $\rho_0\, B^2 \big/ B_0{}^2$:

$$\Delta = \eta \frac{B_\mathrm{e}}{B_0} \sqrt{\frac{\rho_0 t}{\mu_0}}. \tag{3.59}$$

Здесь введена константа порядка единицы η, значение которой зависит от конкретного вида функции $B_\mathrm{e}(t)$ и от того, какое определение принято для величины Δ.

4. СОГЛАСОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОЛЕНОИДОВ И ИСТОЧНИКОВ ПИТАНИЯ

4.1. Общие требования к источнику энергии

При всем многообразии конфигураций соленоидов, применяемых на практике, чаще всего приходится иметь дело с задачей получения поля в фиксированном объеме V_0, где амплитудное значение индукции в некоторой характерной точке достигает величины B_m. Если бы поле в этом объеме было строго однородным и отсутствовало за пределами объема V_0, то энергия магнитного поля, заключенная в этом объеме, была бы равна

$$W_1 = \frac{B_m^{\,2}}{2\mu_0} V_0 .$$

Однако, в действительности поле распределено и за пределами V_0 и, кроме того, оно в пределах этого объема неоднородно. Можно связать полную энергию магнитного поля соленоида в момент максимума тока t_m:

$$W_m(t_m) = \int_V \frac{B_m^{\,2}(t_m)}{2\mu_0} dV$$

и W_1 с помощью безразмерного коэффициента k_1:

$$W_1 = k_1^{\,2} W_m(t_m),$$

где k_1 в общем случае определяется геометрией катушки и зависит от времени. Последнее связано с тем, что в толще обмотки в переменном поле наводятся вихревые токи, пространственное распределение которых меняется во времени. В катушках, толщина витков которых много больше глубины проникновения, и в соленоидах, работающих в условиях резко выраженного поверхностного эффекта, можно считать, что k_1 есть постоянная, определяемая только геометрией магнитной системы. При этом энергия магнитного поля есть

$$W_m = L_c\, i_m^{\,2} \big/ 2,$$

где L_c - индуктивность соленоида. Тогда имеем выражение для амплитудного значения индукции, достигаемого в момент t_m:

$$B_m = k_1 \cdot i_m \sqrt{\frac{\mu_0 L_c}{V_0}}. \tag{4.1}$$

Источник, используемый для питания магнита, должен обеспечить передачу в соленоид энергии $W_m(t_m)$ с учетом потерь в цепи. В установках, где создаются короткие одиночные импульсы поля, энергию, рассеиваемую в сопротивлении обмотки и цепи питания за время разряда (10^{-4} с и менее), не удается отвести с помощью какой-либо системы охлаждения. Такие соленоиды обычно достаточно массивны, вследствие чего нагрев за один импульс достаточно мал. Роль сопротивления проявляется, главным образом, в том, что оно приводит к снижению амплитуды тока, вследствие чего уменьшается амплитуда индукции.

В стационарных системах, где необходимо использовать устройства для отвода энергии, выделившейся в сопротивлении обмотки, основной задачей является снижение мощности потерь при неизменном значении индукции.

Ниже рассмотрены упрощенные задачи, иллюстрирующие подход к выбору оптимальных параметров обоих типов магнитных систем.

4.2. Оптимизация параметров системы соленоид - емкостной накопитель энергии

В идеальном случае энергия, запасаемая в электрическом поле емкостного накопителя $W_E = CU_0^{\,2}/2$ (C - ёмкость батареи, U_0 - начальное напряжение накопителя), без потерь передается в магнитную энергию однородного поля с индукцией B_m, занимающего объем V_0. В этом случае из условия баланса энергии $W_E = W_M = \mu_0 B_m{}^2 V_0 \big/ 2$ можно найти B_m:

$$B_m = U_0 \sqrt{\frac{\mu_0 C}{V_0}}. \tag{4.2}$$

Однако в реальных условиях имеет место иная зависимость:

$$B_m = kU_0 \sqrt{\frac{\mu_0 C}{V_0}}, \tag{4.3}$$

где $k = k_1 k_2$. Коэффициент k_1, зависящий лишь от геометрии соленоида, был введен ранее. Используя (4.1), находим:

$$k_2 = \frac{i_m}{U_0} \sqrt{\frac{L_C}{C}}. \tag{4.4}$$

Таким образом, коэффициент k_2 есть отношение амплитуды тока к ее расчетному значению. Оно соответствует идеальным условиям разряда, когда индуктивность источника и соединительных элементов равна нулю и отсутствуют потери энергии во всей цепи.

Задача оптимизации состоит в таком выборе конструктивных параметров соленоида, чтобы коэффициент k_2 имел наибольшее значение.

Покажем возможность такой оптимизации на простом примере, предполагая, что обмотка соленоида имеет фиксированные размеры продольного сечения, а изменяется лишь число витков w за счет изменения сечения обмоточной проволоки. Тогда индуктивность соленоида $L_C \approx L_1 w^2$, а сопротивление (в предположении равномерного распределения тока по сечению) $R_C \approx R_1 w^2$, где L_1 и R_1 - постоянные. Учитывая собственную индуктивность накопителя, которая вместе с индуктивностью соединительных проводников есть L_0, запишем k_2, воспользовавшись известным выражением для амплитуды тока в контуре $L-R-C$ при колебательном режиме разряда:

$$k_2 = \sqrt{\frac{L_1 w^2}{L_2 w^2 + L_0}} \exp\left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \arcsin\sqrt{1-\xi^2}\right], \qquad (4.5)$$

где $\xi = R_1 w^2 \left[C \big/ \left(L_1 w^2 + L_0\right)\right]^{1/2} \big/ 2 < 1$. Здесь мы предполагаем, что сопротивление обмотки R_C много больше, чем сопротивление остальных элементов цепи. Первый из сомножителей в формуле (4.5) (коэффициент использования η) характеризует эффективность перехода энергии из накопителя в нагрузку при отсутствии активного сопротивления цепи. Этот сомножитель монотонно растет с ростом w. Своё наименьшее значение он принимает, когда $w=1$, при этом $\eta = \sqrt{L_1/(L_1+L_0)}$. При росте w показатель экспоненты начинает расти пропорционально w. Поэтому в цепи с $L_1 << L_0$ следует наращивать число витков для роста k_2, но лишь до тех пор, пока из-за роста сопротивления не начнёт сказываться влияние экспоненциального сомножителя. Для соленоидов с $L_1 << L_0$ существует оптимальное число витков w_m, при котором k_2 становится наибольшим (рис. 4.1).

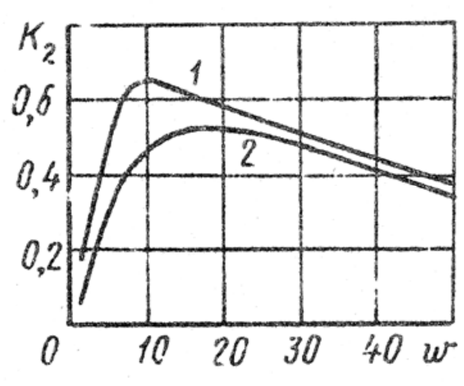


Рис. 4.1. Примеры зависимости коэффициента использования k_2 от числа витков:

1 - $L_0 = 1$ мкГн, $L_1 = 0{,}02$ мкГн, $C = 3 \cdot 10^{-3}$ Ф, $R_1 = 10^{-4}$ Ом;

2 - $L_0 = 5$ мкГн, остальные параметры те же

Высокая эффективность использования энергии накопителя может иметь место и у одновитковых катушек $(w=1)$, однако, лишь при условии, что индуктивность источника питания меньше индуктивности магнита. Поэтому применение одновитковых катушек ставит жесткие требования к конструкции емкостных накопителей, либо требуется применение понижающих трансформаторов для увеличения эффективности передачи энергии накопителя в нагрузку. Приведенные на сторону нагрузки параметры источника энергии имеют вид:

$$U_0 = U_{\text{н}}/n, \qquad L_0 = L_{\text{н}}/n^2, \qquad C = C_{\text{н}}n^2,$$

где n - коэффициент трансформации, $U_{\text{н}}$, $L_{\text{н}}$, $C_{\text{н}}$ - параметры накопителя. При этом первый сомножитель в формуле (4.5) для одновиткового магнита с трансформатором принимает вид $\eta = \sqrt{L_1 n^2 / (L_1 n^2 + L_0)}$. Использование понижающего трансформатора в некотором смысле эквивалентно переходу к многовитковой катушке с числом витков n, что приводит к росту коэффициента использования. Однако и трансформатор привносит как сопротивление, так и индуктивность в цепь разряда. Кроме того, амплитуда индукции в нагрузке снижается из-за неидеальной связи между обмотками. Поэтому схема с трансформатором также требует оптимизации в каждом конкретном случае.

Задача согласования параметров соленоида и емкостного накопителя становится иной в тех случаях, когда требуется обеспечить наибольшую скорость нарастания индукции в соленоиде $(dB/dt)_0$. Если, пренебрегая краевым эффектом, принять поле однородным в сечении соленоида S_C, то нетрудно связать начальное напряжение конденсаторной батареи и начальную скорость нарастания индукции:

$$\frac{U_0 L_C}{L_C + L_0} = \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_0 = wS_C\left(\frac{dB}{dt}\right)_0,$$

где Ψ - потокосцепление, w - число витков. Предполагая, как и раньше, что $L_C = w^2 L_1$, находим:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right) = \frac{U_0}{S_C} \cdot \frac{L_1 w}{L_0 + L_1 w^2}. \tag{4.6}$$

При условии $L_1 << L_0$ зависимость для $(dB/dt)_0$ имеет максимум, когда $w = \sqrt{L_0/L_1}$. Если же $L_1 \le L_0$, то наибольшая начальная скорость изменения индукции имеет место в одновитковой катушке. Это обстоятельство обусловило применение одновитковых магнитов и малоиндуктивных конденсаторных батарей в опытах по нагреву плазмы при мощных азимутальных разрядах (тэта-пинчи) и в экспериментах по получению сверхсильных магнитных полей.

4.3. Оптимизация соленоидов по Фабри

Классической является задача оптимизации многовиткового соленоида, работающего в стационарном режиме, по условиям минимума потерь в обмотке при заданной индукции (задача Фабри). Будем исходить из известного выражения для индукции в центре многовиткового соленоид

$$B_C = \frac{\mu_0}{2} \int_S \frac{\delta r^2 dS(r,z)}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}, \tag{4.7}$$

где r и z — цилиндрические координаты точки, в которой плотность тока равна δ; S — продольное сечение обмотки. Примем допущение, что в ток непрерывно распределен по сечению обмотки. В действительности проводники занимают лишь часть сечения, поскольку имеются изоляционные прослойки между ними. Это обстоятельство следует в дальнейшем учитывать с помощью коэффициента заполнения $\lambda = dS_0/dS$, где dS_0 - часть элемента сечения dS, приходящаяся на проводники. Усредненная плотность тока δ, фигурирующая в формуле (4.7), связана с плотностью тока в проводниках δ_0 соотношением $\delta_0 = \delta dS/dS_0$. Перейдем в формуле (4.7) к безразмерным величинам, зависящим лишь от геометрической формы катушки и вида относительного распределения тока в ней:

$$B_C = \frac{\mu_0 \lambda r_0 \delta_{0m}}{2} \int_S \frac{(r')^2 \delta_0' dr'dz'}{\left[(r')^2 + (z')^2\right]^{3/2}}, \tag{4.8}$$

где введены минимальный внутренний радиус соленоида r_0, максимальная плотность тока в проводнике δ_{0m} и относительные величины $r' = r/r_0$, $z' = z/z_0$, $\delta' = \delta_0/\delta_{0m}$, а параметр λ для упрощения задачи считается постоянным по всему сечению обмотки. Запишем далее выражение для мощности, которая выделяется в сопротивлении обмотки и отводится при ее охлаждении:

$$P = \int_S R(r,z)(di)^2 = \int_S 2\pi r\rho\delta_0{}^2 dS_0(r,z) = 2\pi(\delta_{0m})^2 \rho\lambda r_0{}^2 \int_{S'} \left(\delta_0{}'\right)^2 r'dr'dz'. \tag{4.9}$$

Исключая δ_{0m}, получаем выражение для индукции:

$$B_C = \mu_0 G \sqrt{\frac{\lambda P}{\rho r_0}}, \tag{4.10}$$

в котором фигурирует безразмерный параметр - фактор Фабри

$$G = \int_{S'} \frac{(r')^2 \delta_0' dr'dz'}{\left[(r')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \left[2\pi \int_{S'} \left(\delta_0{}'\right) r'dr'dz'\right]^{-1/2}. \tag{4.11}$$

Его численное значение зависит только от формы сечения соленоида и относительного распределения тока в нем. При неизменной мощности P и фиксированных значениях параметров ρ, r_0 и λ поле тем сильнее, чем больше G. Следовательно, оптимизация магнитной системы в рамках данной задачи состоит в нахождении такой геометрической формы соленоида и такого распределения тока, чтобы параметр G был наибольшим. Для этого можно воспользоваться численными расчетами. Приведем результаты вычислений [10]. В соленоиде прямоугольного сечения при постоянной плотности тока $\left(\delta_0' = 1\right)$ величина G зависит от параметров $\alpha = R_2/R_1$ и $\beta = l/2R_1$, где l - длина, $R_{1,2}$ - внутренний и внешний радиусы соленоида (рис. 4.2). Максимальное значение $G_m \approx 0{,}142$ имеет место, когда $\alpha \approx 3$ и $\beta \approx 2$. Более выгодно распределение тока вида $\delta_0' = 1/r'$; при этом $G_m = 0{,}166$, что достигается при $\alpha \approx 6$, $\beta \approx 2$. Ещё большее значение G_m можно получить, если в соленоиде прямоугольного сечения принять зависимость для плотности тока вида $\delta_0' = (1/r')\left[(1+\beta)/\left(r'^2 + \beta^2\right)\right]^{-1/2}$.

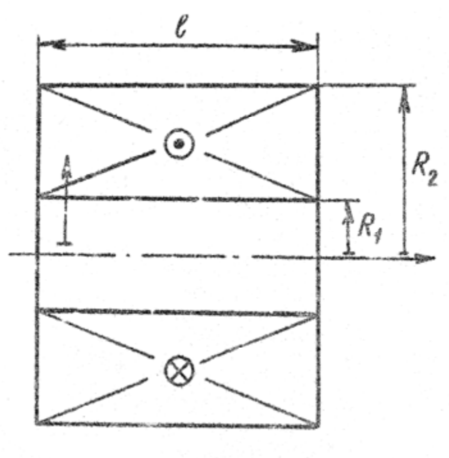


Рис. 4.2. Соленоид прямоугольного сечения

В этом случае плотность тока при малых значениях r' падает, как, а при больших значениях r' - как $(r')^{-2}$. В этом случае максимальное значение фактора Фабри есть $G_m = 0{,}180$. Оно имеет место в соленоиде, у которого вы полнены условия $R_2 >> R_1$ $(\alpha = \infty)$ и $\beta \approx 2$.

Аналогичная оптимизация может быть проведена для соленоида трапецеидального или других форм сечения. Вместе с тем, представляет интерес вопрос о наибольшем возможном значении индукции с заданной мощностью потерь, при фиксированных параметрах λ, r_0, δ_{0m} и при соответствующем распределении тока, найденном в предположении, что ток распределен непрерывно в неограниченной области (задача Кельвина). Иначе говоря, следует решить вариационную задачу о нахождении такой функции $\delta_0'(r',z')$, которая обеспечивает минимум функционала (4.9) при дополнительном условии (4.8). Решая задачу по методу Лагранжа, составляем функционал:

$$F = \int_{S'} \left[\xi \frac{\delta_0' r'^2}{\left[(r')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} + \left(\delta_0'\right)^2 r' \right] \cdot dS',$$

где ξ - неопределенный множитель. Далее имеем условие, когда частная производная подынтегрального выражения по δ_0' обращается в нуль:

$$\frac{\xi (r')^2}{\left[(r')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} + 2\delta_0' r' = 0.$$

Отсюда находим зависимость для плотности тока:

$$\delta_0' = \frac{-\xi r'}{2\left[(r')^2 + (z')^2\right]^{3/2}}.$$

Константа $\xi = -2$, если принять, что в точке $r' = 1$, $z' = 0$, $\delta_0' = 1$, следовательно, относительное распределение тока имеет вид:

$$\delta_0' = \frac{r'}{\left[(r')^2 + (z')^2\right]^{3/2}}. \qquad (4.12)$$

При этом $G_m = 0{,}217$. Соленоид Кельвина с распределением тока вида (4.12) обеспечивает наибольшее поле при заданной рассеиваемой мощности, однако, реализация такого распределения тока затруднительна - обмотка должна быть распределена непрерывно по всему пространству; при этом плотность тока неограниченно растет в точке $r' = 0$, $z' = 0$. Упрощение конструкции соленоида достигается за счет снижения фактора Фабри G. При этом переход от “идеальной” конструкции к соленоиду прямоугольного сечения с $\delta_0' = \mathrm{const}$ приводит к снижению G_m от значения 0,217 до 0,142, то есть примерно в 1,5 раза.

4.4. Преобразования энергии в цепи с переменной индуктивностью

Наряду с задачей передачи энергии накопителя в магнитное поле катушки весьма актуальна проблема трансформации энергии поля в кинетическую энергию тела, ускоряемого электромагнитными силами. Примерами являются установки для метания проводящих тел, для их деформирования, системы, используемые для ускорения плазмы. Здесь мы анализируем только энергетические аспекты процесса ускорения, используя упрощённую «электротехническую» модель ускорителя (рельсотрона) для его описания. В этой модели тело массой m перемещается под действием электромагнитных сил. В общем случае ускоритель можно рассматривать как элемент электрической цепи с переменной индуктивностью, подключённый к источнику энергии (рис. 4.3).

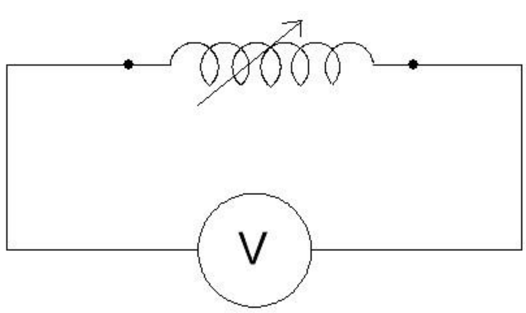


Рис. 4.3. Элемент электрической цепи с переменной индуктивностью, используемый для анализа энергетического баланса магнитных систем

Мощность, передаваемая от источника, есть

$$P = iU = i(d\psi/dt), \tag{4.13}$$

где U - напряжение на входе, i - ток в цепи, ψ - потокосцепление; $\psi = Li$, L - индуктивность данного элемента цепи. Можно преобразовать эту формулу:

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dt}. \tag{4.14}$$

Здесь $Li^2/2$ - энергия магнитного поля. Таким образом, можно считать, что подводимая энергия преобразуется в энергию магнитного поля и в другую форму энергии, например, - в кинетическую энергию тела.

Действительно, член $(i^2/2)(dL/dt)$ можно представить как произведение силы $(i^2/2)(dL/dx)$ на скорость тела $u = dx/dt$. Тогда их произведение есть мощность, которая расходуется при ускорении.

Рассмотрим некоторые частные случаи преобразования энергии при изменении индуктивности.

1. ***Постоянный ток в элементе цепи с переменной индуктивностью***.

В этом примере $i = i_0 = \text{const}$, и оба слагаемые в формуле (4.14) одинаковы.

Работа, совершаемая за конечный промежуток времени, равна приращению энергии магнитного поля:

$$\Delta A = \frac{i_0^2}{2}\Delta L = \Delta W_\text{м} = \frac{1}{2}\Delta W. \tag{4.15}$$

Здесь $\Delta W = \Delta A + \Delta W_\text{м}$ - полная энергия, переданная в устройство, используемое для ускорения тела. Коэффициент полезного действия $\eta = \Delta A/\Delta W$ при постоянном токе равен 0,5.

2. ***Преобразования энергии в короткозамкнутой катушке с переменной индуктивностью***.

При отсутствии потерь в короткозамкнутой катушке с постоянной индуктивностью сохраняется энергия магнитного поля. Такая система является индуктивным накопителем энергии. В рассматриваемой схеме этому случаю соответствует условие $U = 0$. В системе с переменной индуктивностью при этом условии также сохраняется энергия, но может происходить переход энергии магнитного поля в кинетическую энергию тела, либо может иметь место обратный процесс.

Первая схема описывает работу индуктивного накопителя в качестве источника питания системы ускорения тела. Вторая схема описывает передачу энергии накопителю при торможении проводящего тела электромагнитными силами. По этой схеме работают взрывомагнитные генераторы. В них взрыв используется для ускорения проводника, который передает кинетическую энергию полю.

Из условия $U = 0$ следует постоянство полного магнитного потока ($\psi = \psi_0 = \text{const}$) и энергии $W = W_0$. Мгновенное значение тока определяется по формуле $i(t) = \psi_0 / L(t)$, где $L(t)$ - мгновенное значение индуктивности. Пусть индуктивность изменилась от начального значения $L(t_1)$ до конечного $L(t_2)$. Тогда изменение кинетической энергии, согласно (4.15), составит

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{i^2}{2} dL = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\psi_0^2 dt}{2L^2(t)} = \frac{\psi_0^2}{2}\left(\frac{1}{L(t_1)} - \frac{1}{L(t_2)}\right). \qquad (4.16)$$

Суммарная энергия сохраняется, поэтому изменение энергии магнитного поля $\Delta W_{\text{м}} = -\Delta A$. Величина ΔA положительна, если индуктивность возрастает ($L(t_2) > L(t_1)$). В этом случае энергия поля переходит в кинетическую. При уменьшении индуктивности магнитная энергия возрастает, а тело при этом испытывает торможение, и его кинетическая энергия падает.

Коэффициент полезного действия ускоряющей системы можно определить по формуле

$$\eta = \frac{\Delta A}{W_0} = 1 - \frac{L(t_1)}{L(t_2)}, \tag{4.17}$$

если принять, что в начальный момент $(t = t_1)$ тело покоилось, и вся энергия заключалась в магнитном поле накопителя $W_0 = \psi_0^2 / (2L(t_1))$.

Из формулы (4.17) видно, что при условии $L(t_2) >> L(t_1)$ эффективность преобразования энергии магнитного поля в кинетическую в цепи без потерь может быть весьма высока.

3. Рельсотрон с питанием от емкостного накопителя энергии.

В этом разделе рассматриваются переходные процессы в рельсотроне - наиболее простом устройстве, используемом для ускорения проводников электромагнитными силами. Дальнейший анализ не выходит за пределы электротехнической модели, в рамках которой рассматривается движение тела с постоянной массой вдоль параллельных проводников. Для описания процесса ускорения используется схема, представленная на рис. 4.4.

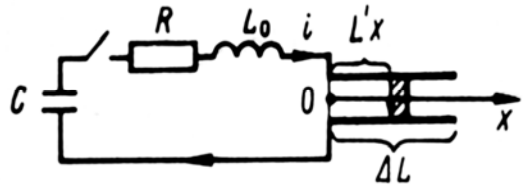


Рис. 4.4. Схема ускорения проводящего тела в цепи с линейно меняющейся индуктивностью (электротехническая модель рельсотрона), L' - погонная индуктивность

Наиболее важным вопросом, возникающим при анализе работы цепи устройства для ускорения проводящего тела, является выбор его параметров (ёмкости C, начальной индуктивности L_0, активного сопротивления цепи R, массы ускоряемого тела m, зависимости индуктивности $L(x)$ от координаты тела), обеспечивающий эффективный переход энергии конденсаторной батареи в кинетическую энергию ускоряемого тела. Впервые подобная задача рассмотрена в работе Л.А. Арцимовича и его коллег в 1957 году. Далее электротехническая модель рельсотрона широко использовалась при описании процессов в устройствах для ускорения плазменных сгустков и твёрдых проводников электромагнитными силами. Линхартом исследован предельный режим медленного изменения индуктивности в колебательном контуре с $R = 0$, когда относительная скорость изменения частоты колебаний тока много меньше самой частоты (адиабатический режим). В этом случае работа электромагнитных сил на участке, где индуктивность получает приращение δL, есть

$$\delta A = \frac{1}{2}\int_{L}^{L+\delta L} i^2(t)dL \approx \frac{1}{4} i_m^2(L)\delta L. \tag{4.18}$$

Здесь L - мгновенное значение индуктивности, i - ток в цепи. При интегрировании учитывается вклад лишь от медленно меняющейся составляющей i^2 и отбрасывается вклад от знакопеременной составляющей i^2. Поскольку

$$A = W_0 - \frac{1}{2} L i_m^2, \tag{4.19}$$

где W_0 - начальная энергия батареи, то в пределе малых приращений, заменяя δL на dL, получаем дифференциальное уравнение для A:

$$\frac{dA}{dL} = \frac{W_0 - A}{2L}. \tag{4.20}$$

Далее находим КПД ускорителя:

$$\eta = \frac{A}{W_0} = 1 - \sqrt{\frac{L_0}{L_0 + \Delta L}}\,. \qquad (4.21)$$

В общем случае простого $R-L-C$-контура движение тела массы m, ускоряемого электромагнитными силами, при перемещении вдоль координаты x определяется уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dx}, \qquad (4.22)$$

где i - ток в цепи, L - индуктивность системы.

Уравнение электрической цепи с резистором R и ёмкостью C представим в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}(Li) + R\frac{di}{dt} + Ci = 0, \qquad (4.23)$$

где $L = L_0 + L(x)$ - индуктивность цепи. Она включает в себе начальную индуктивность L_0 и приращение индуктивности $L(x)$, вызванное смещением тела на расстояние x. Ограничимся далее простейшим случаем, когда $L(x)$ изменяется пропорционально перемещению тела: $L = L'x$, где $L' = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (4.23) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}((L_0 + L'x)i) + R\frac{di}{dt} + Ci = 0. \qquad (4.24)$$

Начальными условиями для системы уравнений (4.22) и (4.24) являются: $i(0) = 0$, $di/dt(0) = U_0/L_0$, $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 0$. Здесь U_0 - начальное напряжение конденсатора.

Последнее условие означает, что тело в начальный момент неподвижно. В рассматриваемой системе двух уравнений второго порядка фигурируют шесть параметров: U_0, C, L_0, L', R, m. К ним следует добавить ещё параметр ΔL - приращение индуктивности на участке ускорения: $\Delta L = l/L'$, где l - длина ускорителя. Процесс ускорения заканчивается в момент t_0, когда индуктивность достигает значения $L = L_0 + \Delta L$. В некоторых случаях можно принимать условие $\Delta L = \infty$. Это имеет смысл, если конденсаторная батарея разряжается полностью раньше, чем тело покидает участок ускорения длиной l.

Решение представленной системы для каждого набора параметров не представляет большой трудности, если использовать стандартные компьютерные программы. Более сложными являются расчёты при широкой вариации параметров с целью выбора оптимальных режимов. Примером может быть изучение условий достижения максимального КПД ускорителя. Подробный анализ этого вопроса содержится в книге [23]. Рациональной методикой исследования является численный расчёт большого числа вариантов для широкого диапазона изменения параметров в сочетании с компактным представлением результатов и аналитическим исследованием асимптотических режимов. Для этой цели целесообразно перейти к безразмерным переменным и тем самым уменьшить число варьируемых параметров.

Введём базисную индуктивность $L_Б$, базисное время $t_Б = \sqrt{L_Б C}$ и базисную длину $x_Б = L_Б/L'$ и новые переменные $\tau = t/t_Б$, $y = x/x_Б$ и $z = i\sqrt{L_Б}/\left(U_0\sqrt{C}\right)$. После этого уравнение (4.24) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\left(\frac{L_0}{L_Б} + y\right)z\right) + \rho\frac{dz}{d\tau} + z = 0, \qquad (4.25)$$

где $\rho = R\sqrt{C/L_Б}$. При этом начальные условия для тока принимают вид: $z(0) = 0$, $(dz/d\tau)_0 = L_Б/L_0$. Преобразуется также уравнение движения:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = gz^2, \qquad (4.26)$$

где $g=\dfrac{\left(CU_0L'\right)^2}{2mL_{Б}}$. В итоге выполненных преобразований получаем два нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка, решение которых определяется тремя параметрами: $L_0/L_{Б}$, ρ, g. При этом остаётся свобода выбора базисной индуктивности $L_{Б}$.

Целесообразно вначале рассмотреть такие режимы ускорения, когда потери энергии в резисторе R относительно малы, и можно положить $\rho=0$. Тогда решение определяется всего двумя параметрами. Расчёт большого количества вариантов позволяет построить зависимости для параметра $\eta=m\left(dx/dt\right)^2_{t_0}\Big/\left(CU_0^2\right)$. Этот параметр (КПД ускорителя) есть отношение кинетической энергии в конце пути ускорения к начальной энергии емкостного накопителя. Результаты расчетов большого числа вариантов представлены на рис. 4.5. В качестве параметра $L_{Б}$ выбрано значение $L_{Б}=\Delta L$. При этом g принимает значение $g=k=\left(CU_0L'\right)^2\Big/\left(2m\Delta L\right)$.

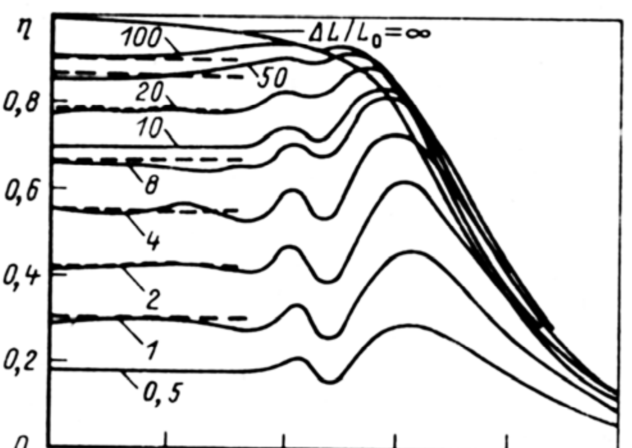


Рис. 4.5. КПД ускорения в контуре без потерь

При малых k КПД в соответствии с формулой (4.22), практически не зависит от k (штриховые линии на рис. 4.5). В этой области параметров ток разряда носит характер колебаний с затухающей амплитудой, и перемещение тела происходит за время нескольких периодов колебаний тока (рис. 4.6). Характерно, что рост η в области $k << 1$ носит немонотонный характер: на кривой $\eta(k)$ имеются небольшие местные экстремумы. Это связано с тем, что набор скорости при колебательном разряде идёт толчками, из-за чего более тяжёлое тело может к концу пути ускорения испытать воздействие большего числа полупериодов тока и получить несколько большую энергию, хотя основная тенденция в области $k < 1$ - это рост КПД с уменьшением начальной индуктивности.

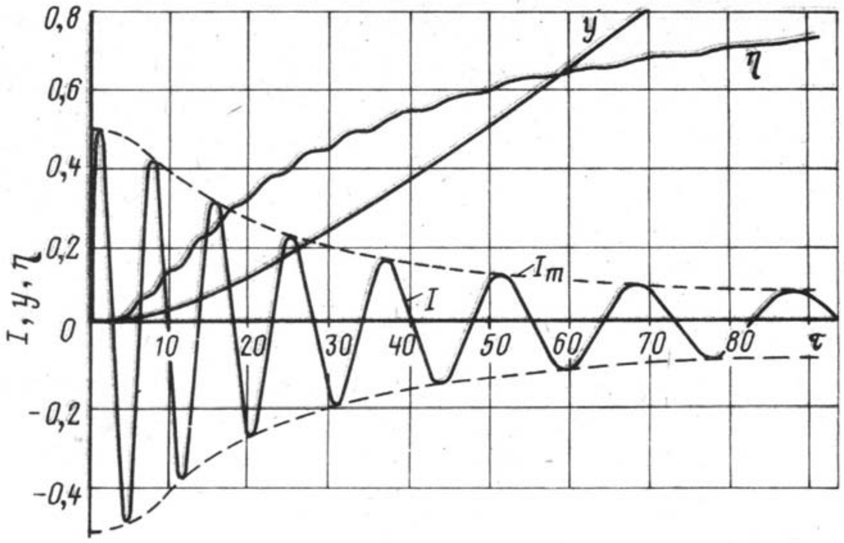


Рис. 4.6. Безразмерные координата тела $y = xL'/L_0$,
кинетическая энергия $\eta = m(dx/dt)^2/CU_0^2$ и ток $I = (i\sqrt{C/L_0})/U_0$,
построенные в зависимости от безразмерного времени $\tau = t/\sqrt{L_0C}$
для случая ускорения тела большой массы
(параметр $(CU_0L')^2/(2mL_0) = 0.016$)

По мере роста k (уменьшения массы тела) разгон на участке Δx происходит за всё меньшее число периодов. В области значений параметра k порядка единицы КПД достигает максимума, а затем убывает. Для оптимального преобразования энергии конденсаторной батареи в энергию ускоряемого тела в системе с линейно изменяющейся индуктивностью следует выполнить условие $k = \left(L'CU_0\right)^2 / \left(2m\Delta L\right) = 1 \div 2$. При этом ускорение тела происходит в основном в течение первой полуволны изменения тока в контуре разряда, как это показано на рис. 4.7.

Область больших значений параметра k соответствует телам малой массы. В этой области КПД убывает из-за того, что лёгкие тела достигают заданного изменения индуктивности прежде, чем конденсатор успевает разрядиться. Поэтому значительная часть его энергии за время ускорения не успевает перейти в энергию магнитного поля, а затем в кинетическую энергию ускоряемого тела.

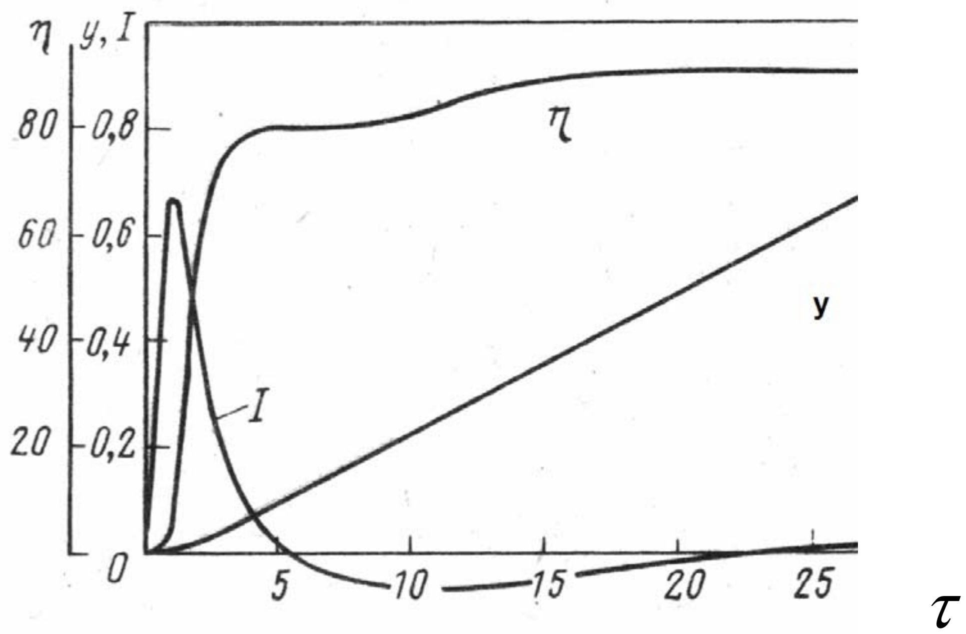


Рис. 4.7. Зависимости, характеризующие ускорение лёгкого тела. $(CU_0L')^2/(2mL_0) = 4{,}1$. Обозначения те же, что на рис. 4.6.

Максимальное значение КПД зависит от отношения начальной индуктивности L_0 ее изменению на участке ускорения ΔL. Эта зависимость достаточно слабая. Так, при $k = 2$ уменьшению $L_0/\Delta L$ от 0,3 до 0 соответствует изменение η от 0,66 до 0,75. Поэтому при разработке генераторов, предназначенных для ускорения проводников, нет необходимости стремиться к чрезмерному уменьшению их собственной (паразитной) индуктивности.

Рис. 4.5 показывает, что в области $k >> 1$ кривые $\eta = f(k, \Delta L / L_0)$ сближаются при $\Delta L / L_0 >> 1$. Предельный случай $\Delta L / L_0 = \infty$ при условии $k >> 1$ может быть рассчитан в предположении, что напряжение источника сохраняется постоянным во время движения лёгкого тела. В этом случае ток изменяется в соответствии с зависимостью $i(t) = U_0 t / L = U_0 t /(L' x)$. Используя формулу (4.22), получаем:

$$x(t) = \left(\frac{9U_0^2 t^4}{8mL'}\right)^{1/3}; \quad i(t) = \left(\frac{8U_0 m}{9L'^2 t}\right)^{1/3} \tag{4.27}$$

При этом находим асимптотическое значение КПД:

$$\lim \eta \big|_{\Delta L / L_0 \to \infty, k \to \infty} = \frac{4}{3\sqrt{k}}. \tag{4.28}$$

Для другого предельного режима движения лёгкого тела ($k >> 1$), когда $\Delta L << L_0$, можно найти η, принимая, что ток нарастает по линейному закону $i = (U_0 / L_0)t$:

$$\lim \eta \big|_{\Delta L / L_0 \to 0, k \to \infty} = \frac{4\Delta L}{\sqrt{3k} L_0}. \tag{4.29}$$

При ускорении тяжёлых тел активное сопротивление приводит к резкому снижению КПД. Для анализа режимов ускорения тел в цепи с потерями целесообразно выбрать $L_Б = L_0$. В таком случае параметр g принимает значение $g = q = (CU_0 L')^2 / (2mL_0)$. Анализ результатов расчётов, выполненных в широком диапазоне изменения безразмерного параметра $\rho = R\left(C/L_0\right)^{1/2}$, показывает, что максимальное значение КПД и ход зависимости $\eta = f\left(q, \Delta L / L_0\right)$ в области больших значений параметра q мало чувствительны к наличию потерь в контуре, если $\rho \leq 0{,}1$. Однако, в области «медленных режимов» ($q \leq 1$) влияние параметра ρ весьма существенно. Из кривых рис. 4.8 видно, что при фиксированном значении этого параметра зависимости $\eta = f\left(\rho, q, \Delta L / L_0\right)$, построенные для разных значений $\Delta L/L_0$, сливаются при уменьшении q. Физический смысл здесь вполне ясен: при разгоне тяжёлого тела ток в цепи затухает из-за потерь в сопротивлении раньше, чем тело выйдет за пределы участка разгона, поэтому кинетическая энергия не зависит от ΔL. Очевидно, что процесс в этом случае определяется теми же соотношениями, что и в случае ускорения тела в рельсотроне неограниченной длины ($\Delta L / L_0 \to \infty$).

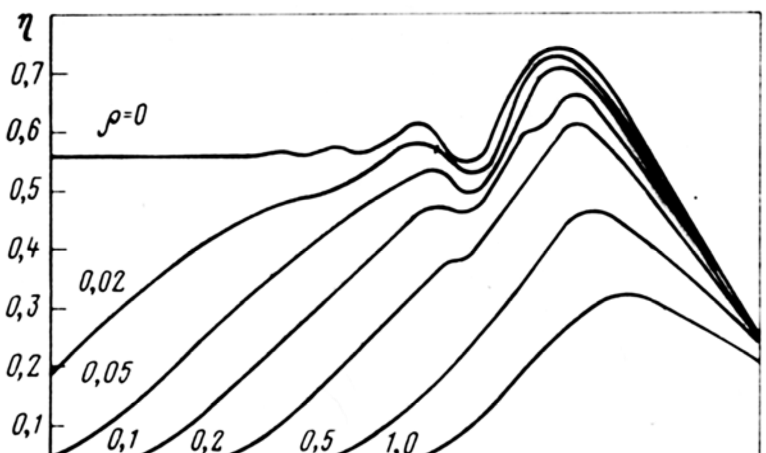


Рис. 4.8. КПД ускорения в контуре с потерями, $\Delta L/L_0 = 0.2$.

При отсутствии активных сопротивлений КПД такого рельсотрона равен единице. В цепи с сопротивлением R потери нём W_R, а также кинетическая энергия в конце разгона W_k, зависят от аргумента $\int\limits_0^\infty i^2 dt$:

$$W_k = \left(L' \int\limits_0^\infty i^2 dt \right)^2 \Big/ (8m); \qquad W_R = R \int\limits_0^\infty i^2 dt \,. \tag{4.30}$$

Поскольку $W_0 = W_k + W_R$, получаем следующее уравнение для η (в безразмерном виде): $\eta + 2(2\eta/q')^{1/2} - 1 = 0$. Отсюда, как показано Беляевой,

$$\eta = \frac{2\rho^2}{q} \left(\sqrt{1 + \frac{q}{2\rho^2}} - 1 \right)^2 . \tag{4.31}$$

При $q \to 0$ предел этого выражения равен $\eta = q/(8\rho^2)$. Это есть асимптота кривых $\eta = f(\rho, \Delta L / L_0, q)$ при $q \to 0$ (рис. 4.8).

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СИЛЫ И МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СОЛЕНОИДАХ

5.1. Усилия, возникающие в тонкостенном витке в магнитном поле

Рассмотрим элемент обмотки соленоида в виде витка длиной l, толщина h которого много меньше радиуса r. Предположим далее, что виток находится в равновесии в результате совместного действия электромагнитных сил и растягивающих (азимутальных) напряжений. Действием радиальных напряжений пренебрегаем, что допустимо, если виток механически не взаимодействует с другими слоями обмотки. Последнее может иметь место в случае, когда слои обмотки разделены зазорами или когда в монолитной обмотке отсутствуют радиальные напряжения благодаря соответствующему выбору распределения объемных электромагнитных сил.

Запишем условия равновесия элемента обмотки в виде замкнутого однородного кольца (рис. 5.1) с равномерно распределенным азимутальным током. На единицу поверхности проводника действует радиальная сила f_r, являющаяся равнодействующей электромагнитных сил, а в азимутальном направлении в каждом сечении действуют силы $\sigma_\varphi hl$. Проектируя силы на ось симметрии, приходим к уравнению равновесия:

$$lf_r r d\varphi - \sigma_\varphi hld\varphi = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\sigma_\varphi = \frac{r}{h} f_r.$$

Следует отметить, что силы инерции здесь не учтены, то есть рассматривается статическая задача. Это справедливо для импульсных магнитных полей, если характерная длительность импульса много больше периода собственных механических колебаний магнитной системы.

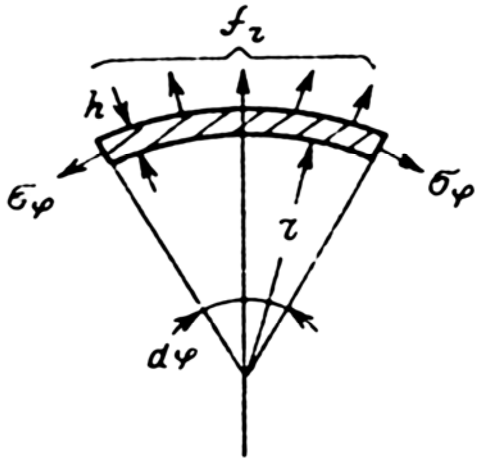


Рис. 5.1. К расчёту равновесия элемента тонкой обмотки

Если осевые составляющие индукции магнитного поля внутри и снаружи слоя составляют B_1 и e_2, то

$$f_r = \frac{{B_1}^2 - {B_2}^2}{2\mu_0} = \frac{B_1 + B_2}{2} i',$$

где i' - ток, приходящийся на единицу длины системы. Примем условие, что индукция в слое h мало отличается от своего среднего значения $(B_1 + B_2)/2 \approx B_z(r)$. Тогда

$$\sigma_\varphi \approx rB_z(r)\frac{i'}{h} = rB_z(r)\delta_\varphi, \tag{5.1}$$

где δ_φ - плотность тока в проводнике [10, 11].

Аналогичную формулу можно получить для неоднородного кольца толщиной h, состоящего из проводящего слоя толщиной h_1 и дополнительного цилиндра (бандажа) толщиной h_2, воспринимающего нагрузку и увеличивающего прочность конструкции. При этом $h = h_1 + h_2$. Будем считать, что бандаж выполнен из высокопрочного диэлектрика (например, это стеклоэпоксидный компаунд) или из металла. Во втором случае в бандаже имеется радиальный разрез, края которого закреплены. В обоих вариантах исполнения бандажа ток в нем отсутствует. Примем далее, что оба кольца деформируются упруго. Тогда из условия равенства их относительных деформаций находим $\sigma_1 / E_1 = \sigma_2 / E_2$, где $\sigma_{1,2}$ - азимутальные напряжения, а $E_{1,2}$ - модули упругости материала каждого из колец. Запишем условия равновесия для витка:

$$rf_r = \sigma_1 h_1 + \sigma_2 h_2 .$$

Дальнейшие расчеты дают выражения для напряжений в каждом слое:

$$\sigma_{1,2} = \frac{rf_r E_{1,2}}{h_1 E_1 + h_2 E_2} = rB_z(r)\delta_\varphi \kappa_{1,2} ,$$

где:

$\kappa_{1,2} = \dfrac{E_{1,2}(h_1 + h_2)}{h_1 E_1 + h_2 E_2}$; $\delta_\varphi = \dfrac{i'}{h_1 + h_2}$ - средняя плотность тока в слое толщиной h. Коэффициент $\kappa_{1,2} = 1$, когда модули упругости материалов проводника и бандажа одинаковы. В этом случае $\sigma_1 = \sigma_2$, и напряжение уменьшается в отношении h/h_1 по сравнению с напряжением в витке толщиной h_1. Во всех остальных случаях $\kappa_{1,2} > 1$. Применение бандажа всегда уменьшает напряжение по сравнению с тем, которое имеет место в обмотке толщиной h_1. Удобно ввести условное азимутальное напряжение $\sigma = \sigma_{1,2} / \kappa_{1,2} = rB\delta$, которое равно напряжению в тонком слое из однородного материала, механически не взаимодействующего с другими слоями. Значение σ вычисляется по известным B и δ, а истинные напряжения в проводящем слое и бандаже выражаются через σ: $\sigma_{1,2} = \kappa_{1,2} \cdot \sigma$. Далее будем считать, что слой испытывает растягивающие напряжения. Это позволяет считать выполненным условие $\sigma > 0$.

5.2. Распределение тока в многослойной обмотке, обеспечивающее постоянство азимутальных напряжений

Многослойная обмотка, состоящая из механически не взаимодействующих тонких слоев, будет иметь наибольшую прочность, если все слои нагружены одинаково. Пусть все слои имеют одинаковые толщины проводящего слоя и бандажей, тогда параметры $\kappa_{1,2}$ во всех слоях равны, и условие равной прочности слоев имеет вид:

$$\sigma = [\sigma] = rB_z\delta_\varphi = \text{const}\ , \tag{5.2}$$

где в качестве условного допустимого напряжения $[\sigma]$ следует выбрать то из отношений $\lfloor\sigma_{1,2}\rfloor/\kappa_{1,2}$, которое соответствует среде с меньшим допустимым напряжением $\lfloor\sigma_{1,2}\rfloor$.

Реальный соленоид представляет собой конструкцию, состоящую из нескольких слоев обмотки, укрепленных бандажами. Распределение тока в такой системе дискретно. Тем не менее, для целей упрощенного изучения условий оптимизации конструкции соленоида можно заменить дискретное распределение тока непрерывным. Тогда средняя в слое плотность тока δ_φ, которая может меняться скачком от слоя к слою, заменится непрерывной функцией $\delta_\varphi(r)$, связанной с индукцией уравнением Максвелла:

$$\delta_\varphi = \frac{-1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z}\right), \tag{5.3}$$

где B_z - осевая, B_r – радиальная компоненты индукции. Они также являются непрерывными функциями координаты r. Ограничимся далее исследованием напряжений в средней части соленоида, длина которого много больше наружного радиуса. В этом случае можно пренебречь вторым слагаемым в уравнении (5.3). Система уравнений (5.2) и (5.3) позволяет найти распределение поля в равнонагруженной длинной катушке с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2:

$$B_z = \sqrt{B_i^{\,2} - 2\mu_0[\sigma]\ln(r/R_1)},$$

где B_i - поле внутри соленоида.

Вне катушки $B = B_e = 0$, отсюда

$$[\sigma] = \frac{B_i^{\,2}}{2\mu_0 \ln(R_2/R_1)}; \qquad (5.4, а)$$

$$B_z = B_i \sqrt{\frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}}; \qquad (5.4, б)$$

$$\delta_\phi = \frac{B_i}{2\mu_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(R_2/R_1)\ln(R_2/r)}}. \qquad (5.4, в)$$

В рассмотренном идеализированном равнонагруженном соленоиде плотность тока распределена немонотонно (рис. 5.2). Она имеет минимум при $r = R_2/\sqrt{\mathbf{e}} \approx 0{,}6R_2$ и неограниченно растет при $R = R_2$.

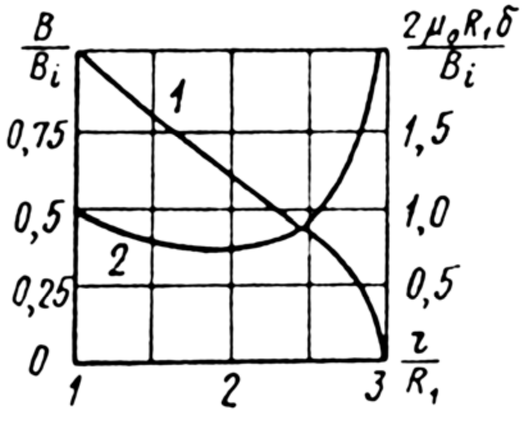


Рис. 5.2. Распределение индукции и плотности тока в идеализированном равнонагруженном соленоиде с отношением $R_2/R_1 = 3$:
1 - B/B_i; ***2*** - $2\mu_0 R_1 \delta/B_i$

Интересно сопоставить условное допустимое напряжение $[\sigma]$ с “магнитным давлением” внутреннего поля. Для оценки прочностных характеристик материалов с точки зрения получения сильных магнитных полей удобно вместо $[\sigma]$ ввести условный магнитный предел прочности B_M, связанный с $[\sigma]$ соотношением $B_M = \sqrt{2\mu_0[\sigma]}$. Значения параметра B_M для некоторых материалов приведены на диаграмме рис. 5.3 [4]. Следует отметить, что параметр B_M, представленный на рис. 5.3, соответствует статическому пределу прочности $[\sigma] = \sigma_{st}$, полученному при однократном нагружении.

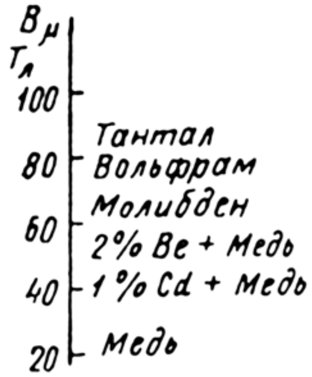


Рис. 5.3. «Магнитный предел прочности» различных металлов, соответствующий статическому режиму нагружения при температуре 20^0С

Данные диаграммы не отражают также влияния числа воздействующих импульсов на прочностной предел. Ниже показано, что в соленоидах, предназначенных для длительной работы (сотни импульсов и более), этот предел снижается: у меди с 26 Т до 19 Т. Далее показано также, что предел прочности зависит от длительности импульса и возрастает при уменьшении длительности разряда.

Легко убедиться, что индукция, получаемая в соленоиде с равнонагруженной обмоткой, в отношении $[\ln(R_2/R_1)]^{1/2}$ превышает B_M. Следовательно, теоретически поле в соленоиде может быть сколь угодно сильнее, чем B_M, однако практически для этого надо применять весьма большие отношения R_2/R_1. Например, для получения поля с индукцией $B_i = 50$ Т в соленоиде с медной обмоткой (без дополнительных бандажей), у которой B_M =26 Т, надо иметь $\ln(R_2/R_1) = 3{,}7$, или $R_2/R_1 = 40$, что трудно выполнить. Тем не менее, в катушках с дискретным токораспределением, аппроксимирующим оптимальное, можно получить довольно сильное поле при приемлемых значениях отношения R_2/R_1, если величина B_M достаточно велика. Например, в обмотке с бандажами из стеклоэпоксидного компаунда можно иметь $B_M \approx 35$ Т. Тогда для получения поля с индукцией $B_i = 50$ Т достататочно выбрать отношение $R_2/R_1 = 8{,}7$, что в ряде случаев допустимо. Примеры соленоидов с равнонагруженными обмотками будут рассмотрены в седьмой главе.

Следует отметить, что допущение об отсутствии механического взаимодействия между слоями обмотки согласуется с условием постоянства азимутального напряжения по радиусу: в этом случае относительная деформация всех слоев одинакова, а значит, и радиальные усилия, действующие между соседними слоями, отсутствуют. В самом деле, если два соседних тонких слоя не взаимодействовали между собой до деформации (например, были разделены сколь угодно малым зазором), то при равных σ_φ все слои будут иметь одинаковую относительную деформацию, произойдет преобразование подобия и зазор сохранится, то есть не возникнет механического взаимодействия между слоями.

5.3. Усилия, действующие в соленоидах при различных способах укладки обмотки. Напряжения во внешнем бандаже и в одновитковом соленоиде

В литературе рассматривались усилия, действующие в соленоидах при различном характере распределения тока. В соленоиде с однородной намоткой, когда индукция линейно падает от значения B_i при $r = R_1$ до нуля при $r = R_2$, азимутальное напряжение в слоях, механически не взаимодействующих между собой, изменяется немонотонно.

Если отношение $R_2/R_1 > 2$, то максимум σ_φ имеет место внутри обмотки, и его значение $\sigma_{\max} \approx (0{,}5...0{,}6) B_i^2 / 2\mu_0$ при изменении R_2/R_1 в широких пределах.

Напряженное состояние обмотки с неоптимальным распределением тока весьма сложно: слои обмотки механически взаимодействуют между собой; кроме того, материал обмотки неоднороден - проводники чередуются с изоляцией, а в некоторых случаях, как говорилось, применяется бандажирование отдельных слоев. В соленоиде конечной длины существенна роль осевых сил. Все это усложняет прочностные расчеты соленоидов. Современные программы, использующие метод конечных элементов, позволяют рассчитать напряжения в магнитах реального исполнения.

Для увеличения прочности многовитковых соленоидов широко применяются внешние и внутренние диэлектрические бандажи, воспринимающие радиальные усилия. В предельном случае, когда жесткость бандажа много больше, чем обмотки, можно рассматривать последнюю как неоднородную среду, в которой действуют объемные силы, уравновешенные реакцией опоры (бандажа). Наиболее слабым элементом конструкции является изоляция. При всестороннем сжатии обмотки изоляционные прослойки зажаты между проводниками. Повреждение прослоек может привести к пробою между витками и к разрушению соленоида. Этому в значительной мере может способствовать относительное смещение витков и поворот их сечения, вследствие чего изоляция оказывается зажатой между кромками витков прямоугольного сечения.

Завышенное значение напряжений во внешнем бандаже можно получить, если принять, что обмотка не обладает жесткостью и передает усилие $B_i^2 / 2\mu_0$ на единицу внутренней поверхности бандажа. Напряжение в таком бандаже можно рассчитать, считая деформацию упругой, а режим нагружения статистическим. Тогда имеем следующие выражения для азимутального и радиального напряжений [11]:

$$\sigma_r = \frac{B_i^2}{2\mu_0} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right); \tag{5.5}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{B_i^2}{2\mu_0} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r^2} + 1 \right). \tag{5.6}$$

Наибольшее напряжение имеет место на внутренней поверхности. В предельном случае, когда выполнено условие $h = R_2 - R_1 << R_1$, имеем:

$$\sigma_r(R_1) = \frac{B_i^2}{2\mu_0}; \qquad \sigma_\varphi(R_1) = \frac{R_1}{h} \cdot \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \sigma_1'. \tag{5.7}$$

В противоположном предельном случае (при условии $R_2 >> R_1$) оно принимает значение

$$\sigma_r(R_1) = \sigma_\varphi(R_1) = \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \sigma_2''. \tag{5.8}$$

Последняя из формул совпадает с (5.1).

Одновитковые магниты наиболее просты по конструкции (рис. 5.4). Они имеют преимущество перед многовитковыми благодаря тому, что в них на изоляцию не действуют сжимающие усилия.

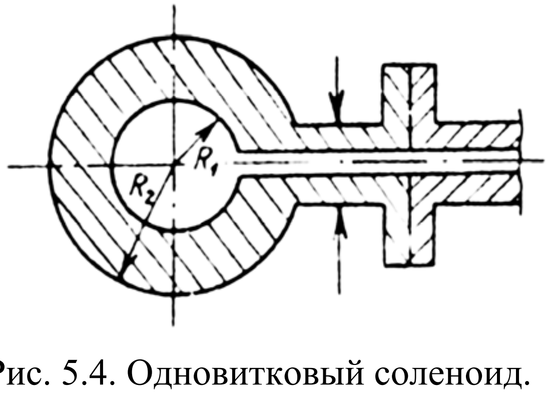


Рис. 5.4. Одновитковый соленоид.
Стрелками указаны силы, удерживающие края щели

Кроме того, в их конструкции можно эффективно использовать высокие прочностные характеристики таких металлов, как бериллиевая бронза, тантал, легированные стали, магнитный предел прочности которых достигает 80 Т. Если края изоляционного зазора одновиткового соленоида закреплены, а толщина его стенок много больше, чем глубина проникновения импульсного электромагнитного поля в проводник, можно для расчета напряжений пользоваться теми же формулами (5.5), (5.6), что и для внешнего бандажа. Согласно (5.8), напряжения в тонкостенных одновитковых магнитах при большом отношении R_1/h становятся много больше магнитного давления. Применение толстостенного $(R_2 >> R_1)$ одновиткового соленоида позволяет получить в нем поле, близкое к магнитному пределу прочности данного материала, не прибегая к дополнительным мерам по усилению его конструкции, кроме упомянутого закрепления краев щели. Суммарное напряжение в толстостенном соленоиде направлено под углом 45° к радиусу. Поэтому, как показали эксперименты, разрушение толстостенных соленоидов начинается с появления трещин, ориентированных под этим углом к внутренней поверхности [15].

5.4. Прочность соленоидов при коротких импульсах

До сих пор мы рассматривали соленоиды, работающие при статических режимах нагружения. При импульсах, длительность которых велика по сравнению с периодом собственных упругих колебаний, применимы соотношения для напряжений, полученные для статического режима; при этом можно пользоваться мгновенными значениями индукции $B_i(t)$ в формулах для мгновенных значений напряжений. Следует, однако, иметь в виду, что прочностные характеристики материалов (предел текучести, допустимые напряжения), определяемые физическими процессами развития разрушения в твердом теле, сами зависят от длительности действия силы - они возрастают при укорочении импульса. В опытах по изучению разрушения меди и алюминия было показано, что время от момента приложения нагрузки до разрушения описывается выражением вида:

$$\tau = \tau_0 \exp[(u - \gamma\sigma)/kT],$$

где T - температура, σ - напряжение в образце, u, τ_0 и γ - константы. Отсюда можно найти зависимость разрушающего напряжения от длительности действия нагрузки (чем меньше τ, тем выше σ): $\sigma = \frac{1}{\gamma}\left(u - kT\ln\frac{\tau}{\tau_0}\right)$. Например, в опытах с монокристаллами алюминия при комнатной температуре разрушающее напряжение составляло 5,2 кг/мм^2 при длительности воздействия 10^2 с и 6,5 кг/мм^2 - при длительности 10^{-1} с.

Экспериментально определялся предел прочности меди при импульсах длительностью 800 и 2000 мкс. Усилие создавалось при протекании импульса тока по витку круглой проволоки, помещенному в однородное магнитное поле. Измерение разрывного напряжения производилось при различных температурах в условиях постепенно возрастающей нагрузки. При этом образец разрушался после небольшого числа импульсов; соответствующий предел прочности обозначен σ_i. Кроме того, исследовался режим циклической нагрузки, когда на образец воздействовали повторяющиеся импульсы постоянной амплитуды. В этом случае проявляется эффект "усталости" материала - соответствующий предел прочности уменьшался с ростом числа импульсов, стремясь к некоторой величине σ_∞. В табл. 5.1 приведены величины σ_i, σ_∞, а также статический предел прочности σ_{st}. Напряжение σ_{st} существенно ниже прочностного предела σ_i и выше σ_∞. Напряжение σ_i возрастает при сокращении длительности импульса, тогда как предел прочности при циклической нагрузке не зависит от длительности импульсов. Охлаждение образцов повышает их прочность при всех режимах нагружения.

Таблица 5.1

Прочностные пределы материалов при различных температурах и условиях нагружения

Способ нагру-жения	Медь, кг/мм^2 при T (^{o}K)			Алюминий, кг/мм^2 при T (^{o}K)			Длительность импульса, с
	243	77	20,4	243	77	20,4	
Статический	27	40	47	13,5	23	39	—
σ_∞	15	24	25	7,5	20	22	8 10^{-5}
σ_∞	15	24	25	—	—	—	2 10^{-3}
σ_i	55	87	99	22	53	60	8 10^{-5}
σ_i	32	41	47	—	—	—	2 10^{-3}

Наряду с повышением предела прочности при коротких воздействиях имеет место увеличение прочности магнита как конструкции, связанное с инерционными эффектами [14, 15]. При воздействии силы, эффективное время действия которой τ много меньше периода собственных колебаний системы, упругая деформация начинается после окончания действия силы. По этой причине амплитуда упругих колебаний, а значит, и амплитуда напряжений, определяется импульсом силы, а не её максимальным значением. Для примера, рассмотрим тонкостенный цилиндр, на единицу поверхности которого изнутри действует сила $B_i^2 \big/ 2\mu_0$. Уравнение упругих колебаний цилиндра имеет вид:

$$m' \frac{d^2 \Delta R}{dt^2} + K\Delta R = 2\pi R \cdot \frac{B_i^2}{2\mu_0},$$

где R - радиус цилиндра, ΔR - изменение радиуса, $m' = 2\pi Rh\gamma$ - масса, приходящаяся на единицу длины цилиндра (γ - плотность вещества, h - толщина стенки цилиндра), K - жесткость системы.

Переходя к относительной деформации $\varepsilon = \Delta R / R$, приходим к уравнению:

$$m' \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + K\varepsilon = \frac{\pi B_i^2}{\mu_0}. \qquad (5.9)$$

Жесткость K можно найти, рассмотрев статический режим, когда, с одной стороны, $\varepsilon = B_i^2 R \big/ \left(2\mu_0 hE\right)$ (см. (5.8)), а с другой $\varepsilon = \pi B_i^2 \big/ \mu_0 K$. Отсюда $K = 2\pi hE / R$. Во время действия силы деформация не успевает сформироваться, поэтому ε мало, и второй член уравнения (5.9) может быть отброшен. В этот интервал времени движение стенок цилиндра является чисто инерционным, и к концу действия силы стенки приобретают скорость

$$\frac{dR}{dt} = \int_0^\tau \frac{B_i^2 R dt}{\mu_0 m'}.$$

Если поле затухает за время, гораздо меньшее периода собственных колебаний, можно считать, что стенки получили скорость

$$\frac{dR}{dt} \approx \frac{\pi R}{\mu_0 m'} \int_0^\infty B_i^2 dt = \frac{B_m^2 \pi R}{\mu_0 m'} \tau_{eff}. \qquad (5.10)$$

Здесь фигурирует эффективная длительность импульса τ_{eff}, , которая для синусоидальных слабозатухающих колебаний равна одной четверти постоянной времени экспоненты, если амплитуда тока затухает экспоненциально. Далее цилиндр совершает свободные упругие колебания, при этом можно считать, что начальное значение скорости определяется формулой (5.10). Таким образом, начальное значение относительной деформации есть

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\pi B_m^2 \tau_{eff}}{\mu_0 m'} = \varepsilon_m \omega_0,$$

где $\varepsilon_m = \sigma_m / E$ - амплитуда относительной деформации, $\omega_0 = \sqrt{K/m'} = (1/R)\sqrt{E/\gamma}$ - круговая частота свободных колебаний. Отсюда находим максимальное напряжение:

$$\sigma_m = E\varepsilon_m = \frac{\pi\tau_{eff} B_m{}^2 E}{\mu_0 m' \omega_0} = \frac{B_m{}^2 R}{2\mu_0 h}\omega_0\tau_{eff} \ . \qquad (5.11)$$

Из этой формулы видно, что азимутальное напряжение множителем $\omega_0\tau_{eff} << 1$ отличается от значения, которое оно имело бы при статическом режиме деформирования в поле с индукцией B_m. В этом проявляется эффект увеличения прочности конструкции при коротких импульсах, обусловленный инерцией материала и не связанный с увеличением допустимого напряжения. Например, в тонкостенном витке с характерными размерами $R = 10$ см, $h = 1$ см частота собственных аксиально-симметричных упругих колебаний составляет 4,5 10^4 $с^{-1}$. Следовательно, при получении импульсов с эффективной длительностью 2,2·10^{-6} с $(\omega_0\tau_{eff} = 0{,}1)$ можно в отношении $\sqrt{10}$ увеличить допустимую амплитуду индукции по сравнению с режимом медленного нагружения. Характерно, что амплитуда напряжения σ_m в формуле (5.11) не зависит от радиуса магнита, поскольку ω_0 пропорционально $1/R$.

В толстостенных витках $(R_2 >> R_1)$ частота упругих колебаний $\omega_0 \approx (1/R_1)(E/\gamma)^{1/2}$. Поэтому для σ_m справедлива оценка [12]:

$$\sigma_m \approx \sigma_{st}\omega_0\tau_{eff} \approx \frac{B_m{}^2\tau_{eff}}{2\mu_0 R_1}\sqrt{\frac{E}{\gamma}} \qquad (5.12).$$

Таким образом, в толстостенном витке σ_m пропорционально $1/R_1$. Отсюда видно, что при заданном допустимом напряжении материала амплитуда индукции пропорциональна $(R_1)^{1/2}$ и $(\gamma)^{1/4}$.

6. СОЛЕНОИДЫ С КВАЗИБЕССИЛОВОЙ ОБМОТКОЙ

6.1. Особенности бессилового магнитного поля

Электромагнитные силы, действующие на проводящую среду, обращаются в нуль, если выполнено условие

$$\boldsymbol{\delta} = \lambda \mathbf{H}, \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{\delta}$ - плотность тока, λ - скалярная функция координат. В области, где выполнено это условие, вектора плотности тока и индукции параллельны, поэтому имеет место равенство

$$\mathbf{f} = [\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}] = 0, \tag{6.2}$$

где $\mathbf{f}$ объемная электромагнитная сила. Магнитные поля, в которых отсутствуют электромагнитные силы, называют бессиловыми.

Исследованию бессиловых магнитных систем посвящено большое количество публикаций. Первая группа статей — это теоретические работы общего характера, включая начальные публикации и последующие работы, относящиеся к проблемам астрофизики, сверхпроводимости, физики плазмы (например, [4]). Ряд работ посвящен исследованию тороидальных магнитных систем, включая магнитные системы индуктивных накопителей энергии, а также сцеллараторов. В обмотках этих магнитных систем электромагнитные силы были резко снижены благодаря тому, что распределение тока в определенной мере аппроксимировало бессиловое.

Большой интерес представляют бессиловые системы для задачи получения сверхсильных магнитных полей. Поле, удовлетворяющее уравнению (6.1), может существовать только при непрерывном пространственном распределении тока. Подобная ситуация возможна в плазме, но не может иметь места в реальном магните, обмотка которого изготовлена из твердых проводников, разделенных изоляционными зазорами. В системе с дискретными проводниками можно создать поле, близкое к бессиловому, если условие параллельности векторов плотности тока и индукции выполнено приближенно. Такие обмотки можно назвать квазибессиловыми. Реальный магнит, предназначенный для работы в таких полях, должен содержать обмотку, которая состоит из нескольких уравновешенных токовых слоев и является дискретным аналогом бессиловой. Простейшая однослойная система такого рода была рассмотрена в работе А.А. Кузнецова [24]. В ходе дальнейших исследований рассматривалась многослойная квазибессиловая обмотка с токами, изменяющими свое направление в каждом слое, был предложен способ формирования системы уравновешенных токовых слоев и показано, что механические напряжения в них могут быть снижены до значений порядка $B_0^2/(2\mu_0 N^2)$, где B_0 - индукция на оси магнита, N - число слоев. Особенностью реального магнита является наличие внешней зоны, где должен замыкаться полоидальный ток, и торцевых частей, которые должны быть уравновешены так же, как и основная часть обмотки. Предложен способ формирования такого распределения тока вне обмотки, при котором остаточные напряжения одинаковы во всех бандажных цилиндрах, а магнитная система имеет приемлемые радиальные размеры даже в поле с индукцией масштаба 100 Т.

Материал этой главы в определенной степени отражает результаты упомянутых работ, имеющих в основном теоретический характер. Несмотря на технологические трудности, связанные с реализацией обмоток квазибессиловых магнитов, есть все основания ожидать, что в них возможно без разрушении обмотки достичь полей с индукцией мегагауссного диапазона.

Простейшим примером бессиловой конфигурации является плоский слой (рис. 6.1), в котором ток распределен таким образом, что выполняется условие (6.1).

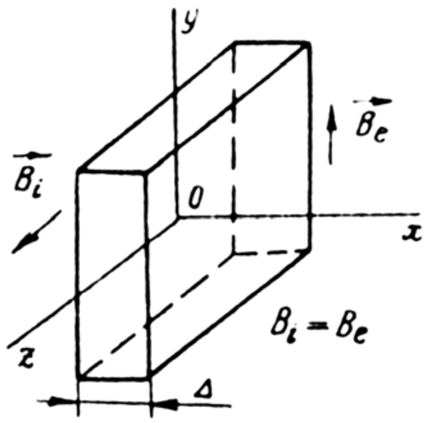


Рис. 6.1. Плоский проводящий слой с бессиловым магнитным полем

В проекциях на оси x и y имеем два уравнения:

$$\mu_0 \delta_y = \alpha B_y = -\frac{dB_z}{dx}$$

$$\mu_0 \delta_z = \alpha B_z = -\frac{dB_y}{dx}. \tag{6.3}$$

Следствием этих уравнений является равенство

$$B_y{}^2 + B_z{}^2 = B_o^2 \operatorname{const}. \tag{6.4}$$

Это обычное условие равновесия плазмы с нулевым давлением. Таким образом, в плоском слое индукция бессилового поля меняет свою ориентацию, сохраняя постоянным модуль. В частном случае, когда на границах слоя выполняются условия $B_z = B_0$, $B_y = 0$ при $x = 0$; $B_z = 0$, $B_y = B_0$ при $x = \Delta$, возможно решение вида $B_y = B_0 \sin \beta(x)$; $B_z = B_0 \cos \beta(x)$, где функция $\beta(x) = \operatorname{arctg}\left(B_y / B_z\right)$ меняется в пределах слоя $0 \le x \le \Delta$ от 0 до $\pi/2$ по произвольному закону. Для компонент плотности тока в этом случае находим

$$\delta_y = \frac{B_i}{\mu_0} \sin \beta(x) \frac{d\beta}{dx}; \qquad \delta_z = \frac{B_i}{\mu_0} \cos \beta(x) \frac{d\beta}{dx},$$

при этом $\alpha = (1/\mu_0)(d\beta/dx)$. Линейная плотность тока $\bar{j} = \int\limits_0^{\Delta} \bar{\delta}\, dx$ численно равна $\sqrt{2}\, B_0/\mu_0$, $\mu_0 j_y = \mu_0 j_z = B_i$, вектор $\bar{j}$ направлен под углом $\pi/4$ к векторам индукции вне слоя. В частном случае, когда $\alpha = d\beta/dx = \pi/(2\Delta) = \mathrm{const}$, компоненты индукции и плотность тока меняются в слое, как $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$, а модуль плотности тока остается постоянным в слое. В общем случае этого не происходит: например, если выполнены условия $\beta = (\pi/2)(x/\Delta)^2$, $\alpha = \pi x/\mu_0\Delta$, то имеют место равенства

$$B_y = B_0 \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right]; \quad B_z = B_0 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right];$$

$$\delta_y = \frac{B_0 \pi x}{\mu_0 \Delta^2} \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right]; \quad \delta_z = \frac{B_0 \pi x}{\mu_0 \Delta^2} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2\right].$$

В качестве другого примера рассмотрим поле в бесконечно длинном цилиндре, в котором вектор индукции в цилиндрических координатах имеет лишь составляющие B_z и B_φ, зависящие, как и функция α, лишь от координаты r. При этом условие $\operatorname{div} \overline{B} = 0$ выполняется при любом выборе $B_\varphi(r)$, $B_z(r)$. Уравнение (6.1) распадается на два:

$$\mu_0 \delta_\varphi = \alpha B_\varphi = -\frac{dB_z}{dr}; \tag{6.5}$$

$$\mu_0 \delta_z = \alpha B_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r B_\varphi\right) \tag{6.6}$$

При $\alpha = a = \mathrm{const}$ известно решение этой системы в виде

$$B_z = N J_0(ar); \quad B_\varphi = N J_1(ar) \tag{6.7}$$

где $J_0(\alpha r)$, $J_1(\alpha r)$ - функции Бесселя. Такое поле создается током с составляющими $\delta_\varphi = (1/\mu_0)aNJ_1(ar)$ и $\delta_z = (1/\mu_0)aNJ_0(az)$. При этом $\delta_\varphi / \delta_z = B_\varphi / B_z$, то есть выполнено условие параллельности векторов плотности тока и индукции. В рассмотренном примере ток занимает неограниченную область от $r = 0$ до $r = \infty$.

Для целей создания магнита общего назначения представляет интерес бессиловая система, в которой область с аксиально-симметричным распределением тока занимает ограниченную область, как в осевом, так и в радиальном направлении. В простейшем случае можно принять условие, что длина магнитной системы много больше радиуса, и поле в средней зоне магнита (вдали от торцов) близко к однородному. Для получения однородного поля в приосевой области $(0 < r < R_1)$ с помощью длинного бессилового соленоида можно создать распределение тока рассмотренного выше типа в промежутке $R_1 < r < R_2$, где aR_1 - корень функции $J_1(x)$, а aR_2 - корень функции $J_0(x)$. При этом, очевидно, должно выполняться условие $aR_1 < aR_2$, поэтому, если $aR_1 = \lambda_k^{(1)}$, то $aR_2 = \lambda_m^{(0)}$, где $m > k$. Здесь $\lambda_k^{(1)}$ - $k-$ый корень функции $J_1(x)$ (нулевой корень соответствует $k = 0$), $\lambda_m^{(0)}$ - $m-$ый корень функции $J_0(x)$. Такой выбор границ обеспечивает на внутренней поверхности обмотки $B_\varphi = 0$, а на внешней $B_z = 0$. Например, в длинном соленоиде с бессиловой обмоткой с произвольным внутренним радиусом R_1 внешний радиус можно выбрать равным $R_2 = \left(\lambda_2^{(0)} / \lambda_1^{(1)}\right) R_1 = 1{,}44 R_1$. При этом $a = \lambda_1^{(1)} / R_1 = 3{,}83 / R_1$, толщина обмотки составляет $0{,}44 R_1$. Индукция на оси такого соленоида $B_i = NJ_0\left(\lambda_1^{(1)}\right) = -0{,}40 N$. Отсюда получаем

$$N = B_i / J_0\left(\lambda_1^{(1)}\right),$$

$$B_z(r) = B_i\, J_0\left(\lambda_1^{(1)} r/R_1\right) / J_0\left(\lambda_1^{(1)}\right),$$

$$B_\varphi(r) = B_i\, J_1\left(\lambda_1^{(1)}\, r/R_1\right) \Big/ J_0\left(\lambda_1^{(1)}\right),$$

$$B_\varphi(R_2) = 0{,}85 B_i, \quad \boldsymbol{\delta} = \lambda_1^{(1)}\, \mathbf{B} \Big/ \left(\mu_0 R_1\right).$$

Для бесконечно длинного соленоида это решение не является единственным. Исключая функцию $\alpha(r)$ из уравнений (6.5), (6.6), приходим к уравнению

$$B_z \frac{dB_z}{dr} + B_\varphi \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rB_\varphi\right) = 0, \tag{6.8}$$

которое можно получить и непосредственно из условия $\left[\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\right] = 0$, означающего, что электромагнитная сила отсутствует. Задавшись одной из функций B_z и B_φ, можно с помощью уравнения (6.8) найти другую. В качестве примера рассмотрим два, отличных от рассмотренного выше, бессиловых поля, создаваемых током, существующим в области $R_1 < r < R_2$. При этом, как и раньше, в области $0 \le r \le R_1$ выполнено условие $B_z = B_0$, $B_\varphi = 0$, а в области $r > R_2$ $B_z = 0$. В первом примере зададим азимутальную составляющую индукции в области $R_1 < r < R_2$ в виде:

$$B_\varphi = \frac{g(r - R_1)}{r}.$$

Из уравнения (6.8) и условия $B_z(R_2) = 0$ находим

$$B_z = g\sqrt{2\left(\ln\frac{R_2}{r} + \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1}{r}\right)},$$

а из условия $B_z(R_i) = B_0$ получаем:

$$g = \frac{B_0}{\sqrt{2\left(\ln\dfrac{R_2}{R_1} + \dfrac{R_1}{R_2} - 1\right)}}.$$

При этом

$$\alpha = \frac{\mu_0 \delta_\varphi}{B_\varphi} = \frac{\mu_0 \delta_z}{B_z} = \frac{B_0}{r\sqrt{2\left(\ln\frac{R_2}{r} + \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1}{r}\right)}}.$$

В другом примере зададим линейный закон изменения B_z в стенке соленоида: $B_z = B_0\left(R_2 - r\right)/\left(R_2 - R_1\right)$. Уравнение (6.8) примет вид:

$$\left(rB_\varphi\right)\frac{d}{dr}\left(rB_\varphi\right) = -r^2 B_z \frac{dB_z}{dr} = \frac{r^2 B_0\left(R_2 - r\right)}{\left(R_2 - R_1\right)^2}.$$

После интегрирования, используя условие $B_\varphi\left(R_i\right) = 0$, получаем:

$$B_\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}r} \cdot \frac{B_i}{\left(R_2 - R_1\right)}\sqrt{4R_2\left(r^3 - R_1{}^3\right) - 3\left(r^4 - R_1{}^4\right)}.$$

В предельном случае, когда $R_2 - R_1 = \Delta << R_1$ приходим к рассмотренной выше конфигурации, когда токовый слой можно считать плоским (рис. 6.1). Этот же результат можно получить из формул (6.7) при $ar >> 1$, заменяя функции Бесселя их асимптотическими выражениями.

6.2. Механические напряжения в тонкостенной квазибессиловой обмотке

Остановимся на возможности замены бессилового распределения дискретной системой проводников в области вдали от торцов, где радиальные электромагнитные силы являются наибольшими. В этой зоне нет радиальной составляющей плотности тока и индукции. Здесь будет рассмотрена проблема аппроксимации бессилового распределения для систем с проводниками конечной, хотя и малой, толщины.

Квазибессиловая обмотка с парами уравновешенных токовых слоёв (число пар $N \gg 1$***).***

Рассмотрим обмотку, которая состоит из N пар чередующихся слоёв с ортогональными токами в каждой паре (рис. 6.2). Слои разделены изоляционными прокладками. Распределение аксиальных и азимутальных токов, аппроксимирующее бессиловое токораспределение, производится таким образом, чтобы в каждой паре растягивающее усилие, воздействующее на внутренний кольцевой виток ***1*** с азимутальным током, было уравновешено сжимающей силой, действующей на находящийся снаружи слой ***2*** с аксиальным током. При этом каждая пара находится в равновесии, а изоляционная прокладка ***3*** подвержена сжатию.

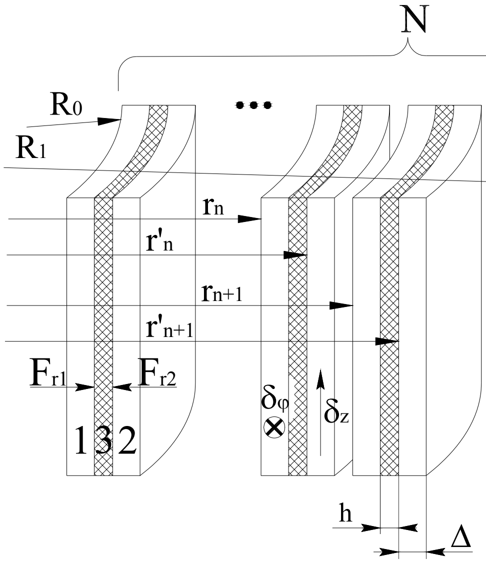


Рис. 6.2. Квазибессиловая обмотка с парами уравновешенных токовых слоёв

Далее при оценках примем условие $h \ll \Delta$ и, кроме того, будем считать, что толщины слоёв малы по сравнению с их радиусами. Примем также условие, что толщины слоев много меньше глубины проникновения магнитного поля в проводник. Это позволяет считать обе компоненты плотности тока постоянными в соответствующих слоях. При таком допущении индукция B_z убывает линейно на участке $r_n < r < r_n + \Delta$ и остаётся постоянной на участке $r_n + \Delta < r < r_{n+1}$, а индукция B_φ растёт на участке $r'_n < r < r'_n + \Delta$ и остаётся постоянной на участке $r'_n + \Delta < r < r'_{n+1}$. Модуль напряжения в прокладке можно оценить по формуле:

$$\left|\sigma_\varphi\right|_n = \left|\sigma_r\right|_n \approx B_\varphi\left(r'_n\right)\delta_{z,n}\Delta. \tag{6.9}$$

Индукция B_φ является величиной порядка B_0, где B_0 — поле на оси магнита. Плотность тока δ_φ есть величина порядка $2B_0/\left(\mu_0 d\right)$, где $d = 2N\Delta$ - толщина обмотки магнита. Отсюда следует оценочное значение напряжения

$$\left[\sigma_\varphi\right] = \left[\sigma_r\right] \approx B_0^2/\left(\mu_0 N\right). \tag{6.10}$$

Существенно, что напряжение обратно пропорционально числу слоёв N.

Более точный аналитический расчёт может быть выполнен для системы равнонагруженных слоёв. При расчёте допустимо использовать аппроксимацию упомянутой зависимости компонент индукции от радиуса непрерывными функциями $B_\varphi(r)$ и $B_z(r)$, удовлетворяющими уравнению (6.8). При этом плотности токов вычисляются по формулам:

$$\delta_\varphi(r) \approx -\frac{2}{\mu_0}\left(\frac{d\widetilde{B}_z}{dr}\right), \qquad \delta_z(r) \approx -\frac{2}{\mu_0}\frac{1}{r}\left[\frac{d\left(r\widetilde{B}_\varphi\right)}{dr}\right]. \tag{6.11}$$

В системе, где слои напряжены одинаково ($\left|\sigma_\varphi\right| = \left|\sigma_r\right| = \sigma_0$) уравнение (6.9) принимает вид:

$$\sigma_0 = \frac{2\Delta B_\varphi}{\mu_0 r}\frac{d}{dr}\left(rB_\varphi\right). \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) позволяет найти азимутальную компоненту индукции, после чего с помощью (6.8) можно рассчитать B_z. Индукция B_φ удовлетворяет граничному условию $B_\varphi(R_0)=0$, где R_0 - внутренний радиус соленоида. Можно ввести безразмерные переменные: $x = r/R_0$, $y = rB_\varphi R_0^{-3/2}\left(\mu_0\,\sigma_0/(2\Delta)\right)^{-1/2}$. После этого уравнение (6.12) принимает вид:

$$yy' = x^2. \qquad (6.13)$$

Его решение есть $y = \sqrt{\frac{2}{3}\left(x^3-1\right)}$, или

$$B_\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0}{3\Delta}\left(r^3-R_0^3\right)}, \quad \delta_z = \sqrt{\frac{3\sigma_0}{\mu_0\Delta}}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^3-R_0^3}}. \qquad (6.14)$$

Аксиальная индукция и азимутальная плотность тока в этом предельном случае определяются по формулам:

$$B_z = \sqrt{{B_0}^2 - \frac{\mu_0\sigma_0}{\Delta}\left(r-R_0\right)}, \quad \delta_\varphi = \frac{\sigma_0}{\Delta\sqrt{{B_0}^2-\mu_0\sigma_0\left(r-R_0\right)/\Delta}}, \qquad (6.15)$$

где B_0 — индукция на оси.

Внешний радиус обмотки R_1 можно найти из условия $B_z(R_1)=0$:

$$R_1 = R_0 + {B_0}^2\,\Delta/\left(\mu_0\sigma_0\right).$$

Отсюда находим напряжение в изоляционных прослойках:

$$\sigma_0 = {B_0}^2\frac{\Delta}{\mu_0\left(R_1-R_0\right)} \approx \frac{{B_0}^2}{2\mu_0 N}, \qquad (6.16)$$

где $N \approx \left(R_1-R_0\right)/(2\Delta)$ - число слоев обмотки, которая состоит из одинаковых по толщине слоев с аксиальным и азимутальным токами, разделенных тонкими изоляционными слоями. Приближенная формула (6.16) даёт более точный результат, чем (6.10). Она показывает, что напряжение в рассматриваемой системе в N раз меньше, чем магнитное давление, рассчитанное для поля на оси соленоида.

На рис. 6.3 приведены результаты численного расчета системы из пяти пар слоев для поля с индукцией $B_0 = 100$ Т.

Сравнение с моделью непрерывного токораспределения, показывает, что эта модель дает приемлемую для оценок аппроксимацию реального токораспределения в обмотке, несмотря на относительно небольшое число слоев. Расхождение имеет место вблизи границы, где аналитический расчет дает неограниченный рост плотности тока. Что касается напряжений, то результат численного расчета ($\sigma_r = \sigma_\varphi \approx 8 \cdot 10^8$ Па) практически совпадает с расчетом по формуле (6.16).

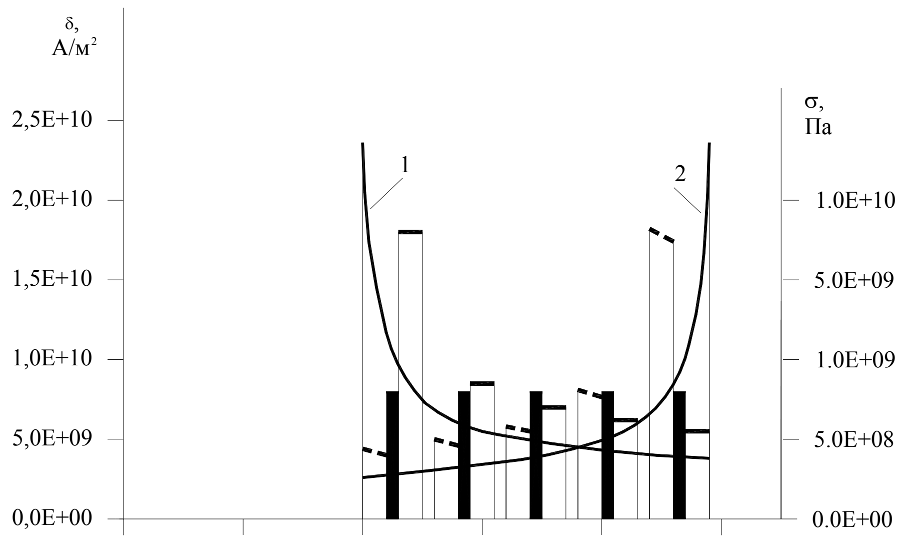


Рис.6.3. Распределение механических напряжений и плотностей тока в квазибессиловой обмотке, состоящей из 5 пар слоёв

▬ - δ_z, ▪▪ - δ_φ, █ - $|\sigma_r| = |\sigma_\varphi|$, (компьютерное моделирование)

Модель непрерывного распределения тока может быть использована и при других исходных положениях, определяющих конструкцию обмотки. Примерами могут быть магнитные системы, в которых плотность азимутального или аксиального токов остается постоянной в пределах обмотки. В работе [25] приведены результаты расчётов таких систем.

Магнитная система с большим числом слоёв с переменным направлением тока в каждом из них.

Аппроксимация токораспределения, соответствующего бессиловому полю, возможна в виде системы токовых слоёв с дискретно изменяющимся направлением тока [25] (рис. 6.4,а). Резкое снижение напряжений в тонкостенном цилиндре с током, направленным под углом к оси, близким к $\pi/4$, было показано в работе [24].

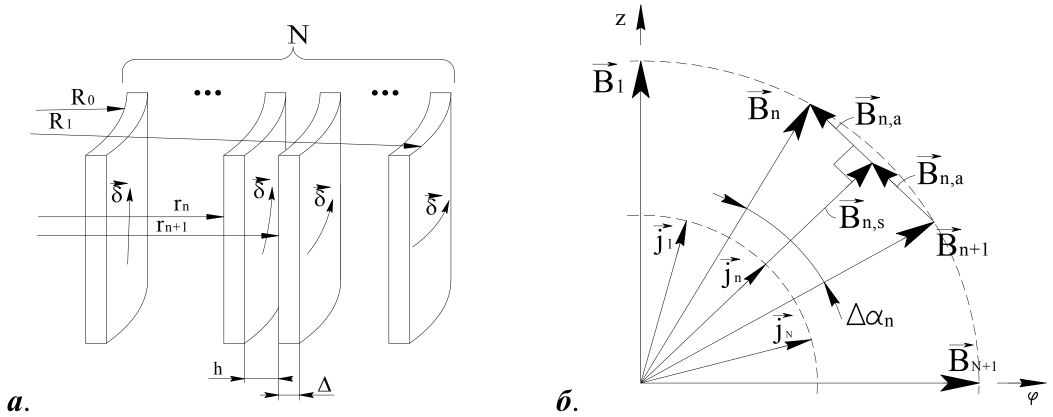


Рис. 6.4. Квазибессиловая обмотка с токами переменного направления.
а - токи в слоях обмотки;
б - векторная диаграмма линейных токов и индукции

На рис. 6.4,б представлена векторная диаграмма токов в N слоях обмотки, толщина которой много меньше радиуса. Диаграмма построена для случая, когда угол наклона векторов линейной плотности тока $\mathbf{J}$ в n-м слое составляет $\pi(n-1/2)/(2N)$. Здесь отсчёт слоёв идёт от внутреннего (ближайшего к оси соленоида) слоя. В рассматриваемом случае углы между векторами $\mathbf{J}$ в соседних слоях одинаковы и равны $\pi/(2N)$, а их модули равны. При таком распределении токов вектора индукции также равны по модулю. Они изменяют свой наклон по отношению к оси z от нуля до $\pi/2$. При этом выполняется условие, связывающее вектор $\mathbf{J}$ со скачком индукции при переходе через n-ый слой:

$$\mathbf{J}_{\text{n}} = \frac{[(\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_n), \mathbf{e}_r]}{\mu_0},$$

$$|\mathbf{J}_n| = B_0 2\sin(\pi/(4N)), \tag{6.17}$$

где орт $\mathbf{e}_r$ направлен по радиусу, то есть по направлению нормали к слоям обмотки.

В средней плоскости слоя вектора плотности тока $\boldsymbol{\delta}_n = \mathbf{J}_{\text{n}}/\Delta$ и вектор индукции параллельны. В этой точке радиальная сила $f_r = \delta_\varphi B_z - \delta_z B_\varphi$ равна нулю. Левее и правее этой плоскости f_r меняет свой знак. Таким образом, имеет место частичная компенсация составляющих объёмной силы $\delta_\varphi B_z$ и $(-\delta_z B_\varphi)$.

На краях слоя угол между векторами $\boldsymbol{\delta}_n$ и $\mathbf{B}$ составляет $\pi/(4N)$, а объёмная сила в рассмотренном примере принимает значение

$$f_r(1) = -f_r(2) = \frac{|j_n| B_0}{\Delta \mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{4N}\right). \tag{6.18}$$

Оценочное значение азимутального напряжения в средней плоскости слоя есть $\sigma' \approx f(1)\cdot\frac{\Delta}{2}$.

В системе с большим числом слоёв $\sin(n/(4N)) \approx \pi/(4N)$, поэтому в соответствии с формулами (6.17) и (6.18) имеет следующее приближенное выражение для азимутального напряжения:

$$\sigma_\varphi \approx \frac{B_0^2}{\mu_0} \cdot \frac{\pi^2}{16N^2}. \tag{6.19}$$

Важно отметить, что напряжение обратно пропорционально квадрату числа слоёв.

Следуя работе [25], можно выполнить более строгий расчёт напряжения. Введем координату x, которая отсчитывается от внутренней границы n-го слоя: $x = r - r_n$. Аксиальная составляющая плотности тока в этом слое не зависит от x и равна $\delta_{z,n}$, а азимутальная определяется по формуле $\delta_\varphi = \delta_{\varphi,n} \cdot r_n/(r_n + x)$. С точностью до слагаемых порядка x/r_n, справедливо выражение для объемной силы:

$$f_r(x) \approx \delta_{\varphi,n} B_z(r_n)(1 - x/r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)(1 - x/r_n) - \mu_0 x\left(\delta_{\varphi,n}{}^2 + \delta_{z,n}{}^2\right). \tag{6.20}$$

Равнодействующая объемных сил в точке x есть

$$F_{r,n}(x) = \delta_{\varphi,n} B_z(r_n) x\left(1 - \frac{x}{2r_n}\right) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n) x\left(1 - \frac{x}{2r_n}\right) -$$

$$- \frac{\mu_0 x^2}{2}\left(\delta_{\varphi,n}{}^2 + \delta_{z,n}{}^2\right) = a_n x + b_n \frac{x^2}{2}, \tag{6.21}$$

где $a_n = \delta_{\varphi,n} B_z(r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)$, $b_n = -a_n/r_n - \mu_0\left(\delta_{\varphi,n}{}^2 + \delta_{z,n}{}^2\right)$.

Объемная сила знакопеременна в слое, а ее интеграл $F_{r,n}(x)$ достигает максимума в точке с координатой $x = \Delta/2$. Соответствующее значение $F_{r,n}(\Delta/2)$ определяется двумя равноценными формулами:

$$F_{\max,n} = \left(\delta_{\varphi,n} B_z(r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)\right) \cdot \frac{\Delta}{4}; \tag{6.22}$$

$$F_{\max,n} = \frac{\mu_0 \Delta^2}{8}\left(\delta_{z,n}{}^2 + \delta_{\varphi,n}{}^2 + \frac{\delta_{\varphi,n} B_z(r_n) - \delta_{z,n} B_\varphi(r_n)}{\mu_0 r_n}\right). \tag{6.23}$$

Плотность тока в слоях имеет порядок величины $B_0/(\mu_0\Delta N)$, где B_0 - индукция на оси. Следовательно, согласно (6.22), $F_{\max,n}$ является величиной порядка $B_0{}^2/(\mu_0 N^2)$.

Для расчета напряжений при заданном распределении объемных электромагнитных сил в слое можно воспользоваться известными формулами теории упругости:

$$\sigma_{r,\varphi} = -\frac{1+\theta}{2}\int_{r_n}^{r} f(r)dr \mp \frac{1-\theta}{2r^2}\int_{r_n}^{r} f(r)r^2 dr + C_1 \mp \frac{C_2}{r^2}, \qquad (6.24)$$

где $f(r)$ - радиальная объемная сила, $\theta = \mu$ в случае свободных концов напряженного цилиндра, и $\theta = \mu(1-\mu)$ в случае жесткой заделки концов (μ - коэффициент Пуассона). В формуле (6.24) C_1 и C_2 - постоянные, определяемые граничными условиями $\sigma_r(r_n) = 0$ и $\sigma_r(r_n + \Delta) = 0$. Далее, воспользуемся формулой (6.20) для f_r и представим выражение (6.24) в виде разложения по степеням малого параметра (x/r_n), где $x = r - r_n$, при этом отбросим члены порядка x^2/r_n и выше:

$$\sigma_{r,\varphi} \approx -\frac{1+\theta}{2}\left(a_n x + \frac{b_n x^2}{2}\right) \mp \frac{1-\theta}{2}\left[a_n x + \frac{b_n x^2}{2}\right] + C_1 \mp \frac{C_2}{r_n{}^2}\left(1 - \frac{2x}{r_n}\right), \quad (6.25)$$

где a_n и b_n определены выше. Условия $\sigma_r(0) = 0$ и $\sigma_r(\Delta) = 0$ позволяют найти постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 \cong -(1-\theta)a_n \frac{\Delta}{12}; \;\; C_2 = C_1 \cdot r_n{}^2. \qquad (6.26)$$

С учетом условия равновесия слоя $a_n\Delta + b_n \Delta^2/2 = 0$ приходим к следующим приближенным выражениям для напряжений (без членов порядка Δ^2/r_n):

$$\sigma_r \approx -a_n\left(x - \frac{x^2}{\Delta}\right);$$

$$\sigma_\varphi = -a_n\theta\left(x - \frac{x^2}{\Delta}\right) - (1-\theta)a_n\frac{\Delta}{6}. \qquad (6.27)$$

Модули обоих напряжений имеют максимальное значение в середине слоя ($x = \Delta/2$):

$$\left|\sigma_r\right|_{\max} = F_{\max,n};$$

$$\left|\sigma_\varphi\right|_{\max} = F_{\max,n}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}\right). \qquad (6.28)$$

Обе компоненты тензора напряжений лишь численными множителями, близкими к единице, отличаются от максимального значения равнодействующей объемных сил $(F_n)_{\max} = a_n\,\Delta/4$.

В качестве примера рассмотрим обмотку малой кривизны, когда членами Δ/r_n можно пренебречь. Фактически это система N плоских проводящих слоев толщиной Δ. Для простоты примем, что толщина изоляционных прослоек между слоями пренебрежимо мала. В пределе $N \to \infty$ имеет место бессиловое поле, в котором $|B| = \sqrt{B_z{}^2 + B_\varphi{}^2} = \mathrm{const}$. Выразим токи $\delta_{z,n}$ и $\delta_{\varphi,n}$ через индукции по обе стороны n-го слоя: $\delta_{\varphi,n} = -\left(B_{z,n+1} - B_{z,n}\right)/(\mu_0\Delta)$; $\delta_{z,n} = \left(B_{\varphi,n+1} - B_{\varphi,n}\right)/(\mu_0\Delta)$. Тогда выражения для максимальных значений равнодействующих сил в уравновешенных слоях принимают вид:

$$(F_n)_{\max} = \frac{1}{4\mu_0}\left[B_{z,n}{}^2 + B_{\varphi,n}{}^2 - \left(B_{z,n}\cdot B_{z,n+1} + B_{\varphi,n}\cdot B_{\varphi,n+1}\right)\right]. \qquad (6.29)$$

На внутренней границе имеем: $B_{z,1} = B_0$, $B_{\varphi,1} = 0$; на внешней: $B_{z,N+1} = 0$; $B_{\varphi,N+1} = B_0$, где N - число слоев. В рассмотренном выше примере компоненты индукции описывались формулами, вытекающими из (6.17)

$$B_{z,n} = B_0 \cos\frac{(n-1)\Delta\pi}{2d}; \; B_{\varphi,n} = B_0 \sin\frac{(n-1)\Delta\pi}{2d}, \qquad (6.30а)$$

где $d \approx N\Delta$ - толщина обмотки.
В этом примере

$$(F_n)_{\max} = \frac{B_0^{\,2}}{4\mu_0}\left(1 - \cos\frac{\Delta\pi}{2d}\right) \qquad (6.30б)$$

Иначе говоря, равнодействующие одинаковы во всех слоях, и обмотка является равнонагруженной. При этом максимальное значение объемной силы в каждом слое имеет место на его внутренней границе ($x = 0$) и составляет

$$f_{\max} = \frac{B_0^{\,2}}{\mu_0\Delta}\left(1 - \cos\frac{\Delta\pi}{2d}\right). \qquad (6.30в)$$

В частном случае одного слоя $\Delta = d$, $F_{\max} = 0{,}5 B_0^{\,2} / (2\mu_0)$. Для двух и трех слоев имеем, соответственно, $F_{\max} \approx 0{,}15 B_0^{\,2} / (2\mu_0)$ и $F_{\max} \approx 0{,}065 B_0^{\,2} / (2\mu_0)$. Приведенные оценки показывают, что даже сравнительно простые 2-х и 3-х слойные системы с токами переменного направления могут обеспечить резкое снижение напряжений в слое по сравнению с магнитным давлением поля с индукцией B_0. В первом из этих примеров вектор плотности тока в слое направлен под углом $\pi/4$ к оси z, во втором и третьем — направление этого вектора изменяется одинаковыми скачками при переходе от слоя к слою. Такая же картина имеет место и в общем случае N слоев. При $N >> 1$ имеем $\Delta\pi/(2d) = \pi/(2N) << 1$, следовательно,

$$F_{\max} \approx \frac{B_0{}^2}{2\mu_0} \cdot \frac{\pi^2}{16N^2}, \quad f_{\max} \approx \frac{B_0{}^2 \pi^2}{8\mu_0 \Delta N^2}. \tag{6.31}$$

Порядок величины $F_{\max}$ соответствует приведенной выше оценке: $F_{\max} = \text{const}/N^2$. Этот же результат подтверждается численными расчетами реальных систем без допущения о малой кривизне проводников.

На рис. 6.5 приведены результаты компьютерных расчетов равнонагруженной пятислойной обмотки с цилиндрическими слоями.

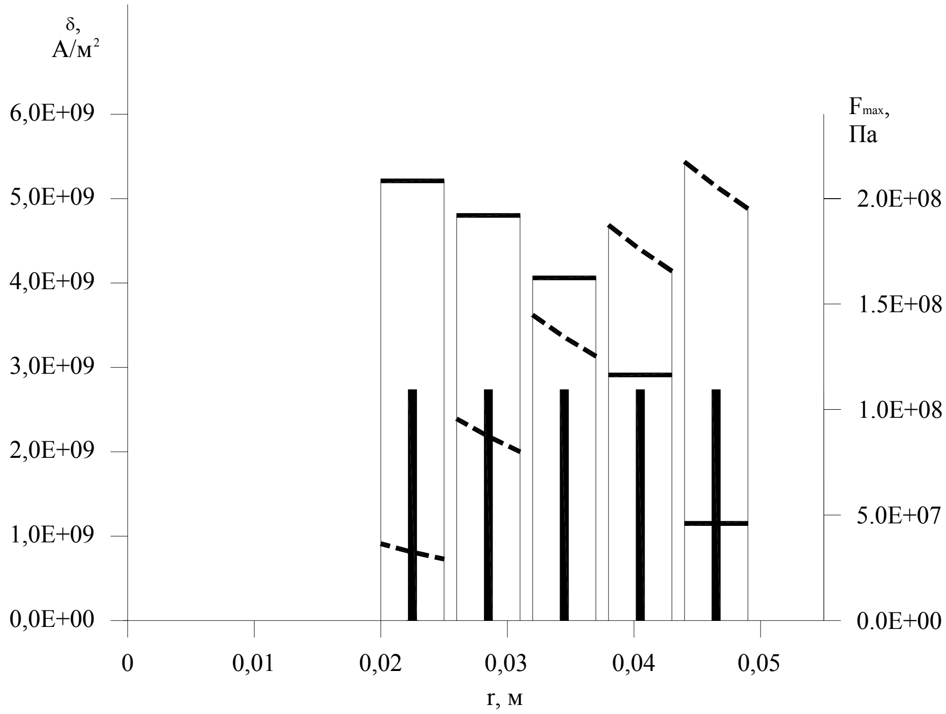


Рис. 6.5. Распределение равнодействующей объёмной силы и плотностей тока в квазибессиловой обмотке, состоящей из 5 слоёв с наклонными токами (компьютерный расчет): — – δ_z , ▪▪▪▪ – δ_φ , ▌– $F_{\max}$

Сравнение с рис. 6.3 показывает, что при сопоставимых параметрах напряжения в слоях с токами переменного направления примерно в 7 раз ниже, чем в системе с парами токоведущих слоев. При

$B_0 = 100$ Т максимальное значение равнодействующих F_{max} составляет $1{,}1 \cdot 10^8$ Па. Отметим: что расчет по формуле (6.31), не учитывающей кривизну слоев, дает близкий результат ($F_{max} = 0{,}97 \cdot 10^8$ Па).

Далее приведем результаты расчета напряжений в слоях обмотки, толщина которых достаточно мала, чтобы можно было пренебречь поправочными членами порядка Δ / r_n в формулах (6.28) и использовать приведенные выше формулы, связывающие величины F_{max} и B_0. Допустимое напряжение проводника $\sigma_1 = B_{M1}^2 / (2\mu_0)$ должно удовлетворять условию $\sigma_1 \le \sigma_m$, где эквивалентное напряжение σ_m определяется по формуле фон Мизеса

$$\sigma_m = (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi)^{1/2} \tag{6.32}$$

Прочность тонкой квазибессиловой обмотки, состоящей из N слоев, может быть обеспечена при условии:

$$B_0 \le \lambda_0 N B_{M1}, \tag{6.33}$$

где B_0 - индукция на оси магнита, B_{M1} - «магнитный предел прочности» материала обмотки. Здесь λ_0 - численный множитель. Расчеты, в которых использован прочностной критерий фон Мизеса, позволяют найти значения параметра λ_0. В однослойной системе $\lambda_0 = \sqrt{2}G$, где $G \approx (1/3 - \mu/3 + (\mu/3 + 2/3)^2)^{-1/4}$. В этой формуле μ - коэффициент Пуассона. Число $G \approx 1{,}05$, если $\mu = 0{,}33$, поэтому в этой системе $B_0 = 1{,}48 B_{M1}$. В многослойной системе при распределении токов по слоям по закону, близкому к синусоидальному, имеем $\lambda_0 = (4/\pi)G \approx 1{,}33$.

6.3. Внешняя зона квазибессилового магнита большой длины

Согласно теореме вириала [26], бессиловое поле в ограниченной области T_1 может существовать только в присутствии внешних проводников с током, подверженных воздействию электромагнитных сил. Например, в случае тонкостенного цилиндра с квазибессиловой обмоткой, рассмотренного в § 6.1, (рис. 6.6) магнитное поле с индукцией B_0 создается в области T_0 $(0 < r < R_0)$, квизибессиловая обмотка уложена в области T_1 $(R_0 < r < R_1)$, а в области T_2 $(R_1 < r < R_2)$ распределен обратный полоидальный ток. В области обратного тока магнитное поле имеет лишь азимутальную составляющую, и электромагнитные силы в этой области отличны от нуля.

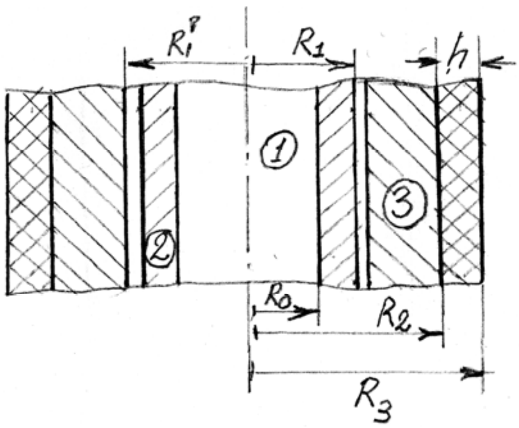


Рис. 6.6. Соленоид с бессиловой обмоткой и
осевым обратным током, проходящим через область 3

В этой системе может быть использован внешний бандаж для дополнительного крепления обмотки. Рассмотрим эти силы и сравним их с силами, действующими в обычном соленоиде при равных значениях индукции B_0. При этом ограничимся примерами, когда толщина бессиловой обмотки мала $h_1 << R_0$.

В обычном соленоиде с азимутальным током, в котором усилие воспринимается цилиндрической стенкой с толщиной h_1 (h_1 - толщина обмотки или бандажа, удерживающего витки, если прочность системы определяется бандажом), азимутальные напряжения σ_1' и σ_1'' для предельных случаев $h_1 << R_0$ и $h_1 >> R_0$, можно найти по формулам (5.7) и (5.8).

Сравним эти напряжения с теми, которые возникают в соленоиде с тонкой бессиловой обмоткой, в котором ток возвращается по поверхности цилиндра с радиусом R_2 и толщиной стенки h_2. В таком соленоиде внутренняя цилиндрическая стенка, где уложена бессиловая обмотка, не нагружена, а во внешней возникает напряжение

$$\sigma_2' = \frac{B_i^2}{2\mu_0} \cdot \frac{R_1^2}{R_2 h_2}, \qquad \text{если } h_2 << R_2, \text{ и} \tag{6.34}$$

$$\sigma_2'' = \frac{B_i^2}{2\mu_0} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}, \qquad \text{если } h_2 >> R_2. \tag{6.35}$$

Отношение напряжений, определяемых по формулам (5.7), (5.8) и (6.34), (6.35), суть

$$\frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = \frac{R_1 h_1}{R_2 h_2}; \qquad \frac{\sigma_2''}{\sigma_1''} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2.$$

В частности, при $h_1 = h_2 << R_1$ напряжения σ_1' и σ_1'' находятся в отношении, обратном отношению радиусов. Иначе говоря, удаляя обратный ток в соленоиде с квазибессиловой обмоткой, можно существенно уменьшить механические напряжения в элементах конструкции по сравнению с теми, которые имеют место в соленоиде с азимутальным током и таким же внутренним радиусом.

Азимутальные напряжения могут быть в еще большей степени снижены в соленоиде с объемным оптимизированным распределением тока.

В системе с отводом полоидального тока от торцов радиальные силы распределены во внешней области $r_1 < r < R_2$ (рис. 6.6), где они воспринимаются диэлектрическими цилиндрами (бандажами). Наиболее компактной является система с равнонагруженными бандажами. Простейшая модель этой системы была основана на допущении, что число бандажей велико, их толщины малы, и они механически не взаимодействуют. В рамках этой модели распределение полоидального тока по радиусу считается непрерывным. При этом для азимутального напряжения справедливо выражение:

$$\sigma_\varphi \approx rB_\varphi \delta_z = -\mu_0 \psi_i \frac{d\psi_i}{dr} \cdot \frac{1}{r}, \tag{6.36}$$

где $\psi_i = rH_\varphi$ - функция тока.

В равнонагруженной системе напряжения во всех слоях одинаковы: $\sigma_\varphi = \sigma_2 = B_{M2}^2 / (2\mu_0)$, где B_{M2} - «магнитный предел прочности» материала бандажей. При этом решение уравнения (6.36) имеет вид

$$\psi_i(r) = \left(C - r^2 \sigma_2 / \mu_0\right)^{1/2}, \tag{6.37}$$

где постоянная интегрирования c может быть найдена из условия на внутренней границе равнонагруженной области магнитной системы: $\psi_i\,(r_1) = B_\varphi(r_1) r_1 / \mu_0 = B_\varphi(R_1) R_1 / \mu_0 = \psi_{i,0}$, где r_1 - внутренняя граница области, в которой замыкается полоидальный ток (рис. 6.6), Отсюда следуют выражения для C и $\psi_i(r)$:

$$C = (\psi_{i,0})^2 (1 + \alpha_2' / 2), \qquad \psi_i(r) = \psi_{i,0}[1 + (\alpha_2' / 2)(1 - r^2 / r_1{}^2]^{1/2}, \tag{6.38}$$

где $r \geq r_1$.

В этой формуле $\alpha_2' = 2\mu_0\sigma_2 / B_\varphi^2(r_1) = \alpha_2 (r_1/R_1)^2 (B_0^2 / B_\varphi^2(R_1^2))$, где

$$\alpha_2 = 2\mu_0\sigma_2 / B_0^2 \tag{6.39}$$

- прочностной параметр внешней зоны магнита. В системе без зазора между квазибессиловой обмоткой и внешней зоной магнита выполняются равенства $r_1 = R_1$, $\alpha_2' = \alpha_2$.

При полном замыкании тока в толще внешней зоны обмотки, когда $B_\varphi(R_2) = 0$, имеем следующее выражение для функции потока, индукции и аспектного отношения $A = R_2 / R_1$:

$$\frac{\psi_i(r)}{\psi_{i,0}} = \sqrt{\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - r_1^2}} = \sqrt{1 + \frac{\alpha_1}{2}(1-\rho_1^2)_-} = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 - \rho^2\right]}; \tag{6.40}$$

$$B_\varphi(r) = B_\varphi(r_1)\frac{r_1}{r}\sqrt{\frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - r_1^2}}; \tag{6.41}$$

$$A = \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{R_1}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}}, \tag{6.42}$$

где $\rho = r/R_1$. Максимальное значение ρ есть $\rho_{\max} = R_2/R_1$. В наиболее интересном случае, когда $\alpha << 1$, аспектное отношение практически не зависит от r_1.

Формула (6.42) связывает два характерных безразмерных параметра A и $\mu_0[\sigma] / B_0{}^2$ и позволяет найти один из них при известном другом. В частности, при необходимости получить поле с индукцией B_0 в цилиндре с заданным радиусом R_1 при заданном напряжении в материале $[\sigma_2]$ и условии $R_1 = r_1$ следует выбрать внешний радиус соленоида по формуле

$$R_2 = R_1\sqrt{\frac{B_0^{\ 2}}{\mu_0[\sigma_2]}+1}\,. \qquad (6.43)$$

Механическое напряжение в этом примере связано с магнитным давлением поля B_0 соотношением

$$[\sigma_2] = \frac{B_0^{\ 2}}{2\mu_0}\cdot\frac{2R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2}}\,. \qquad (6.44)$$

Например, в магните с аспектным отношением $A = 5$ отношение $\mu_0[\sigma]\big/B_0^{\ 2}$ есть 1/12, то есть применение толстостенного каркаса с распределенным по его толще обратным током приводит к резкому снижению напряжения в области 2 по отношению к магнитному давлению генерируемого поля.

Сравним механические напряжения в каркасе соленоида с бессиловой обмоткой и в многослойном соленоиде с оптимизированным распределением азимутального тока. Последний рассматривался в § 5.2, где было получено соотношение, связывающее характерные параметры:

$$A = \frac{R_2}{R_1} = \exp\left[\frac{B_0^{\ 2}}{2\mu_0[\sigma]}\right]. \qquad (6.45)$$

Очевидно, что при заданном значении числа A отношение $2\mu_0[\sigma]\big/B_0^{\ 2}$ в соленоиде с бессиловой обмоткой и распределенным обратным током много меньше, чем в соленоиде с многослойной обмоткой. При этом индукция B_φ в первом случае спадает в области T_2 резче, чем индукция B_z во втором. Более быстрый спад по радиусу B_φ, чем B_z, имеет место и при других законах распределения тока δ_z или, соответственно, δ_φ (например, при $\delta_{\varphi,\,z} = \mathrm{const}$). Это обстоятельство является причиной того, что в магнитах с большим аспектным отношением усилия в соленоиде с бессиловой обмоткой и распределенным обратным осевым током много ниже, чем в многовитковом многослойном магните при равных значениях индукции в центре и равных отношениях R_2/R_1.

В рассмотренном примере плотность аксиального тока неограниченно растет на краю расчетной области (при $r = R_2$):

$$\delta_z = -\frac{B_{M2}}{\mu_0\sqrt{2\left(R_2^2 - r^2\right)}}. \tag{6.46}$$

Этот эффект отсутствует в системе с внешним проводящим слоем, по которому замыкается часть тока. Вначале рассмотрим случай, когда этот слой удерживается бандажом, толщина которого мала: $h << R_2$. На этот слой воздействует магнитное давление $B_\varphi^2(R_2)/(2\mu_0)$, и в бандаже возникает азимутальное напряжение $\sigma_\varphi \approx \left[B_\varphi^2(R_2)/(2\mu_0)\right](R_2/h) = \sigma_2$. При условии $r_1 \approx R_1$ функция тока и индукция на оси магнита могут быть рассчитаны по формулам:

$$\psi_i(r) = \frac{B_{M2}R_2}{\sqrt{2}\mu_0}\sqrt{1 + \frac{2h}{R_2} - \frac{r^2}{R_2^2}}; \quad B_\varphi(R_1) = \frac{B_{M2}R_2}{\sqrt{2}R_1}\sqrt{1 + \frac{2h}{R_2} - \frac{R_1^2}{R_2^2}}. \tag{6.47}$$

В рассматриваемой системе по внешнему проводнику замыкается лишь малая часть тока Δi. Это можно показать на примере, когда $h = R_1^2/(2R_2)$. В этом примере:

$$B_\varphi(r) = B_\varphi(R_1)\frac{R_1}{r}\sqrt{1 - \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2}}; \; B_\varphi(R_2) = B_\varphi(R_1)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{B_{M2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R_1}{R_2}, \tag{6.48}$$

Рассмотрим далее систему, в которой азимутальное напряжение постоянно в области $r_1 < r < R_2$, и равно напряжению на внутренней границе бандажа ($r = R_2$). Для этого случая получены выражения для аспектных отношений. В общем случае азимутальная компонента индукции в равнонагруженной области $r_1 < r < R_2$ может быть рассчитана по формуле:

$$B_\varphi(r) = \frac{r_1}{r}\left[1 + \frac{\alpha_2}{2}(1 - \frac{r^2}{r_1^2})\right]^{1/2} \tag{6.49}$$

Вычисления приводят к следующим зависимостям для аспектных отношений:

$$\begin{aligned} A &= R_2 / R_1 = ((r_1 / R_1)^2 + 2/\alpha)^{1/2}(1+\Omega)^{-1/2}; \\ A_1 &= R_2 / r_1 = (1 + 2/\alpha_1)^{1/2}(1+\Omega)^{-1/2} \end{aligned}, \tag{6.51}$$

где $\Omega = (2/\xi)(\theta_e^2 - 1)/(\theta_e^2 + 1)$, $\theta_e = R_3/R_2$. Параметр Ω близок к нулю в предельном случае, когда $\theta_e \approx 1$, и равен $2/\sqrt{3}$, если $\theta_e >> 1$.

В отличие от коаксиальной системы без токоотвода наименьшее значение внешнего радиуса магнита r_n имеет место в случае, когда толщина внешнего бандажа мала, то есть при условии $\theta_e \approx 1$, и $R_3 \approx R_2$.

6.4. Бессиловые конфигурации, аналогом которых является обмотка квазибессилового магнита

***Проблема построения бессиловых конфигураций, удовлетворяющих характерным граничным условиям*.**

Аксиально-симметричные квазибессиловые магнитные системы состоят из областей $T_{0,1,2}$ и T' (рис. 6.7). Первая из них - приосевая рабочая зона магнита T_0 и примыкающая к ней внешняя область поля. В области T_1 располагается квазибессиловая обмотка, состоящая из N уравновешенных токовых слоев. Здесь индукция магнитного поля и плотность тока имеют как азимутальную, так и полоидальную компоненты. При этом линейная плотность тока в каждом слое выбрана так, что все слои находятся в состоянии равновесия. Простейшие системы такого рода рассмотрены в § 6.1.

Аналогами квазибессиловой обмотки могут быть рассматриваемые в данном параграфе строго бессиловые магнитные системы. В системе, представленной на рис. 6.7, вне обмотки существует также внешняя область T_2, где распределен полоидальный ток. В этой системе область бессилового поля T_1 граничит с полоидальным полем с внутренней стороны $(r = R_0)$ и с азимутальным полем - с внешней стороны ($r = R_1$). На этих границах магнитное давление не имеет скачка. В области T_2 индукция полоидального поля пренебрежимо мала. Здесь электромагнитная сила воздействует на проводники с полоидальным током, и нагрузка воспринимается системой бандажей,

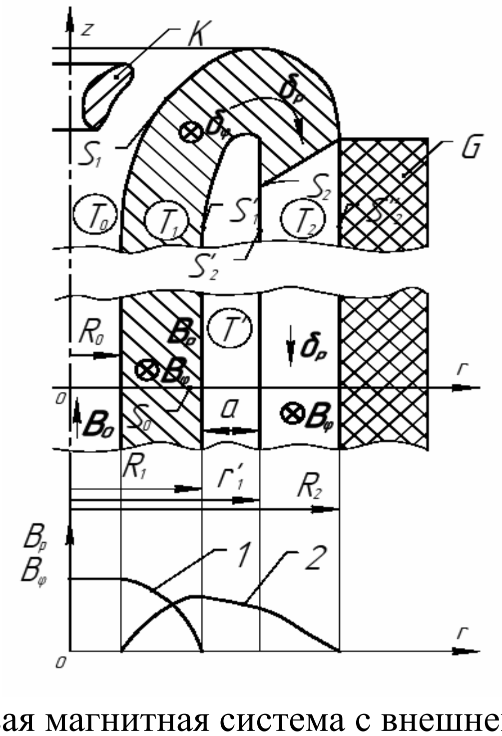


Рис. 6.7. Бессиловая магнитная система с внешней областью T_2, где отсутствует азимутальный ток и размещены равнонагруженные бандажи: G - внешний бандаж, K - контур со сторонним током

1. - $B_p(r)$; 2 - $B_\varphi(r)$.

размещенных в области T_2, а также внешним бандажом G. В общем случае индукция в области T_2 может иметь как азимутальную, так и полоидальную компоненты. Последняя относительно мала, если азимутальный ток в области T_2 отсутствует. Между внутренней и внешней областями может существовать промежуточная область T', в которой нет проводников с током. В областях T_2 и T', как и в области T_0, могут находиться контура со сторонним или индуцированным азимутальным током. Некоторый интерес могут представлять конфигурации, в которых область T' отсутствует ($a = 0$, рис. 6.7).

Иная ситуация имеет место в системе, представленной на рис. 6.8. В ней отсутствует область T_2 с полоидальным током, где

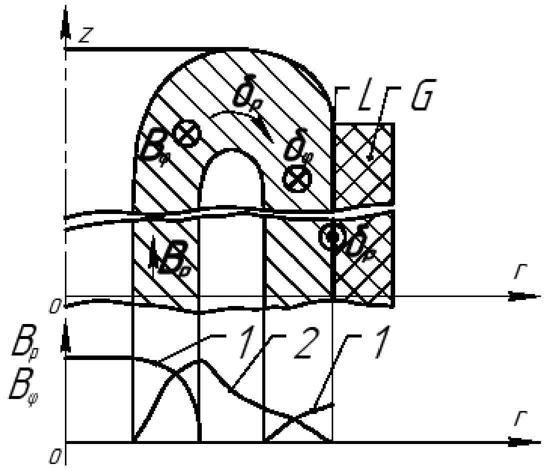


Рис. 6.8. Система, в которой магнитное давление формируется в слое L на краю бессиловой зоны и воспринимается внешним бандажом G

радиальные силы воспринимаются бандажами. Магнитное давление изменяется непрерывно вплоть до внешней границы ($r = R_2$). Например, в случае тонкого слоя магнитное давление постоянно в промежутке $R_0 < r < R_2$. Индукция полоидального поля нарастает в промежутке $r' < r < R_2$ при приближении к внешней границе. При переходе через границу указанная индукция и магнитное давление скачком обрываются до нуля. Это означает, что на внешней границе бессиловой области T_1 существует поверхностный ток. В реальной магнитной системе этого типа на внешней части границы S_1 должен находиться цилиндр S_1'' с азимутальным током. На поверхность этого цилиндра действует магнитное давление $B^2(R_2)/(2\mu_0)$, воспринимаемое внешним бандажом. Скачка индукции полоидального поля на внешней границе можно избежать, если расположить снаружи соосный диамагнитный экран (рис. 6.9). В этом случае электромагнитные силы воздействуют на экран, поскольку скачок индукции имеет место не на краю обмотки, а на поверхности экрана. Из сравнения рассмотренных конфигураций видно, что первая из них имеет преимущество с точки зрения обеспечения прочности магнитной системы. Как и в примере, рассмотренном в § 6.3, радиальные механические силы в области T_2 могут восприниматься системой равнонагруженных диэлектрических цилиндров (бандажей).

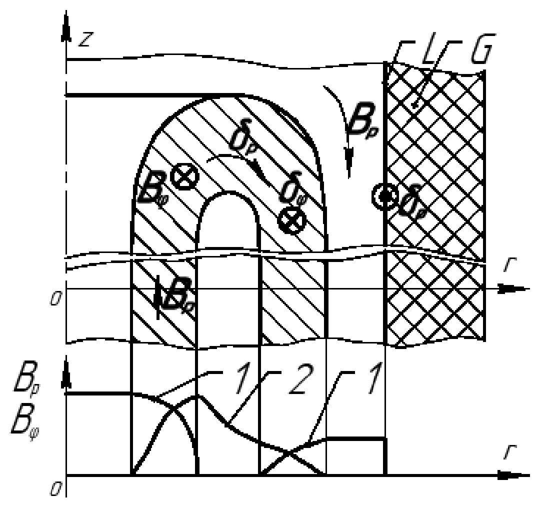


Рис. 6.9. Система, в которой на краю бессиловой обмотки отсутствует поверхностный ток благодаря применению замкнутого диамагнитного экрана L, воспринимающего нагрузку. ***1***. - $B_p(r)$; 2. $-B_\varphi(r)$.

Кроме того, нагрузка может восприниматься внешним бандажом G. В отличие от этого, в конфигурациях, представленных на рис. 6.8 и 6.9, нагрузка передается только на внешний бандаж, расположенный за токовым слоем, или на внешний экран.

В области T_1 магнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и дополнительному условию (6.1). Скалярная функция γ, фигурирующая в этом уравнении, принимает постоянное значение на каждой силовой линии магнитного поля.

В аксиально-симметричном поле компоненты плотности тока и напряженности магнитного поля выражаются через функцию тока $\psi_i = i/(2\pi)$ и функцию потока полоидального поля $\psi_B = rA_\varphi$, где A_φ - азимутальная компонента векторного потенциала:

$$\left.\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{\lambda}\delta_\varphi = \frac{\psi_i}{r} \\ H_z &= \frac{1}{\lambda}\delta_z = \frac{1}{\mu_0 r}\frac{\partial\psi_B}{\partial r} = \frac{1}{\lambda r}\frac{\partial\psi_i}{\partial r} \\ H_r &= \frac{1}{\lambda}\delta_r = -\frac{1}{\mu_0 r}\frac{\partial\psi_B}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda r}\frac{\partial\psi_i}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (6.52)$$

В области бессилового поля T_1 обе функции принимают постоянные значения на одних и тех же поверхностях и связаны соотношением:

$$\frac{\mu_0}{\lambda}\nabla\psi_i = \nabla\psi_B. \qquad (6.53)$$

Из уравнения Максвелла $\mathrm{rot}_\varphi\,\mathbf{H} = \delta_\varphi$ вытекает следующее уравнение, справедливое в области T_1:

$$\frac{\partial^2\psi_B}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_B}{\partial r}\right) + \mu_0 r\delta_\varphi = 0. \qquad (6.54)$$

Ему эквивалентно уравнение для функции ψ_i:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\right)+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\lambda r}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\right)+\lambda\psi_i=0, \qquad (6.55)$$

где $\lambda=f(\psi_i)$. Уравнение (6.55) использовалось для исследования тороидальных конфигураций.

В областях T_0, T_2 и T' вне размещенных там контуров с наведенными или сторонними азимутальными токами функция ψ_B удовлетворяет уравнению (6.54), где член $\mu_0 r\delta_\varphi$ отсутствует:

$$\frac{\partial^2\psi_B}{\partial z^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_B}{\partial r}\right)=0. \qquad (6.56)$$

Функции ψ_i и ψ_B должны удовлетворять определенным условиям на границах S_0, S_1, S_1' ,S_2, S_2' и S_2''. Граница S_0 является плоскостью симметрии. На этой границе выполнено условие $B_r=0$, или $\partial\psi_B/\partial z=0$.

На границах S_1, S_2, S_1' должно быть выполнено условие непрерывности функций ψ_i и ψ_B. Нормальные производные этих функций также не должны иметь скачка на этих границах, если на них отсутствует поверхностный ток.

Линия S_1 является образующей внутренней поверхности соленоида. На этой границе отсутствует нормальная компонента полоидальной плотности тока. Следовательно, нормальная компонента напряженности полоидального поля здесь равна нулю, и функция потока полоидального поля принимает постоянное значение: $\psi_B(S_1)=\psi_0$. При этом функция тока $\psi_i(S_1)=0$.

Таким образом, решение уравнения (6.55), описывающего бессиловое поле в области T_1, должно удовлетворять двум граничным условиям на S_1: $\psi_i(S_1)=0$ и $\left.(\partial\psi_i/\partial n)\right|_{S_1}=r\lambda B_\tau(S_1)/\mu_0$, где $B_\tau(S_1)$ - касательная составляющая напряженности «вакуумного» магнитного поля на границе.

Решение уравнения (6.55) определяется выбором зависимости $\lambda(\psi_i)$. Будем исходить из предположения, что рассматриваемые конфигурации являются концевыми частями магнита большой длины ($l >> 2R_0$). Вблизи средней плоскости такого магнита, где нет радиальной компоненты индукции и плотности тока, индукция в приосевой области T_0 практически не зависит от z: $B_z = B_0$, если $0 < r < R_0$. При этом в области T_1 ($R_0 < r < R_1$) $f_r = 0$, отсюда следует приведенное в § 6.1 уравнение (6.8), связывающее B_z и B_φ.

Для того, чтобы была реализована бессиловая система без поверхностных токов, необходимо, чтобы не только вдали от торцевых частей, но и на всех границах были выполнены условия непрерывности функций ψ_i и ψ_B и их нормальных производных.

Ограничимся далее случаем, когда $\lambda = \text{const}$ (линейная задача). При этом условии уравнение (6.54) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_B}{\partial r}\right) + \lambda^2 \psi_B = 0. \qquad (6.57)$$

В этом уравнении параметр λ отличен от нуля лишь в области T_1. В этой области функция тока ψ_i при условии $\lambda = \text{const}$ может быть представлена в виде $\psi_i = (\lambda / \mu_0)\psi'_B$, где $\psi' = \psi_B - \psi_0$. На границе S'_1 функция ψ_i принимает постоянное значение $\psi_i = \psi_{i,0} = i/(2\pi)$, где i – полный полоидальный ток в обмотке. В области T' это значение функции тока остается неизменным. В области T_2 азимутальное поле может быть сформировано путем такого выбора распределения полоидального тока, при котором выполняется условие непрерывности ψ_i на границе S_1. В общем случае в области T_2 существует как полоидальная компонента объемной электромагнитной силы $\mathbf{f_P} = [\boldsymbol{\delta}_\varphi, \mathbf{B_P}]$, так и азимутальная сила $\mathbf{f}_\varphi = [\boldsymbol{\delta}_P, \mathbf{B}_P]$. Последняя может быть сделана равной нулю при таком выборе токораспределения, когда выполнено условие $\boldsymbol{\delta}_P \| \mathbf{B}_P$.

На границе S_1 имеем $\psi'_B = 0$, а на границе S'_1 эта функция принимает постоянное значение $\psi'_B = \mu_0 i/(2\pi\lambda)$. При этих условиях на указанных границах и при заданном условии на границе S_0 решение уравнения (6.57) во всей расчетной области $T_0 + T_1 + T' + T_2$, должно удовлетворять ещё условию непрерывности нормальной производной функции ψ'_B. На границе S_2, где обрывается азимутальный ток, условие непрерывности функции выполняется автоматически. В отличие от этого, на границах S_1 и S'_1, где функция ψ'_B задана, а не определяется в ходе расчета, второе граничное условие не выполняется. Ситуация в данном случае типична для некорректных задач математической физики: невозможно на границе произвольного вида выполнить сразу два граничных условия подобно тому, как в задачах электростатики нельзя задать на границе одновременно потенциал и его нормальную производную.

Добиться выполнения двух граничных условий на S_1 и S'_1 можно следующими способами, применяя их совместно или по-отдельности: путем вариации формы границ S_1, S'_1, границы S_2 и путем размещения в областях T_0 и T_2 диамагнитных тел или контуров с током.

Пример подобного построения показан на рис. 6.10, где представлен фрагмент плоского бессилового поля. В этом примере границы S_1 и S_2 фиксированы, участок S'_1 отсутствует. На участке границы S_0 распределение индукции задано в виде следующей зависимости от координаты x: $B_y = B_0 \cos[\lambda(x - x(a)]$, при этом $\lambda = (\pi / 2d)$, где $d = x(b) - x(a)$. В области T_2 размещены диамагнитные тела. Задавая на них значения ψ'_B, можно путём серии пробных расчетов добиться приближенного совпадения нормальных производных $\partial\psi'_B/\partial n$ на обеих сторонах границы S_1 в фиксированных точках. В рассмотренном примере линии полоидального поля в области T_1 одновременно являются линиями полоидального тока. Этот ток отводится из области бессилового поля, то есть из области обмотки, во внешнюю область T_2.

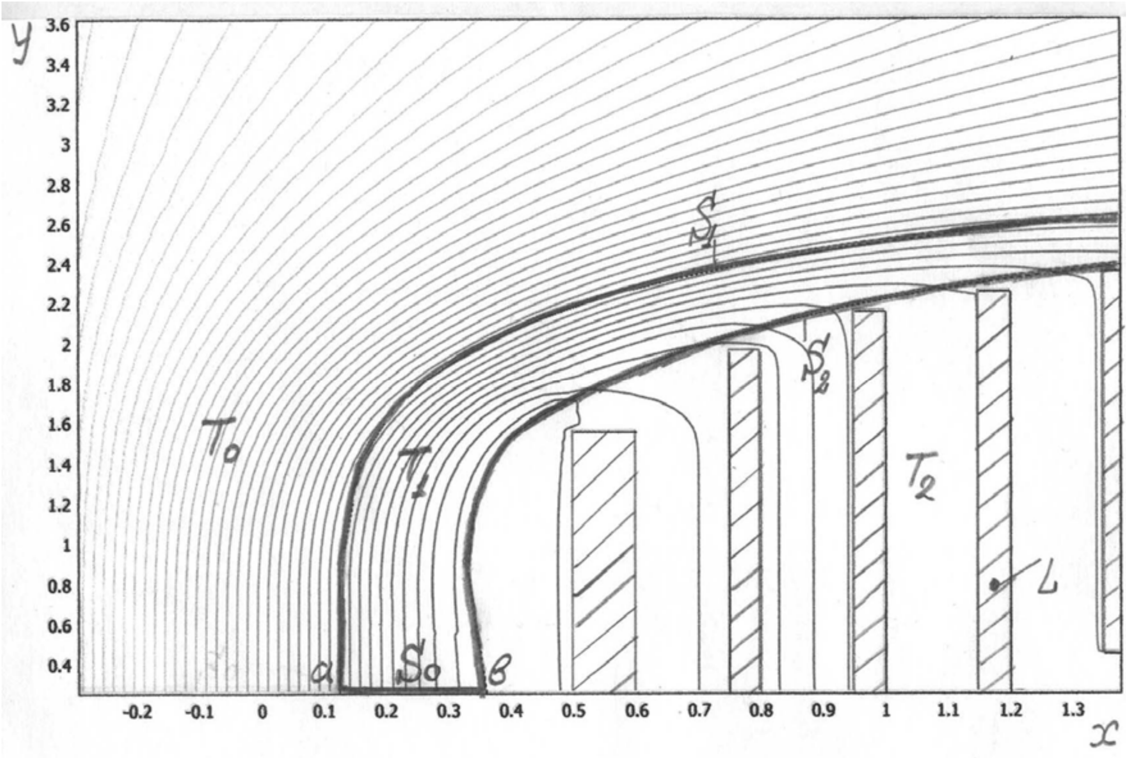


Рис. 6.10. Фрагмент плоского бессилового поля
у края магнитной системы.
На рисунке показаны линии полоидального поля.
В области T_2 размещены диамагнитные тела L

Представляет интерес и несколько иная постановка задачи, открывающая дополнительные возможности построения бессилового поля: можно рассматривать S_2 (рис. 6.7) как границу с заданным распределением функции потока полоидального поля. В этом случае расчётная область для функции ψ'_B распадается на две: T_1 и $T_0 + T' + T_2$. Непрерывность нормальной производной $\partial \psi'_B / \partial n$ на границах S_1 и S_2 в этом случае может быть достигнута не только упомянутыми выше способами, но и путем вариации распределения ψ'_B на границе S_2. При этом одновременно варьируется распределение функции тока, то есть формируется распределение полоидального тока на указанной границе путем целенаправленного отвода тока из области T_1 в область T_2 через границу S_2. Токоотвод удобно использовать при построении обмоток малой толщины.

Вопросу о выборе конфигурации бессиловых обмоток, удовлетворяющих условиям непрерывности как функции потока полоидального поля, так и ее нормальной производной, не уделялось должного внимания в литературе. Например, в ряде работ рассчитаны тороидальные системы, на границах которых нарушено условие непрерывности $\partial\psi'_B/\partial n$, то есть в таких системах имеет место поверхностный азимутальный ток.

Особенности токораспределения в торцевой зоне бессилового магнита с малой толщиной обмотки и плоской границей

Рассмотрим вначале магнитную систему, у которой граница S_1на периферии торцевой части переходит в плоскость. Простейшим примером является магнитная система, периферийная часть которой представляет собой слой толщиной d, заключенный между плоскими параллельными границами S_1 и S'_1. Примем, что параллельно S_1 размещен диамагнитный экран, отделенный от S_1 зазором постоянной толщины h (рис. 6.11).

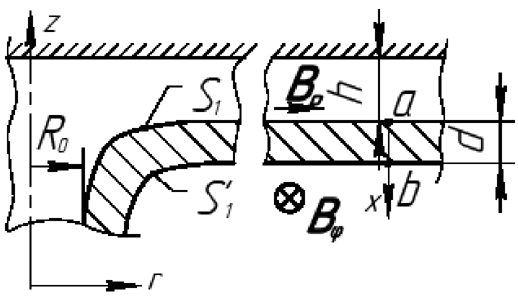


Рис. 6.11. Магнитная система с плоским торцевым экраном

Индукция в этом зазоре изменяется по закону

$$B_r(a) = \frac{\psi_0}{rh}. \tag{6.58}$$

В реальной магнитной системе с плоским экраном это распределение полоидального поля имеет место, если $r - R_0 >> h$, где R_0 - внутренний радиус магнита.

При отсутствии токоотвода с границы S_1' зависимость индукции азимутального поля от радиуса имеет вид:

$$B_\varphi(b) = \mu_0 \frac{\psi_i}{r} \tag{6.59}$$

Обе функции ψ_0 и ψ_i принимают на указанных границах постоянные значения. Отметим, что $B_r(b) = 0$, $B_\varphi(a) = 0$. В рассматриваемой системе имеет место решение системы уравнений (6.53), (6.55), не зависящее от координаты r:

$$\psi_B(x) = \psi_0\left(\frac{1}{h}\int_0^x f(x)dx + 1\right), \qquad \delta_\varphi = -\frac{\partial H_r}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0 r}\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial x^2}, \tag{6.60}$$

где x - координата, которая отсчитывается по нормали к границе S_1, $f(x)$ - безразмерная функция, принимающая значение $f(0) = 1$ и $f(d) = 0$.

Из этого решения следует: $B_r(x,r) = \psi_0 f(x)/(rh)$. Функции λ и ψ_i можно найти из системы уравнений:

$$\lambda\psi_i = r\delta_\varphi = -\frac{\psi_0}{\mu_0 h}\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi_B}{\mu_0 \partial x} = \frac{\psi_0}{\mu_0 h} f.$$

Решение этой системы есть

$$\psi_i = \frac{\psi_0}{\mu_0 h}\sqrt{1 - f^2}; \qquad \lambda = -\frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{1 - f^2}}.$$

Далее находим:

$$H_\varphi = \psi_i / r = \psi_0 \sqrt{1 - f^2} \big/ (\mu_0 h r); \qquad \delta_\varphi = \lambda H_\varphi = -\frac{\psi_0}{\mu_0 h r} \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (6.61)$$

$$B_x = 0; \qquad \delta_x = 0.$$

В этой системе, как и в плоском листе с прямыми силовыми линиями, полное магнитное давление остается постоянным по толщине листа: $P_M = \left(B_r^2 + B_\varphi^2\right) / (2\mu_0) = \psi_0^2 / \left(2\mu_0 h^2 r^2\right)$. Хотя силовые линии тороидального поля являются окружностями, радиальная объемная сила равна нулю, так как радиальный градиент магнитного давления компенсируется силой, обусловленной кривизной линий поля.

В случае $\lambda = \mathrm{const}$, как и в ранее приведенных формулах (см. § 6.1), имеем:

$$f(x) = \cos(\pi x/(2d)), \; B_r = B_r(a)\cos(\pi x/(2d)), \; B_\varphi = B_r(a)\sin(\pi x/(2d)) \qquad (6.62)$$

В другом примере, когда азимутальная плотность тока не зависит от координаты x, получаем:

$$\lambda = [x(2d - x)]^{-1/2}; \quad \delta_\varphi = \psi_0 / (\mu_0 r h d);$$

$$B_\varphi = [\psi_0 / (rhd)][x(2d - x)]^{1/2}; \qquad B_r = [\psi_0 / (rhd)](d - x). \qquad (6.63)$$

В этом примере, как и в предыдущем, выполнено условие $B_r^2 + B_\varphi^2 = \mathrm{const}$.

В рассмотренной конфигурации обе компоненты индукции магнитного поля B_r и B_φ в области T_2 равны нулю. Расчеты [108] показывают, что линии тока и напряженности в плоском слое, проходящие через точку с координатами x_1, r_1, описываются уравнением

$$x(r) = \frac{1}{\lambda} \arcsin\left(\frac{r}{r_1} \sin(\lambda x_1)\right). \qquad (6.64)$$

Эти линии вначале идут почти параллельно верхней границе, а затем круто изгибаются и пересекают нижнюю границу под прямым углом в точке с координатой $r = r_1/\sin(\lambda x_1)$ (рис. 6.12). Далее ток замыкается за пределами бессилового поля в области T_2.

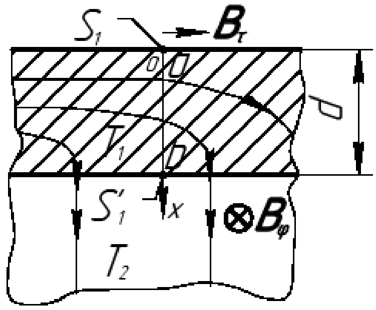


Рис. 6.12. Линии полоидального тока в плоском слое с токоотводом

В этом случае, как и в ранее рассмотренных примерах, сохраняется равенство $B_r(a) = B_\varphi(b)$, где точки a и b лежат на одной нормали к границе. Вычисления показывают, что распределение индукции на нижней границе слоя подчиняется зависимости вида:

$$B_x = -\frac{1}{\lambda r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r(a)). \tag{6.65}$$

Распределение плотности тока описывается формулой

$$\delta_x = \frac{\lambda B_x}{\mu_0} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r(a)). \tag{6.66}$$

6.5. Конфигурации магнитных систем с уравновешенными обмотками нулевой толщины

Формулы, описывающие поле в бессиловом плоском слое, могут быть приближенно использованы и в случае, когда слой не является плоским, но его толщина мала по сравнению с характерными размерами магнитной системы. Эти формулы дают представление о распределении тока в толще обмотки. Что касается конфигурации обмотки, то при ее приближенном расчете можно принять толщину d равной нулю. При этом допущении на границе S_1, которая сливается с S_2, должны быть выполнены условия

$$\psi_B = \psi_0 = \text{const}\,; \;\; B_\tau(a) = B_\varphi(b). \tag{6.67}$$

Второе из них есть условие равновесия каждого элемента границы, вытекающее из формулы (6.4). При отсутствии токоотвода функция тока на границе равновесного слоя принимает значение:

$$\psi_i(b) = r(b)B_\tau(a)/\mu_0 = R_0 B_0 / \mu_0 = \text{const}\,; \tag{6.68}$$

где R_0 – внутренний радиус магнитной системы, B_0 – индукция не оси.

При отсутствии токоотвода задаче построения равновесного слоя нулевой толщины в математическом отношении эквивалентна задаче теории струй в гидродинамике. В рассматриваемой некорректной задаче математической физики требуется построить границу, на которой выполнены два условия: постоянство функции потока полоидального поля и заданный закон изменения касательной к границе компоненты индукции этого поля: $B_\tau(a) = \text{const}/r$. Такие границы могут быть построены с помощью специальных программ, основанных на методе итераций.

Одномодульные конфигурации

Простейшим примером рассматриваемых конфигураций является коаксиальная магнитная система в виде одиночного модуля со свободной границей, представленная на рис. 6.13. Бессиловая область малой толщины $R_1 - R_0 << R_0$ расположена на участке до точки b с координатой $r(b) = R_2$. На указанном участке функция потока полоидального поля ψ_B постоянна, а индукция должна подчиняться условию $|B| = \mu_0 i/r$, где i - полоидальный ток. Далее полоидальный ток замыкается по стенке цилиндра радиуса R_2. На цилиндрическом участке выполнено лишь первое из указанных условий. Равенство магнитных давлений по обе стороны обмотки

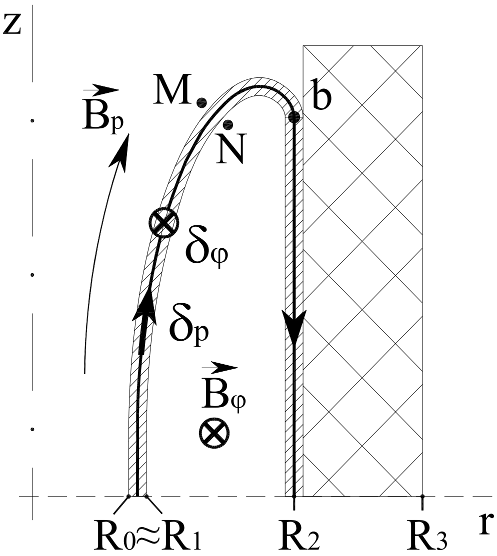


Рис. 6.13. Коаксиальная магнитная система
со свободной границей и внешним бандажом:
(δ_p и δ_φ – полоидальная и азимутальная компоненты тока)

достигается только за счет выбора её конфигурации. В аналогичной плоской задаче абсолютное значение индукции принимает постоянное значение на торце. При этом форма границы в плоской задаче может быть рассчитана аналитически методом конформных отображений. В такой задаче R_1 - половина расстояния между параллельными проводниками с противоположными токами. Максимальный размер торцевого участка с постоянным модулем индукции в плоской задаче соответствует условию $R_2 = 2R_1$ [23].

В литературе отсутствуют примеры аналитических решений для свободной границы аксиально-симметричной системы. Численные методы позволяют найти форму торца путем специальным образом организованного процесса итераций. При $R_2/R_1 >> 1$ равновесная фигура не может быть построена, поскольку асимптотическая зависимость для индукции полоидального поля имеет вид $B_p = \mathrm{const}\cdot r^{-2}$, тогда как $B_\varphi = \mathrm{const}\cdot r^{-1}$. Серия расчетов, выполненных методом итераций, показала, что вычислительный процесс сходится, если аспектное отношение $A = R_2 / R_1 \le 1.64$ (рис. 1, *а*). При условии $A > 1.64$ построить равновесную конфигурацию не удается.

Магнитное давление на внешней границе в рассмотренном случае определяется по формуле:

$$P_M(R_2) = \frac{B_\varphi^2(R_1)}{2\mu_0}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2, \qquad (6.69)$$

где B_0 - индукция на оси в области однородного поля. При наибольшем возможном значении $R_2/R_1 \approx 1{,}64$ это давление составляет $0{,}37\,B_0^2/(2\mu_0)$.

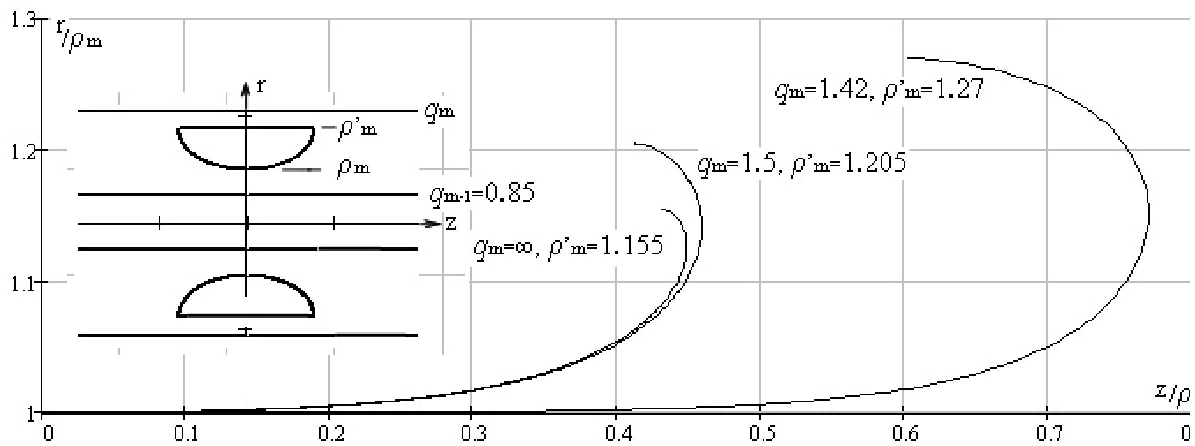


Рис. 6.14. Тонкостенный магнит (или m – й модуль многомодульного магнита), размещенный между двумя коаксиальными диамагнитными цилиндрами. Обозначения на рисунке: $q_{m-1} = R_0 / R_1$; $\rho_m = 1$; $\rho'_m = R_2 / R_1$; $q_m = R_3 / R_1$, где R_0 – радиус внутреннего цилиндра, R_1 – внутренний радиус магнита, R_2 – его внешний радиус, R_3 – радиус внешнего цилиндра

Можно предположить, что значение аспектного отношения $A \approx 1{,}64$ ограничивает область существования равновесных конфигураций в рассматриваемой коаксиальной системе, являющейся прототипом одномодульного магнита с тонкой квазибессиловой обмоткой.

Рассмотренная магнитная система является частным случаем более общей конфигурации, в которой обмотка с частично или полностью уравновешенным бессиловым слоем нулевой толщины размещена в области между двумя коаксиальными цилиндрами, на поверхностях которых задано условие $\psi_B = 0$ (рис. 6.14). Поток полоидального поля, сформированный в области $R_0 < r < R_1$, огибает обмотку и проходит через область $R_2 < r < R_3$. Конфигурации равновесного участка ab рассчитаны методом итераций при различных значениях отношений R_0 / R_1 и R_1 / R_3. Результаты расчетов, выполненных С.Л. Шишигиным, представлены на рис. 6.15.

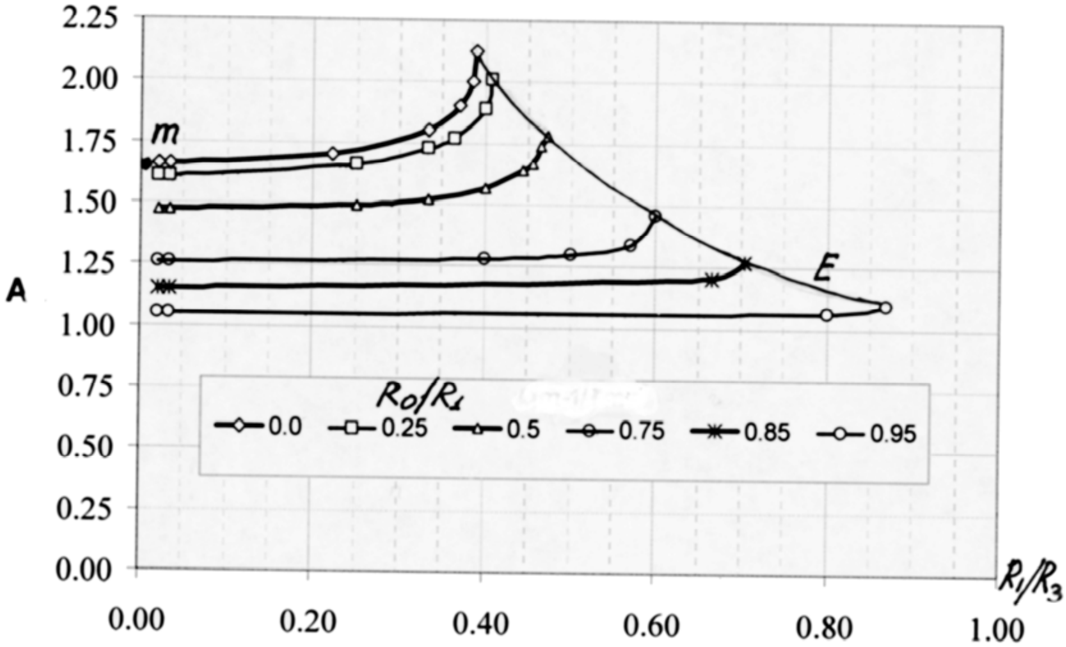


Рис. 6.15. Зависимость аспектного отношения R_2 / R_1 от отношений R_0 / R_1 и R_1 / R_3, характеризующих систему, в которой модуль с квазибессиловой обмоткой расположен в зазоре между коаксиальными диамагнитными цилиндрами

Там построены зависимости аспектного отношения $A = R_2 / R_1$ от указанных двух параметров. Кривая, построенная для случая $R_0 = 0$ (внутренний цилиндрический экран отсутствует) в предельном случае $R_1 / R_3 = 0$ (точка m на рис. 6.15) описывает рассмотренную конфигурацию магнита без внешнего цилиндрического экрана. При других значениях этого параметра зависимость, соответствующая условию $R_0 = 0$, характеризует систему, в которой магнит с уравновешенной торцевой частью размещен в соосном цилиндрическом диамагнитном экране. У обмотки, расположенной в таком экране, внешняя цилиндрическая часть будет уравновешена, если выполнено условие $\left|B_\varphi(R_2)\right| = \left|B_p(R_2)\right|$. Учитывая, что $\left|B_\varphi(R_2)\right| = B_0\, R_1/R_2$, а $\left|B_p(R_2)\right| = B_0\, R_1^2 \big/ \left(R_3^2 - R_2^2\right)$, приходим к формуле для R_3: $R_3 = \sqrt{R_2^2 + R_1 R_2}$.

Предельное значение аспектного отношения $A = R_2 / R_1 \approx 2.12$ соответствует полностью уравновешенному модулю, когда не только на внешней границе, но и на торцевой части обмотки выполнены оба граничных условия (6.67). В этом случае отношение $R_3 / R_1 \approx 2.57$. Этим размерам соответствует магнитное давление на цилиндрический экран, составляющее $0{,}23 \cdot {B_0}^2 \big/ (2\mu_0)$.

При меньших значениях аспектного отношения внешняя граница модуля не уравновешена. При бо′льших – не существует конфигурация с полностью уравновешенной торцевой частью.

Кривая E на рис. 6.15 является геометрическим местом чисел R_0 / R_1, соответствующих полностью уравновешенным модулям. Близкие к единице значения параметра R_0 / R_1 соответствуют конфигурациям, в которых поле мало отличается от плоского. В этом случае аспектное отношение для полностью уравновешенного модуля близко к единице и может быть рассчитано по формуле, заимствованной из электростатики [23]:

$$A \approx 2 - R_0 / R_1. \tag{6.70}$$

Многомодульные системы

Применение многосвязных конфигураций, состоящих из встречно включенных коаксиальных модулей, существенно расширяет возможности снижения нагрузок, воздействующих на внешний бандаж. Примером может быть система двух тонкостенных коаксиальных модулей со встречно направленными токами, разделенных радиальным зазором Δ_0. На краях этого зазора функция потока полоидального поля принимает равные по модулю и противоположные по знаку значения: $\psi_B(1) = -\psi_B(2)$ (рис. 6.16, а).

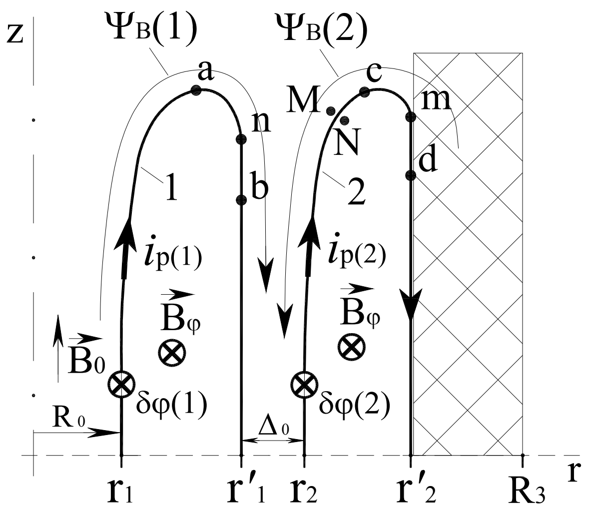


Рис. 6.16,а. Двухмодульный тонкостенный магнит с полностью уравновешенным первым модулем и частично уравновешенным вторым

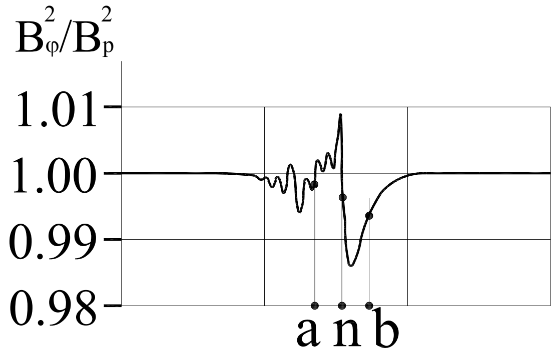


Рис. 6.16,б. Изменение отношения магнитных давлений азимутального и полоидального полей в окрестности точки *n*

Участок второго модуля ниже точки *m* не уравновешен, а остальная часть его границы и вся граница первого модуля уравновешены Равновесная конфигурация первого модуля в этом случае близка к описанной для системы с цилиндрическим экраном. Расчеты равновесной конфигурации методом итераций показали, что двухмодульная система существует при следующих отношениях радиусов границ: $r_1/r_1'/r_2/r_2' = 1/2{,}03/2{,}86/3{,}03$. При этом длина второго модуля мало отличается от длины первого. Кривая, представленная на рис. 6.16,б показывает изменение магнитного давления при смешении за край уравновешенного участка. Эта кривая в определенной мере характеризует точность построения фигуры равновесия методом итераций. Индукция азимутального поля на неуравновешенном участке есть $B_\varphi(r_2') = B_0(r_1/r_1')\cdot(r_2/r_2')$, где B_0 - индукция на оси в рабочей области магнита (вдали от края). В рассматриваемом примере $B_\varphi(r_2') = 0{,}427B_0$, а соответствующее магнитное давление на внешней границе составляет $B_\varphi^2(r_2')\big/(2\mu_0) = 0{,}18\,B_0^2\big/(2\mu_0)$.

Система из большого числа встречно включенных коаксиальных модулей представлена на рис. 6.17. В ней можно отметить поверхности, на которых магнитный поток полоидального поля равен

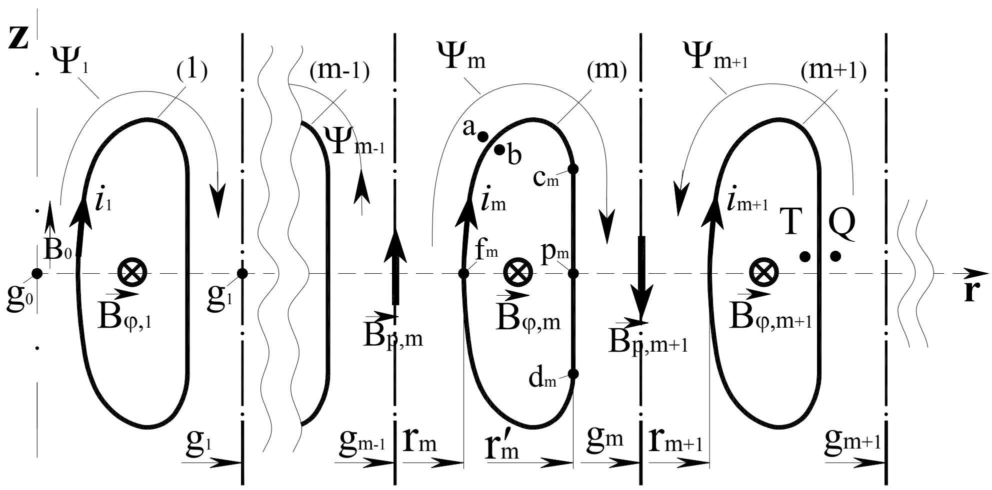


Рис. 6.17. Многомодульный магнит с квазибессиловой обмоткой

нулю. Эти поверхности практически не отличаются от коаксиальных цилиндров на расстояниях от края, превышающих зазор между модулями. Поэтому для приближенного расчета системы модулей большой длины можно заменить указанные поверхности диамагнитными цилиндрическими экранами. Таким образом, можно представить многомодульную систему в виде набора элементов, каждый из которых содержит полностью или частично уравновешенный модуль, размещенный между двумя коаксиальными экранами (рис. 6.14). При такой аппроксимации возникает некоторая погрешность в построении профиля торцевых частей этих элементов, что не играет роли при расчетах магнитных давлений в зазорах между обмоткой и экранами.

В частном случае, когда все модули, кроме последнего, полностью уравновешены, индукция в последнем зазоре (в точке P) составляет

$$B(P) \approx B_0 /(A_1 A_2 .....A_M), \tag{6.71}$$

где M – число модулей, $A_k = r_k' / r_k$ – аспектное отношение соответствующего модуля.

Системы с токоотводом

Для конфигураций в виде тонкого слоя, на границе которого выполнено условие

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(rB_\tau(a)\right) < 0, \tag{6.72}$$

равновесие может быть достигнуто путем отвода тока из области T_1. При этом нормальная компонента плотности тока на границе равновесного слоя определяется по формуле:

$$\delta_n(b) = -\frac{1}{r(b)}\frac{\partial \psi_i(b)}{\partial \tau} = \lambda B_n(b)/\mu_0. \tag{6.73}$$

Отметим, что приведенное выражение для δ_n является обобщением равенства (6.66) на случай, когда обмотка не является плоским слоем.

В предельном случае слоя малой толщины индукция полоидального поля в области T_2 мала, так как в этом слое мал как поток индукции полоидального поля. Мала также и нормальная к границе компонента индукции в точке b. Формально это вытекает из формулы (6.71): при условии $\lambda = 2\pi / d$ имеет место равенство $B_n(b) = (d/2\pi)\mu_0\delta_n$, где толщина d мала. В случае слоя конечной толщины приведенное равенство является граничным условием для расчета полоидального поля в области T_2, где ψ_B удовлетворяет уравнению (6.56). Заметим, что в том случае, когда область T_2 является средой с однородной проводимостью, распределение полоидального тока также описывается уравнением (6.56) с граничным условием (6.71). Его решение описывает распределение тока, в котором выполняется условие $\mathbf{B}_p = \mu_0(\boldsymbol{\delta}_p/\lambda)$. В таком поле отсутствуют азимутальные объемные силы.

Приведем пример, иллюстрирующий как возможность построения равновесной тонкостенной обмотки путем отвода тока, так и возможность создания токораспределения в области T_2, в котором сохраняется параллельность векторов полоидальной плотности тока и напряженности магнитного поля. Функция потока полоидального поля в области T_0 (рис. 6.18), удовлетворяющая уравнению (6.56), может быть представлена интегралом Фурье-Бесселя:

$$\psi_B = B_0 r P \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kz/P} \; J_1\left(k\frac{r}{P}\right)\frac{\sin k}{k}dk\,. \qquad (6.74)$$

Поверхности постоянного потока $\psi_B = \text{const}$ являются гиперболоидами вращения и описываются уравнением:

$$\frac{r^2}{1-\rho^2} - \frac{z^2}{\rho^2} = P^2. \qquad (6.75а)$$

Функция потока в приосевой области магнита T_0 определяется по формуле

$$\psi_B = B_0 P^2 (1-\rho). \qquad (6.77б)$$

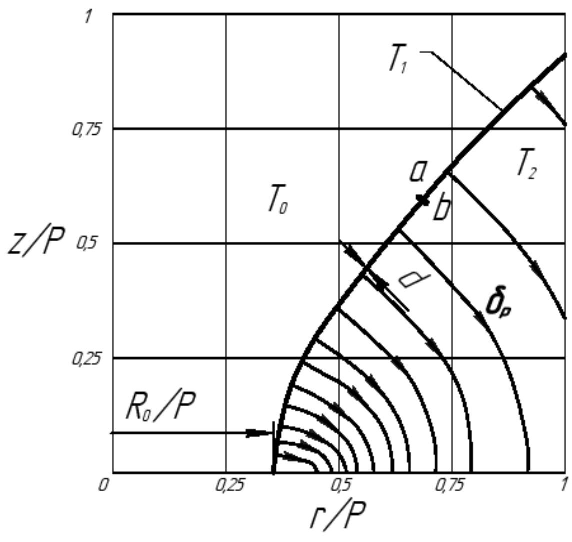


Рис. 6.18. Тонкостенный квазибессиловой магнит
с отводом тока во внешнюю зону

Одна из линий $\psi_B = \psi_0 = \text{const}$ есть внутренняя граница обмотки S_1, которая в данном примере близка к его внешней границе S_2. В приведенных формулах ρ - параметр, характеризующий внутренний радиус магнита R_0:

$$R_0 = P\sqrt{1-\rho^2}\,. \tag{6.75в}$$

Распределение индукции полоидального поля по оси z имеет вид:

$$B_z\big|_{r=0} = \frac{B_0}{1+\left(z/P\right)^2}, \tag{6.76}$$

Индукция полоидального поля на линии, где $\psi_B = \psi_0$, изменяется по закону

$$B_\tau(a) = \frac{B_0 P}{r(a)} \cdot \frac{1-\rho^2}{\sqrt{\left(r(a)/P\right)^2 - \left(1-\rho^2\right)^2}} = \frac{B_0 R_0^2}{r(a)} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2(a) - R_0^4 / P^2}}\,. \tag{6.77}$$

В этой формуле $r(a)$ - координата точек на контуре S_1. Функция тока на внешней стороне уравновешенной обмотки (в области T_2) есть

$$\psi_i(b) = \frac{B_0 R_0^2}{\mu_0 \sqrt{r^2(b) \;\; - R_0^4 \big/ P^2}}. \tag{6.78}$$

При условии $r(a) \approx r(b)$ выполнено равенство $B_\tau(a) = B_\varphi(b)$. На рис. 6.18 представлена конфигурация обмотки малой толщины и показаны линии полоидального тока во внешней зоне магнитной системы в случае, когда среда в этой зоне имеет постоянную проводимость.

6.6. Сравнительные оценки остаточных напряжений и габаритных размеров магнитов с квазибессиловой обмоткой и нагруженной внешней зоной

Выбрав равновесную систему в рамках модели слоя нулевой толщины, можно далее рассчитать близкую к ней систему дискретных уравновешенных слоев с полоидальным и азимутальным токами. При построении тонкого бессилового слоя как элемента магнита, предназначенного для получения сильных полей, возникает комплексная задача такого выбора конфигурации и токораспределения, чтобы прочность была обеспечена во всех частях магнита. В уравновешенной обмотке, как было показано, остаточные напряжения определяются выбором числа слоев и могут быть снижены до значений, не превосходящих прочностного предела материала σ_1. Элементы внешней зоны магнитной системы, где отсутствует азимутальный ток, не уравновешены, однако механические напряжения в них не должны быть больше допустимого значения σ_2. При этом очевидным преимуществом обладают система с равнонагруженной внешней зоной, рассмотренная в § 6.3 применительно к магниту неограниченной длины. Далее рассмотрены некоторые примеры формирования внешней зоны магнита конечной длины.

Коаксиальная система с торцевым экраном и внешним бандажом

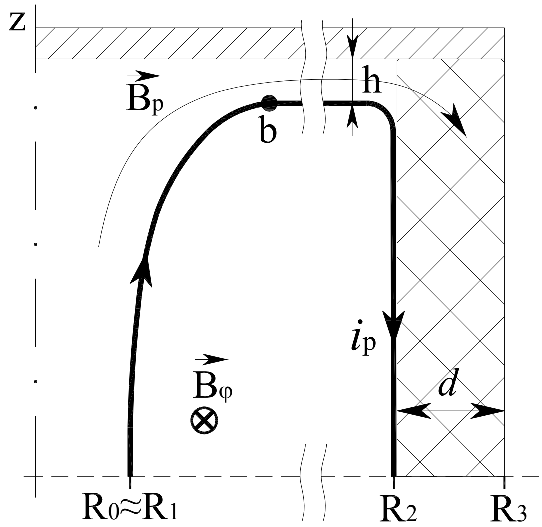


Рис. 6.19. Магнит с тонкой квазибессиловой обмоткой и плоским диамагнитным экраном

Ранее было показано, торцевой диамагнитный экран позволяет получить равновесную конфигурацию при замыкании полоидального тока по поверхности цилиндра с радиусом $R_2 >> R_0$. Магнитное давление азимутального поля в этой системе воздействует на цилиндр с радиусом R_2 и воспринимается внешним диэлектрическим бандажом. Примером является простейшая система с плоским экраном, показанная на рис. 6.19.

При $r >> R_1$ поверхность соленоида есть плоскость, параллельная экрану и отстоящая от него на расстояние $h = R_0/2$, где $R_0 \approx R_1$ - внутренний радиус тонкостенного магнита. Метод итераций позволяет построить конфигурацию, в которой условие $Br = \text{const}$ выполнено не только вдали от оси, но и на переходном участке до точки b. Предельное значение $r(b)$ составляет приблизительно $1{,}54R_1$.

В рассматриваемой системе максимум индукции на поверхности экрана составляет около $0{,}4B_0$, а полная сила, приходящаяся на экран, может быть рассчитана по следующей приближенной формуле, справедливой при $R_2 \geq 2R_1$:

$$F \approx \frac{B_0^2 \pi R_0^2}{\mu_0}\left(\ln\frac{R_2}{R_1} - 0{,}86 + \frac{1{,}6R_1}{R_2}\right). \tag{6.79}$$

В поле с индукцией 100 Т эта сила при $R_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ м является величиной порядка 10^7 Н и слабо зависит от отношения R_2/R_1. Поэтому для удержания экранов необходимо создать специальную конструкцию, способную воспринять большую осевую силу, например, систему шпилек. Напряжения в элементах конструкции могут быть снижены, если эффективная длительность импульса мала по сравнению с периодом упругих колебаний системы удержания экранов [15]. Период колебаний может быть увеличен путем установки дополнительных грузов с целью увеличения массы экранов.

Рассмотренная конструкция с плоскими экранами, очевидно, не является единственно возможной. Другие формы торца и экрана могут дать меньшие значения осевой силы, однако трудно ожидать, что оптимизация торцевого экрана позволит многократно уменьшить действующую на него силу.

В системе с торцевым экраном и внешним бандажом радиусы R_2 и R_3 необходимо выбрать так, чтобы напряжения в бандаже не превышали допустимых значений. Предел прочности внешнего бандажа конечной толщины можно рассчитать, воспользовавшись приведенным в § 6.2 критерием фон Мизеса. При этом использованы выражения для компонент тензора напряжений на внутренней границе бандажа, определяемых по известным формулам теории упругости [10]:

$$\sigma_\varphi = \frac{B_\varphi^2(R_2)}{2\mu_0}\frac{\theta_e^2+1}{\theta_e^2-1}, \qquad \sigma_r = -\frac{B_\varphi^2(R_2)}{2\mu_0}, \tag{6.80}$$

где $\theta_e = R_3 / R_2$. Исходя из этих соотношений, можно связать аспектное отношение с параметром θ_e:

$$A = \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{\xi}{\alpha_2} \frac{(\theta_e^2 + 1)}{(\theta_e^2 - 1)}}, \tag{6.81}$$

где:

$$\xi = (1 + (\sigma_r(R_2) / \sigma_\varphi(R_2))^2 - \sigma_r(R_2) / \sigma_\varphi(R_2))^{1/2} = (1 + 3\theta_e^4)^{1/2} / (1 + \theta_e^2).$$

Это число принимает значение $\xi = \sqrt{3}$ при $\theta_e >> 1$ и $\xi = 1$ при $\theta_e \approx 1$. В последнем случае, когда бандаж имеет малую толщину d, $\theta_e \approx 1 + d/R_2$, при этом

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{R_2}{d\alpha_2}} >> 1. \tag{6.82}$$

Внешний радиус бандажа коаксиальной магнитной системы $R_3 = \theta_e R_2$ растет пропорционально $(\theta_e - 1)^{-1/2}$ при $\theta_e \to 1$ и пропорционально θ_e при $\theta_e >> 1$. Он принимает наименьшее значение, когда $\theta_e \approx 1{,}44$. В этом случае

$$\xi = 2{,}68, \quad R_2/R_1 = 2{,}76\big/\sqrt{\alpha_2}\,; \quad R_3/R_2 = 3{,}98\big/\sqrt{\alpha_2}\,.$$

В поле с индукцией 100 Т последнее из этих отношений принимает значения 9,1 и 12,5 для двух вариантов материалов бандажей с магнитными пределами прочности $B_{M2} = 55$ Т, ($\sigma_2 = 1{,}2$ ГПа) и $B_{M2} = 32$ Т ($\sigma_2 = 400$ МПа). Первый из них соответствует материалу типа Zylon или другому сверхпрочному диэлектрику, а второй по своей прочности близок к хромистой бронзе. В этих примерах имеем, соответственно, $\alpha_2 = 0{,}3$ и 0,1; $R_2/R_1 = 2{,}39$ и 4,13.

Система с торцевым экраном может быть еще боле более компактной, если во внешней зоне размещены равнонагруженные диэлектрические бандажи и имеет место отвод тока от обмотки с помощью цилиндрических проводников, передающих нагрузку на бандажи (рис. 6.6).

Можно произвести оценочный расчет такой системы в рамках простейшей модели, основанной на допущении, что число бандажей велико, их толщины малы, и они механически не взаимодействуют. Эта модель описана в § 6.3. В ней рассмотрена система с внешним бандажом произвольной толщины и принято, что распределение полоидального тока по радиусу описывается непрерывной функцией радиуса. Расчеты показывают, что приведенные в § 6.3 оценочные значения для характерных размеров внешней зоны магнитной системы мало меняются при переходе от модели с непрерывным токораспределением во внешней зоне к дискретной системе равнонагруженных бандажей.

Представленные в § 6.3 выражения для аспектных отношений относятся к области магнита, удаленной от торцевых частей. В этой области полоидальный ток направлен параллельно оси z и в ней нет аксиальных сил. Очевидным преимуществом обладают магнитные системы, у которых полоидальный ток направлен указанным образом во всей внешней зоне магнита вплоть до торцевых частей. В таких магнитных системах зависимость индукции азимутального поля от радиуса описывается формулами, представленными в § 6.3. Профиль границы может быть построен так, чтобы наряду с условием $\psi_B = \mathrm{const}$ выполнялось условие равновесия $\left|B_p(M)\right| = \left|B_\varphi(N)\right|$. В частности, для системы с непрерывным токоотводом и тонким внешним бандажом, когда справедливы формулы (6.48), зазор на участке $R_1 < r < R_2$ можно рассчитать по приближенной формуле, не учитывающей краевой эффект при $r \approx R_2$:

$$h / R_0 = (R_2 / 2)(R_2^2 + R_1^2 - r^2)^{-1/2}. \qquad (6.83)$$

Путем трансформации зазора $h(r)$ равновесие обмотки можно обеспечить и в том случае, когда имеет место дискретный отвод тока в системе с несколькими бандажами.

Магниты без торцевого экрана

Применение торцевого экрана решает проблему равновесия торцевых частей магнита и позволяет создать достаточно компактную систему, но приводит к упомянутым трудностям, связанным с удержанием экрана. Поэтому целесообразно рассмотреть возможность создания безэкранных магнитов с достаточно большим аспектным отношением.

Напряжения во внешнем бандаже и аспектное отношении для уединенного модуля со свободной границей и для модуля в коаксиальном экране определяются теми же формулами (6.80), (6.81), что и для системы с торцевым экраном. Однако возможные значения аспектных отношений ограничены приведенными выше числами: 1,64 и 2,12. Поэтому допустимые значения индукции для материалов с теми же прочностными характеристиками существенно ниже, чем для магнита с торцевым экраном, у которого аспектное отношение $A = R_2 / R_1$ не определяется возможностями построения уравновешенной обмотки. Для уединенного модуля они ограничиваются значениями $B_0 = 63{,}7$ Т и 82,3 Т, а для модуля в цилиндрическом экране значениями 37 Т и 42,7 Т. Оценки выполнены для магнитов с бандажами большой толщины, выполненными тех же материалов, что и в предыдущем примере. В литературе рассмотрены более сложные модели обмотки безэкранного магнита: система с токоотводами, с несколькими уравновешенными слоями без промежуточных бандажей во внешней зоне и с промежуточными бандажами. Предельное значение геометрического фактора в этих системах несколько выше, чем в простейшем случае, но оно не превышает значения $A \approx 2$. Соответственно, предельные поля в этих системах мало отличаются от полученных для магнита в цилиндрическом экране.

В системе с несколькими модулями граница области, где необходимо отводить ток для поддержания равновесия торца, смещена в область слабого поля. Это позволяет обеспечить относительно низкие механические напряжения во внешней зоне даже при относительно небольших аспектных отношениях, характеризующих как внутренний, так и внешние модули.

На рис. 6.20 представлена двухмодульная система, в которой равновесие внешнего модуля достигается путем отвода тока.

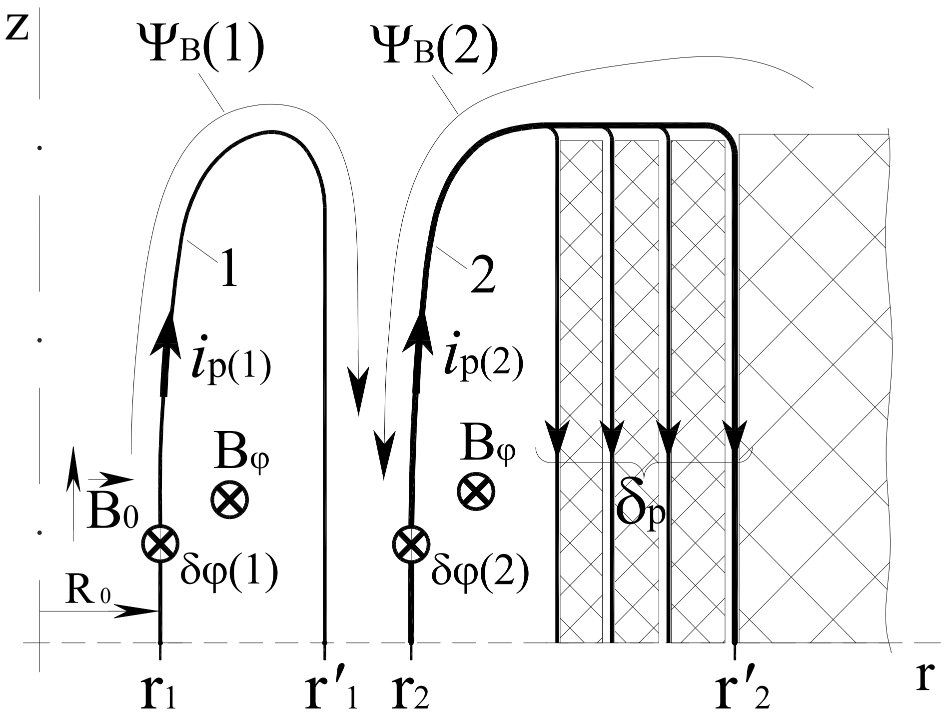


Рис. 6.20. Двухмодульная система
с равнонагруженными слоями во внешнем модуле:
1 – основной модуль,
2 – внешний модуль с системой бандажей

Конфигурация построена методом итераций для частного случая, когда на границах модулей заданы граничные условия для функции поток полоидального поля $\psi_B(2) = -4\psi_B(1)$.

В системе без промежуточных бандажей на границе внешнего бандажа индукция принимает значение $B_\varphi(r_2') \cong 0{,}34B_0$, а магнитное давление составляет $0{,}12\,B_0^2/(2\mu_0)$, или 480 МПа для поля с индукцией на оси $B_0 = 100$ Т.

Во внешнем модуле можно создать систему равнонагруженных бандажей. В упомянутом примере индукция азимутального поля на границах промежуточных бандажей принимает значения $B_\varphi(r_2) = 0{,}44B_0$, $B_\varphi(r_2') = 0{,}295B_0$. При этом азимутальное напряжение в бандажах есть $\sigma_\varphi = 0{,}06B_0^2/(2\mu_0)$. В данной системе имеет место внешний бандаж, подверженной воздействию магнитного давления $B_\varphi^2(r_2')/(2\mu_0)$. В рассмотренном примере оно составляет $0{,}087B_0^2/(2\mu_0)$. Применение равнонагруженного внешнего модуля позволяет снизить напряжение во внешнем бандаже на 27 % по сравнению с системой, в которой равновесие торцов обеспечивается без токоотвода.

Другой подход к формированию многомодульной системы основан на допущении, что в многомодульной системе (рис. 6.17) все модули уравновешены, кроме последнего. Для двухмодульного и трехмодульного магнитов в рамках модели с промежуточными диамагнитными цилиндрами рассчитаны напряжения во внешнем бандаже. Прочностные параметры в этих двух случаях определяются по формулам, вытекающим из выражения (6.71)

Для M=2
$$\alpha_2 = \frac{R_3^2 + A_2^2 R_2^2}{R_3^2 - A_2^2 R_2^2} \cdot \frac{1}{A_1^2 A_2^2}. \tag{6.84}$$

Для M=3
$$\alpha_2 = \frac{R_4^2 + A_3^2 R_3^2}{R_4^2 - A_3^2 R_3^2} \cdot \frac{1}{A_1^2 A_2^2 A_3^2} \tag{6.85}$$

Для каждого значения отношения R_3/R_0 можно найти значение числа R_2/R_0, при котором прочностной параметр принимает наименьшее значение $\alpha_{2,\min}$. Например, для $R_3/R_0 = 20$ минимальное значение α_2 составляет 0,14 (рис. 6.21).

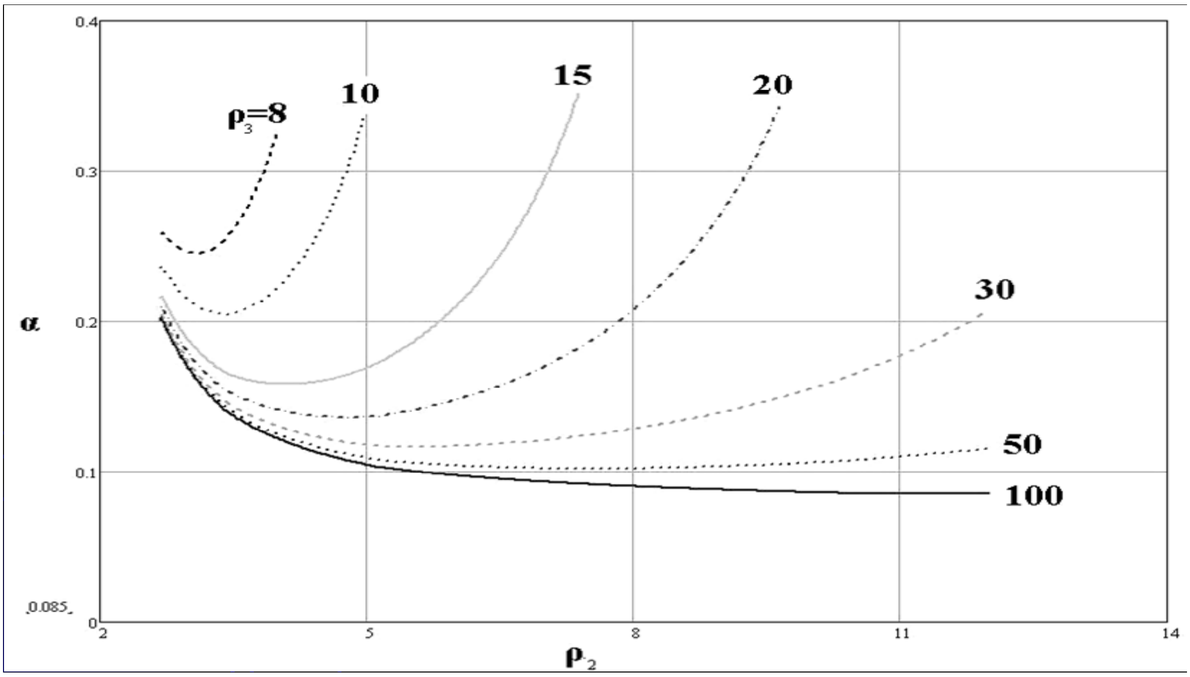


Рис. 6.21. Зависимости прочностного параметра
двухмодульного квазибессилового магнита
от отношения

$$\rho_2 = R_2 / R_1 ,$$

построенные при различных отношениях параметра

$$\rho_3 = R_3 / R_1 .$$

На рис. 6.22 представлены значения минимального прочностного параметра, найденные для различных значений отношения внешнего радиуса магнитной системы к внутреннему. Можно отметить, что асимптотическое значение прочностного параметра α_2, соответствующее большим значениям внешнего радиуса, близко к 0.08.

На этом же рисунке приведены результаты оптимизационных расчетов для трехмодульного магнита. Анализ полученных данных показывает, что введение третьего модуля даёт заметное снижение прочностного параметра по сравнению с двухмодульным магнитом, когда отношение внешнего радиуса к внутреннему становится больше 15.

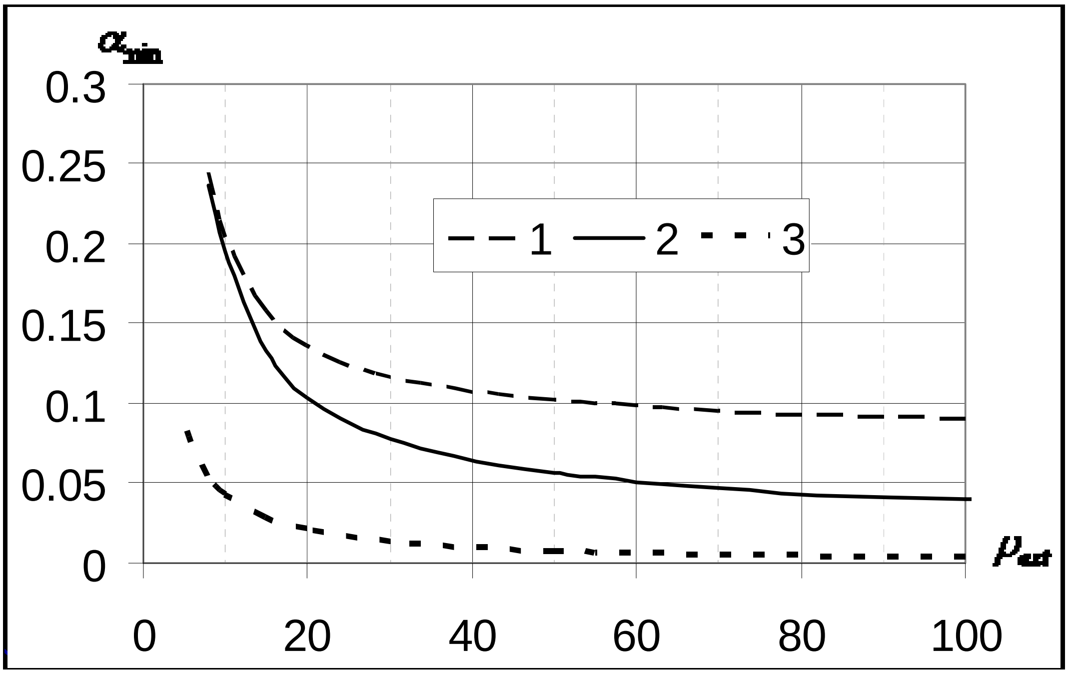


Рис. 6.22. Зависимость минимального значения прочностного параметра многомодульной системы с внешним бандажом от отношения ее внешнего радиуса к внутреннему $\rho_{ext} = R_3 / R_1$.
1 - двухмодульная система;
2 - трехмодульная система;
3 - система с числом модулей M>>1

Представляет интерес сравнить многомодульную систему с описанной выше системой равнонагруженных бандажей, в которой оценочное значение аспектного отношение магнита определялось формулой (6.70). При расчете можно предположить, что число равнонагруженных модулей с внутренними бандажами много больше единицы, а расстояния между ними малы по сравнению с внутренними радиусами модулей. При малых значениях прочностного параметра α_2 для аспектного отношения магнита получена оценка

$$R_e / R_0 \approx 1/\alpha_2. \tag{6.86}$$

Таким образом, в случае, когда выполнено условие $\alpha_2 << 1$, имеет место следующая пропорция аспектных отношений магнитных систем:

$$A_I / A_{II} / A_{III} \approx (\frac{1}{\alpha_2})^{1/2} / (\frac{1}{\alpha_2}) / \exp(\frac{1}{\alpha_2}) \qquad (6.87)$$

Здесь A_I - аспектное отношение магнитов с равнонагруженной внешней зоной, A_{II} - многомодульных магнитов и A_{III} - магнитов традиционного исполнения с равногруженной обмоткой. Для случая, когда $\alpha_2 = 0{,}1$, аспектные отношения соотносятся как 3,12/10/(2,2·10^4).

Приведенное сравнение аспектных отношений показывает, что у многомодульного магнита аспектное отношение в несколько раз выше, чем у магнита с торцевым экраном. Вместе с тем, обе модификации магнитов с квазибессиловой обмоткой обладают существенно меньшими аспектными отношениями, чем магниты традиционного исполнения, если прочностной параметр мал по сравнению с единицей. Таким образом, применение магнитов с квазибессиловой обмоткой открывает возможности получения сверхсильных полей в тех случаях, когда магнитный предел прочности материала много меньше магнитного давления генерируемого поля.

7. КОНСТРУКЦИИ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ МНОГОКРАТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ

В этой главе будут рассмотрены магнитные системы, которые обладают достаточной прочностью и тепловой устойчивостью, чтобы были обеспечены условия их многократного использования.

Разработки неразрушаемых многовитковых магнитов для получения сильных полей длятся более ста лет. В работах П.Л. Капицы в 20-х годах XX столетия [1, 2] впервые были получены сильные импульсные поля в соленоидах, неохлаждаемые обмотки которых работали в условиях адиабатического нагрева. Этот принцип использован при создании всех магнитов с полем масштаба десятков тесла и выше. В указанных работах впервые был выполнен анализ механических напряжений в обмотках. В ходе дальнейших исследований разрабатывались приемы, которые можно использовать для увеличения прочности магнитных систем: применение дополнительных креплений в виде цилиндров (бандажей), воспринимающих радиальные усилия, применение прочных материалов для изготовления обмотки и наиболее слабого элемента конструкции - изоляции, использование обмоток в виде дисков («соленоиды Биттера»), укладка витков так, чтобы обмотка была равномерно нагружена, сокращение длительности импульса и, наконец, применение квазибессиловых обмоток.

В данной главе рассмотрены примеры конструкций неразрушаемых магнитных систем. Основное внимание уделено тем из них, которые предназначены для получения однородного или близкого к однородному поля. Иначе говоря, речь идет главным образом о соленоидах общего назначения, имеющих обмотку в виде цилиндра. Для многих экспериментов необходимы поля специальной формы, создание которых требует значительного усложнения конструкции соленоида. Примером могут служить магнитные системы установок токамак, сцелларатор и других, используемых в работах по управляемому термоядерному синтезу. Конструкции таких магнитных систем имеют много общего с обычными соленоидами. Есть и специфические особенности, которые здесь не рассматриваются, так же как и те конструктивные приемы, которые используются в охлаждаемых магнитных системах, предназначенных для длительной работы при постоянном, переменном токе или в условиях, когда поле создается в виде последовательности импульсов. Рассматриваются лишь соленоиды, обмотки которых работают в условиях адиабатического нагрева и успевают охладиться за время между импульсами. Условно такой режим можно назвать режимом редких импульсов.

Вопросы адиабатического нагрева обмоток рассмотрены в предыдущей главе. Следуя идеям П.Л. Капицы, сечение проводников при данных параметрах импульса всегда следует выбирать так, чтобы их температура к концу импульса не превышала той, при которой возможно повреждение изоляции или уменьшение предела текучести металла. Если это условие выполнено, то в остальном тепловые эффекты мало влияют на конструктивные параметры соленоидов, работающих в режиме редких импульсов.

7.1. Примеры конструкций многовитковых соленоидов

Можно выделить три типа обмоток многовитковых соленоидов: спиральную, ленточную и дисковую, схематически представленные на рис. 7.1.

Соленоиды со спиральной обмоткой

В наиболее прочных конструкциях соленоидов со спиральной обмоткой последняя выполняется из провода прямоугольного сечения с изоляцией из стеклоэпоксидного компаунда. В простейших системах провод наматывается на изоляционный цилиндр и изолируется в процессе укладки, после чего происходит полимеризация компаунда. Большие усилия были предприняты в последние годы в направлении использования новых материалов, обладающих высокими механическими характеристиками.

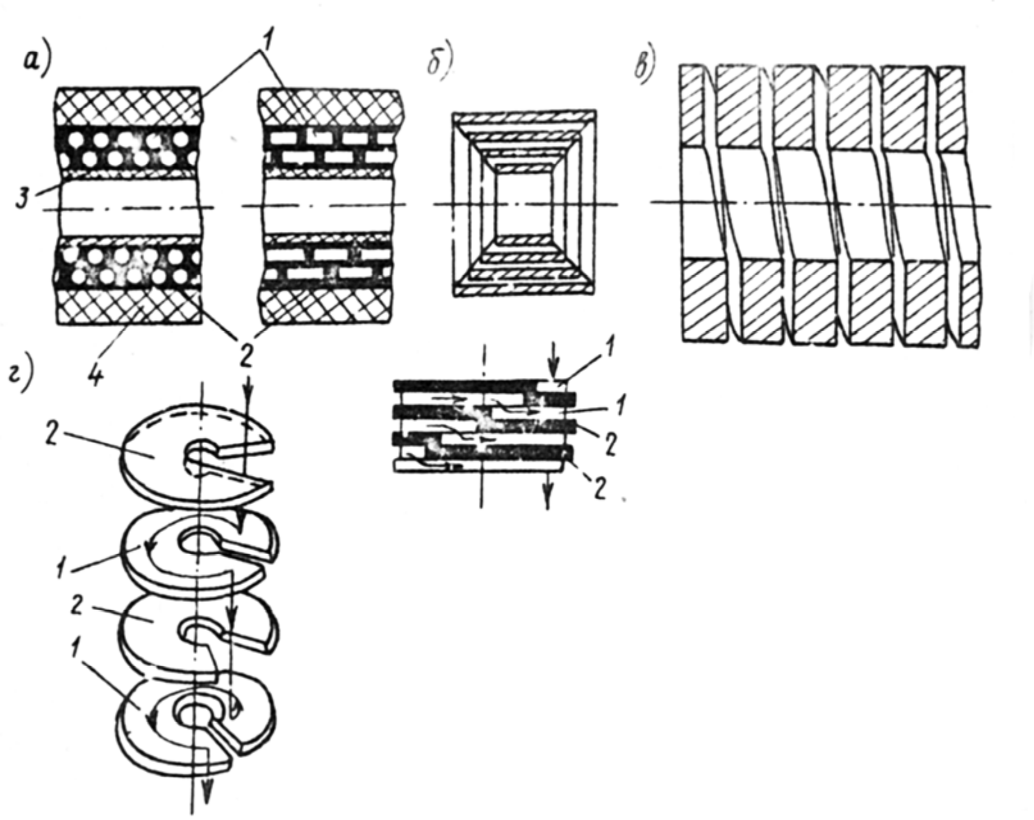


Рис. 7.1. Многовитковые магниты: ***а*** - соленоиды со спиральной обмоткой. Слева обмотка с витками круглого сечения, справа – с витками прямоугольного сечения (***1*** - проводники, ***2*** - изоляция, ***3*** - опорный цилиндр, ***4*** - бандаж из стеклопластика);
б - соленоид с ленточной обмоткой (изоляция не показана);
в - соленоид с винтовой обмоткой (изоляция не показана).
г - соленоид Биттера: слева - элементы обмотки, справа – вид сбоку на собранную обмотку (***1*** - проводники, ***2*** - изоляционные прокладки, стрелками показано направление тока)

Например, в работах А.С. Лагутина и В.И. Ожогина [13] использован провод, применяющийся при изготовлении сверхпроводящих магнитов. Он представляет собой пучок нитей из сплава ниобия и титана, размещенных в медной матрице прямоугольного сечения. Этот проводник обладает высоким пределом текучести за счет высокой прочности нитей и вместе с тем при нормальной температуре имеет низкое сопротивление, определяемое материалом матрицы. В качестве изоляции в этом магните использован эпоксидный компаунд. В более современных магнитах применяют новые высокопрочные пластики, одним из которых является материал Zylon. Обычно обмотка размещается внутри бандажа из твердого пластика (стеклоэпоксидный компаунд, Zylon и другие) или внутри металлического бандажа с фланцами, стянутыми в продольном направлении болтами. Конструкция магнита с такой обмоткой представлена на рис. 7.2, взятом из книги [13]. Вихревые токи,

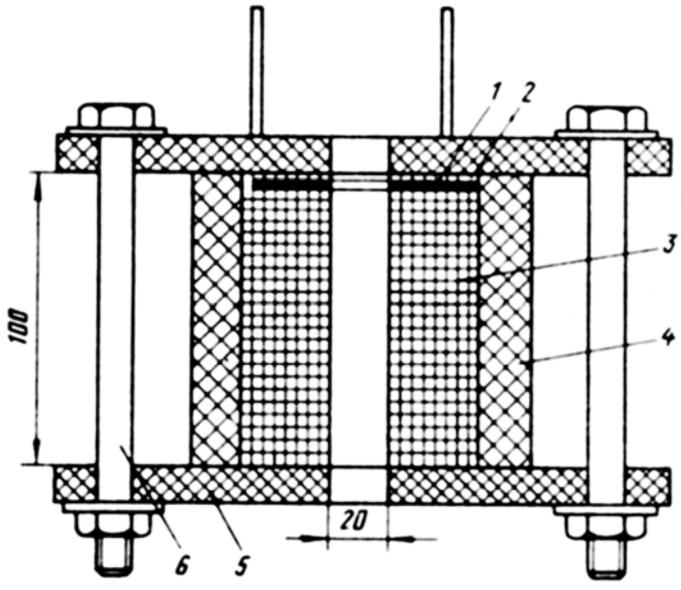


Рис. 7.2. Многовитковый соленоид с фланцами и внешним диэлектрическим бандажом

наводимые в металлическом бандаже и фланцах, несколько ослабляют поле в соленоиде, однако их влияние может быть небольшим, если материал фланца и бандажа имеет низкую проводимость (нержавеющая сталь), и при этом импульс обладает достаточно большой длительностью. Обмотка вместе с изоляцией представляет собой монолит. Наличие пор (слабых мест) приводит к смещению витков или к повороту их сечения, что может быть одной из причин разрушения изоляции. Плотная насадка бандажа и стягивание фланцев в осевом направлении создают внутренние напряжения в обмотке и этим способствуют закрытию пор, ликвидации слабых мест.

В типичных конструкциях соленоидов с многослойной обмоткой и равномерной плотностью намотки, снабженных металлическими бандажами и фланцами и имеющими изоляцию в виде стеклоэпоксидного компаунда, удается получить поле с индукцией до 30-40 Т при длительности импульса 10^{-4}-10^{-2} с. Рекордными являются поля с индукцией, близкой к 50 Т.

Некоторое увеличение предельного значения индукции можно получить, если использовать неравномерное распределение тока по радиусу. Идеальным является такое распределение тока, при котором нагрузка одинакова во всех слоях обмотки. Модель такого распределения тока описана в § 5.2. В реальных системах с многослойной обмоткой распределение тока по слоям определялось путем решения системы из n уравнений (n - число слоев) для токов в слоях. Каждое из этих уравнений связывало азимутальное напряжение в данном слое с токами в слоях, то есть являлось дискретным аналогом уравнения (5.2). Эта идея положена в основу современных разработок магнитов с индукцией, близкой к 100 Т.

Следует выделить магнитные системы, в которых использованы двухмодульные обмотки, предложенные Шнайдером-Мунтау. Схема такого магнита представлена на рис. 7.3. Внешний модуль магнита существенно больше внутреннего. Он выполнен из проводников большого сечения и предназначен для создания на оси магнитной системы импульсного поля с индукцией 50 Т и большой длительностью импульса (около 2 с.). Внутренний модуль предназначен для получения относительно короткого импульса поля (с длительностью на полувысоте около 15 мс) с индукцией 50 Т (рис. 7.4). Ток во внутреннем модуле включается в момент максимума тока внешнего модуля. Таким образом, результирующее значение индукции такого магнита должно составить 100 Т. Несмотря на большую длительность импульса, нагрев обмотки внешнего модуля

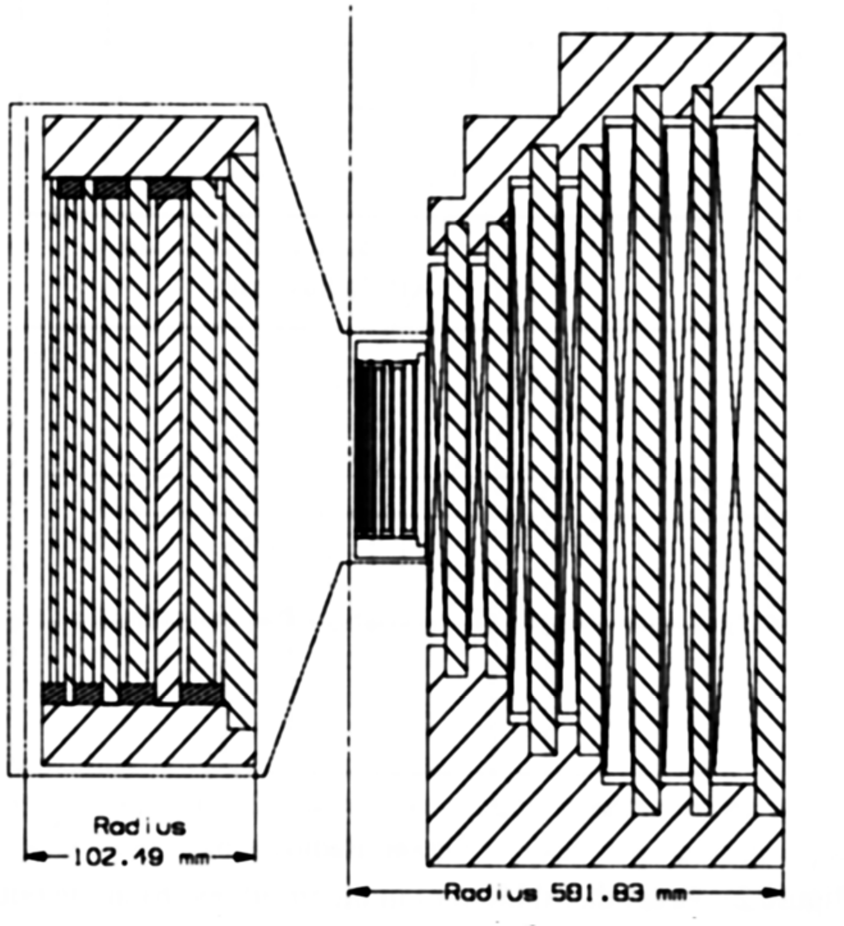


Рис. 7.3. Двухмодульный магнит с равнонагруженной обмоткой, разработанный в Национальной Магнитной Лаборатории (США). Правая половина рисунка – продольный разрез магнита. Левая половина – разрез внутренней секции

не превышает допустимых значений благодаря большому сечению проводников**.** Во внутреннем модуле проводники тоньше и плотность тока в них выше, но нагрев остается допустимым благодаря малой длительности импульса тока. Для питания внешнего модуля требуется источник с энергией 140 МДж. В проекте Национальной Магнитной Лаборатории (США) для этой цели предполагалось использовать синхронный генератор в режиме торможения. Аналогичный проект разрабатывается в Германской Лаборатории сильных магнитных полей. Для питания магнита предполагается использовать конденсаторную батарею с энергией до 35 МДж.

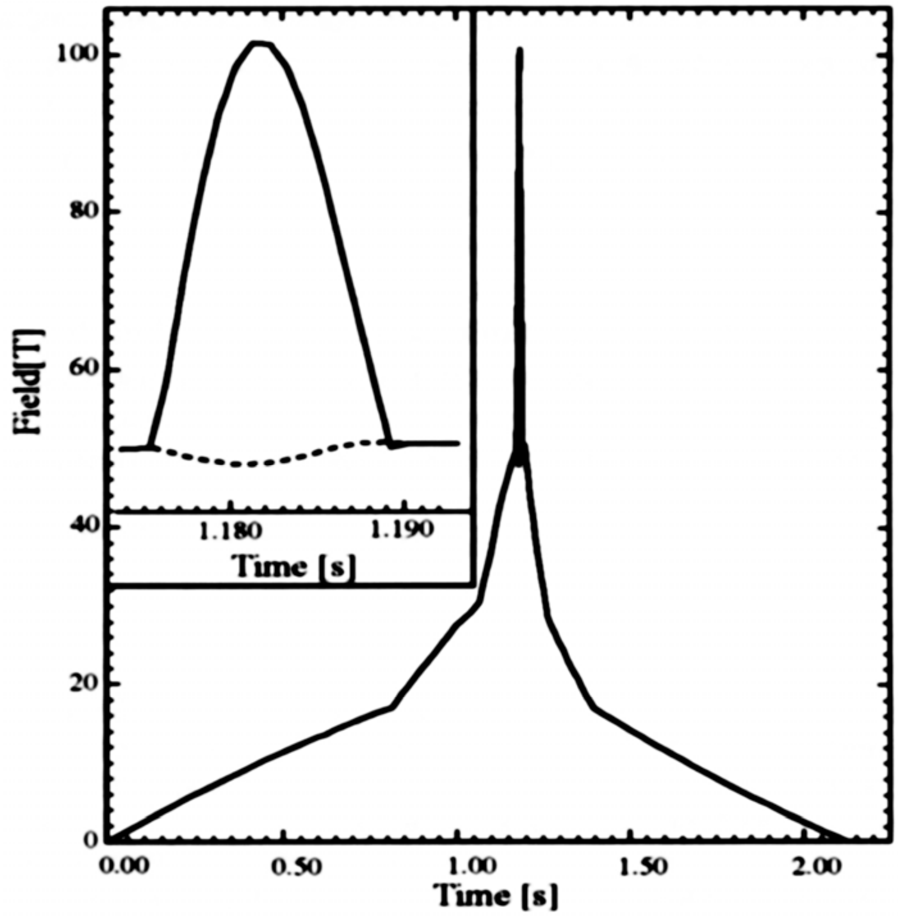


Рис. 7.4. Расчётная зависимость индукции от времени в двухмодульном магните

Расположение проводников и выбор токов в них обеспечивает условие равнонагруженности слоев обмотки. Это подтверждают результаты компьютерного моделирования, представленные на рис. 7.5.

Несмотря на применение самых прочных материалов, до сих пор поле с индукцией 100 Т является порогом, который не удается превзойти в магнитах многократного применения. Наиболее частой причиной выхода из строя катушек является разрушение выводов обмотки.

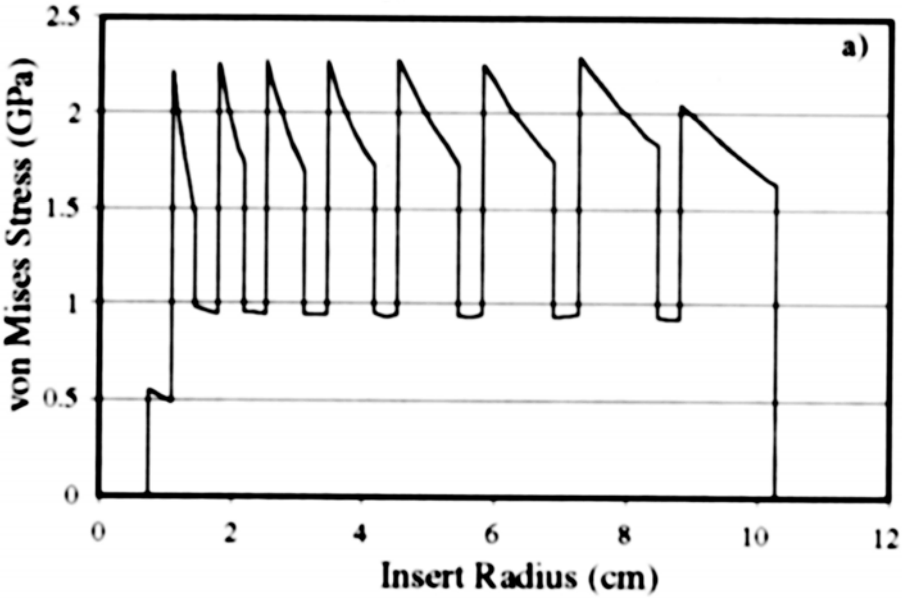


Рис. 7.5. Распределение напряжений в равнонагруженной внутренней секции двухмодульного магнита

Как было сказано, равнонагруженные обмотки стали основой конструкции современных магнитов, рассчитанных на получение полей мегагауссного уровня. Однако в ходе развития технологии получения сильных полей было разработано много других конструкций, представляющих не только исторический интерес, но и дающих примеры эффективного решения проблемы прочности магнитов. Далее даны примеры некоторых из таких конструкций.

Соленоиды с ленточной обмоткой и с витками в форме дисков

Обмотка в виде ленты, намотанной в несколько слоев, разделенных изоляцией, использовалась в ряде работ (рис. 7.1, б). Отмечалось удобство такой обмотки для формирования трапецеидального и других форм сечения соленоида. Вместе с тем ленточная обмотка, один из концов которой закреплен не жестко, способна раскручиваться под действием электромагнитных сил, что может привести к некоторому снижению напряжений в витках.

Дисковая обмотка может быть выполнена либо в виде спирали, выточенной из цилиндрической заготовки (рис. 7.1, в), либо составлена из отдельных дисков с разрезами, как это показано на рис. 7.1, г. Последний тип обмотки - соленоиды Биттера - получили широкое распространение благодаря простоте конструкции и большой прочности. Пакет дисков или спираль, выточенная из заготовки, после упаковки изоляционных прослоек плотно стягивались с помощью фланцев и шпилек (см. рис. 7.6).

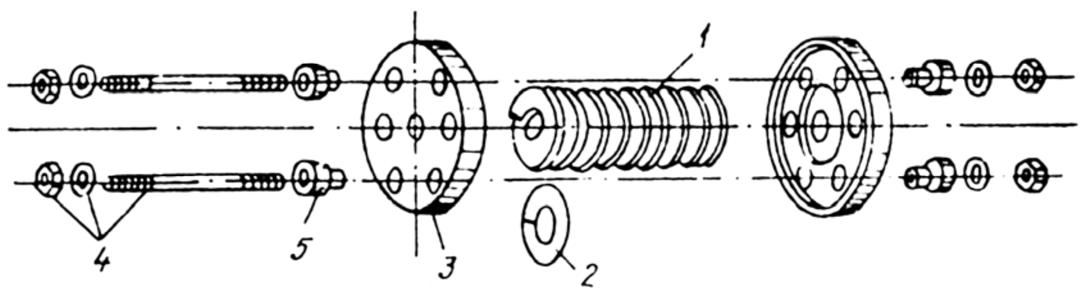


Рис. 7.6. Дисковый соленоид с фланцами в разобранном виде:
1 – обмотка, ***2*** – изоляция, ***3*** – фланцы, ***4*** – стяжки и крепежные детали,
5 – изоляционные шайбы

Подробное изложение результатов механических и тепловых расчетов катушек Биттера содержится в книге Монтгомери [11]. Многие авторы экспериментально изучали поведение таких соленоидов в сильных полях [12]. В экспериментах Фюрза и Ванека в качестве основной конструкции использовалась катушка с числом витков около 20 на 1 см. Толщина обмотки в радиальном направлении изменялась от 5 до 125 мм. Диски Биттера, сдавленные в осевом и радиальном направлениях, хорошо сопротивлялись осевой деформации, однако в сильных полях края дисков сгибались от радиальных сил. Катушка из чистой меди в этих опытах заметно деформировалась уже в поле с индукцией 35 Т, а при 50 Т выходила из строя. Катушки из бериллиевой бронзы позволяли получать несколько импульсов поля с индукцией 65 Т. В поле с индукцией 85 Т они разрушались после одного разряда, при этом уже проявлялись инерционные свойства материала.

Для крепления катушек можно использовать керамический бандаж. Он обладает большой жесткостью и не имеет остаточной деформации, которая приводит к возникновению зазора между катушкой и опорной поверхностью, дающего возможность радиального расширения обмотки и ее повреждения при последующих разрядах. Система крепления катушек показана на рис. 7.7. В опытах Фонера и Холма в катушке с внутренним диаметром 4,75 мм и внешним 25,4 мм получено поле с индукцией 65 Т. Наружный керамический бандаж при этом иногда растрескивался, но мог быть заменён.

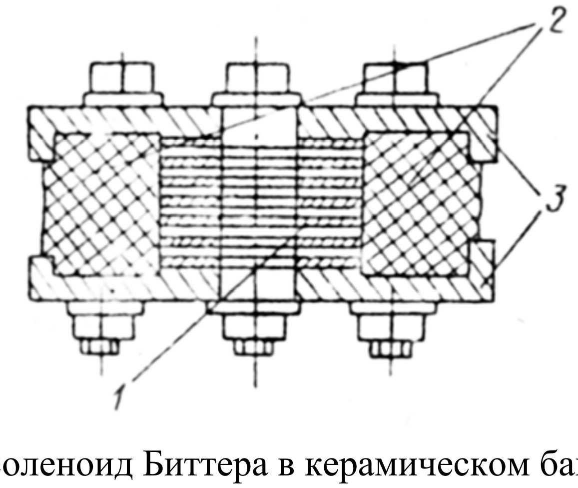


Рис. 7.7. Соленоид Биттера в керамическом бандаже:
1 – обмотка, ***2*** – бандаж, ***3*** – фланцы

Поведение изоляции дисковых катушек на большом числе образцов изучалось Фюрзом и Ванеком. Наилучшим материалом, позволяющим работать при напряжении до 8 кВ, по мнению авторов этой работы, является слюда с фторопластом в масле с использованием эпоксидной смолы в качестве связующего. Большое применение находит слюдяная изоляция, технология изготовления которой описана в книге В.Р. Карасика [12]. Помимо механических повреждений причиной перекрытия изоляции дисковых катушек может быть осаждение на ее поверхности паров меди, образующихся при нагреве дисков импульсным током. Эти пары появляются, по-видимому, в результате перегрева ребер дисков, где имеет место возрастание плотности тока.

7.2. Одновитковые магниты

Выше упоминалась возможность получения в одновитковых магнитах поля, амплитуда которого близка к магнитному пределу прочности B_M. Этот предел может быть дополнительно увеличен при сокращении длительности импульса, как это отмечалось в § 2.3. По данным исследований, выполненных в Институте атомной энергии им. И.В. Курчатова А.М. Андриановым, В.Ф. Демичевым и др. в 1970 г., наиболее высокими показателями обладают соленоиды из тантала: в них удается получить в течение нескольких разрядов поле с индукцией до 100 Т.

Многократное использование одновитковых магнитов сопряжено с трудностями, вызванными специфическим процессом эрозии внутренней поверхности витка: после нескольких разрядов на ней появляются регулярно расположенные радиальные трещины (“эффект пилы” [4]). У их дна происходит сгущение тока, что вызывает более сильный нагрев и большие силы в этих местах и ведет к дальнейшему росту трещин. Исследования показали, что глубина трещин у стальных и латунных соленоидов достигала 3-4 мм после семи или пятнадцати разрядов при относительно слабом поле с амплитудой индукции 56 Т (соленоиды имели диаметр 6,8 мм, время нарастания тока - 3,9 мкс) (рис. 7.8) [15]. Этот процесс наиболее резко выражен у таких сплавов, как латунь, малоуглеродистая сталь, бериллиевая бронза, и слабо выражен у образцов из меди.

Продольные царапины, нанесенные на поверхность соленоида, всегда становятся зародышами трещин, поэтому поверхность соленоида должна тщательно обрабатываться. Процесс эрозии, несомненно, связан с нагревом поверхности при наличии скин-эффекта.

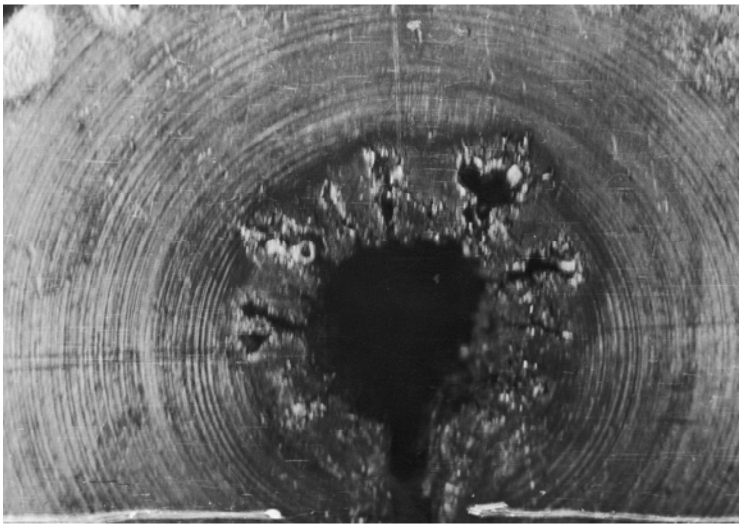


Рис. 7.8. Радиальные щели, образовавшиеся в одновитковом магните после нескольких разрядов

Нагрев приводит к плавлению или размягчению поверхностного слоя и к его тепловому расширению. Последнее может привести к появлению неустойчивости в виде продольных борозд на поверхности, которые наблюдались после первого разряда. Зародыши трещин могут появиться и в результате разрывов на поверхности при ее быстром охлаждении после импульса, когда тепло отводится в толщу стенки соленоида. Определенную роль в развитии трещин могут играть и процессы окисления перегретых участков на дне трещин. Эрозия, являющаяся следствием тепловых, механических и, возможно, химических процессов, заметно снижает уровень полей, при которых одновитковые соленоиды могут быть многократно использованы. Рекордные значения индукции в таких режимах получены Институте Атомной Энергии им. И.В. Курчатова в соленоидах из тантала, где поле достигало 100 Т при времени нарастания около 2 мкс. Поле такой величины и вместе с тем имеющее большую скорость нарастания, было необходимо для сжатия цилиндров из циркония с целью герметизации тепловыделяющих элементов атомных реакторов. Это поле близко к предельному по механической прочности тантала. В стальных образцах, как отмечалось, эрозия начинается в полях, более слабых, чем магнитный предел текучести. В связи с этим перспективны комбинированные системы, в которых прочный, но подверженный эрозии металл используется в качестве неразрушаемого элемента конструкции (внешнего бандажа). Его внутренняя поверхность может быть защищена сменной прокладкой. Такое устройство можно использовать для получения поля с индукцией порядка магнитного предела прочности материала бандажа и значительно превышающей этот предел для материала прокладки, которая деформируется, но может быть заменена после одного или нескольких разрядов.

Ранее было отмечено, что при нанесении слабо проводящего покрытия может быть снижена температура поверхности одновиткового магнита. Это может привести к замедлению развития эрозии и повышению порогового поля магнита, предназначенного для длительной работы.

У одновитковых магнитов слабыми звеньями являются изоляция радиальной щели и конструкция токоподвода. Сильный нагрев поверхности щели заставляет защищать изоляцию от теплового разрушения. Благоприятным моментом является то, что тепло практически не успевает перейти от металла к диэлектрику за время импульса, а после него оно быстрее отводится в стенку, чем к изоляции. Поэтому можно защитить изоляцию, выполненную из полиэтилена или фторопласта, слоем стеклоткани, уложенным на поверхности проводника.

Если ширина щели витка (размер вдоль силовой линии поля) равна его соленоида, то индукция в щели и в магните примерно одна и та же, следовательно, на края щели действуют примерно такие же силы (в расчете на единицу поверхности), как и в магните. Если края щели не закреплены, то возможно разрушение витка из-за концентрации напряжений у его внутренней поверхности напротив щели. Для предотвращения этого разрушения требуется специальное крепление щели с помощью, например, балок, установленных с внешней стороны токоведущих шин и стянутых болтами через изоляционные прокладки (рис. 7.9). При подводе тока к коротким виткам целесообразно использовать широкие токоведущие шины, что позволяет уменьшить как индуктивность шин, так и усилия, действующие на них.

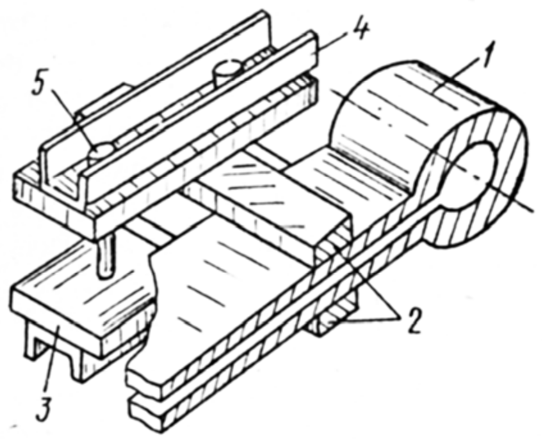


Рис. 7.9. Одновитковый магнит со стяжками:
1 – магнит, ***2*** –балка, ***3*** – изоляционные прокладки,
4 – швеллер, ***5*** – стяжные болты

Одновитковые магниты благодаря своей относительно малой индуктивности незаменимы при получении сильных импульсных магнитных полей с малым временем и большой начальной скоростью нарастания. По этой причине они широко используются в тех экспериментах по управляемому термоядерному синтезу, где производится сжатие и нагрев плазмы в быстронарастающем поле (тэта-пинчи). Одновитковые катушки применяют в технологии при магнитно-импульсной обработке изделий из плохо проводящих материалов (например, упомянутые выше опыты по сжатию цилиндров из циркония).

Вместе с тем высокая механическая прочность и простота конструкции одновитковых катушек создают им определенные преимущества перед многовитковыми системами и при получении относительно медленно меняющихся полей (с длительностью 10^{-4}-10^{-3} с). Для обеспечения высокой эффективности передачи энергии в поле магнита его индуктивность, как отмечалось в главе 1, должна быть велика по сравнению индуктивностью накопителя. Для этого необходимо использовать батареи конденсаторов, индуктивность которых мала. Другая возможность состоит в применении понижающих трансформаторов, что позволяет уменьшить требования к индуктивности накопителя, но ставит задачу создания высокоэффективного трансформатора. Некоторыми конструктивными преимуществами обладает кабельный трансформатор (рис. 7.10), описанный в книге [15].

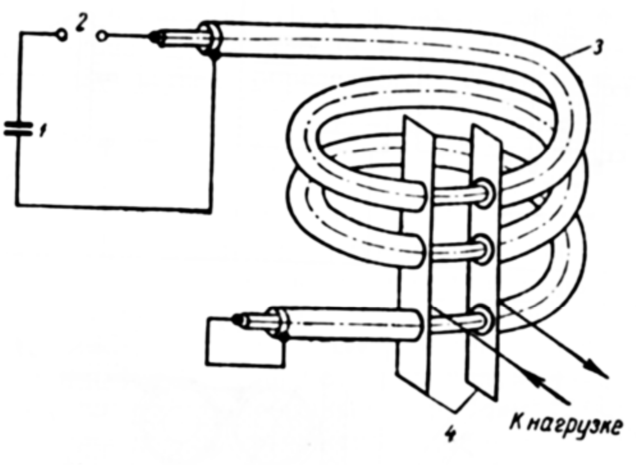


Рис. 7.10. Кабельный трансформатор в цепи разряда ГИТ и её эквивалентная схема замещения: ***1*** - батарея конденсаторов; ***2*** - разрядник; ***3*** - высоковольтный кабель; ***4*** - шины к нагрузке

Устройством, совмещающим трансформатор и одновитковый магнит, является концентратор потока, три разновидности которого представлены на рис. 7.11. Вторичная обмотка представляет собой одновитковый магнит, сечение которого может быть выбрано так, чтобы обеспечить усиление поля (концентрацию потока) в рабочей области. В этом устройстве витки первичной обмотки могут быть уложены в пазы, как это показано на рис. 7.11,*в*. При такой конструкции можно разгрузить первичную обмотку от осевых и радиальных электромагнитных сил: путем выбора зазоров, отделяющих виток от стенок паза, можно добиться равенства

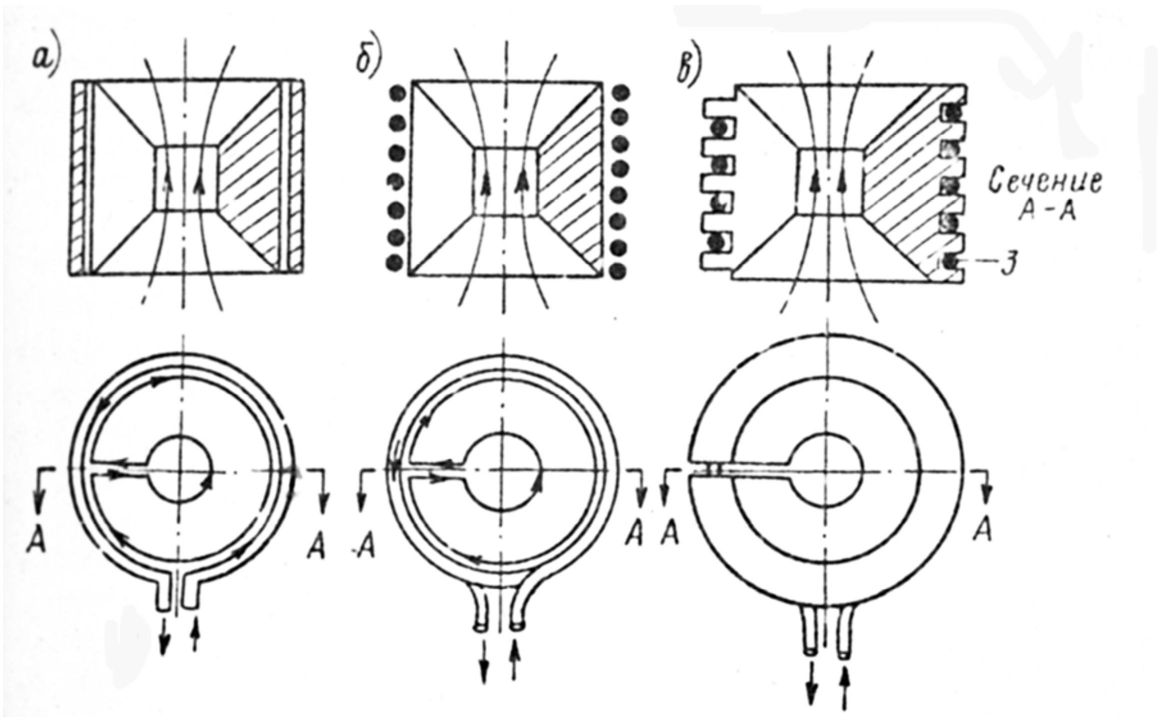


Рис. 7.11. Три разновидности концентраторов потока, отличающиеся конструкцией первичной обмотки: ***а*** - первичная обмотка в виде одновиткового соленоида; ***б*** - многовитковая спиральная обмотка; ***в*** - многовитковая спиральная обмотка, уложенная в пазы

напряженности магнитного поля со всех сторон витка и тем самым сделать равной нулю равнодействующую электромагнитных сил, приложенных к витку. В таком устройстве силы действуют лишь на сплошной вторичный виток трансформатора.

В заключение еще раз отметим, что известным недостатком одновитковых соленоидов, работающих в условиях резко выраженного поверхностного эффекта, является их более сильный нагрев, чем многовитковых, поскольку ток не распределен принудительно по сечению обмотки (как это имеет место в многослойных катушках), а сосредоточен в поверхностном слое. Это обстоятельство ограничивает применение одновитковых соленоидов в большей степени, чем механическая прочность, если они работают в режиме многократного пользования.

7.3. Соленоиды, предназначенные для магнитно-импульсной обработки металлов и ускорения проводников электромагнитными силами

Как отмечалось, электромагнитные силы, воздействующие на проводники в импульсных магнитных полях, могут быть использованы для ускорения и деформирования тел. Эти возможности получили техническое воплощение после появления мощных импульсных источников энергии (высоковольтных малоиндуктивных конденсаторных батарей) и создания магнитных систем, позволяющих получать сильные импульсные поля. Не останавливаясь на технологической стороне процессов магнитно-импульсной обработки металлов, рассмотрим типичные конструкции используемых для этой цели магнитных систем.

Основными достоинствами магнитно-импульсной обработки металлов являются большая гибкость процесса, отсутствие подвижных частей аппаратуры, возможность обработки изделий в вакууме и в атмосфере защитных газов, незначительные эксплуатационные расходы, легкость автоматизации операций. Обычно технологические установки представляют собой емкостной накопитель с набором соленоидов и сменных концентраторов, позволяющих выполнять целый ряд операций: насадку и обжим труб, раздачу труб, формовку деталей из плоских проводящих листов. Конфигурации используемых магнитов весьма разнообразны, но многие из них в той или иной мере являются развитием систем, представленных на рис. 7.12, 7.13 и 7.14. Ток к обрабатываемой детали может подводиться непосредственно (рис. 7.12) или может быть индуктирован в ней (рис. 7.13, 7.14).

При первом способе подвода тока необходимо обеспечить сильноточный контакт внешней цепи и обрабатываемого тела, зато нет необходимости иметь высокую проводимость материала детали.

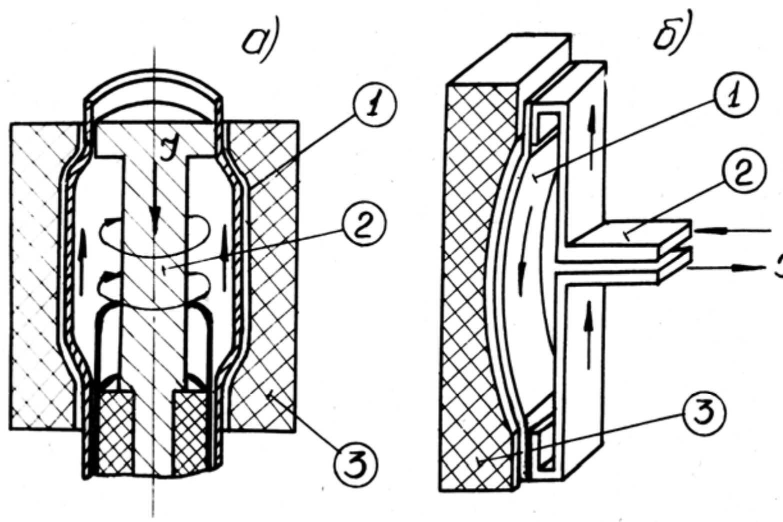


Рис. 7.12. Устройства для пластической обработки металлов сильным импульсным магнитным полем с непосредственным подводом тока к обрабатываемой детали [86]:
а - коаксиальная система для раздачи труб;
б - магнитный молот для обработки плоских листов;
1 - обрабатываемая деталь; ***2*** - устройства для подвода тока;
3 - матрица

Во втором способе нет проблемы контакта, можно пользоваться многовитковыми индукторами, что позволяет снизить требования к индуктивности конденсаторной батареи. Модификации магнитных

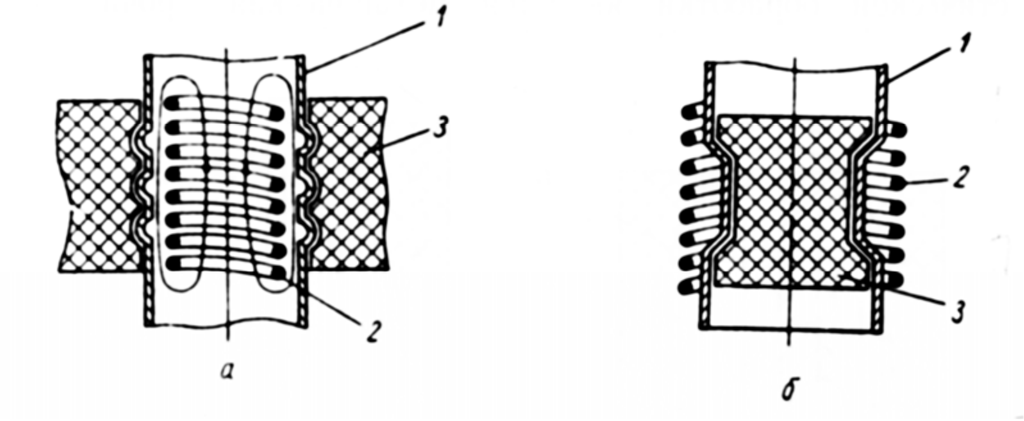


Рис. 7.13. Устройства, применяемые при пластической обработке цилиндров сильным импульсным магнитным полем:
а - система для раздачи труб; ***б*** - система для сжатия труб;
1 - обрабатываемая деталь; ***2*** - соленоид; ***3*** - матрица

систем, представленных на рис. 7.14, и их аналоги используются в приводе отключающих аппаратов, в системах быстрого напуска газа, в устройствах для индукционного ускорения твердых тел.

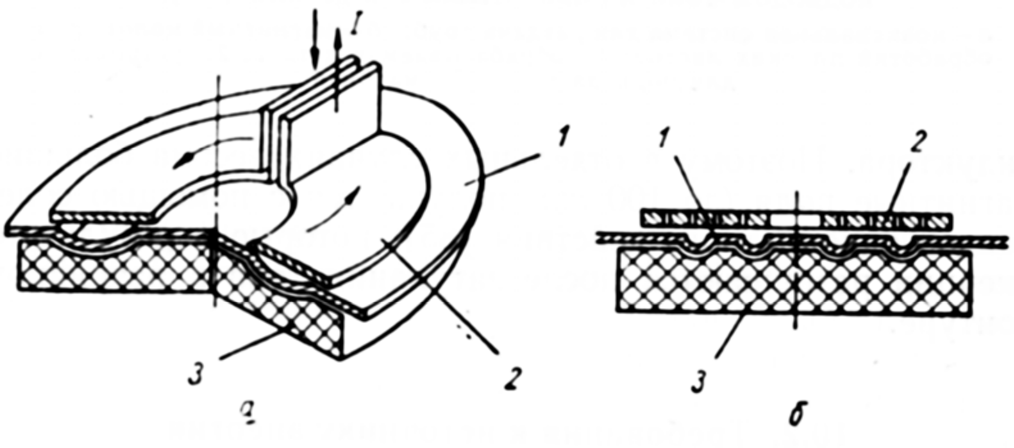


Рис. 7.14. Устройства, применяемые при пластической обработке плоских листов сильным импульсным магнитным полем:
а - одновитковый соленоид над плоским листом;
б - многовитковый соленоид над плоским листом;
1 - обрабатываемая деталь; ***2*** - соленоид; ***3*** - матрица

Очевидно, наибольшим эффектом обладает устройство, в котором индуктированный ток имеет такую же поверхностную плотность, как у идеального проводника. У обычных проводников это наблюдается в случае, когда постоянная времени вторичного контура (детали) много больше периода колебаний тока в цепи. У материалов с плохой проводимостью, где это условие не выполняется, приходится использовать дополнительные покрытия из хорошо проводящих металлов (например, устанавливать медную прокладку при обработке деталей из нержавеющей стали).

Другая возможность состоит в применении одновиткового индуктора в сочетании с малоиндуктивной конденсаторной батареей, обладающей относительно малой емкостью и, соответственно, высоким напряжением - до 50-100 кВ. Высокая частота разряда в такой цепи может обеспечить необходимые условия для эффективного воздействия. В качестве примера рассмотрим условия выбора частоты в установке, предназначенной для сжатия тонкостенных металлических труб в поле цилиндрического индуктора. Постоянная времени тонкостенного цилиндра есть $\tau = \mu_0 Rh/(2\rho_0)$, если нагрев стенки относительно мал. (Здесь R - радиус, h - толщина стенки цилиндра.) У медного цилиндра с $R = 10^{-2}$ м, $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\tau_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ с, а у цилиндра из нержавеющей стали эта величина в 20-50 раз меньше. В последнем случае для эффективной обработки необходима частота порядка 100 кГц. Требования к частоте могут быть еще выше, если индукция превышает значение $(2h/R)^{1/2} B_0$. В этих режимах проводимость падает из-за нагрева вихревым током, и уменьшается время проникновения внешнего поля в полость цилиндра [14].

Соленоиды для магнитно-импульсной обработки обычно рассчитаны на получение поля с индукцией не выше 10-20 Т, когда еще удается сравнительно простыми средствами обеспечить их длительную эксплуатацию. В большинстве случаев используются многовитковые соленоиды, обмотка которых укреплена бандажом из стеклопластика. Нашли применение устройства с концентраторами магнитного потока (рис. 7.12), применяемыми как для изменения геометрии и напряженности поля в рабочем объёме, так и для снижения усилий, действующих на обмотку, витки которой размещаются в пазах. В некоторых случаях, например, для холодной сварки кабельных муфт в полевых условиях используются многовитковые индукторы однократного действия, разрушающиеся за один разряд.

Устройства для ускорения проводников электромагнитными силами по способу подвода тока, так как и системы, применяемые в технологии, могут быть кондукционного и индукционного типов. В первых из них ток подводится к ускоренному телу через подвижные контакты. Если тело при этом скользит по контактным шинам как по рельсам, то подобное устройство называется рельсотроном (рис. 7.15).

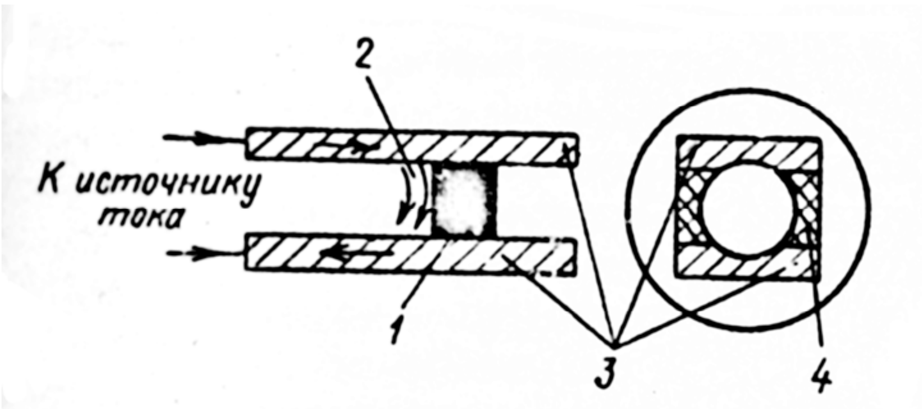


Рис. 7.15. Устройство для ускорения непроводящих тел (рельсотрон):
1 - ускоряемое тело; ***2*** - металлическая фольга;
3 - электроды; ***4*** - изолятор

Другая разновидность такого типа ускорителей - устройства типа зет- и тэта-пинч (рис. 7.16,а, б), названные так по аналогии с конфигурацией, используемой для сжатия плазмы. Эти системы находят применение в экспериментах по получению сверхсильных магнитных полей путем сжатия потока, в опытах по ускорению сверхлегких лайнеров до скоростей порядка 10^7 см/с для целей термоядерного синтеза.

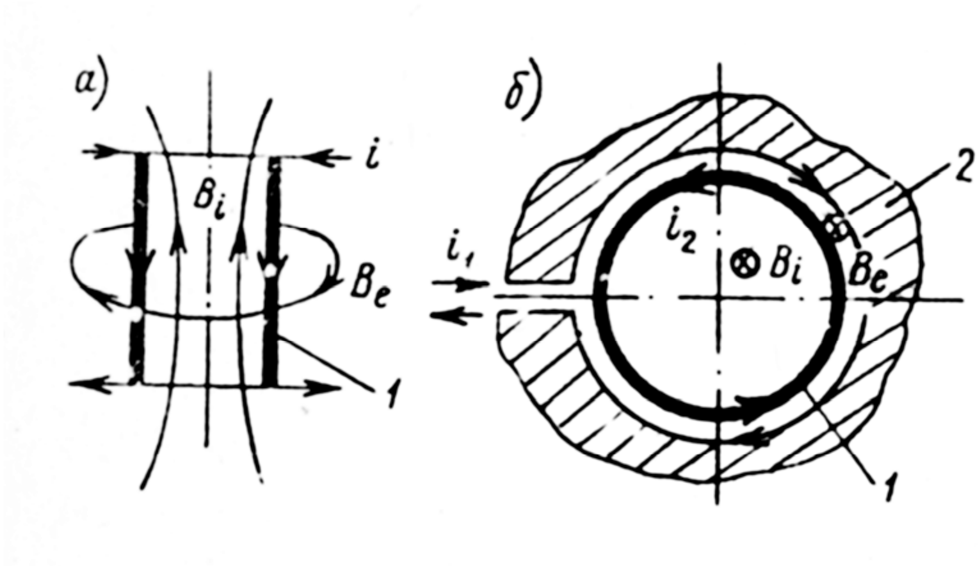


Рис. 7.16. а) — зет–пинч, б) – тета–пинч

Индукционный ускоритель, так же как и аналогичная система, применяемая при пластической обработке, наиболее эффективен в тех случаях, когда индуктированный ток близок к тому, который имел бы место при идеальной проводимости тела. Однако возникающий при этом нагрев реального проводника может быть нежелательным фактором, ограничивающим значение скоростей до 3-5 км/с. Разгон до больших скоростей в рельсотроне приводит к такому перегреву тела, что меняется его фазовое состояние: оно плавится или испаряется. В.Н. Бондалетовым и его сотрудниками использована схема ускорителя, в котором тело движется в очень сильном поле одновиткового соленоида (с индукцией 60-70 Т), а ток, хотя и подводится к ускоряемому телу через контакты, но его значение при этом существенно меньше, чем ток в одновитковом магните, использовавшемся в этих экспериментах. Поскольку сила, ускоряющая тело, пропорциональна произведению индукции поля соленоида и тока в проводнике, можно, усилив поле, ослабить ток в проводнике до значений, при которых нагрев тела относительно мал. В опытах использовался одновитковый соленоид в форме щели, разрушавшийся после каждого разряда. Подобная ускоряющая система позволяет разогнать тело до скорости порядка нескольких километров в секунду.

Среди устройств для индукционного ускорения и деформирования можно выделить те из них, которые предназначены для «притяжения» металлических тел к индуктору подобно тому, как магнит притягивает ферромагнитное тело. При взаимодействии поля и наводимых им в проводнике вихревых токов проводник всегда смещается в область более слабого поля. Поэтому необходимо так сформировать импульсное поле, чтобы оно вдали от индуктора было слабее, чем вблизи от него. Примером такого устройства является показанная на рис. 7.16, б система, в которой тонкостенный цилиндр расположен соосно с одновитковым магнитом. В отличие от устройства, в котором нарастающее поле сжимает цилиндрическую оболочку, в рассматриваемой системе ток в индукторе сначала нарастает за время, большее, чем τ_0, а затем резко обрывается. В первой стадии процесса поле проникает через стенку цилиндра. Если ток в индукторе обрывается за время много меньшее, чем постоянная τ_0, то в стенке цилиндра индуцируется ток и в полости оболочки в течение времени масштаба τ_0 сохраняется проникшее в нее поле. При этом на стенку оболочки воздействует усилие, направленное наружу. Этот эффект может быть использован для технологических целей.

Задача притяжения мелких неферромагнитных тела к индуктору может быть решена путем формирования поля, которое усиливается при удалении от магнитной системы. Этого удается добиться, располагая соосно с соленоидом замкнутый полый экран с высокой проводимостью, как это показано на рис. 7.17. Чтобы создать достаточно сильное поле в зоне за ускоряемым телом, необходимо иметь весьма большой ток в магните, поскольку созданное им поле отчасти скомпенсировано полем токов, наведенных на экране.

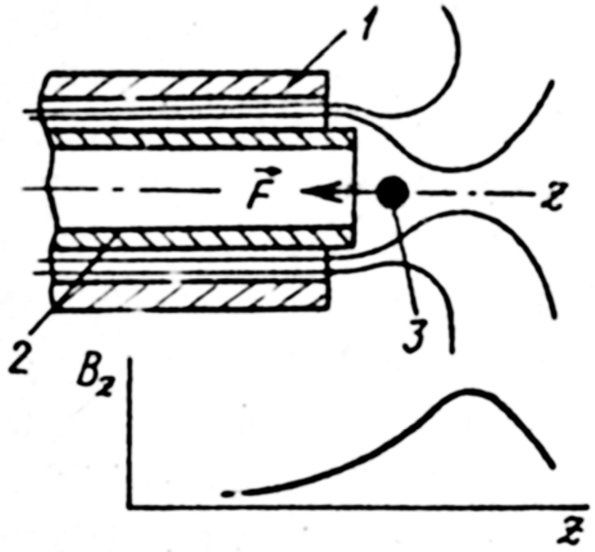


Рис. 7.17. Устройство для индукционного ускорения
проводящего тела по направлению к индуктору:
1 - соленоид; ***2*** - замкнутый экран; ***3*** - ускоряемое тело

Это создает технические трудности для реализации такой системы. Тем не менее, она может быть, например, прообразом устройства для извлечения проводящих неферромагнитных тел из глазного яблока с меньшими травмами, чем при обычном хирургическом вмешательстве

8. ПОЛУЧЕНИЕ СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В РАЗРУШАЮЩИХСЯ ОДНОВИТКОВЫХ МАГНИТАХ

Сверхсильными естественно назвать магнитные поля, амплитуда индукции которых велика настолько, что происходит полное или частичное разрушение магнита в результате одного импульса. Практически, однако, сверхсильными (или мегагауссными) называют поля с индукцией, превышающей 100 Т (1 МГс). Различие между обоими определениями не очень существенно, если речь идет о прочных материалах (бериллиевая бронза, тантал, стали с повышенным пределом текучести и др.), у которых магнитный предел прочности близок к 100 Т.

В данной главе рассматривается качественная картина процессов, приводящих к разрушению одновитковых магнитов при получении в них сверхсильного поля, а также анализируются математические модели этих процессов с целью интерпретации экспериментальных данных и оценок требований к установкам для получения поля требуемой интенсивности. При этом будем предполагать, что стенки витка до разряда неподвижны.

8.1. Физические процессы, сопровождающие получение сверхсильного магнитного поля

Исследования в области высокотемпературной плазмы большой плотности, решение ряда проблем физики твердого тела, наконец, задачи дальнейшего прогресса в новейшей технологии стимулируют развитие работ по получению сверхсильного магнитного поля. Это подтверждается данными табл. 8.1, взятой из обзора [18]. Там приведены результаты некоторых экспериментов, в которых магнитное поле создавалось при разряде мощной конденсаторной батареи на одновитковый магнит.

Таблица 8.1

Магнитные поля, получаемые в одновитковых магнитах (сводка экспериментальных данных)

№ п/п	Авторы		D мм	l мм	h мм	Материал	Im MA	dI/dt MA/μs	t_i μs	Bm T	t_B μs	B∞ T
1	Furth H.P., Levine M.A., Waniek R.W.	1957	3.2	6		Cu	1.1	0.4	11	160	6.4	133
2	Shneerson G.A.	1962	3.4	5.5		st	1.37	0.55	3.9	155	3.9	156
3	Forster D.W., Martin J.C.	1967	5	15	1.25	Cu	3.5	5		260	1/0	470
4	Shearer J.W.	1969	3	8		Ta	8.8	4.6		355		450
5	Andrianov A.M. at al	1970	2.1	2.5		Al	1.36	0.85	2.66	165	1.65	143
6	Andrianov A.M. at al	1970	2.1	2.5		Cu	1.54	1	2.8	200	1.9	210
7	Andrianov A.M. at al	1970	2.1	2.5		Ta	1.54	0.95	2.9	310	2.3	240
8	Knoephel H., Luppi R.	1972	5	10		Ta	2.5		7	180	5	182
9	Herlach F, McBroom R.	1973	2.5	5	2.1	Cu	1.3	1.43	2.2	204	1.6	251

Продолжение табл. 8.1

№ п/п	Авторы		D мм	l мм	h мм	Материал	Im MA	dI/dt MA/μs	t_i μs	Bm T	t_B μs	B∞ T
10	Shneerson G.A	1974	3.4	2.6		st	2.65	0.9	4.6	200	2.6	200
11	Bocharov Y.N. at al	1979	3	5	1.5	Cu	1.17	1.23	1.5	206	1.5	233
12	Bocharov Y.N. at al	1979	3	3	1.5	Cu	1.15	1.2	1.5	280	1.5	230
13	Bocharov Y.N. at al	1979	2	2	1.5	Cu	0.99	1.03	1.5	350	1.5	213
14	Gennadiev N.N. at al	1979	2.3	5	0.5	Cu	1.15	1.39	1.3	220	1.3	247
15	Gennadiev N.N. at al	1979	2.3	2.5		Cu	1.15	1.27	2.25	180	1.45	236
16	Andrianov A.M. at al	1982	3	3	0.5	Cu	0.66	0.83	1.25	190	1.25	191
17	Andrianov A.M. at al	1982	3	5	0.5	Cu	0.77	0.9	1.3	195	1.4	199
18	Andrianov A.M. at al	1982	3	7	0.5	Cu	1.1	1.11	1.55	200	1.7	221
19	Bocharov Y.N. at al	1982	2	2	1.5	Cu	1.18	1.68	1.1	390	0.97	270
20	Andrianov A.M. at al	1982	3	3	0.5	Cu	0.66	0.87	1.25	190	1.25	182

Продолжение табл. 8.1

№ п/п	Авторы		D мм	l мм	h мм	Материал	Im MA	dI/dt MA/μs	t_i μs	Bm T	t_B μs	B∞ T
21	Andrianov A.M. at al	1984	2	2	1.5	Cu	0.745	1	1.35	215	1.16	210
22	Nakao. K. at al	1985	2	2	1.9	Cu	1.35	2.22	1.38	263	0.84	312
23	Nakao. K. at al	1985	10	10	3	Cu	2.07	1.34	2.75	152	1.44	243
24	Goto T. at al	1987	3	3-4	1,8-3,75	Ta	2,5	1,3	2,6	280	2,6	356
25	Von Orterberg M. at al [47]	1994	10	10	3	Cu	1.41			103		
26	Von Orterberg M. at al	1994	5	5	2	Cu	1.41			196		
27	Krivosheev S.I. at al	1997	2	2.73	1.93	Cu	1.26	2.12	0.93	310	0.47	305
28	Krivosheev S.I. at al	1997	2	1.82	1.9	Cu	1.19	2.29	0.82	336	0.57	317
29	Miura N. at al	1998	10	10	3	Cu	2.8	1.25	3.00	210	2.50	234
30	Mackay K. at al [14]	1998	0.05	0.03	0.025	Cu	0.014	0.239	0.022	53	0.02	103

Окончание табл. 8.1

№ п/п	Авторы		D мм	l мм	h мм	Материал	Im MA	dI/dt MA/µs	t_i µs	Bm T	t_B µs	B∞ T
31	Lemke R.W. at al	2004				Cu	17	85		1000		
32	Novac B.M. at al	2005	2	2	1.6	Cu		1.25		240	0.9	238
33	Boriskin A.S. at al	2005	5	5	1.5	Cu	2.4	2.8571	0.8	290	0.7	354

Примечание:

Обозначения в таблице: d - внутренний диаметр магнита, l - длина, h - толщина стенки,I_m - амплитуда тока, $dI/d\ t$ - скорость нарастания тока, t_i - момент максимума тока, B_m - амплитуда индукции, t_B - момент максимума индукции, B_∞ - индукция, рассчитанная по формуле (8.18).

В большинстве экспериментов, представленных в табл. 8.1, использовались витки малого размера, длина которых не превышала нескольких миллиметров, а внутренний диаметр, как правило, был меньше длины. У таких витков начальный геометрический фактор B/i наиболее высок, и при времени нарастания тока порядка 10^{-6} с в них достигнуто магнитное поле с индукцией до 360-390 Т при токах с амплитудой масштаба 1 МА. Столь сильное поле получено, несмотря на разрушение магнита в процессе разряда, приводящее к увеличению внутреннего радиуса витка. В катушках малого размера этот процесс приводит к снижению геометрического фактора. Можно выделить две группы экспериментов с витками малого размера. В первой из них использовались магниты, которые условно можно назвать толстостенными [1, 2, 5-8, 10, 15][3]. У таких катушек внешний радиус много больше внутреннего. Обычно толстостенные витки закреплялись во внешнем зажиме и частично разрушались в результате одного разряда. Во второй группе [9, 11-14, 16-22, 24, 26-28, 30, 32, 33][1] представлены результаты опытов с «тонкостенными» витками, у которых толщина стенки соизмерима с внутренним радиусом. Следует выделить также третью группу экспериментов – в них использовались одновитковые магниты, у которых начальные размеры (длина, внутренний диаметр) относительно велики — порядка 1 см [3, 4, 23, 25, 29, 31][1]. У таких магнитов геометрический фактор менее чувствителен к изменению радиуса за время порядка 1 мкс или меньше. В экспериментах третьей группы в опытах с токами порядка 10^7 А возможно получение поля с индукцией масштаба 10^3 Т.

Возможность получения мегагауссного поля в одновитковых катушках при быстром нарастании тока появилась в результате разработок малоиндуктивных высоковольтных конденсаторных батарей в 50-е годы XX века. Впервые эта возможность была реализована в опытах Фюрза, Левина и Ванека [4].

[3] Здесь использованы порядковые номера публикаций в табл. 8.1

Основные качественные стороны процессов, сопровождающих получение сверхсильных полей микросекундной длительности в толстостенных одновитковых магнитах малого объема, были изучены в исследованиях начала 60-х годов.

В этих опытах толстостенные витки помещались в жесткую массивную оправку и подключались к конденсаторной батарее. В результате разряда происходило частичное взрывное разрушение магнита, сопровождавшееся выбросом светящихся продуктов взрыва. Измерительная катушка или другой объект, размещенный в отверстии магнита, при этом сохранялся без разрушения. Этот эффект является характерной особенностью экспериментов с одновитковыми магнитам. Он обусловлен тем, что выброс среды при взрыве происходит в радиальном и осевом направлениях наружу.

Фотографии образцов после разряда демонстрируют их интенсивное разрушение (рис. 8.1). Амплитуда индукции поля, получаемого в одновитковых магнитах, определяется конкуренцией двух процессов. С одной стороны - это нарастание

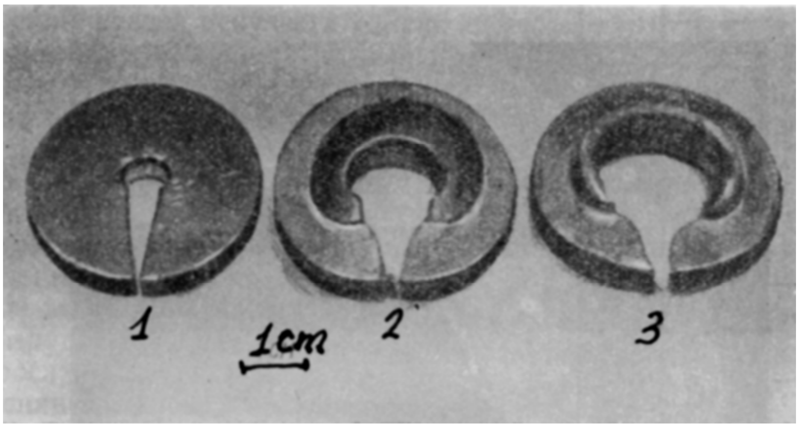


Рис. 8.1. Фотографии образцов толстостенных одновитковых магнитов после разряда при различных значениях первой амплитуды индукции: ***1*** — 63 Т, ***2*** — 93 Т, ***3*** — 114 Т. Время нарастания тока 3,9 мкс

тока во времени. С другой стороны - это увеличение эффективных характерных размеров витка из-за диффузии поля в проводник и разрушения последнего в результате совместного действия электромагнитных сил и нагрева.

Магнитное давление $P_M = B^2 \big/ 2\mu_0$ уже в поле с индукцией 70 Т превышает статический предел текучести самых твердых металлов, а поверхность проводника за один полупериод нагревается более чем на 1000 К (см. главу 3). В опытах Фюрза, Левина и Ванека [4] соленоиды из бериллиевой бронзы с начальным внутренним диаметром около 6 мм обнаруживали слабые признаки плавления и деформации в поле с амплитудой индукции 70 Т. В поле с индукцией 120 Т интенсивное оплавление поверхности сопровождалось остаточным увеличением внутреннего диаметра в полтора раза. На оплавленной поверхности были видны следы неустойчивости слоя жидкого металла. В поле с индукцией 160 Т соленоид с внутренним диаметром около 3 мм интенсивно деформировался. Деформацию соленоида авторы работы объясняли течением металла, а запаздывание деформации — его инерцией.

Основная цель работ, выполненных в работе [27], состояла в выяснении относительной роли пластической деформации и выброса металла в процессе разрушения магнитов и в оценке скорости увеличения радиуса. Опыты производились с одновитковыми катушками из различных материалов: меди, стали 3, стали 40, алюминия, дюралюминия, кирита (кирит - соединение, образованное спеканием порошков вольфрама и меди), бериллиевой бронзы, латуни и (для исследования в чистом виде разрушения из-за выброса) из сплава Вуда. Соленоиды имели начальный внутренний диаметр 3-4 мм, наружный - 40,5 мм, длину - 5,5 мм.

В исследованном диапазоне полей (наибольшая амплитуда индукции, полученная в стальных соленоидах, составляла 155 Т при времени нарастания 3,9 мкс) зависимость амплитуды от начального напряжения в пределах погрешности измерений (7-8 %) практически оставалась линейной. Как и в работе [4], увеличение внутреннего радиуса соленоида к моменту первого максимума тока было не настолько значительным, чтобы это проявилось в заметном уменьшении амплитуды индукции по сравнению с расчетным значением.

Сопоставляя результаты измерений индукции и скорости ее нарастания в деформирующемся витке, с соответствующими значениями, полученными при слабых полях (т. е. при отсутствии деформации), можно путем несложного расчета определить с погрешностью около 20-25 % мгновенное значение эффективного радиуса отверстия и оценить среднюю скорость его увеличения. Значения средней скорости <V> для промежутка $\pi/2 < \omega t < 3\pi/2$, полученные в работе [27], приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Средняя скорость роста радиуса одновиткового магнита в сравнении со скоростью Альфвена

Материал	B_{m1}, Т	<V>, м/с	V_A, м/с
Медь	93, 114	300, 330	760, 900
Латунь	90, 127	300, 400	720 ,1130
Сталь 3	85, 118	160, 240	760 ,1060
Сталь 40	143, 117, 155	350, 240, 350	1340, 920, 1380
Алюминий	53, 80	270, 400	—
Бериллиевая бронза	90, 115	120, 32	480, 850

Для сравнения в табл. 8.2 приведены значения альфвеновской скорости $V_A = B_{m1}\big/\sqrt{\mu_0\gamma_0}$, где γ_0 - плотность материала. В условиях этих экспериментов средняя скорость роста радиуса значительно меньше альфвеновской.

В магнитах, длина которых одного порядка или меньше внутреннего диаметра, существенным является перемещение металла в осевом направлении. Если роль выброса невелика (как показано ниже, это имеет место главным образом у пластичных и хорошо проводящих металлов), в результате такого перемещения осевое сечение соленоида после разряда принимает характерный вид (рис. 8.2), напоминающий осевое сечение цилиндрического бойка после удара о твердую мишень.

Увеличение длительности фронта токового импульса приводит к тому, что интенсивная деформация успевает развиться до первого максимума тока. В опытах с относительно медленно нарастающим сильным магнитным полем (временя нарастания тока 31 мкс) интенсивная пластическая деформация стальных витков приводила к значительному уменьшению (до значения 0,4) отношения B_{m1}/B_{m0} — первой амплитуды индукции к ее расчетному значению.

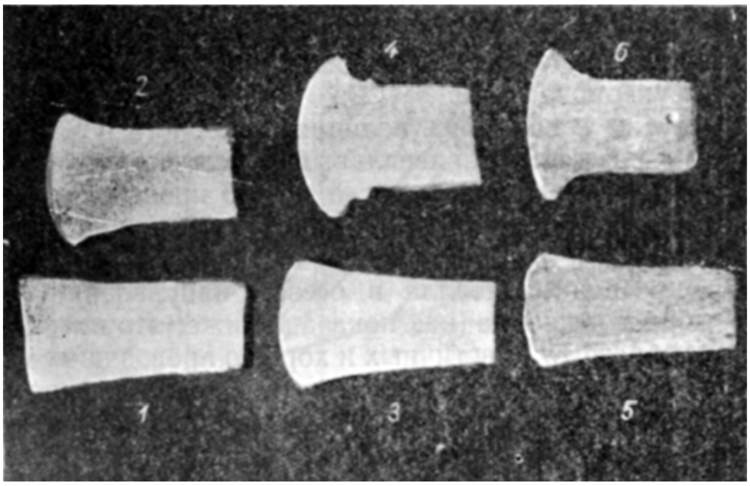


Рис. 8.2. Радиальные срезы образцов толстостенных одновитковых магнитов после разряда. Далее указан материал образцов и амплитуда индукции:
1 **—** Ст.3, 85 Т ***2*** **—** Ст.3, 129 Т ***3*** **—** медь, 93 Т; ***4*** **—** медь, 114 Т;
5 **—** латунь, 90 Т; ***6*** **—** латунь, 30 Т

Максимальное значение индукции при этом не превышало 70 Т при расчетном значении до 170 Т. Имела место интенсивная остаточная деформация, которая у магнитов из малоуглеродистой стали 40 возникала в поле с амплитудой индукции $B_S = 46$ Т, что заметно ниже соответствующего значения для более кратковременных импульсов.

Скорость увеличения радиуса в этих опытах была близка к $V_A\sqrt{1-2\mu_0\sigma_S/B_{m1}^{\ 2}}$, где $\sigma_S = B_S^{\ 2}/2\mu_0$.

Хотя вследствие деформации изолирующей щели форма отверстия одновитковой катушки после разряда отличается от круга, величину отверстия можно характеризовать наибольшим размером d в направлении, перпендикулярном щели (см. рис. 8.3). Экстраполируя зависимость $d = f(B_{m1})$ до пересечения с прямой $d = d_0$, где d_0 - начальный внутренний диаметр соленоида, можно оценить “магнитный предел” прочности материалов B_S - индукцию поля, в котором при данной форме и длительности импульса возникает разрушение витка.

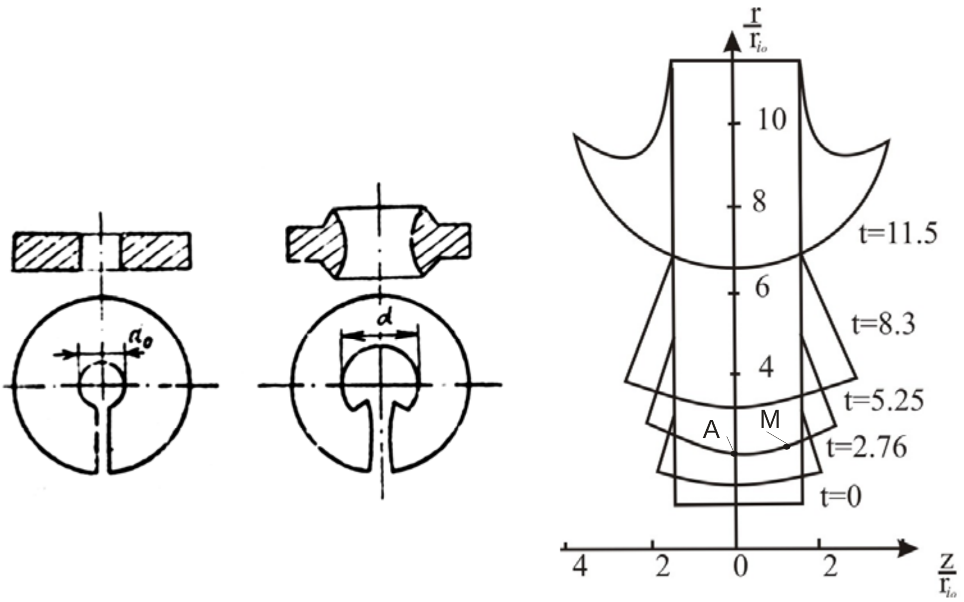


Рис. 8.3. Одновитковый магнит до и после разряда и картина течения в процессе разрушения, полученная в результате компьютерного моделирования в приближении течения несжимаемой жидкости

Значения B_S, представленные в табл. 8.3 для условий опытов, выполненных в работе [27], показывают, что из испытанных в этой работе материалов наибольшим магнитным пределом прочности обладают бериллиевая бронза и сталь. Соответствующие магнитной индукции B_S магнитное давление σ_S значительно превышает как статический предел текучести σ_0, так и динамический σ_D, получаемый при более медленном изменении нагрузки.

Таблица 8.3

Прочностные характеристики толстостенных одновитковых магнитов

Материал	B_S, Т	σ_S, кг/мм^2	σ_0, кг/мм^2	σ_D, кг/мм^2
Латунь	50	100	—	—
Медь	46	84	15	20
Кирит	60	140	—	—
Сталь 40	74	220	30	—
Сталь 3	58	110	23	70
Бериллиевая бронза	74	220	100	—

Особенностью большинства экспериментов с толстостенными катушками малого размера является тот факт, что расстояние, на которое распространяется упругая волна за время нарастания тока, превышает длину или толщину витка. Например, в меди при скорости звука около 4.5 km/s и времени 1 μs упругая волна проходит 4.5 mm, тогда как длина витка во многих случаях меньше этого размера. При таких условиях рост радиуса и длины витка в основном определяется течением среды через свободные границы, а влияние сжимаемости материала на процесс деформации мало.

Изучение деформированных образцов показывает, что наряду с теми из них (медные, алюминиевые), которые носят явные следы пластической деформации, имелись и такие, которые разрушались в основном путем выброса металла. В последнем отношении особенно характерен сплав Вуда, образцы из которого, несмотря на низкие прочностные свойства, практически не имеют следов пластической деформации, хотя увеличение диаметра в результате разряда было весьма значительно. Перед опытами на торцевые плоскости магнита наносилась сетка: отсутствие искажений сетки и изменений формы продольного сечения свидетельствует о незначительной роли пластической деформации у образцов из сплава Вуда. Зависимость амплитуды индукции от амплитуды тока резко отклонялась от прямой из-за того, что рост внутреннего радиуса начинался раньше момента первого максимума тока.

Для характеристики относительной роли выброса и пластической деформации может быть использован критерий

$$K_d = \frac{\Delta m \cdot S}{m \cdot \Delta S}, \tag{8.1}$$

где m, S - начальные масса и площадь торцевой поверхности цилиндрического соленоида прямоугольного сечения, Δm, ΔS - убыль этих величин в результате разряда. Коэффициент K_d равен единице при отсутствии механической деформации и нулю - при отсутствии выброса. Хотя коэффициент характеризует результирующий эффект, он может быть использован для сравнительной оценки роли выброса в процессе разряда в соленоидах из различных материалов.

Данные опытов показывают, что у хорошо пластичных металлов (медь, алюминий) относительная величина выброса невелика: например, у медных образцов после опытов в поле с индукцией 114 Т коэффициент K_d близок к 0,1. У латуни и сталей этот коэффициент достигает значений 0,4-0,7 уже в полях с индукцией около 100 Т. Разбрызгивание расплавленного металла является, по-видимому, основным процессом выброса. Об этом свидетельствуют следы в виде затвердевших струй металла на поверхности образцов после опытов. В пользу этого объяснения говорит сравнение амплитуды индукции в эксперименте со значением индукции B_{T1}, характеризующей порог плавлении материала. По аналогии с электрическим взрывом проводников развал токового слоя при температурах, меньших температуры испарения, можно назвать “медленным взрывом” в отличие от процессов, связанных с испарением металла - “быстрым взрывом”. Эти процессы характеризуются существенно более высоким порогом B_{T2} (см. табл. 3.1). У легкоплавких металлов электрический взрыв может интенсивно развиваться раньше деформации и привести к тому, что величина поля будет существенно ниже расчетной из-за увеличения внутреннего радиуса витка. Это имело место при экспериментах с образцами из сплава Вуда, где коэффициент K_d был равен единице, и процесс целиком определялся “медленным взрывом”. Разрушение витка целиком определялось выбросом расплавленного металла в осевом направлении. Следы расплавленного металла хорошо видны на рис. 8.4.

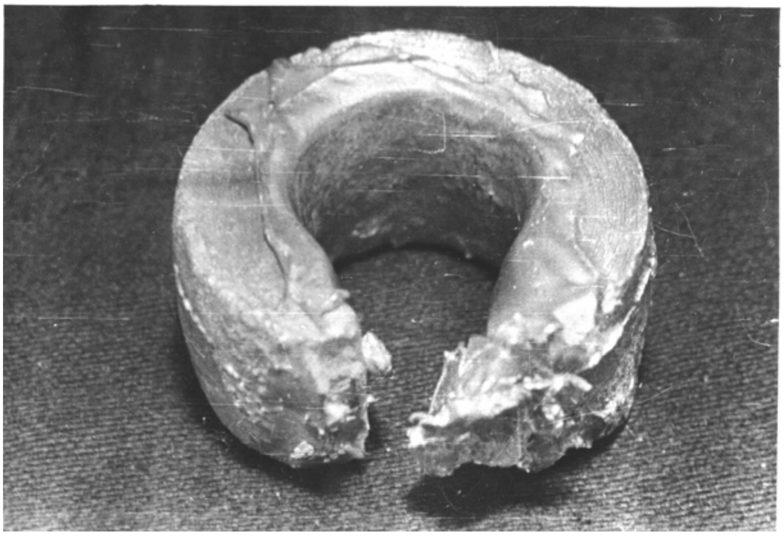


Рис. 8.4. Одновитковый магнит из сплава Вуда
после воздействия поля с индукцией 50 Т

Еще одним примером экспериментов с толстостенными магнитами являются опыты с медными биконическими образцами (рис. 8.5), в которых течение было близко к сферическому. В этих экспериментах ток имел амплитуду до 2,6 МА, а время нарастания

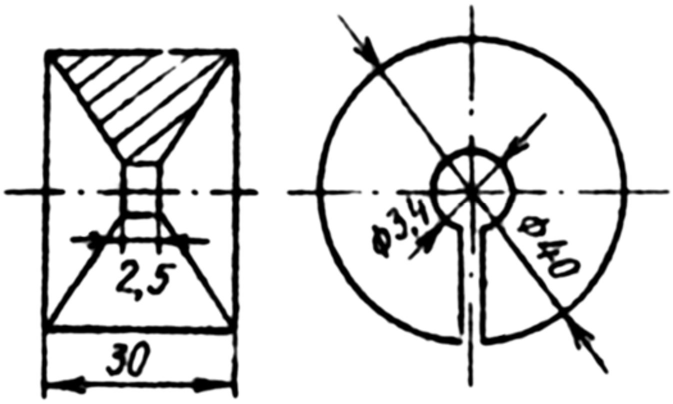


Рис. 8.5. Биконический одновитковый магнит

составляло около 4,5 мкс. При наибольших токах амплитуда индукции достигала 200 Т и была существенно меньше расчетного значения.

Как видно из рис. 8.6, магнитное поле достигало амплитудного значения раньше, чем ток, что косвенно свидетельствовало о наличии

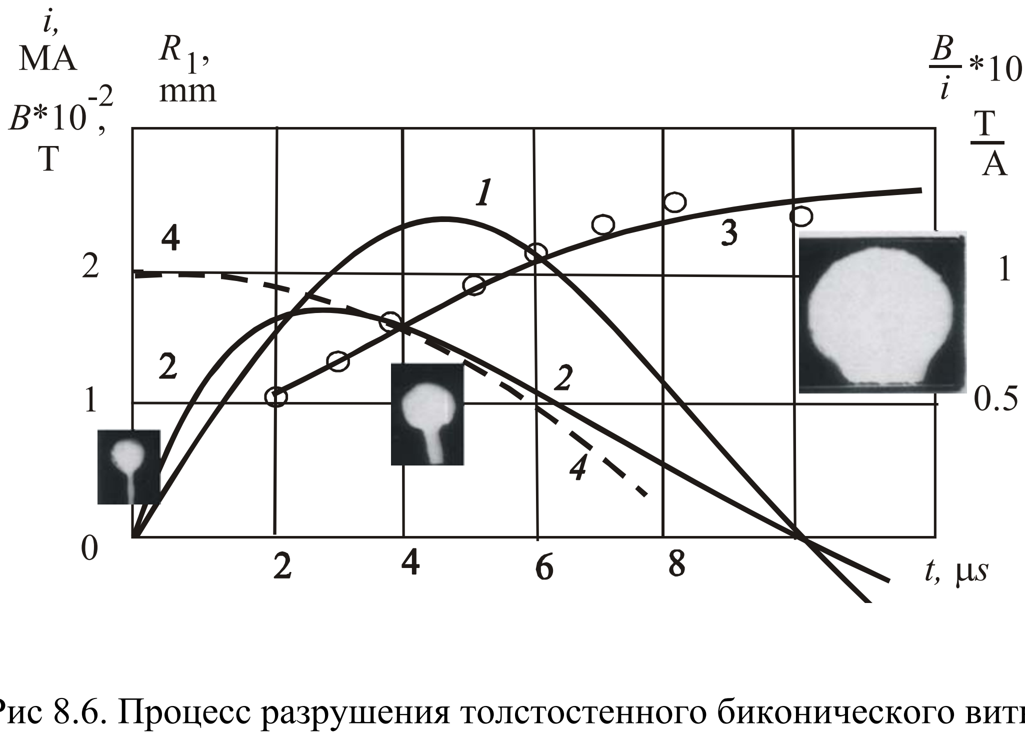


Рис 8.6. Процесс разрушения толстостенного биконического витка.
1 – ток i; ***2*** - индукция в центре B_0; ***3*** – внутренний радиус R;
4 – геометрический фактор B_0/i. Даны рентгеновские фотографии начальной, промежуточной и конечной стадии разрушения катушки

существенного роста внутреннего радиуса на фронте импульса тока. Прямое подтверждение этому дали рентгеновские снимки отверстия соленоида, представленные на этом рисунке. Там же приведена зависимость от времени эффективного внутреннего радиуса, которую можно найти, определив по осциллограмме индукции и тока мгновенное значение геометрического фактора $G = B/i$.

Эта кривая показывает, что мгновенные значения скорости роста внутреннего радиуса достигали 600 м/с. Основным механизмом деформации в этих опытах было гидродинамическое течение. Роль выброса была незначительна.

Иная ситуация имела место в опытах Ширера и в других работах с толстостенными магнитами относительно большой длины [7, 28]. В работах Ширера [28] поле создавалось в щели шириной 1 см, заканчивавшейся цилиндрическим отверстием, в которое помещался зонд для измерения индукции. Щель была прорезана в медном листе, присоединенном к шинам генератора. В более ранней работе (1966 г) при расчетном значении первой амплитуды тока $I_{m1} = 12\,\text{МА}$ (время нарастания $t_m = 4{,}8$ мкс) получено поле с индукцией 210 Т. В эксперименте с еще большим значением амплитуды и скорости нарастания тока ($I_{m1} = 25\,\text{МА}$, $t_m = 0.7$ мкс) получено поле с индукцией 330 Т. В этих опытах течение было близко к одномерному и в среде формировалась ударная волна. За фронтом ударной волны плотность среды существенно возрастала, что было зафиксировано Ширером путем рентгеновских измерений [28].

В полях с индукцией $B > B_{T2}$, начинает играть роль испарение среды и образование металлической плазмы подобно тому, что имеет место при «быстром взрыве» проволочек. Этот эффект – «быстрый взрыв» взрыв скин-слоя – проявляется в опытах с полем масштаба 1000 Т, однако в тонкостенных витках испарение материала может иметь место и в более слабом поле. Ферстер и Мартин считают электрический взрыв основным процессом, приводящим к разрушению соленоидов в их экспериментах с полями, индукция которых достигала 250 Т. В последующих экспериментах в работе Андрианова, Демичева и др. отмечено испарение краевых участков тонких витков.

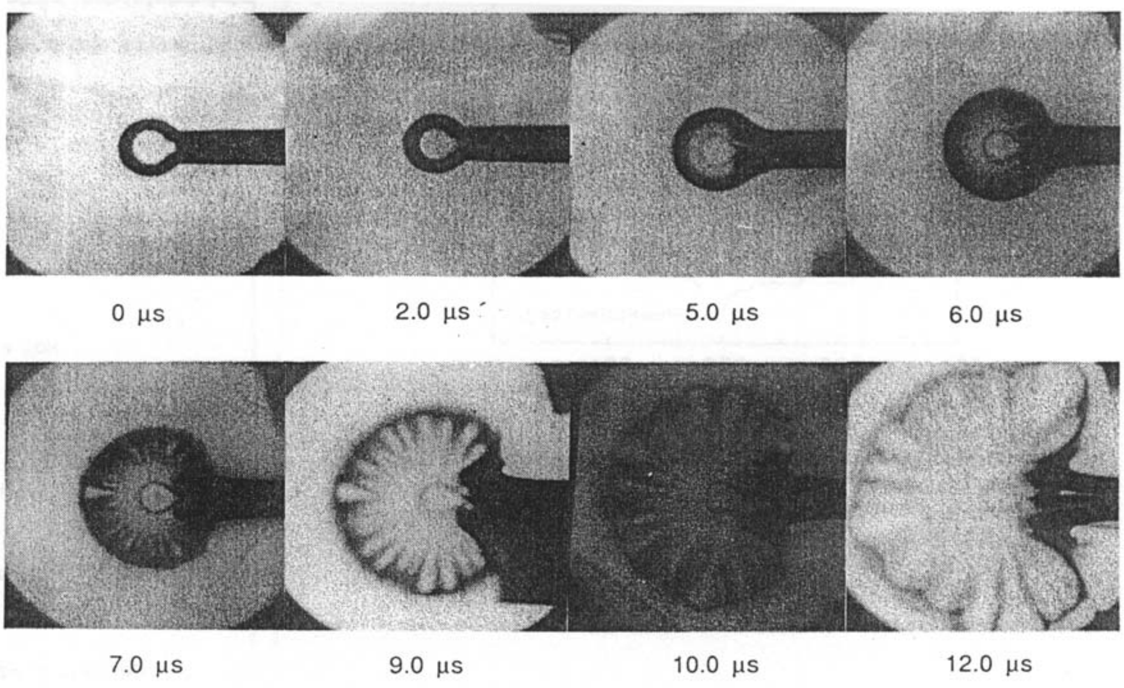


Рис. 8.7. Типичная картина взрыва одновитковой катушки
в мегагаусном магнитном поле. Размеры катушки:
диаметр - 8 мм, толщина стенки - 2,8 мм, длина - 8 мм

Рентгеновские снимки , взятые из работы Миуры и др. (рис. 8.7), демонстрируют испарение витка и его распад на несколько фрагментов вследствие развития магнитогидродинамической неустойчивости на поздней стадии разряда.

Аналогичная картина распада витка наблюдалась в опытах работы [29], где исследовался взрыв одновитковых катушек, имевших внутренний диаметр 2 мм, толщину стенок 1,5 мм и разную длину. В этих опытах использовалась специально разработанная установка с весьма малой индуктивностью, обеспечивающая начальную скорость нарастания тока до $3*10^{12}$ А/с. Во взрывающихся тонкостенных витках стабильно генерировалось магнитное поле с амплитудой индукции до 360 Т. Рентгеновские фотографии (рис. 8.8)

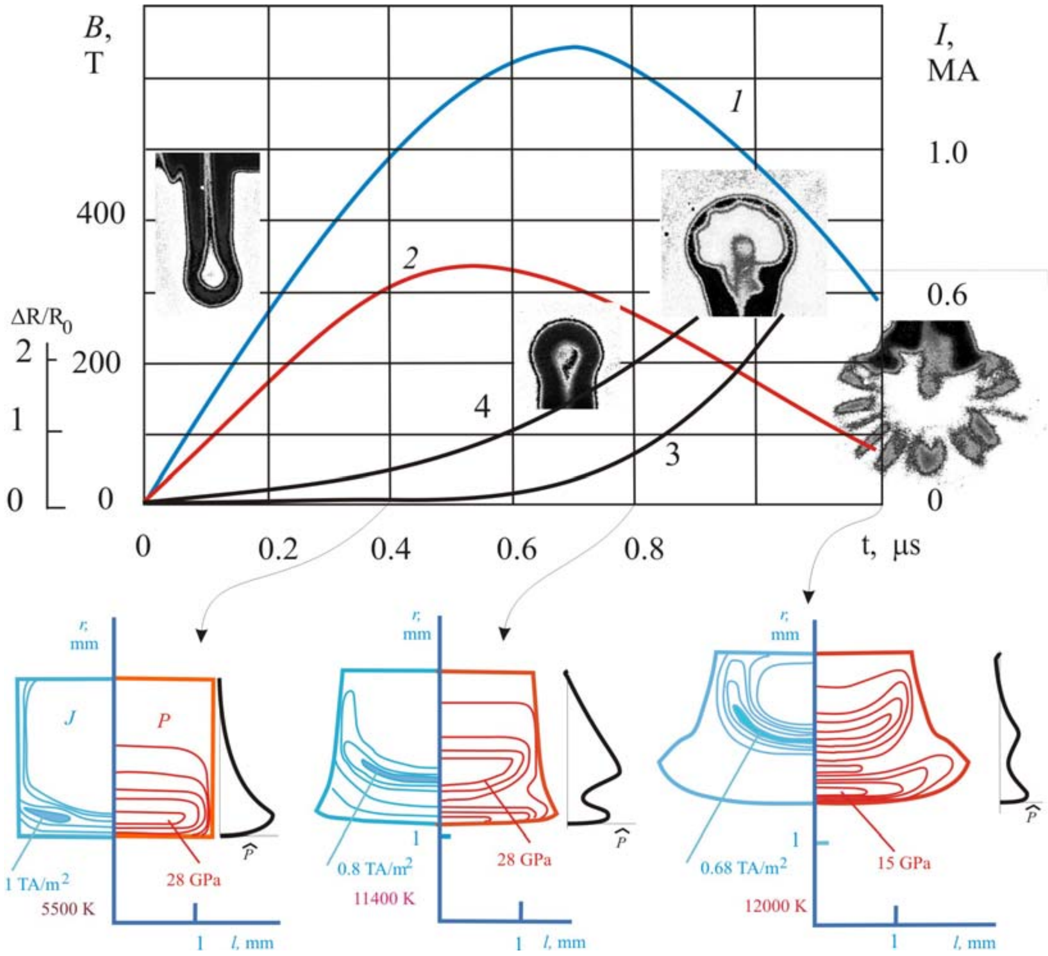


Рис. 8.8. Взрыв тонкостенного витка. ***1*** - ток *i*;
2 - индукция *B*; внутренний радиус *R*; ***3*** – эксперимент; ***4*** – МГД-расчёт.
Рентгеновские фотографии и результаты 2D-расчётов [29]

показывают, что практически до момента максимума индукции отсутствует приращение внутреннего радиуса. Этот факт, отмечаемый и в других работах, можно объяснить расширением среды при ее нагреве током в скин-слое.

Поведение катушки в сверхсильном магнитном поле, характеризуется законом изменения во времени геометрического фактора $G(t) = B(t)/i(t)$ и его значением в момент максимума индукции $G_m = B_m / i(t_B)$, где B_m - амплитуда индукции, достигаемая в момент t_B. Во многих экспериментах получена зависимость $G(t)$. У толстостенных витков функция $G(t)$ падает со временем после некоторой инерционной задержки. В отличие от этого, у «тонкостенных» витков (группа II) в ряде опытов функция $G(t)$ не была убывающей. В литературе отмечены, по крайней мере, два эффекта, которые приводят к замедлению спада $G(t)$ или даже к кратковременному увеличению геометрического фактора. Первый из них - сокращение эффективной длины «тонкостенного» магнита вследствие потери проводимости краевых участков в результате их нагрева и теплового расширения. Другой - упомянутое выше «распухание» стенки магнита при ее нагреве, приводящее к смещению внутреннего края к оси и к задержке начала роста внутреннего радиуса. Нельзя исключить и возможность уменьшения длины и роста геометрического фактора вследствие деформации стенки под действием встречно направленных осевых сил (рис. 8.9).

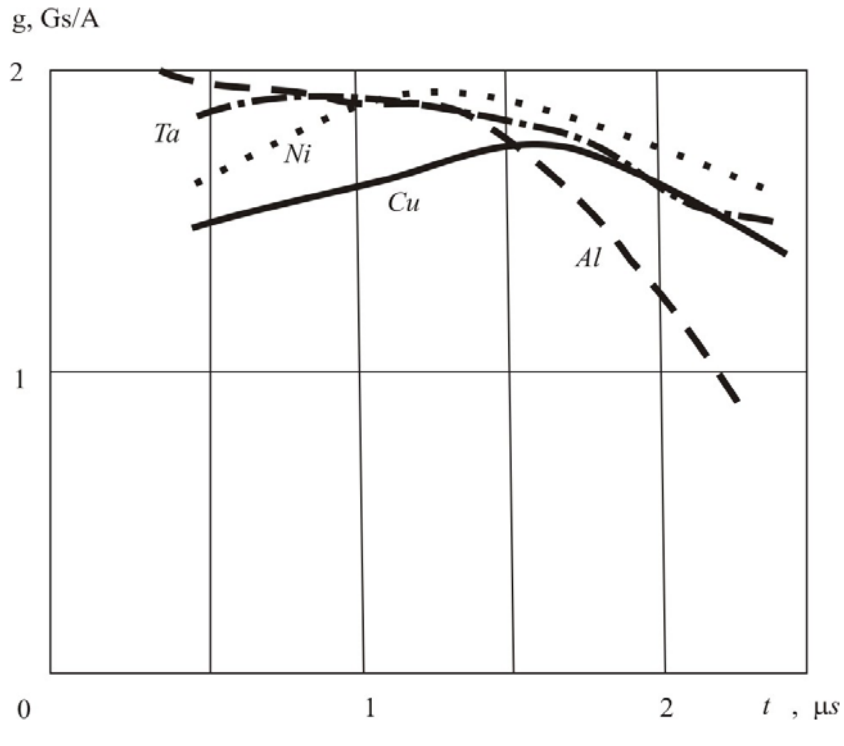


Рис. 8.9. Зависимость геометрического фактора G(t) от времени для витков из разных материалов (по данным А.М. Андрианова, В.Ф. Демичева и др.)

В экспериментах с соленоидами группы III геометрический фактор наименее чувствителен к изменению радиуса. Поэтому отношение G_m/G_0, где G_0 - начальное значение геометрического фактора, может сохраниться близким к единице, несмотря на смещение стенки магнита.

8.2. Модельные задачи, иллюстрирующие роль различных механизмов разрушения одновитковых магнитов

Разрушение катушки является следствием двух- или даже трехмерного магнитогидродинамического течения проводника, сопровождающегося диффузией поля, нагревом и выбросом вещества. Эти процессы выступают совместно, и их строгий анализ возможен лишь на основе численного эксперимента. Однако в разных опытах те или иные факторы играют определяющую роль, и их действие может быть рассмотрено отдельно от других в рамках модельных задач, в которых упрощен физический процесс.

Изучение простых моделей разрушения витка не только полезно, но и необходимо для понимания закономерностей каждого из рассматриваемых явлений. Можно выделить следующие основные модельные задачи.

1. Расширение идеально проводящего короткого витка в приближении несжимаемой жидкости.
2. Расширение идеально проводящего длинного магнита под действием ударной волны, инициированной магнитным полем.
3. Нелинейная диффузия поля в неподвижный проводник.
4. Выброс металла через плоскости торцов (“медленный взрыв”).
5. Испарение металла и потеря им проводимости при расширении (“быстрый взрыв”).

Каждый из физических процессов в рамках модельных задач может быть рассмотрен как фактор, ограничивающий амплитуду индукции. При этом необходимо учитывать свойства электрической цепи, соединяющей магнит с источником энергии. Даже в рамках упрощенных физических моделей расчет движения границы поле-проводник сложен, поэтому целесообразно выделить простые предельные случаи. Для цепи питания предельным является источник бесконечной мощности, у которого емкость накопителя бесконечна, а индуктивность и сопротивление пренебрежимо малы по сравнению с индуктивностью и сопротивлением магнита. Другая модель — это генератор, переходной импеданс которого много больше, чем у магнита. В первом случае на входе магнита задано напряжение, во втором - задан ток.

С точки зрения геометрической формы витка предельными являются случаи короткого и длинного витков. В первом случае длина витка равна внутреннему диаметру или меньше него. Если при этом внешний радиус много больше внутреннего (толстостенный соленоид), то расчетные значения индукции и тока связаны соотношением

$$B(0,t) = \frac{a\mu_0 i(t)}{R_1(t)} \qquad (8.2)$$

В тонком диске $(l/2R_1 = 0)$ $a = 1/\pi$. При условии $0 \le l/2R_1 \le 1$ это же значение параметра a с погрешностью не более 16 % можно использовать для расчета поля в центре витка с большим отношением внешнего радиуса к внутреннему. Таким образом, у коротких толстостенных витков (эксперименты группы II табл. 8.1) геометрический фактор $G = B/i = a\mu_0 R_1$ уменьшается в процессе расширения витка практически обратно пропорционально внутреннему радиусу.

Во втором случае (магниты группы III табл. 8.1) длина настолько больше диаметра, что несущественно влияние краевых эффектов как на значение индукции в большей части рабочего объема магнита, так и на характер течения. В длинном магните индукция

$B = \mu_0 i / l$, где l - длина. Геометрический фактор $G = \mu_0 / l$ в этом случае остается постоянным, несмотря на рост внутреннего радиуса.

В цепи с заданным током соотношения расчетной и реально достижимой индукции существенно различаются для двух указанных типов одновитковых магнитов. Во втором из них индукция равна расчетной и может быть сколь угодно велика, если ток достаточно велик, тогда как в первом индукция остается конечной при неограниченном росте тока и, как будет показано, ее асимптотическое значение определяется скоростью роста тока.

Поэтому для длинных магнитов анализ целесообразно ограничить рассмотрением систем с источником бесконечной мощности. Для коротких систем представляет интерес случай "точечного" витка, обладающего малым начальным радиусом (1-2 мм) и малой индуктивностью (1 нГн). Накопитель, необходимый для питания такого магнита, мог бы иметь относительно небольшой запас энергии (порядка 10^4 Дж), однако выполнить его так, чтобы он обладал индуктивностью меньшей, чем индуктивность витка, весьма трудно. Поэтому для питания таких витков используются генераторы, индуктивность которых, как правило, много больше, чем у витка, и соответственно увеличен запас энергии по сравнению с энергией поля в магните. Процессы в цепи таких генераторов описываются моделью источника тока.

8.3. Двумерные гидродинамические течения в толстостенных одновитковых магнитах. Применение модели несжимаемой жидкости для описания деформации толстостенного витка

Одновитковые магниты из хорошо проводящих материалов обычно работают в условиях резко выраженного поверхностного эффекта. Поэтому в первом приближении их можно считать идеально проводящими. Тогда деформация витка может быть описана путем решения уравнений сплошной среды совместно с уравнением состояния металла и с граничным условием $P(A) = B_\tau{}^2 / 2\mu_0$, где A - точка на границе, B_τ - касательная к границе составляющая индукции в точке A.

Решение существенно упрощается при переходе к модельным задачам. Наиболее простая из них - модель несжимаемой жидкости - может быть использована для расчета течения, если выполнено условие, что время распространения звуковой волны на расстояние порядка длины соленоида много меньше времени нарастания поля до максимума. В таком случае можно считать скорость звука бесконечно большой, то есть считать материал несжимаемой средой.

Если внешний радиус соленоида считать постоянным, что соответствует условиям закрепления толстостенного соленоида в жесткую оправку, то внутренний радиус может расти только за счет смещения металла через плоскости торцов. Течение при этом существенно двумерно.

В системе координат, связанной с точкой A на поверхности, элементы среды обтекают наблюдателя и расходятся в стороны, к торцам, как это схематически показано на рис. 8.10. Качественно это соответствует такой же картине деформации, как при ударе бойка о твердую мишень (рис. 8.2, 8.3). В рассматриваемой модели такой мишенью является граница поле-проводник, движущаяся в сторону проводника со скоростью u_0. Рассмотрим стационарное течение в выбранной системе координат. Уравнение движения вдоль радиуса в плоскости симметрии имеет вид

$$\gamma_0 u_r' \frac{\partial u_r'}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r_1}\left(P + P_M\right), \tag{8.3}$$

где $\gamma_0 = \text{const}$ - плотность среды, P - давление в среде, $r_1 = r - R_1$, P_M - магнитное давление, $u_r' = u_r - u_0$.

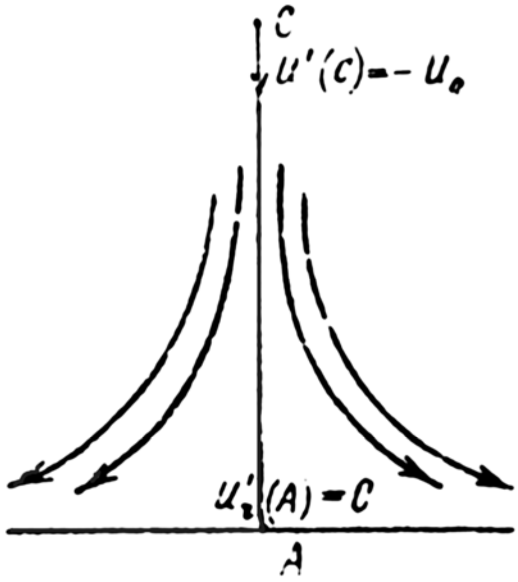


Рис. 8.10. Течение среды в системе координат,
связанной с границей проводника

Для описанных свойств среды воспользуемся простейшей жесткопластической схемой (модель Прандтля). В рамках этой модели можно считать, что среда с постоянной плотностью не сопротивляется сдвигу, то есть ведет себя как идеальная несжимаемая жидкость в области 1, где $|P| > \sigma_S$, и является жесткой в области 2, где $|P| < \sigma_S$. Здесь σ_S можно трактовать как предел текучести материала для данной длительности воздействия. Точка C, лежащая на границе областей, неподвижна в системе координат, связанной с точкой A. В области $r_1 > r_1(C)$, где среда неподвижна в лабораторной системе координат, ее элементы движутся со скоростью $-u_0$ относительно точки A. Интегрируя (8.3) по r_1, получим следующее соотношение (аналог закона Бернулли):

$$\frac{1}{2}\gamma_0 \left(u_r'\right)^2 + P + \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \text{const}\,. \tag{8.4}$$

В точке A $(r = R_1)$: $B = B(R_1)$, $P = 0$, $u'_r = 0$; в точке C: $B = 0$, $P = \sigma_S$, $u'_r = -u_0$, следовательно,

$$\gamma_0 \frac{{u_0}^2}{2} + \sigma_S = \frac{B^2(R_1)}{2\mu_0}, \tag{8.5}$$

где $B(R_1)$ - индукция у внутренней границы соленоида. Отсюда получаем выражение для скорости смещения границы при стационарном течении

$$u_0 = \frac{B(R_1)}{\sqrt{\mu_0 \gamma_0}} \sqrt{1 - \frac{2\mu_0 \sigma_S}{B^2(R_1)}}. \tag{8.6}$$

В пределе $B(R_1) >> 2\mu_0 \sigma_S$ u_0 становится равной альфвеновской скорости $V_A = B(R_1)(\mu_0 \gamma_0)^{-1/2}$. Можно воспользоваться полученным выражением, чтобы связать индукцию и параметры источника тока. Целесообразно рассмотреть два предельных режима - одновитковый магнит, присоединенный к источнику бесконечной мощности с напряжением U_0, и магнит в цепи с заданным током.

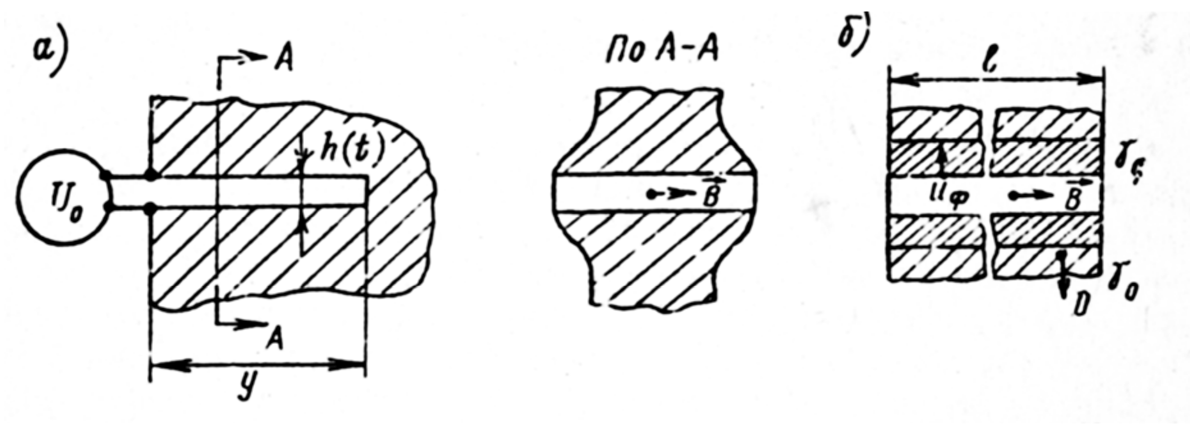


Рис. 8.11. Щель, к краям которой подключен источник с напряжением U_0.
а - двухмерное течение в коротком одновитковом магните.
б - одномерное течение (модель ударной волны)

В первом случае рассмотрим вначале магнитную систему в виде щели (рис. 8.11,а). Приравнивая U_0 и $d\Phi/dt = 2u_0 gB$, получаем напряжение, связывающее напряжение источника и индукцию в щели:

$$U_0 = 2gB\sqrt{\frac{B^2}{\mu_0\gamma_0} - \frac{2\sigma_S}{\gamma_0}}\,. \tag{8.7}$$

Отсюда в предельном случае, когда $B \gg (2\mu_0\sigma_S)^{1/2}$, имеем

$$B = \left(\frac{U_0}{2g}\right)^{1/2} (\mu_0\gamma_0)^{1/4}. \tag{8.8}$$

Зависимость $B = \text{const}\cdot U_0^{\ 1/2}$ весьма характерна для поля в щели. Она будет встречаться и в других моделях взрыва. Для примера рассмотрим индукцию, создаваемую в асимптотическом режиме в щели длиной 1 см, к краям которой приложено напряжение 10^4 В. Если $\gamma_0 = 9{\cdot}10^3$ (медь), то $B \approx 200$ Т. Для получения поля с индукцией 1000 Т следует обеспечить среднюю напряженность $E_{\text{ср}} = U_0/2g$, близкую к 10^5 В/см (для меди).

Для длинного магнита с круглым отверстием с начальным радиусом $R_1(0) = R_0$ уравнение, определяющее рост радиуса при установившемся течении, имеет вид (при $B \gg (2\mu_0\sigma_S)^{1/2}$):

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\gamma_0}}, \tag{8.9}$$

а напряжение на входе витка

$$U = \frac{d}{dt}\left(\pi R_1^{\ 2} B\right). \tag{8.10}$$

Если виток подключен к источнику бесконечной мощности, то $U = U_0$, и решение уравнений (8.9) и (8.10) при условии $R_1(0) = R_0$ имеет вид

$$\frac{R_1(t)}{R_0} = \left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{t_f}\right)^2\right]^{1/3}; \tag{8.11}$$

$$\frac{B}{B_f} = \frac{t}{t_f}\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{t_f}\right)^2\right]^{-2/3}, \tag{8.12}$$

где $t_f = R_0\left(\frac{\pi R_0}{U_0}\right)^{1/2}(\mu_0\gamma_0)^{1/4}$, $B_f = \left(\frac{U_0}{\pi R_0}\right)^{1/2}(\mu_0\gamma_0)^{1/4}$. Максимум индукции достигается в момент $t_m = \sqrt{2}t_f$:

$$B_m = 2^{-5/6}B_f = 2^{-5/6}\left(\frac{U_0}{\pi R_0}\right)^{1/2}(\mu_0\gamma_0)^{1/4}. \tag{8.13}$$

В момент t_m внутренний радиус одновиткового магнита есть $R_1(t_m) = 4^{1/3}R_0 = 1{,}59R_0$. Средняя напряженность электрического поля на контуре витка $< E >= U_0/2\pi R_0$ является, как и в случае щели, основным параметром, определяющим амплитуду индукции.

В табл. 8.4 приведены результаты расчетов средней напряженности, необходимой для достижения поля с амплитудой индукции 500, 700 и 1000 Т в магните из меди и тантала. Там же приведены значения напряжения источника, необходимого для получения поля в витке с начальным радиусом 5 мм (при этом радиус в момент минимума индукции близок к 8 мм) и значения энергии магнитного поля в момент t_m. Напряжение превышает 200 кВ для индукции 10^3 Т.

Таблица 8.4

Параметры генератора, необходимого для получения в разрушающемся витке поля с заданной амплитудой индукции

Параметры	Медь			Тантал		
B_m, Т	500	700	1000	500	700	1000
$<E>$, кВ/см	37/21	74/42	150/86	32/18	64/36	102/71
U_0, кВ	117/67	230/132	470/269	100/57	200/113	320/223
W'_m, кДж/м	197	380	786	197	386	796
t_m, мкс	2/2,6	1,5/1,9	1/1,3	2,3/3	1,7/2,2	1,2/1,5

Примечание:

Числители дробей в табл. 8.4 соответствуют $dR_1/dt = V_A$ (модель стационарного двухмерного течения несжимаемой жидкости), знаменатели соответствуют $dR_1/dt = V_A(2\lambda)^{-1/2}$ (модель сильной ударной волны).

Применительно к экспериментам с короткими толстостенными витками прямоугольного сечения следует воспользоваться приближением точечного витка, считая индукцию и ток связанными соотношением (8.2). Будем искать решение задачи, соответствующее установившемуся движению границы со скоростью, равной альфвеновской. Тогда из уравнений (8.2) и (8.9) можно найти $B(0,t) \approx B(R_1,t)$. Качественный ход кривой $B(0,t)$ следует непосредственно из этих уравнений: сначала внутренний радиус близок к своему начальному значению, индукция растет пропорционально току, а затем по мере роста R_1 индукция падает по сравнению с расчетным значением, то есть падает геометрический фактор B/i. Интересен предельный режим, когда амплитуда тока неограниченно велика. В этом режиме индукция достигает максимума на фронте импульса, когда ток еще растет по линейному закону $i = i't$.

Асимптотическое значение индукции можно оценить, приняв $B(0,t) = B_\infty = \text{const}$ и считая $R_1 >> R_1(0)$. Тогда $R_1 = tB_\infty \left(\mu_0\gamma_0\right)^{-1/2}$, и для индукции в центре витка получаем:

$$B_c(t) = \frac{a\mu_0 i' t}{R_1} \approx B_\infty \approx \frac{a\mu_0 i' \sqrt{\mu_0\gamma_0}}{B_\infty}.$$

Отсюда находим асимптотическое значение индукции:

$$B_\infty = \left(ai'\right)^{1/2} \mu_0^{3/4} \gamma_0^{1/4}. \qquad (8.14)$$

Следует заметить, что модель установившегося течения в данном случае применима, так как скорость увеличения внутреннего радиуса постоянна.

В общем случае течение является нестационарным, и вместо уравнения (8.3) следует решать уравнение Эйлера, которое для средней плоскости витка имеет вид

$$\gamma_0\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(P + P_M\right). \qquad (8.15)$$

Строгие расчеты нестационарного двухмерного течения были выполнены численно В.В.Титковым. Они позволили построить картину разрушения витка (рис. 8.2). Расчеты показали, что форма поперечного сечения витка изменяется во времени вследствие двумерного гидродинамического течения. Стационарное течение в этих опытах не успевало установиться, поэтому скорость увеличения радиуса была меньше альфвеновской. В других опытах, где время нарастания много больше, чем характерная величина $R_1(0)/(dR_1/dt)$, течение близко к установившемуся. Подобный режим течения имел место в упомянутых выше опытах с большим временем нарастания тока.

Применительно к условиям опытов с биконическими магнитами достаточно точные результаты дает модель, построенная при упрощающем допущении о сферическом характере течения. В этой модели принято, что скорость в точке с радиальной координатой r и скорость границы $\dot{R}_1$ связаны соотношением $u_r = \dot{R}_1 R_1^2 / r^2$. Результаты этих расчетов представлены на рис. 8.12.

Качественный ход кривых, рассчитанных для синусоидального импульса тока, соответствует эксперименту: амплитуда индукции меньше расчетной и достигается раньше, чем максимум тока. При линейном нарастании тока устанавливается движение границы со скоростью

$$\dot{R}_1 = \frac{B(R_i)}{\sqrt{3\mu_0\gamma_0}} \approx \frac{B(0,t)}{\sqrt{3\mu_0\gamma_0}}, \tag{8.16}$$

отличающейся от альфвеновской множителем $1/\sqrt{3}$.

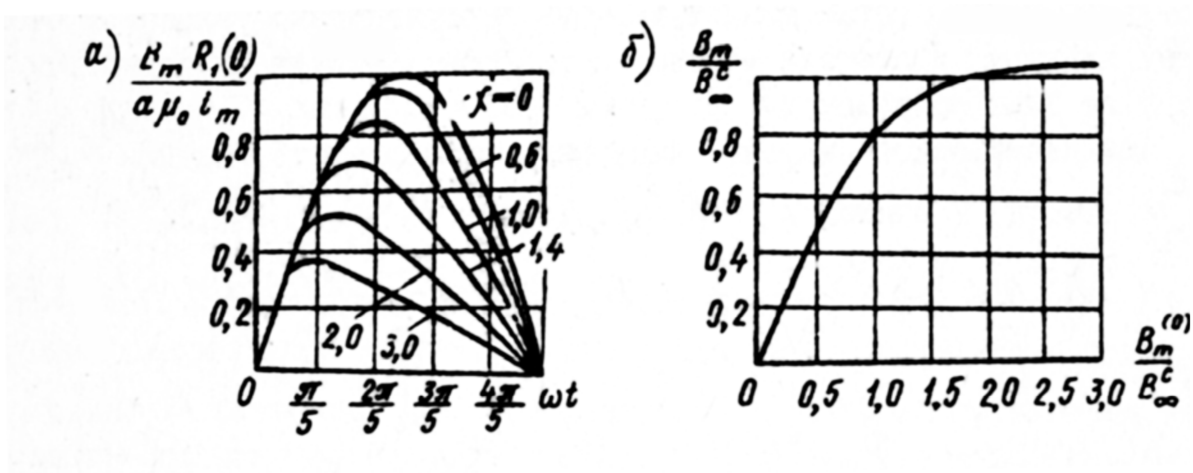


Рис. 8.12. Индукция в биконических магнитах:
а – зависимости для амплитуды индукции при различных значениях характерного безразмерного параметра $\chi = (3/2)^{1/4} B_m^{(0)} / B_\infty$, где $B_m^{(0)} = \mu_0 a i_m / R_1(0)$ - расчётное значение и амплитуды индукции;
б – зависимость $B_m / B_m^{(0)} = f(B_m^{(0)} / B_\infty)$

Для медного биконического витка вместо формулы (8.14) имеем

$$B_\infty \approx (ai)^{1/2} (3\gamma_0)^{1/4} \mu_0^{3/4}. \tag{8.17}$$

Применительно к медным биконическим соленоидам с параметром $a = 0{,}2$ формула (8.17) принимает вид

$$B_\infty \approx 2{,}1 \cdot 10^{-4} \sqrt{i'} \quad [\text{A/c, T}]. \tag{8.18}$$

Можно воспользоваться полученными результатами для расчетов конкретных систем. Например, рассчитаем параметры источника тока, необходимого для получения поля с индукцией 10^3 Т в биконическом соленоиде с начальной длиной 1,5 мм и начальным диаметром 2 мм (параметр $a = 0{,}2$).

На рис. 8.13 представлены кривые, позволяющие связать между собой параметры токового импульса - амплитуду i_m, начальную скорость нарастания i' и скорость нарастания t_m для рассматриваемого примера. При малом времени нарастания амплитуда индукции близка к расчетной. По мере роста t_m расширение витка к моменту максимума тока возрастает и для получения заданной амплитуды индукции требуется увеличить ток.

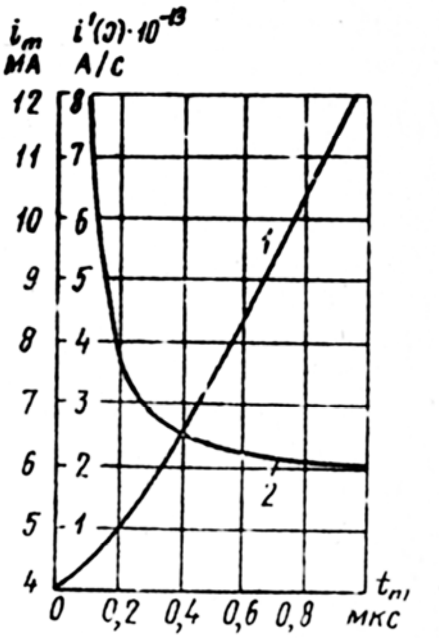


Рис. 8.13. Параметры импульса тока, необходимого для получения поля с индукцией 1000Т в биконическом одновитковом магните.
1 - i_m; ***2*** - $(di/dt)_0$

При росте t_m устанавливается асимптотический режим, который описывается формулой (8.16). В режиме, когда $i_m = 7{,}4$ МА, $t_m = 0{,}5$ мкс, $i' = 2{,}3 \cdot 10^{13}$ А/с, что близко к предельному значению, определяемому формулой (8.18). В цепи, полная индуктивность которой 5 нГн, такую начальную крутизну и амплитуду тока можно обеспечить, если использовать емкостной накопитель с энергией 140 кДж и напряжением 115 кВ. Рассмотренный пример показывает, что для получения поля с индукцией несколько сот тесла в миниатюрном витке требуется источник с относительно небольшим запасом энергии, но с высокой скоростью нарастания тока. Соответствующие параметры вполне достижимы для современной высоковольтной импульсной техники.

8.4. Электрический взрыв витков малой толщины. Оценочные значения индукции, получаемой в разрушающихся витках с малыми начальными размерами

Численное моделирование двухмерного магнитогидродинамического течения позволяет описать процесс разрушения тонкостенного витка и сравнить результаты расчетов с данными эксперимента. В работе [29] решена система уравнений, описывающих течение среды под действием электромагнитных сил и градиента давления. При расчете использовались уравнения состояния среды, нагреваемой вихревым током. Процессы зоне протекания тока весьма существенны в этом процессе. Поэтому, в отличие от описания деформации толстостенных магнитов, в допущение об идеальной проводимости не могло быть использовано. Одновременно с уравнениями гидродинамики решались уравнения Максвелла для среды с линейной зависимостью удельного сопротивления от объемной плотности энергии.

На рис. 8.8 приведены результаты расчетов, выполненных применительно к экспериментам с одновитковыми магнитами малого размера (длина 0.3 см, внутренний радиус 0.2 см, толщина стенки 0.2 см), в ходе которых было получено поле с индукцией 360 Т при протекании тока 1 МА с временем нарастания до максимума 0.8 мкс. Расчеты показывают, что форма сечения витка изменяется. Имеет место осевое течение, сопровождаемое появлением зон низкой плотности вблизи краев. Поле скоростей показывает двумерный характер течения: вблизи углов радиальные и осевые составляющие скорости близки. В средней плоскости зависимость скорости от радиуса имеет максимум, смещенный на глубину десятых долей мм от внутренней поверхности. Смещение среды в зоне скин-слоя в осевом направлении приводит к ослаблению связи этого слоя с остальной частью среды. Это проявляется в образовании локального минимума давления. Распределение тока в коротком тонкостенном витке, нагреваемом током, существенно отличается от случая одномерной диффузии в неподвижную стенку. На пространственное распределение плотности тока существенно влияет двумерный характер диффузии и более быстрое проникновение тока в среду вблизи углов. В этой области температура достигает к моменту 1,2 мкс значения 14000 К. Благодаря снижению проводимости вблизи угловых точек, ток концентрируется в средней части витка, что, в свою очередь приводит к более сильному нагреву и в этой части. В результате происходит более быстрое смещение пика плотности тока в радиальном направлении, чем при одномерной диффузии. Этот процесс продолжается в течение всего времени нарастания тока. Для распределения электромагнитных сил в плоскости симметрии характерен резкий максимум, местоположение которого смещается вместе с волной тока.

Плотность среды заметно снижается вблизи углов, где среда расширяется наиболее быстро. Отметим, что в процессе нагрева и расширения проводника точка, характеризующая состояние среды на плоскости $P = f(T, 1/\gamma)$ проходит выше критической. Это имеет место для всех элементов среды, включая граничный.

На некотором расстоянии от границы в теле витка формируется пик давления, а в области между этим пиком и границей, где Р = 0, формируется перепад давления, существенно снижающий действие электромагнитных сил. При этом движение элементов, близких к границе, замедляется. В области между границей и пиком давления формируется течение «назад» по отношению к точке максимума давления. Скорость элемента среды на внутренней поверхности (скорость роста внутреннего радиуса катушки) существенно меньше, чем ее максимальное значение. В средней плоскости плотность вблизи внутренней границы ниже, чем в толще витка: радиальный размер зоны, где плотность ниже 0.8 γ_0 составляет 0.5 мм к моменту 1.2 мкс. Таким образом, имеет место «распухание» среды, приводящее к замедлению роста внутреннего радиуса и даже к его уменьшению, заметному на рентгеновских снимках. Этот эффект имеет место несмотря на то, что среда подвержена интенсивному магнитному давлению.

Таким образом, есть основания считать, что наблюдаемое смещение границы и задержка роста радиуса по сравнению с расчетом в приближении идеальной проводимости обусловлены процессом взрыва скин-слоя в среде с реальной проводимостью. Краевой эффект при этом играет существенную роль, поскольку он приводит к сокращению эффективной длины витка и увеличению плотности тока в его средней части.

В описанных в литературе опытах с толстостенными витками упомянутый здесь эффект задержки начала роста радиуса по сравнению с расчетом в модели идеальной проводимости, учитывающей инерционную задержку, не был отмечен. Возможно, это связано с тем, что компьютерные расчеты по этой модели были выполнены для ограниченного числа примеров, в которых время нарастания тока было относительно велико. Есть основания предполагать, что в этих примерах кратковременный эффект дополнительной задержки начала течения, обусловленной тепловым расширением, если он и имел место в эксперименте, мало влиял на ход увеличения внутреннего радиуса. Более полный компьютерный анализ имеющегося большого массива экспериментальных данных, аналогичный описанному выше, есть задача дальнейших исследований. Они могут дополнить данные экспериментов сведениями о влиянии начальных размеров, конфигурации витков и скорости нарастания тока на процесс гидродинамического течения и на закон изменения геометрического фактора.

Имеющиеся данные и результаты расчетов показывают, что взрыв миниатюрного тонкостенного витка представляет собой сочетание нескольких взаимосвязанных процессов, в разной степени зависящих от свойств материала и размеров витка. Незначительное изменение начальных условий и закона нарастания тока может заметно изменить ход процесса в этой нелинейной системе. Поэтому даже при близких исходных условиях в разных экспериментах возможны заметные отличия в результатах измерения геометрического фактора.

Целесообразно сопоставить экспериментальные данные с простейшей оценкой амплитуды индукции по формуле (8.18) Результаты расчетов представлены в табл. 8.1 и на рис. 8.14. Эта формула дает оценочное значение индукции в толстостенных витках при условии, что индукция достигает максимума на фронте импульса, когда ток еще растет по линейному закону $i = i't$. Близкая к этой ситуация имеет место в экспериментах, в которых реализуется условие $G_m / G_0 < 1$. При этом вследствие роста радиуса максимум индукции достигается раньше максимума тока, а амплитуда индукции, определяемая по формуле (8.18), меньше своего значения, соответствующего начальному геометрическому фактору.

Следует отметить, что указанная формула неприменима в случаях, когда геометрический фактор к моменту максимума тока остается близким к своему начальному значению. Такие случаи имеют место в слабом поле и в случае катушек с относительно

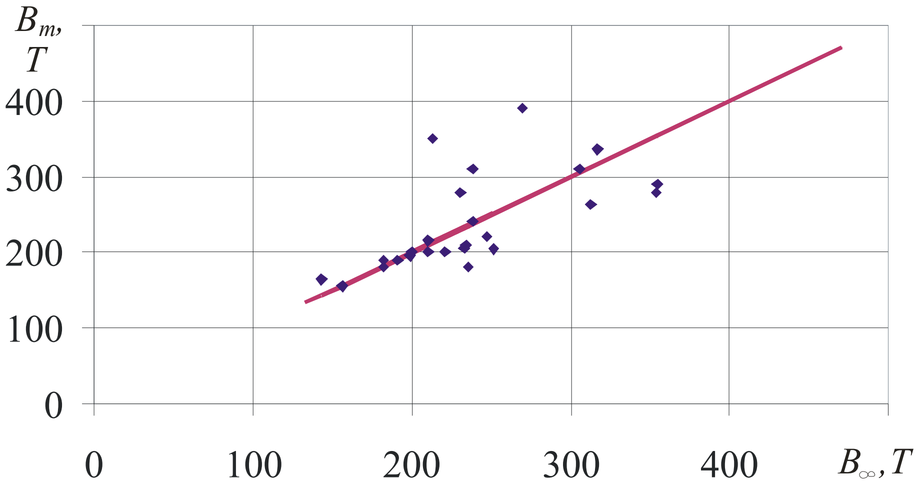


Рис. 8.14. Экспериментальные значения амплитуды индукции в медных витках, взятые из табл. 8.1, в сравнении с рассчитанными по формуле (8.18)

большим начальным диаметром (масштаба 10 мм). В таких витках приращение радиуса к моменту максимума тока мало по сравнению с его начальным значением. Нельзя пользоваться приведенной оценкой и в случае магнитов большой длины, у которых деформация не приводит к снижению геометрического фактора [7, 28]. Для остальных случаев результаты экспериментов показаны на рис. 8.14, где представлена также зависимость, построенная по формуле (8.18). Эта формула не учитывает разнообразие начальных геометрических факторов, тем не менее, она дает оценочное значение индукции в разрушающихся толстостенных витках. Эти оценки несколько занижены, поскольку они не учитывают инерционную задержку установления течения, близкого к стационарному. Оценки по формуле (8.18) могут быть использованы и для тонкостенных витков, хотя эта формула не учитывают описанные здесь особенности взрыва тонкостенных витков, приводящие к задержке спада геометрического фактора.

9. ОДНОМЕРНОЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В СТЕНКЕ ОДНОВИТКОВОГО МАГНИТА И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВЗРЫВ СКИН-СЛОЯ

Хотя основная часть экспериментов по получению сверхсильных полей выполнена с короткими витками, важно рассмотреть течение в магнитах, длина которых много больше расстояния, которое проходит звуковая волна в металле за характерное время процесса. При этом толщину стенки будем считать неограниченно большой, то есть пренебрежем отражением волны от внешней границы. В среде распространяется ударная волна, инициированная магнитным давлением, воздействующим на границу. Электромагнитная сила формируется в скин-слое, и в приближении идеальной проводимости воздействие поля аналогично давлению газа, приложенному к поверхности проводника. Фронт ударной волны распространяется со скоростью D. За фронтом устанавливается течение среды, плотность которой γ_f выше, чем плотность невозмущенной среды γ_0 (рис. 8.11,б). В меди фронт ударной волны распространяется за одну микросекунду на расстояние 4,5 мм. Таким образом, при времени нарастания индукции до максимума $t_m = 1$ мкс модель ударной волны справедлива, если длина витка и толщина его стенки составляют несколько сантиметров. Эта модель будет рассмотрена в данной главе. Ударная волна приводит к смещению внутренней границы магнита. Дополнительным фактором, влияющим на скорость смещения эффективной границы поле-проводник, является выброс расплавленного металла и потеря проводимости при фазовом переходе (испарении), приводящая к разрушению скин-слоя. Эти процессы по аналогии с электрическим взрывом проволочек можно назвать электрическим взрывом скин-слоя. Они в определенной мере также будут здесь рассмотрены.

9.1. Ударная волна в проводнике, инициированная сверхсильным магнитным полем

В идеально проводящей среде магнитное поле играет роль поршня, создающего волну. При расчётах процессов в длинных витках целесообразно пользоваться моделью плоской ударной волны. Хотя течение, инициируемое изменяющимся магнитным полем, в общем случае нестационарно, мы будем пользоваться соотношениями, описывающими стационарный процесс. Сравнение с численными расчетами, выполненными в строгой постановке, показывает, что такое приближение дает приемлемую точность.

Известно, что u_f - скорость течения за фронтом ударной волны, распространяющейся в невозмущенной среде, и скорость фронта ударной волны D связаны линейным соотношением

$$D = C_1 + \lambda u_f \, , \tag{9.1}$$

где C_1 - близко к скорости звука, λ - численный параметр (у меди C_1=4·10^3 м/с, λ =1,50). Приближенное соотношение (9.1) аппроксимирует более сложную зависимость для скорости фронта. Она справедлива при давлениях масштаба 10^{10} Па и ниже. В стационарном режиме u_f равно скорости смещения границы поле-проводник, а давление на фронте равно магнитному давлению внешнего поля. Воспользуемся одним из условий Ренкина-Гюгонио:

$$P_f = \gamma_0 D u_f$$

или

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \gamma_0 u_f \left(C_1 + \lambda u_f \right) . \tag{9.2}$$

Далее находим

$$u_f = \frac{C_1}{2\lambda}\left[\sqrt{1+\frac{B^2}{\overline{B}^2}}-1\right], \qquad (9.3)$$

где $\overline{B} = C_1\left(\mu_0\gamma_0/2\lambda\right)^{1/2}$. У меди $\overline{B} \approx 250$ Т. В предельном случае, когда $B \ll \overline{B}$, скорость границы, обусловленная сжимаемостью среды, пропорциональна B^2:

$$u_f \approx \frac{C_1 B^2}{4\lambda\overline{B}^2} = \frac{B^2}{2\mu_0\gamma_0 C_1}. \qquad (9.4)$$

Эта скорость заметно меньше альфвеновской: например, в поле с индукцией 100 Т стенка медного соленоида смещается со скоростью около 80 м/с, тогда как $V_A \approx 10^3$ м/с. В поле с индукцией $B \gg \overline{B}$ скорость границы становится пропорциональной альфвеновской:

$$u_f \to \frac{B}{\sqrt{2\lambda\mu_0\gamma_0}} = \frac{V_A}{\sqrt{2\lambda}}. \qquad (9.5)$$

Удобно аппроксимировать зависимость, определяемую формулой (9.3), степенной функцией. В диапазоне индукций $0 < B \le 4\overline{B}$ справедлива аппроксимация [28]:

$$u_f \approx a_0 B^{3/2} \approx 0{,}43\frac{C_1}{2\lambda}\left(\frac{B}{\overline{B}}\right)^{3/2}. \qquad (9.6)$$

Здесь $a_0 = 0{,}43\left(\mu_0\gamma_0\right)^{-3/4}(2\lambda)^{-1/4}C_1^{-1/2}$. Для меди $a_0 = 0{,}15$.

Далее рассчитаем индукцию в щели и в толстостенном длинном одновитковом магните, подключенном к источнику бесконечной мощности (рис. 8.10). Изменение потока в щели $(d/dt)(ghB)$ равно напряжению источника U_0 на входе. В стационарном режиме, когда $B = \text{const}$ и $dh/dt = u_f$, получаем с помощью формулы (9.3):

$$U_0 = \frac{gBC_1}{\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{B^2}{\overline{B}^2}}-1\right). \qquad (9.7)$$

В области полей, меньших примерно $4\overline{B}$, когда справедлива аппроксимация (9.6), имеем

$$U_0 = 2ga_0 B^{5/2}. \qquad (9.8)$$

Отсюда получаем формулу, дающую зависимость индукции в щели от напряжения, приложенного к её краю:

$$B = \left(\frac{U_0}{2ga_0}\right)^{5/2}. \qquad (9.9)$$

В случае источника «бесконечной мощности» U_0 есть напряжение этого источника. Если $U_0 = 10^4$ В, $g = 10^{-2}\,м$, $a_0 = 0{,}15$ (медь), то $B = 390\,T$, при этом $u_f = 4{,}5\cdot 10^3\,м/с$. В асимптотическом режиме, когда выполнено условие $B >> \overline{B}$, имеет место следующая зависимость для индукции:

$$B = \left(\frac{U_0}{2g}\right)^{1/2}\left(2\lambda\mu_0\gamma_0\right)^{1/4}. \qquad (9.10)$$

Последняя формула даёт значения индукции, близкие к рассчитанным по формуле (8.8), полученной при расчёте течения в рамках модели двухмерного течения несжимаемой жидкости. Из приведенных соотношений следует, что как и в режиме двумерного течения, для получения поля с индукцией в несколько сот тесла необходимы высокие напряжения источника: величина $< E >= U_0/(2g)$ должна быть порядка десятков киловольт на сантиметр. Например, чтобы получить поле с индукцией 10^3 Т, требуется $< E >= 54$ кВ/см. Этот вывод, полученный при анализе простейшей модели щели, сохраняет свое значение и для реальной конфигурации одновиткового магнита. Если его длина и толщина стенок достаточно велики, то течение становится не плоским, а цилиндрическим. Тем не менее, и в этом случае для расчётов будем использовать формулу (9.3), относящуюся к установившемуся плоскому течению. Можно убедиться путем сравнения с более точным численным расчетом, что возникающая погрешность невелика, если относительное увеличение внутреннего радиуса не превышает 1,5-2. Рассматривая поле с индукцией много большей, чем $\overline{B}$, воспользуемся формулой (9.5) для скорости границы и уравнением $U_0 = (d/dt)\left(\pi R_1{}^2 B\right)$. Решение задачи отличается от полученного выше при расчете расширения соленоида с альфвеновской скоростью лишь значениями величин B_f и t_f в формулах (8.8) и (8.13). В случае ударной волны $t_f = R_0(\pi R_0/U_0)^{1/2}(2\mu_0\gamma_0\lambda)^{1/4}$, $B_f = (U_0/\pi R_0)^{1/2}(2\mu_0\gamma_0\lambda)^{1/4}$. В табл. 8.4 приведены значения средней напряженности электрического поля $< E >= U_0/(2\pi R_0)$ применительно к задаче получения поля с индукцией масштаба 10 700 и 1000 Т в медных и танталовых соленоидах. Эти значения близки к тем, которые соответствуют движению границы с альфвеновской скоростью.

Таким образом, с точки зрения требований к параметрам источника энергии, как течение несжимаемой жидкости, так и течение за фронтом ударной волны отличаются мало. Напряжение источника, необходимого для получения поля с индукцией масштаба 10^3 Т составляет сотни киловольт, если периметр полости одновиткового магнита составляет несколько сантиметров. Такого рода источниками являются мегавольтные малоиндуктивные формирующие линии. Опыты на такой линии в лаборатории «Сандия» (США) показали возможность достижения поля с индукцией выше 1000 Т [7].

9.2. Общие сведения об электрическом взрыве проводников

Экспериментальные данные показывают, что одновитковые соленоиды, испытавшие воздействие сверхсильного магнитного поля, носят следы не только пластической деформации, но и процессов, связанных с нагревом проводников импульсным током. Поверхность витков изнутри бывает оплавлена, а масса образцов после разряда заметно меньше, чем в исходном состоянии. Как отмечалось в § 8.1, у образцов из стали выброс металла является существенным, а у образцов из легкоплавких металлов - основным фактором, определяющим остаточное изменение диаметра после одного разряда.

Эти факты можно объяснить электрическим взрывом, который является следствием нагрева проводника импульсным током. В зависимости от толщины стенки соленоидов поверхностный эффект в них может быть выражен резко или слабо. Целесообразно сначала рассмотреть основные процессы электрического взрыва при отсутствии поверхностного эффекта, что имеет место как при взрыве магнитов, толщина стенки которых меньше толщины скин-слоя, так и при взрыве проволочек и фольг в экспериментах по коммутации, по ускорению проводников и т. д.

Электрический взрыв проводника (ЭВП) - это процесс его разрушения в результате воздействия тока. Детальное изучение этого явления началось в последние десятилетия после появления таких методов исследования, как электронная осциллография, скоростная киносъемка, импульсная рентгенография. Изучению ЭВП посвящено огромное число работ как экспериментальных, так и теоретических. В типичном эксперименте по исследованию электрического взрыва проволока или фольга устанавливаются в цепи разряда конденсаторной батареи. Если сопротивление цепи, включая начальное сопротивление взрываемого проводника, достаточно мало, то сначала ток изменяется по синусоидальному закону как в обычном высокодобротном RLC – контуре. При этом напряжение на проволоке мало. По мере нагрева сопротивление проводника растет, что приводит к аномалиям в кривой тока и росту напряжения на проводнике. Ход процесса и вид осциллограмм (рис. 9.1) могут быть весьма разнообразны в зависимости от параметров цепи, энергии накопителя, материала, сечения и длины проводника, свойств окружающей среды.

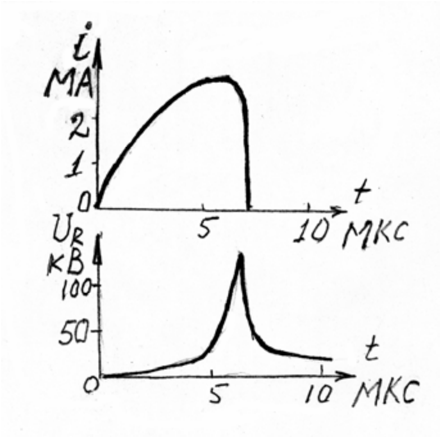


Рис. 9.1. Типичные осциллограммы тока и напряжения
при электрическом взрыве фольги [30]

Одновременное осциллографирование тока в проводнике и активного падения напряжения на нем позволяют получить зависимость сопротивления проволоки от вложенной энергии. Если проводник сохраняет свою первоначальную форму и размеры, то при относительно небольших энерговкладах его сопротивление растет приблизительно экспоненциально в зависимости от токового интеграла действия (см. главу 3) в соответствии с табличной зависимостью проводимости от вложенной энергии. Рост сопротивления проводника может сильно повлиять на переходный процесс и привести к увеличению затухания, к превращению разряда в апериодический. В чисто индуктивной цепи при росте сопротивления по закону $R = R_0(1 + \beta \Delta q')$ ток, имевший сначала значение i_0, затухает в соответствии с зависимостью:

$$i = i_0 Z \left(1 + \frac{Y_0{}^2}{2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{Y_0{}^2 Z^2}{2}\right)^{-1/2}, \tag{9.11}$$

где $Y_0 = (i_0/S)(\rho_0 \beta L/R_0)^{1/2}$, $R_0 = \rho_0 l/S$, l — длина, S — сечение проводника, L - индуктивность цепи. В этом случае падение напряжения на сопротивлении описывается формулой

$$U = i_0 R_0 \left(1 + \frac{Y_0{}^2}{2}\right)^{3/2} Z \left(1 + \frac{Y_0{}^2 Z^2}{2}\right)^{-3/2}. \tag{9.12}$$

В этих формулах $Z = \exp\left[-(t R_0/L)\left(1 + Y_0{}^2/2\right)\right]$. При условии $Y_0 > 1$ напряжение сначала возрастает, достигает максимального значения

$$U_m = \frac{U}{3\sqrt{3} Y_0} \left(2 + Y_0{}^2\right)^{3/2}, \tag{9.13}$$

а затем падает. Процессы, в которых сопротивление растет в соответствии с табличной зависимостью $\rho(\Delta q')$, естественно называть процессами в цепях с нагреваемым проводником. В отличие от этого при электрическом взрыве зависимость сопротивления от токового интеграла действия становится более резкой, чем экспонента, соответствующая табличным значениям ρ. Такой "надэкспоненциальный" режим может быть результатом как чисто механического разрушения проводника электромагнитными силами вследствие развития МГД-неустойчивостей, так и следствием его полного или частичного испарения.

При росте сопротивления проводника в процессе электрического взрыва ток в цепи начинает более или менее резко уменьшаться и в зависимости от условий эксперимента обрывается до нуля или после спада вновь начинает возрастать. В последнем случае возникает лишь особенность на кривой тока. При полном обрыве тока в цепи с емкостным накопителем может сохраниться остаточное напряжение на конденсаторах. В этом случае возможен повторный пробой промежутка и восстановление его электропроводности по истечении отрезка времени, называемого паузой тока. Пауза тока при прочих равных условиях тем короче, чем меньше длина проводника. Всегда существует "критическая" длина проволоки или фольги [30], при которой пауза исчезает, и ток не обрывается полностью.

Напряжение на взрывающемся проводнике имеет, как правило, форму импульса с подъемом и последующим спадом (рис. 9.1). Такая зависимость напряжения от времени свойственна индуктивной цепи с возрастающим сопротивлением, о чем свидетельствует рассмотренный выше пример с сопротивлением, растущим при нагреве по линейному закону. Если сопротивление растёт неограниченно, то ток в цепи падает до нуля, а напряжение сначала растёт, а затем стремится к нулю.

В реальных условиях при электрическом взрыве наряду с развалом проводника и исчезновением металлической проводимости идет процесс ионизации паров металла и газа, окружающего проводник. Вследствие этого сопротивление участка цепи, где включен взрывающийся проводник, сначала растет, а затем может начать падать. В частности, при неполном обрыве тока процессы ионизации приводят к образованию дуги раньше, чем исчезает ток в цепи.

Перенапряжения, возникающие при ЭВП, сильно влияют на ионизационные процессы в промежутке, а восстановление проводимости, в свою очередь, ограничивает перенапряжения как в режимах с неполным, так и с полным обрывом тока. Существенное влияние на процесс восстановления проводимости и на амплитуду перенапряжения оказывают свойства окружающей среды. Так, в опытах по обрыву тока фольгами, выполненных в НИИЭФА им. Д.В. Ефремова [30], наибольшие перенапряжения имели место при взрыве фольги в пылевидном кварце. Из сказанного следует, что ЭВП является весьма сложным процессом, в котором металл переходит из твердой фазы в плазму. При этом резко меняются термодинамические свойства материала, его электропроводность и, как правило, сильно выражена пространственная неоднородность.

Уравнение состояния, описывающее свойства металла при локальном термодинамическом равновесии, дает весьма сложную связь давления, плотности и температуры. Примером могут быть изотермы, представленные на рис. 9.2.

Точка A на рис. 9.2 соответствует начальному состоянию проводника, а точка S - конечному. Типичными для конечного состояния среды являются значения $T = 10^4 - 10^5 K$, $\gamma << \gamma_0$.

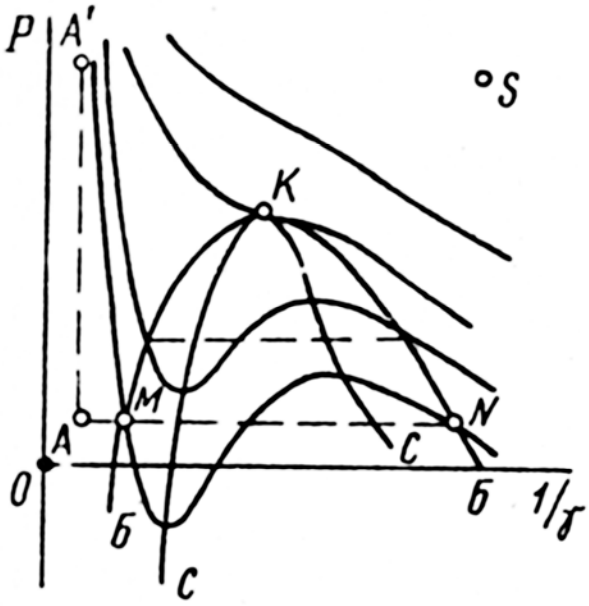


Рис. 9.2. Качественный вид диаграммы состояния металла.
К - критическая точка

Переходу из начального состояния элемента среды в конечное соответствует линия на плоскости $(P,1/\gamma)$, вид которой определяется процессом нагрева и расширения проводника и может быть найден путем решения уравнений гидродинамики совместно с уравнением состояния и уравнением, описывающим зависимость электропроводности от температуры и плотности. При этом следует иметь в виду, что при медленном испарении и при условии $T_F < T_k$, где T_k - критическая температура, T_F - температура Ферми (у меди $T_k \approx 0{,}7$ эВ - около $8 \cdot 10^3$ К; $T_F \approx 5$ эВ - около $6 \cdot 10^4$ К), имеет место изобарическое расширение, которому соответствует линия AMN на рис. 9.2. При быстрых процессах возможны состояния, соответствующие области между бинодалью БКБ и спинодалью СКС, а также состояния с отрицательными давлениями (растянутая жидкость). Состояния, соответствующие области под спинодалью, не могут существовать.

Каждой точке на рис. 9.2, кроме области под спинодалью, соответствует определенное значение проводимости. Известно, что высокая проводимость металлов в твердой и жидкой фазе обусловлена наличием вырожденного "газа" свободных электронов. Это электроны, находящиеся в свободной энергетической зоне (зоне проводимости), которая образуется при сближении атомов. Дефекты решетки, связанные с тепловыми колебаниями атомов, обусловливают температурную зависимость сопротивления проводников, о которой шла речь в главе 3. Зависимость проводимости от температуры и плотности весьма сложна, поэтому остановимся лишь на некоторых ее качественных сторонах. Чтобы получить представление о характере этой зависимости в области большой плотности, рассмотрим гипотетический случай, когда плотность близка к начальной $(\gamma = \gamma_0)$, а температура растет (линия AA' на рис. 9.2). Подобная ситуация может быть реализована, когда проводник нагревается настолько быстро, что не успевает расшириться. Средняя концентрация атомов при этом остается постоянной. Зависимость $\sigma(T)$ будет иметь U-образный характер: при $T \to 0$ проводимость растет, так как исчезают тепловые колебания ионов в решетке; при $T > T_F$ металл приобретает свойства полностью ионизованной неидеальной плазмы, проводимость которой растет как

$T^{3/2}$ [14]. Рост проводимости начинается при $T \geq 10^5 K$, то есть в области температур, достигаемых лишь в очень мощных разрядах. Минимум проводимости соответствует $\sigma \approx 10^{-2}\sigma_0$, где σ_0 - проводимость металла в исходном состоянии. Далее рассмотрим зависимость проводимости от плотности для области сравнительно низких (докритических) температур. В твердой фазе проводимость растет с увеличением плотности по закону [14]

$$\sigma = \sigma(\gamma_0)\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{2,7}. \tag{9.14}$$

В этой формуле $\sigma(\gamma_0) = 1/\rho(\gamma_0)$, где $\rho(\gamma_0)$ - зависит от температуры по линейному закону (см. гл. 3). При расширении проводника (например, для случая, когда процесс описывается линией AMN) проводимость резко падает при увеличении межатомного расстояния примерно вдвое, или при уменьшении плотности на порядок. При этом перестают перекрываться электрические поля ионов, резко меняется конфигурация энергетических уровней, и исчезают свободные электроны. Происходит их "деколлективизация", следствием чего является превращение проводника в диэлектрик с соответствующим возрастанием удельного сопротивления на несколько порядков.

Несмотря на появление в условиях термодинамического равновесия электронов вследствие термической ионизации, можно утверждать, что при $T \leq 10^5$ К удельное сопротивление резко возрастает, если плотность среды убывает на порядок; при этом в докритических режимах проводимость практически исчезает, а в закритических она переходит в плазменную, которая, однако, при $T \leq 10^5$ К весьма мала.

Надо отметить, что приведенные данные не отражают некоторые тонкости поведения электропроводности металла, например, ее исчезновение вблизи критической точки вследствие рассеяния электронов на флуктуациях плотности. Заметное влияние на электрические свойства среды могут оказать процессы, которые выходят за рамки предположения о локальном термодинамическом равновесии. Это, прежде всего, - ударная ионизация паров металла, которая может привести к заметному росту проводимости по сравнению с равновесной при относительно низкой температуре, а также появление "убегающих" электронов. Вместе с тем при большой плотности тока возможна раскачка различного рода колебаний в металлической плазме, возникновение микротурбулентности и, как следствие, - рост сопротивления среды. Неравновесные процессы в плазме, образующейся при ЭВП, практически не изучены.

Знание локальных свойств среды лишь тогда позволяет судить о явлении в целом, когда известно пространственное распределение плотности и температуры. Электрический взрыв проводников является примером процесса, в котором пространственная неоднородность резко выражена и играет существенную роль, особенно при относительно медленных процессах. Эксперименты, выполненные в ФТИ им. А.Ф. Иоффе Б.П. Перегудом и его сотрудниками, показали, что при импульсах длительностью порядка 10^{-3} с проводник, находящийся в твердой или жидкой фазе, в результате развития неустойчивости принимает форму спирали, а затем в нем возникают разрывы. При более коротких импульсах еще до полного испарения цилиндрического проводника возникают возмущения нулевой моды (перетяжки), в результате проволока превращается в последовательность цилиндрических участков с металлической проводимостью и разрывов между ними, в которых разряд имеет форму дуги в парах металла. Рентгеновские снимки показывают чередование плотных непрозрачных участков и участков, заполненных плазмой относительно низкой плотности, прозрачных для мягкого рентгеновского излучения. Нагрев участков, сохранивших металлическую проводимость, происходит не только током, но и за счет передачи тепла от дуг. В дугах энерговыделение идет более интенсивно, так как сопротивление металлической плазмы малой плотности выше, чем жидкого металла. На возникновение и развитие неустойчивости нулевой моды влияют начальные возмущения проводника, силы поверхностного натяжения и электромагнитные силы. При этом максимальный инкремент для моды с $m = 0$ составляет

$$\nu_m = \frac{V_A \cdot n}{R_0}, \tag{9.15}$$

где R_0 - радиус проводящего цилиндра, материалом которого является идеальная несжимаемая жидкость, V_A - альфвеновская скорость: $V_A = B_e \big/ \sqrt{\mu_0 \gamma_0} = (i/2\pi R_0)(\mu_0/\gamma_0)^{1/2}$ (B_e - индукция на поверхности проводника, i - ток в нем); n - численный множитель, значение которого при оценках можно принять равным $\sqrt{2}$. Формула для характерного времени развития неустойчивости имеет вид

$$\tau_H = \frac{1}{\nu_m} = \frac{2\sqrt{\gamma_0}}{n\delta\sqrt{\mu_0}}, \tag{9.16}$$

где δ - плотность тока. Для значений δ, лежащих в диапазоне (10^{11}-10^{13}) А/м^2, τ_H меняется в пределах 10^{-8}-10^{-6} с. Таким образом, лишь при весьма малом времени нарастании тока можно ожидать, что расширение проводника будет однородным по длине и соответствовать "классической" схеме ЭВП, где либо вообще не учитывается пространственная неоднородность, либо принимается во внимание лишь неоднородность по радиусу.

Простейший критерий возникновения "надэкспоненциального" роста сопротивления можно получить, исходя из представления об электрическом взрыве как о быстром и однородном расширении проводника после получения им энергии, равной энергии испарения. Если считать, что до этого момента справедлива линейная зависимость $\rho(\Delta q')$, то критерий принимает вид условия для объемной плотности энергии:

$$\Delta q' = \frac{1}{\beta}\left[\exp\left(\rho_0 \beta I\right) - 1\right] \geq Q_3 \tag{9.17}$$

где Q_3 - объемная плотность энергии сублимации, равная энергии связи атомов в решетке (см. табл. 3.1) Эту модель, основанную на представлении о мгновенной потере проводимости при достижении порогового значения энергии, будем называть идеализированной. Эксперименты показали, что при коротких импульсах (длительностью 10^{-5} с и менее) справедлив приближенный критерий начала взрыва (критерий Андерсена), который имеет вид порогового соотношения для токового интеграла действия. Для меди, согласно этому критерию, электрический взрыв происходит, если $I \geq I_A = 2 \cdot 10^{17}$ А^{2}м$^{-4}$с. Расчёт по формуле (9.17) даёт $I = 4 \cdot 10^{17}$ А^{2}м$^{-4}$с, если принять $\beta = \beta_2 = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ м^3/Дж, $Q_3 = 5{,}5 \cdot 10^{10}$ Дж/м^3. Этот ток по порядку величины близок к I_A. Критерий Андерсена является весьма приближённым: он не отражает зависимости момента начала резкого скачка сопротивления от скорости ввода энергии. При медленном вводе энергии, то есть при относительно длительных разрядах, "надэкспоненциальный" рост полного сопротивления начинается до того, как выполнен критерий Андерсена, из-за развития неустойчивости.

Можно дать оценку условия, при котором энергия сублимации будет получена проводником раньше, чем произойдет развитие неустойчивостей. При оценке будем считать плотность тока постоянной. Тогда указанное условие принимает вид неравенства $\tau_H > \tau_A$, где τ_H для проводника круглого сечения определяется формулой (9.16), а τ_A можно найти, используя критерий Андерсена: $\int_0^{\tau_A} \delta^2 dt = \delta^2 \tau_A = I_A$. Таким образом, имеем неравенство

$$\frac{2}{n\delta}\sqrt{\frac{\gamma_0}{\mu_0}} > \frac{I_A}{\delta^2}, \tag{9.18а}$$

или

$$\delta > \frac{I_A n}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma_0}} \approx 10^{12}\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 10^8\,\frac{\text{А}}{\text{см}^2}. \tag{9.18б}$$

Такая плотность тока имеет место в проводнике диаметром около 0,1 мм при токе 10^4 А. Поскольку в реальных условиях ток не нарастает мгновенно, дополнительно требуется, чтобы время его нарастания было меньше τ_H, то есть скорость нарастания тока должна удовлетворять условию

$$\frac{d\delta}{dt} \geq \frac{\delta}{\tau_H} = \frac{\delta^2 n}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma_0}} = \frac{I_A{}^2 n^3}{8}\left(\frac{\mu_0}{\gamma_0}\right)^{3/2} = 2\cdot 10^{19}\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2\text{с}}. \tag{9.19}$$

При площади сечения проводника 10^{-8} м^2 это соответствует скорости нарастания тока $di/dt \geq 2\cdot 10^{11}$ А/с.

Чейсом было предложено разделить режимы взрыва на "медленные" и "быстрые". К первым относятся те, в которых разрушение проводника идет за счет развития перетяжек, ко вторым - режимы, в которых взрыв происходит однородно по длине. В самом грубом приближении можно считать, что в режимах второй группы выполнен критерий Андерсена.

В ряде экспериментов, выполненных с проводниками малого сечения при большой скорости нарастания тока, были осуществлены условия, когда неоднородность взрыва по длине не была определяющим фактором. Подобные опыты производились как с цилиндрическими проводниками, так и с фольгами. Интерпретация результатов этих опытов с помощью численного эксперимента, включавшего в себя решение уравнений гидродинамики, показала, что при быстрых взрывах процесс всегда неоднороден по толщине. Испарение начинается с поверхности, тогда как внутренняя часть не успевает расшириться и сохраняет металлическую проводимость до тех пор, пока к оси проводника не подойдет волна расширения, распространяющаяся со звуковой скоростью. До этого момента резко растет давление во внутренней части проводника. В таких условиях резкий рост сопротивления проволоки может начаться при значениях токового интеграла действия, превышающих критерий Андерсена. Поэтому при очень быстрых вкладах энергии следует заменить I_A на $K_A I_A$, где $K_A = 1-3$. Отметим, что в последние годы интенсивно изучается электрический взрыв сверхтонких проволок и фольг с использованием самых мощных источников энергии - наносекундных формирующих линий с внутренним сопротивлением порядка 10^{-1}-1 Ом, напряжением 10^5-10^6 В и запасом энергии 10^5-10^6 Дж. В этих опытах обрыв тока не возникает, а проводник, испаряясь в самой начальной стадии разряда, превращается в плазменное образование с энергией частиц до сотен электронвольт и проводимостью, приближающейся к проводимости холодного металла.

9.3. Электрический взрыв скин-слоя в сверхсильном магнитном поле. Идеализированная модель

Если стенка магнита настолько тонка, что поверхностный эффект в ней выражен слабо, то плотность тока постоянна по толщине h. В таком магните наряду с расширением под действием электромагнитных сил возможен электрический взрыв - потеря проводимости, приводящая к обрыву тока в цепи. Воспользуемся идеализированной моделью для оценки индукции, достижимой в таком устройстве. В данном случае критерий разрушения принимает вид

$$\int_0^t \delta^2 dt = \frac{1}{\mu_0{}^2 h^2} \int_0^t B^2 dt \geq I_A \, . \qquad (9.20)$$

Отсюда можно получить оценку значения индукции, достижимой в момент максимума тока, нарастающего по синусоидальному закону:

$$B_m \leq \mu_0 h \left(\frac{2I_A}{t_m} \right)^{1/2}, \qquad (9.21)$$

где t_m - время нарастания тока до максимума. Формула (9.21) дает весьма большие значения индукции: в случае меди для t_m=2·10^{-6} с, $h = 1$ мм, $B_m \approx 500$ Т. Это связано с тем, что увеличивая δ, можно теоретически сколь угодно снизить плотность тока. В реальных условиях при указанном времени нарастания тока глубина проникновения поля (толщина скин-слоя) принимает значения порядка долей миллиметра, то есть имеет место условие резко выраженного скин-эффекта. В этих условиях, как было показано в гл. 3 индукция на поверхности одновиткового магнита и объемная плотность энергии связаны простым соотношением: $\Delta q' = \vartheta B_e^2 /(2\mu_0)$, где ϑ близко к единице. Рассмотрим далее, по аналогии с взрывом проволочек, идеализированную модель взрыва, согласно которой слой, в котором достигается значение объемной плотности энергии Q_3, мгновенно теряет проводимость. При такой крайне упрощенной постановке задачи можно рассчитать скорость смещения границы поле-проводник и оценить влияние этого процесса на значение индукции. Смещение границы влияет на распределение тока в поверхностном слое: если сначала в полях с индукцией $B > B_0$ ток распределен немонотонно, то по мере смещения границы следует ожидать, что ток будет вытесняться из слоев, потерявших проводимость, в более глубокие слои. Это должно привести к "сгребанию" тока и увеличению его плотности. Если на границе она есть $\delta(x_S)$ (x_S - координата границы поле-проводник, растущая в процессе взрыва), то выделяемая в единице объема энергия равна

$$\delta^2(x_S)\rho(x_S)dt = \frac{\partial(\Delta q')}{\partial t}dt\,.$$

За время dt теряет проводимость слой толщиной $dx = v_S dt$. где v_S - скорость смещения границы. Толщину этого слоя можно найти по формуле

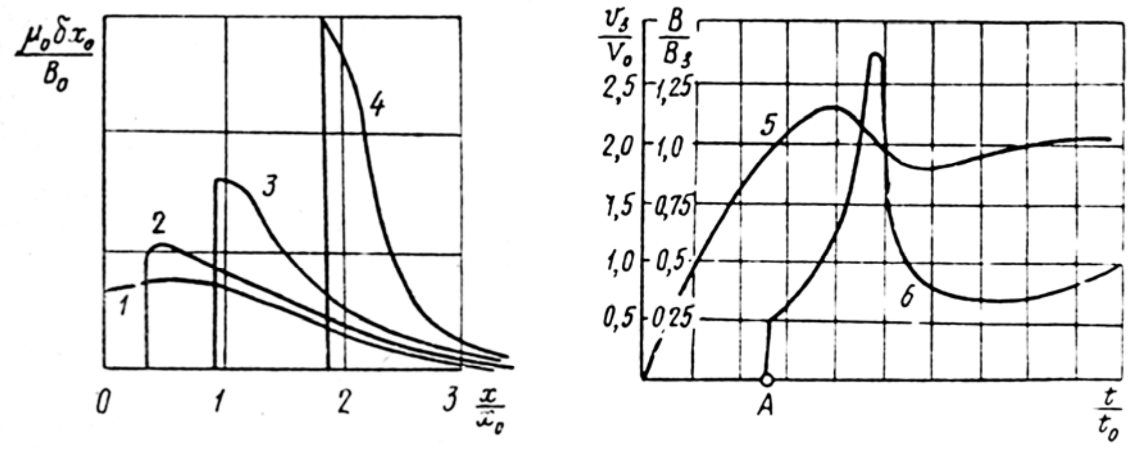
$$dx = \frac{\left[\partial(\Delta q')/\partial t\right]_{x_S}}{\partial(\Delta q')/\partial x}dt\,.$$

Отсюда

$$v_S = \frac{dx_S}{dt} = \left[\frac{\partial q}{\partial t} : \frac{\partial q}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=x_S}. \qquad (9.22)$$

Численное решение этой задачи, аналогичной известной в теории теплопроводности проблеме распространения границы раздела фаз (задача Стефана), подтверждает высказанные соображения об ожидаемом эффекте «сгребания» тока (рис. 9.3). При этом в нарастающем внешнем поле увеличивается скорость нагрева поверхностных слоев, и каждый последующий слой теряет проводимость быстрее предыдущего.

Модель идеализированного взрыва поверхностного слоя в нарастающем поле приводит к, своего рода, неустойчивости плоского фронта - скорость его неограниченно растет за конечное время. Отсюда видно, что при мгновенной потере проводимости нагретым слоем электрический взрыв может стать основным фактором, ограничивающим уровень достижимых полей. Чтобы это показать, приведем результаты численного решения модельной задачи о разряде источника бесконечной мощности с напряжением U_0 через индуктивность на щель, края которой (границы поле-проводник) смещаются в результате исчезновения проводимости при взрыве.



а ***б***

Рис. 9.3. Идеализированная модель электрического взрыва:
а - плотность тока после начала взрыва в нарастающем поле ($B_e = B_0\, t/t_0$): ***1*** - $t = 1{,}35t_0$; ***2*** - $t = 1{,}5t_0$; ***3*** - $t = 1{,}65t_0$;
4 - $t = 1{,}5t_0$; $x_0 = \left(\rho_0 t/\mu_0\right)^{1/2}$; $B_s = 2B_0$;
б - индукция в щели и скорость смещения границы.
1 - $v_s/v_0 = f\left(t/t_\delta\right)$; ***2*** - $B/B_s = f\left(t/t_\delta\right)$; $v_0 = U_0/2gB_s$;
$t_\delta = \rho_0\left(1 + B_s^2/B_0^2\right)/(\mu_0 v^2)$; индуктивность цепи
$L = \delta\rho_0\left(1 + B_s^2/B_0^2\right)g^2 B_s/(lU_0)$; $B_s = 2B_0$

Характерно изменение скорости границы: она после начала взрыва (ему соответствует точка A на рис. 9.3) растёт, затем рост скорости прекращается. Ограничение скорости вытекает из закона индукции: скорость смещения границы не может быть сколь угодно большой, так как сумма падения напряжения на щели и на индуктивности (при нарастающем поле эти слагаемые имеют одинаковые знаки) должна быть равна напряжению источника U_0. Решение стабилизируется при условии $B_e = B_S = \left(2\mu_0 Q_3\right)^{1/2}$, то есть при значении индукции, равном пороговому. В этом режиме ток в цепи не меняется, нет падения напряжения на индуктивности цепи и можно рассчитать скорость, воспользовавшись равенством $2v_S B_S g = U_0$. Отсюда получаем:

$$v_S = \frac{U_0}{2gB_S} \ . \qquad (9.23)$$

При условиях $< E >= U_0/2g = 10^7$ В/м. $B_3 = 370$ Т имеем $v_S = 2{,}5 \cdot 10^4$ м/с. Из этой оценки видно, что, хотя свойства цепи и ограничивают скорость границы проводника, при средней напряженности электрического поля, необходимой для достижения полей с индукцией около 10^3 Т (см. § 9.1), эта скорость намного превосходит альфвеновскую. Следует, однако, учитывать ограниченную применимость самой модели идеализированного взрыва, в рамках которой не учитывается конечная скорость расширения среды, теряющей проводимость.

9.4. Реальные процессы, развивающиеся при «медленном» и «быстром» электрическом взрыве поверхностного слоя проводника в сверхсильном магнитном поле

В реальных условиях пороговые значения энергии (а значит, и индукции), при которых начинается электрический взрыв, зависят от скорости ввода энергии и от геометрии одновиткового магнита. По аналогии с электрическим взрывом проволочек и фольг можно выделить режимы «медленного» и «быстрого» взрывов (см. § 8.3). В первом случае определяющим процессом является гидродинамическое течение, развивающееся в поверхностном слое и приводящее к выбросу проводника через торцы (рис. 9.4).

Этот процесс может происходить в горячем размягченном слое, слабо связанном с остальной частью витка, однако наиболее заметно он проявляется в проводниках, нагретых выше точки плавления.

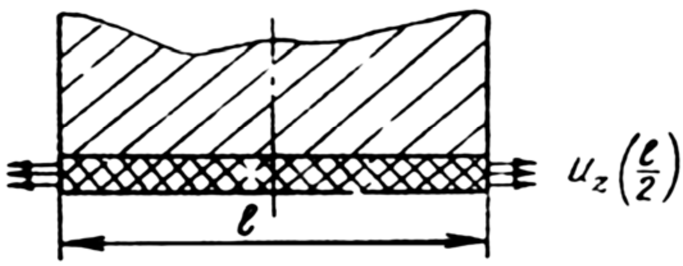


Рис. 9.4. Схема «медленного взрыва» - выброса расплавленного металла через торцы соленоида

Пороговая индукция, при которой происходит плавление поверхностного элемента среды, близка к значению $B_{S,1} \approx \sqrt{2\mu_0 Q_1}$, где Q_1 - энергия плавления, отнесенная к единице объема. Согласно табл. 3.2 для меди эта индукция составляет 120 Т, для свинца - лишь 30 Т. Опыты показали, что модельные образцы из сплава Вуда практически не носили следов пластической деформации, а расширялись за счет выброса металла в поле с индукцией около 50 Т. Исследование осадка, остающегося после взрыва, показало, что он в значительной степени состоял из мелких капель, образовавшихся при разбрызгивании металла. В этих опытах ”медленный” взрыв был практически единственным процессом, приводившим к росту внутреннего диаметра магнита. В других опытах при полях, меньших предела, соответствующего испарению металла, ”медленный” взрыв также был тем фактором, который определял выброс металла.

Количественные оценки процессов, происходящих при ”медленном” взрыве, могут быть выполнены для простейшего случая установившегося процесса. Можно найти скорость границы поле-проводник из соображений баланса массы, если принять, что смещение границы на расстояние ΔR_1 происходит за счёт выброса металла через торцы с альфвеновской скоростью. Эта скорость соответствует стационарному течению в расплавленном слое толщиной Δ_S. В самом деле, если принять, что давление в слое рассмотренного металла в среднем есть $P_M \approx B_e^{\,2}\big/2\mu_0$, то при установившемся течении можно записать следующее уравнение движения несжимаемой жидкости вдоль образующей, то есть в направлении оси:

$$\frac{1}{2}\gamma_0 \frac{\partial u_z^{\,2}}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \text{ или } \frac{1}{2}\gamma_0 u_z^{\,2} + P = \text{const}. \qquad (9.24)$$

В средней плоскости витка $u_z = 0$, $P = B_e^{\,2}\big/2\mu_0$; на срезе магнита $u_z \approx u_z(l/2)$, $P \approx 0$. Отсюда находим скорость выброса вещества через плоскость торца $u_z(l/2) = V_A$. Скорость границы находим из условия баланса массы: $l(dR_1/dt) = 2\Delta_S V_A$. Далее находим

$$\frac{dR_1}{dt} = \Omega_S = 2V_A \frac{\Delta_S}{l}. \qquad (9.25)$$

Если для оценки принять, что толщина Δ_S равна глубине проникновения, то, как видно из этой формулы, скорость границы много меньше альфвеновской, если $\Delta_S << l$. Несмотря на это, роль медленного взрыва как фактора, приводящего к росту внутреннего радиуса раньше, чем индукция достигает максимума, может быть существенной в тех случаях, когда плавление и выброс металла начинаются до того, как превзойден предел текучести. Есть основания считать, что этот процесс имел место в упомянутых модельных экспериментах с образцами из сплава Вуда, в которых амплитуда индукции по указанной причине не достигала своего расчетного значения. Из приведенных оценок следует, что в длинных одновитковых катушках выброс горячего металла через торцы не должен приводить к росту внутреннего радиуса в стадии нарастания тока, что не исключает роста радиуса на более поздних стадиях разряда. Вместе с тем, возможен выброс металла не только вдоль, но и поперек силовых линий поля. Этот процесс, может иметь место вследствие эффекта изменения знака объемной электромагнитной силы в скин-слое после максимума тока.

Дополнительным механизмом разрушения расплавленного поверхностного слоя может быть развитие желобковой неустойчивости. Как уже говорилось в § 8.1, следы этого процесса можно было заметить на латунных образцах толстостенных магнитов после испытаний.

Процессом, который может привести к расширению длинных толстостенных витков в ходе разряда наряду с рассмотренной ударной волной, является испарение поверхностного слоя - ”быстрый” взрыв. Этот процесс экспериментально практически не изучен, так как порогом для его возникновения являются поля с индукцией $B_{.2} \approx \sqrt{2\mu_0 Q_2}$ (Q_2 - энергия испарения) порядка 300-500 Т (см. табл. 3.2).

В экспериментах последних лет, выполненных в лаборатории «Сандия» [7], это порог превзойден. Поэтому актуальной является оценка роли «быстрого взрыва» как фактора, влияющего на смещение эффективной границы поле- проводник. В этих работах, как и работе Ширера [28], реализованы режимы, в которых благодаря относительно большой длине одновиткового магнита краевые эффекты не играют роли. Ими можно пренебречь при описании ударной волны, течения среды за фронтом ударной волны, диффузии поля в проводящую среду и ее расширения, сопровождаемого потерей проводимости. Качественная картина распределения основных параметров, характеризующих установившееся течение за фронтом ударной волны, представлена на рис. 9.5.

Точка s с координатой $(h(t)-h(0))/2$ является границей проводящей среды. Точка s=0 соответствует начальному положению границы проводника.

Ток сосредоточен в скин-слое (в области x>s), где происходит нагрев среды и формируется магнитное давление. Совместное действие давления нагретой среды и магнитного давления приводит к формированию ударной волны.

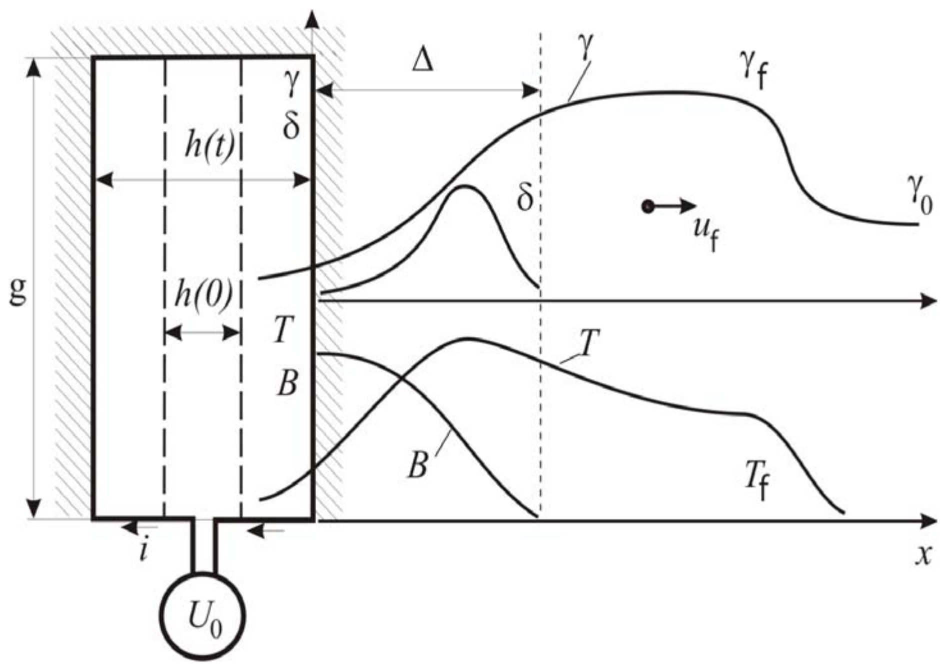


Рис. 9.5. Картина одномерного течения при электрическом взрыве скин – слоя: δ - плотность тока; γ_0 - невозмущенная плотность среды; γ_f - плотность среды за фронтом волны; u_f - скорость течения за фронтом; T - температура, B - индукция

Плотность и температура претерпевает скачок на фронте ударной волны, инициированной магнитным полем. Скорость элементов среды перед фронтом ударной волны равна нулю, а за фронтом она равна u_f. На рис. 9.5 показано качественное распределение плотности тока, с характерным максимумом, происхождение которого рассмотрено в главе 3. Чем быстрее нарастает поле, тем сильнее идет нагрев среды в скин-слое, и тем быстрее поле проникает в среду. В пределах области протекания тока существуют объемные электромагнитные силы, равнодействующая которых (в расчете на единицу поверхности) есть $P_M = B_e^2 / 2\mu_0$. Таким образом, указанная область играет роль поршня, создающего ударную волну. В этой области происходит дополнительный нагрев среды током.

Точку s естественно считать границей проводника. Левее этой точки находится внешняя среда с низким давлением. Следовательно, вблизи границы образуется область, где плотность среды и гидродинамическое динамическое давление убывают. В этой области объёмная сила, обусловленная градиентом давления, направлена наружу - в область внешнего поля. Проводимость здесь падает из-за уменьшения концентрации электронов. Соответственно, уменьшается плотность тока в большей степени, чем это имеет место при нелинейной диффузии поля в проводник, находящийся в твёрдой фазе. При спаде плотности тока уменьшается объёмная электромагнитная сила, и результирующая объёмная сила направлена наружу. В итоге, имеет место эффект, аналогичный отмеченному ранее при описании взрыва тонкостенных витков: создаются предпосылки для торможения внешних слоёв вследствие расширения среды. Объёмная скорость граничных элементов становится отрицательной по отношению к скорости течения за фронтом ударной волны. Скорость течения граничных элементов в лабораторной системе координат после начала взрыва может даже на некоторое время изменить свой знак. Иначе говоря, есть некоторые основания ожидать, что может иметь место «реверсивное» движение границы.

С практической точки зрения представляют интерес две проблемы: возможен ли выброс горячего газа во внешнюю среду и то, как движение границы и диффузия поля влияют на смещение эффективной границы поле-проводник. Первый вопрос важен для задач, где проводник граничит с зазором, обеспечивающим вакуумную изоляцию участка цепи. Второй вопрос играет роль при выборе параметров генератора, создающего ток в магнитной системе.

Ответы на оба эти вопроса требуют анализа течения в граничной области с учётом термодинамических свойств плазмы и зависимости её проводимости от плотности и температуры. Этот анализ возможен путём компьютерного моделирования. Здесь мы ограничимся оценкой, основанной на простом допущении, используемом при описании взрыва проволочек. Примем, что проводимость среды скачком исчезает при снижении плотности в граничной точке s до некоторого значения γ_s. Очевидно, что в рамках этой модели элементы среды с плотностью $\gamma < \gamma_s$ не удерживаются электромагнитными силами и свободно перемещаются во внешнюю среду, то есть имеет место выброс вещества из скин-слоя.

В стационарном режиме скорость смещения точки s постоянна и равна v_S. Приравнивая потоки массы по обе стороны плоскости, проходящей через точку s, получаем:

$$\gamma_f \left(u_f - v_S\right) = \gamma_S \left(u_S - v_S\right), \tag{9.26}$$

где u_S - скорость течения в точке s. Вместе с тем, как и в детонационных волнах, в рассматриваемой задаче должно быть выполнено условие Чепмена-Жуге, являющееся следствием предположения о стационарности процесса

$$c_S + u_S = v_S, \tag{9.27}$$

где c_S - адиабатическая скорость звука в точке s. Из уравнений (9.26) и (9.27) следует выражение для скорости смещения границы проводящей среды по отношению к среде, элементы которой перемещаются в положительном направлении со скоростью течения за фронтом ударной волны:

$$\Omega_s = v_S - u_f = \frac{\gamma_S}{\gamma_f} c_S. \tag{9.28}$$

Этот параметр можно рассматривать как компоненту скорости границы, обусловленную выбросом с единицы поверхности в единицу времени массы $m' = c_S \gamma_S = \Omega_s \gamma_f$. Можно оценить Ω_s для закритических режимов, представляющих наибольший интерес, если речь идет о получении полей с индукцией, близкой к 10^3 Т. Изменение внутренней энергии из-за сжатия вещества в ударной волне с давлением $P_f = P_M$ составляет (в расчёте на единицу массы) [18]:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{2}\frac{P_f}{\gamma_f}\left(\frac{\gamma_f}{\gamma_0} - 1\right) = \frac{B_e^{\ 2}}{4\mu_0\gamma_f}\left(\frac{\gamma_f}{\gamma_0} - 1\right).$$

Согласно оценкам, описанным в главе 3, нагрев среды при нелинейной диффузии дает следующее приращение энергии (в расчете на единицу массы):

$$\varepsilon_D \approx \frac{B_e^{\ 2}}{2\mu_0\gamma_f}.$$

Сумма этих величин есть

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_D = \frac{B_e^{\ 2}}{4\mu_0\gamma_f}\left(1 + \frac{\gamma_f}{\gamma_0}\right) \qquad (9.29)$$

Приращение температуры составляет

$$T_D \approx \frac{\alpha(\eta - 1)MB_e^{\ 2}}{4\mu_0\gamma_f\vartheta_0 k}\left(1 + \frac{\gamma_f}{\gamma_0}\right) \qquad (9.30)$$

где M - масса атома, ϑ_0 - коэффициент, учитывающий отличие теплоемкости горячего металла от теплоемкости идеального газа (при $T \geq 3\cdot 10^4$ К, $\vartheta_0 \approx 1$), k - постоянная Больцмана, η - эффективный показатель адиабаты горячего металла (точнее, его тяжелой компоненты), α - множитель, учитывающий долю энергии, приходящуюся на тяжелую компоненты плазмы (ионы и атомы). При низких температурах теплоемкость свободных электронов мала, и $\alpha \approx 1$. В поле с индукцией около 10^3 Т металл за токовым фронтом представляет собой полностью ионизованную плотную плазму с однозарядными ионами, температура которых близка к 10^5 К; при этом $\alpha = 0{,}5$. При адиабатическом расширении плотность меняется от γ_f до γ_S, а температура от T_D до $T_S = T_D\left(\gamma_S/\gamma_f\right)^{\eta-1}$. Примем, что в области адиабатического расширения металл близок по своим свойствам к идеальному газу. Тогда давление в точке s есть $P_S = \left(\gamma_S/M\right)kT_S$. Далее находим адиабатическую скорость звука в точке s и скорость Ω:

$$c_S = \sqrt{\frac{\eta P_S}{\gamma_S}} = \sqrt{\frac{\eta k T_S}{M}} \approx \sqrt{\frac{\eta(\eta-1)\alpha B_\alpha{}^2}{4\mu_0\gamma_f}\left(1+\frac{\gamma_f}{\gamma_0}\right)}\left(\frac{\gamma_S}{\gamma_f}\right)^{\frac{\eta-1}{2}}$$

$$\Omega_s = \frac{\gamma_S}{\gamma_f}c_S \approx V_A\sqrt{\frac{\eta(\eta-1)\alpha}{2}\left(1+\frac{\gamma_f}{\gamma_0}\right)}\left(\frac{\gamma_S}{\gamma_0}\right)^{\frac{\eta+1}{2}}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_f}\right)^{1+\frac{\eta}{2}}. \qquad (9.31)$$

В формуле (9.31) фигурирует альфвеновская скорость для невозмущенной среды $V_A = B_e\left(\mu_0\gamma_0\right)^{-1/2}$. Для меди соотношение $\gamma_f/\gamma_0 = 2{,}19$, если индукция составляет 10^3 Т*. При оценках примем $\eta = 5/3$ (газ с тремя степенями свободы), $\alpha = 0{,}5$, $\gamma_f/\gamma_0 = 2{,}19$. Тогда

$$\Omega_s = 0{,}23V_A\left(\frac{\gamma_S}{\gamma_0}\right)^{4/3}. \qquad (9.32)$$

В докритических режимах $\gamma_S/\gamma_0 \approx 0{,}1$ (в работе [59] принято $\gamma_f/\gamma_0 = 0{,}14$). Этот выбор основан на представлениях о «деколлективизации» электронов и превращении металла в непроводящий пар, состоящий из нейтральных молекул. В

* Предельная степень сжатия меди за фронтом ударной волны, по данным [31], равна 3,1.

закритических режимах, при температурах порядка 10^4-10^5 K, такой подход менее обоснован, поскольку имеет место встречный процесс - термическая ионизация и восстановление проводимости. Тем не менее, приведенная оценка имеет смысл, поскольку проводимость плазмы много меньше, чем проводимость металла, экстраполированная до температуры T_S в предположении, что металл сохраняет начальную плотность. Если условие резкого спада проводимости при снижении плотности примерно на порядок, выполнено, то, как следует из формулы (9.32), роль выброса как фактора, приводящего к смещению границы проводящей среды, мала по сравнению с ролью сжатия вещества за фронтом ударной волны.

9.5. Компьютерное моделирование взрыва скин-слоя

Численные расчеты одномерного течения в мегагауссном поле впервые выполнены в работе [28] и далее эта задача рассматривалась в ряде работ. При расчётах использованы различные уравнения состояния и зависимости проводимости от концентрации и плотности.

В работе Ширера [28] было отмечено обратное движение границы, и обсуждалась возможность выброса среды из скин-слоя. Этот эффект отмечен и в численных экспериментах других авторов. Например, в расчетах, выполненных для меди, было отмечено движение граничных слоев в сторону поля в начальной стадии процесса, но в дальнейшем граница изменяла направление скорости и смещалась вместе с остальной средой, несколько отставая от фронта ударной волны. В этих расчетах принималось, что индукция на границе нарастала до значения $B_\infty = 900$ Т за время 0,1 μs, а затем не изменялась.

Рис. 9.6 показывает, как изменяется распределение плотности тока, плотности среды и проводимости в момент времени $t = 1 \mu s$ в указанном численном эксперименте. В этот момент заметен отрыв фронта ударной волны от местоположения максимума плотности тока. По результатам расчета найдена скорость границы поле-проводник Ω_s. Она описывается зависимостью (9.32) с заменой коэффициента 0,23 на 0,17.

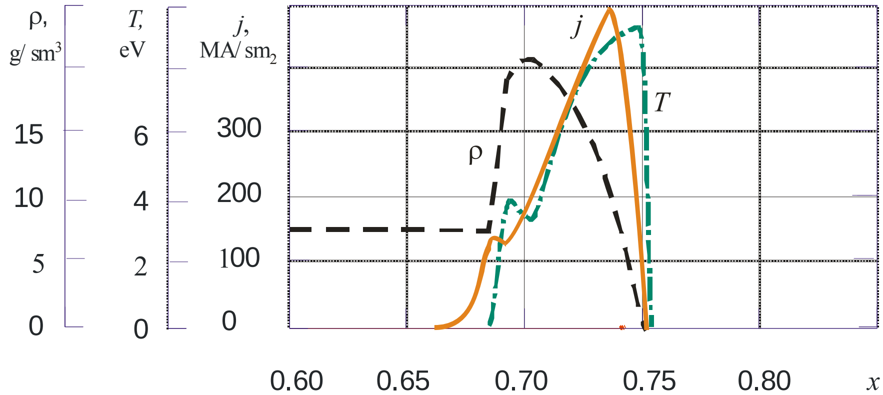
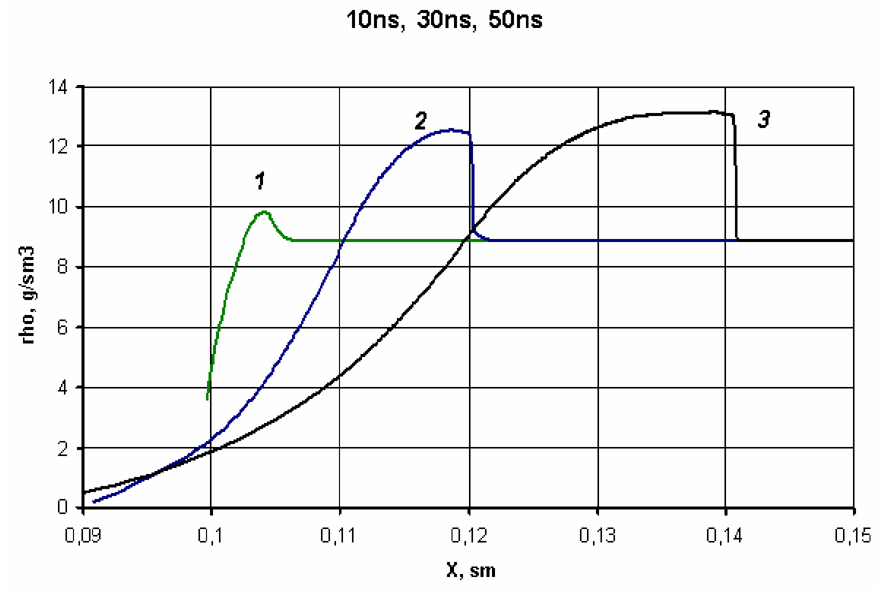


Рис. 9.6. Распределение плотности тока, температуры и плотности в скин-слое в момент 180 нс для случая, когда индукция внешнего поля нарастает до значения 900 Т за время 100 нс, а затем остается постоянной

Численные расчеты показывают, что в поле, скорость нарастания которого превышает (5-7)$\cdot 10^9$ Т/с, фронт ударной волны в течение некоторого времени не отрывается от области, где протекает ток. В этом случае часть тока сосредоточена перед фронтом в области, где металл еще сохраняет начальную температуру и имеет более высокую проводимость, чем нагретая среда за фронтом. В районе фронта образуется локальный максимум плотности тока (рис. 9.7). Он может сохраниться и в установившемся режиме, однако основная доля тока сосредоточена в области между границей проводящей среды и фронтом ударной волны.

Аналогичный эффект отмечался и в расчетах, выполненных применительно к условиям экспериментов по поучению поля с индукцией до $3\cdot 10^3$ Т. Расчеты были выполнены для нержавеющей стали и тантала. В рассмотренных примерах отсутствовало заметное смещение скачка давления по отношению к пику плотности тока, поскольку фронт ударной волны еще не успевал оторваться от фронта магнитного давления.



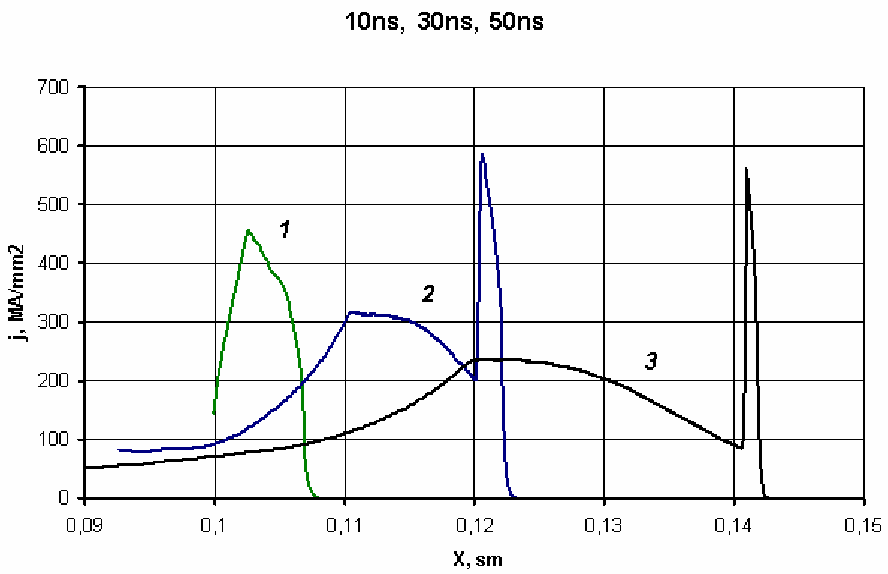


Рис. 9.7. Образование второго максимума тока перед фронтом ударной волны при диффузии поля в среду в случае нарастания внешнего поля со скоростью $2{\cdot}10^{10}$ Т/с

В ряде работ рассматривался вопрос о влиянии процесса диффузии поля и гидродинамического течения за фронтом ударной волны на ток в цепи генератора, к которому присоединен магнит. Для оценки этого влияния удобно использовать понятие «эффективной толщины скин-слоя». Ее можно определить по формуле

$$\Delta = (\int_{s}^{\infty} B(x,t)dx) / B_e. \tag{9.33}$$

В этой формуле B_e – индукция внешнего поля, а интеграл берется от границы проводника по всей области, показанной на рис. 9.5. Определенный интерес также представляет параметр $x_s + \Delta$, который можно интерпретировать как координату условной границы поле-проводник. В раках модели с полным обрывом тока x_S – это координата точки s, в которой проводимость становится равной нулю. В численных расчетах эта точка является лагранжевой координатой крайнего расчетного элемента среды. Скорость смещения указанной условной границы можно представить в виде

$$\Omega = dx(s) / dt + d\Delta / dt. \tag{9.34}$$

Для оценок наиболее удобна конфигурация щели длиной g, края которой отстоят друг от друга на расстояние h. На рис. 9.5, где представлена эта конфигурация, $x_s = \pm h/2$. Напряжение на входе щели есть $U_0 = 2gd(B_e x_s)/dt + 2gd(B_e\Delta)/dt$. Здесь первое слагаемое учитывает изменение потока, обусловленное расширением щели вследствие гидродинамического течения, а второе учитывает изменение потока в скин-слое по обе стороны щели.

Численные расчеты с использованием известных из литературы уравнений состояния и зависимостей проводимости от температуры и плотности дают результаты, несколько отличающиеся от полученных в § 9.2 в модели идеальной проводимости. Это показывает рис. 9.8, где приведены результаты вычислений, выполненных для меди с использованием одномерной программы МАГ. Отметим, что расхождение с моделью идеальной проводимости имеет место лишь в начальной стадии разряда, а затем оно уменьшается до значений масштаба нескольких процентов. Это вполне соответствует результатам приведенных оценок, согласно которым скорость смещения реальной границы существенно меньше альфвеновской. Таким образом, роль потери проводимости граничных элементов скин-слоя дает относительно небольшой вклад в скорость эффективной границы поле-проводник

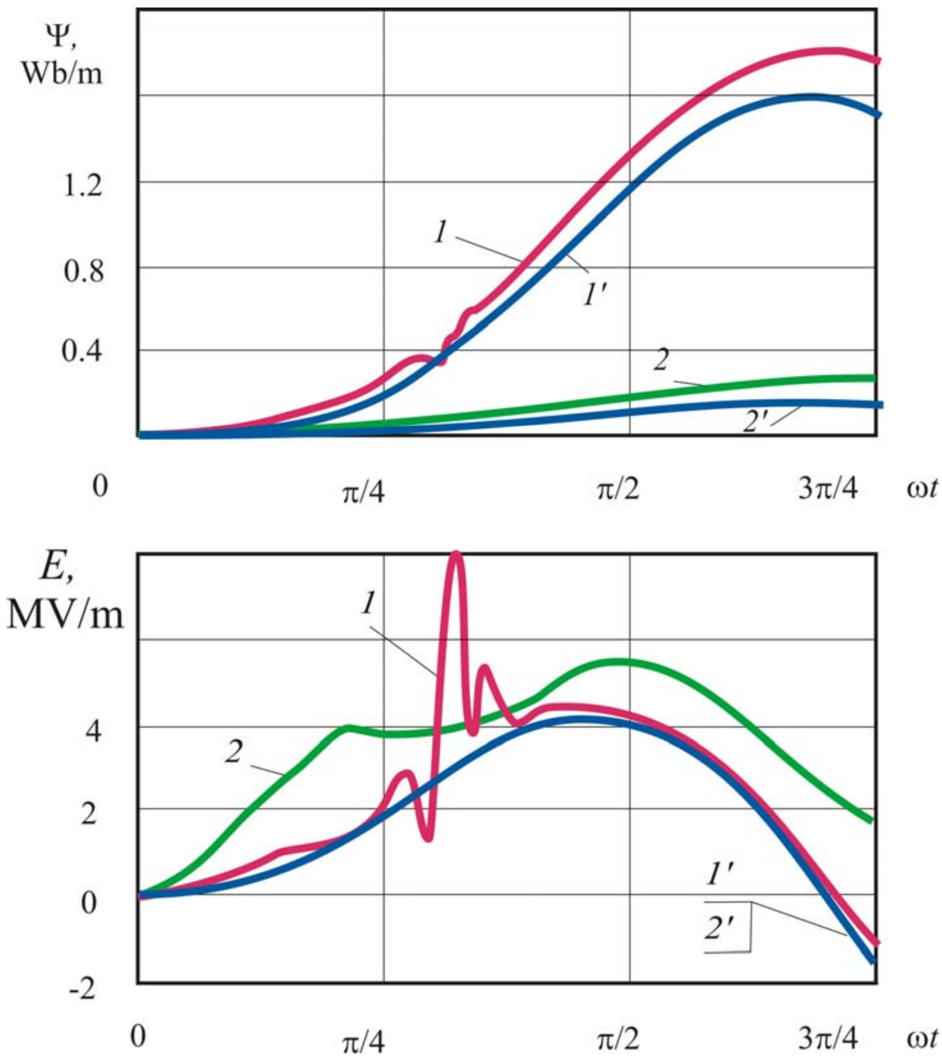


Рис. 9.8. Верхний рисунок - магнитный поток в скин-слое, рассчитанный на единицу длины границы. Нижний рисунок – напряжение на границе, рассчитанное на единицу длины: 1′ **-** идеальный проводник, время нарастания тока t_m=500ns*,* 2′ - идеальный проводник, t_m=50ns, ***1*** - полная модель t_m=500 ns*,* ***2*** – полная модель t_m=50 ns

по сравнению со скоростью течения среды за фронтом ударной волны. Поэтому можно предполагать, что в толстостенных одновитковых магнитах, выполненных из обычных проводниковых материалов, роль взрыва скин-слоя не будет определяющей. Иначе говоря, расчетные формулы для скорости идеально проводящей среды могут быть использованы для оценки падении напряжения на границе проводника при воздействии на него сверхсильного магнитного поля.

Вместе с тем закономерен вопрос, нет ли таких процессов, которые могли бы привести к резкому снижению проводимости металла без существенного расширения последнего, то есть при условии $\gamma_s \approx \gamma_f$. Определенные предпосылки для этого имеют место. Расчеты работы показали, что ускорение, возникающее при реверсе скорости граничных элементов, может привести к возникновению желобковых возмущений, разрушающих скин-слой. В этом случае предельным является режим, который соответствует описанной выше идеализированной модели взрыва скин-слоя.

С другой стороны, в условиях, соответствующих электрическому взрыву, возможен пробой в слабо ионизованных парах металла. Ударная ионизация может существенно изменить распределение тока и замедлить смещение эффективной границы поле-проводник.

10. МАГНИТНАЯ КУМУЛЯЦИЯ

Наиболее сильные импульсные магнитные поля получены методом магнитной кумуляции (МК). Он основан на быстром сжатии магнитного потока проводящей оболочкой, ускоренной внешними силами. При сохранении потока в полости, которую охватывает оболочка (лайнер), индукция растет по мере сжатия обратно пропорционально площади сечения полости. Работы в этом направлении были начаты в 50-е годы прошлого века в нашей стране под руководством А.Д Сахарова [32] и в США под руководством Фаулера [33]. В опытах российских ученых методом магнитной кумуляции получены рекордные поля с индукцией до 2800 Т [8]. Взрывчатые вещества - основной источник энергии для сжатия потока. Вместе с тем практическое применение нашел также способ ускорения лайнера электромагнитными силами - магнитодинамическая кумуляция - (МДК). Этим методом получены поля с индукцией, достигающей 600 Т [34]. Он может быть использован в лабораторных условиях и является конкурентом классического метода получения сверхсильных магнитных полей в соленоидах. Среди других способов ускорения лайнера следует упомянуть газодинамический метод, в котором проводник сжимается газом высокого давления [35].

В данной главе рассмотрены физические процессы, развивающиеся при магнитной кумуляции; на основе решения модельных задач даны оценки характерных параметров (амплитуды индукции, длительности импульса поля) и рассмотрены факторы, мешающие получению расчетных значений индукции.

10.1. Амплитуда индукции и радиус остановки при сжатии потока идеальной цилиндрической оболочкой. Описание экспериментов по магнитной кумуляции

Рассмотрим длинную замкнутую цилиндрическую оболочку с внутренним радиусом r_1, которая охватываем магнитный поток Φ_0

(рис. 10.1). Пусть в начальный момент, когда $r_1 = r_1(0)$, стенка лайнера сжимается со скоростью $\left(dr_1/dt\right)_0 = -u_0$ и имеет кинетическую энергию W'_K (на единицу длины).

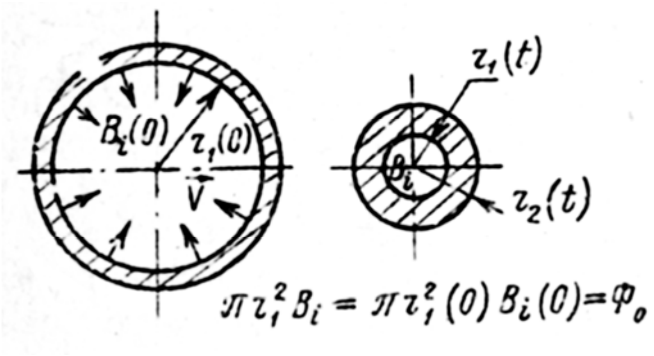


Рис. 10.1. Принцип магнитной кумуляции: поток в полости остаётся постоянным при сжатии оболочки: $\pi r_1^2 B_i = \pi r_1^2(0) B_i(0) = \Phi_0$

При идеальной проводимости материала стенки в каждый момент выполняется условие

$$\Phi_0 = \pi r_1^2 B_i = \mathrm{const}\,, \tag{10.1}$$

где B_i - индукция в полости. При сжатии индукция растет: $B_i = \Phi_0 / \pi r_1^2$. Одновременно растет плотность энергии магнитного поля

$$\frac{B_i^2}{2\mu_0} = \frac{\Phi_0^2}{2\pi^2 \mu_0 r_1^4}\,,$$

полная энергия магнитного поля (на единицу длины)

$$W'_M = \frac{\Phi_0^2}{2\pi\mu_0 r_1^4} \tag{10.2}$$

и магнитное давление $P_M = B_i^2 / 2\mu_0$, тормозящее проводник. Если на оболочку снаружи не действуют силы (она движется по инерции), а материал стенки можно уподобить несжимаемой жидкости, то в некоторый момент времени t_M вся энергия системы будет передана магнитному полю, и произойдет остановка оболочки. В этот момент индукция достигает своего максимального значения B_M. Далее начнется рост радиуса под действием электромагнитных сил. Минимальный внутренний радиус оболочки (радиус остановки, или радиус обратного хода) r_M связан с B_M и начальной кинетической энергией следующим соотношением, вытекающим из закона сохранения энергии:

$$\frac{\pi r_M{}^2 B_M{}^2}{2\mu_0} = W'_K + \frac{\pi r_1{}^2(0) B_i{}^2(0)}{2\mu_0}, \qquad (10.3)$$

где $B_i(0) = \Phi_0 \big/ \pi r_1{}^2(0)$ - начальное значение индукции. Поскольку $\pi r_M{}^2 B_M = \pi r_i{}^2(0) B_i(0)$, то из формулы (10.3) следует выражение для амплитуды индукции

$$B_M = \frac{2\mu_0 W'_K}{\Phi} + B_i(0) = \frac{2\mu_0 W'_K}{\pi r_i{}^2(0) B_i(0)} + B_i(0). \qquad (10.4)$$

Далее можно найти r_M:

$$r_M = \sqrt{\frac{\Phi_0}{\pi B_M}}. \qquad (10.5)$$

Обычно $B_M >> B_i(0)$, а $r_M << r_1(0)$.

Из приведенных соотношений видно, что в рамках рассмотренной идеальной схемы магнитной кумуляции амплитуда индукции тем больше, чем слабее начальное поле. В качестве примера рассчитаем начальную индукцию и энергию, необходимые для получения поля с индукцией $B_M = 10^3$ Т в цилиндрической области с радиусом $r_M = 10^{-2}$ м. Примем, что начальный радиус $r_1(0)$ лайнера составляет 10^{-1} м, полная энергия системы (на единицу длины) есть $W'_K \approx \pi r_M{}^2 B_M{}^2 \big/ 2\mu_0$ =2,5·10^8 Дж/м, начальная индукция $B_i(0) = B_M \left[r_M / r_i(0) \right]^2$ =10 Т. Начальная энергия магнитного поля в этом примере есть $\pi r_i{}^2(0) B_i{}^2(0) \big/ 2\mu_0$ =2,5·10^6 Дж/м, что много меньше полной энергии. Данный пример показывает, что энергетические масштабы установок могут быть очень велики. Это приводит к необходимости использовать взрывчатые вещества. Они обладают большой плотностью запасаемой энергии (масштаба 4-6 МДж/кг) [14], но требуют создания специальных камер для экспериментов, либо проведения опытов на полигоне. Вместе с тем при уменьшении радиуса обратного хода на порядок (r_M =10^-3 м) W'_K уменьшается до значений 25 кДж/см, легко достижимых в лабораторных условиях при использовании емкостных или индуктивных накопителей.

Для осуществления магнитной кумуляции необходимо ускорить проводник и создать начальное магнитное поле. На рис. 10.2 представлена схема экспериментальной установки, используемой при МК. Для создания начального поля чаще всего применяется внешняя катушка, ток в которой нарастает за время t_1, которое много больше, чем постоянная времени контура оболочки в начальном состоянии

$$\tau = \frac{L'}{R'} = \frac{\mu_0 r_1(0) h}{2\rho_0},$$

где $L' = \mu_0 \pi r_1{}^2(0)$ - индуктивность, а $R' = 2\pi r_1(0)\rho_0 / h$ - активное сопротивление этого контура (на единицу длины), ρ_0 - начальное значение удельного сопротивления материала стенки цилиндра, h - ее начальная толщина ($h << r_1(0)$). Если $t_1 >> \tau$, то ток, индуцированный в стенке, мал, и поле практически без затухания проникает в полость. В некоторых опытах использовались оболочки, в которых условие $t_1 >> \tau$ не выполнено, поэтому для создания начального поля создавался разрез в стенке, края которого замыкались в процессе сжатия.

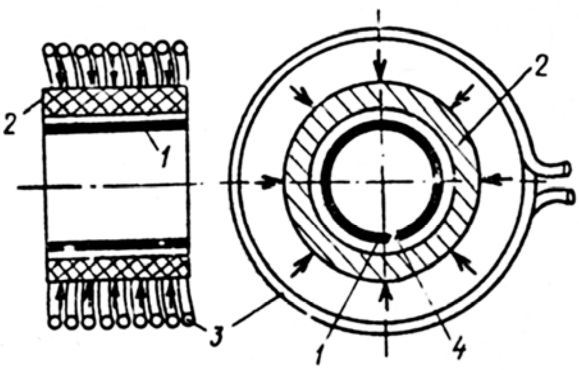


Рис. 10.2. Схема эксперимента по магнитной кумуляции с использованием энергии химического взрыва: ***1*** - ускоряемая оболочка; ***2*** - заряд взрывчатого вещества; ***3*** - соленоид, создающий начальное поле; ***4*** - разрез в оболочке (при условии $t_1 >> \tau$ используется сплошная оболочка). Стрелками условно показана система инициирования взрыва

На рис. 10.3 представлен качественный ход зависимости внутреннего и внешнего радиусов полого цилиндра, ускоряемого взрывом. Скорость сжатия нарастает на пути 1-2 см до значения около 5 км/с, соответствующего скорости детонации взрывчатого вещества. В стадии ускорения важно сохранить симметрию оболочки,

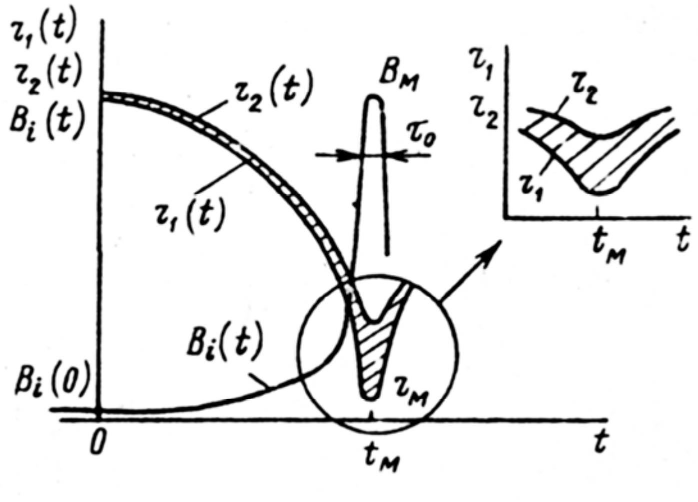


Рис. 10.3. Качественный ход зависимости внешнего, внутреннего радиусов и индукции при магнитной кумуляции

что обеспечивается высокой однородностью заряда и одновременным подрывом его во многих точках на внешней поверхности цилиндра. КПД ускорения обычно не превышает 25 % [14]. При быстром сжатии прочностные свойства материала оболочки не играют существенной роли, она ведет себя как жидкость. Толщина стенки при уменьшении радиуса растет.

Обычно время нарастания начального поля составляет сотни микросекунд, а время сжатия - порядка 10^{-5} с. Это время должно быть много меньше τ, чтобы поток в полости сохранился неизменным. В реальных условиях имеют место потери потока. Уменьшение потока ведет к росту расчетного значения амплитуды индукции B_M и уменьшению радиуса обратного хода. Последнее крайне нежелательно, поэтому необходимо обеспечить условия сохранения потока. Наиболее существенны потери потока в последней стадии процесса, когда поле велико, и скорость его диффузии возрастает из-за нагрева поверхностного слоя проводника. Роль диффузии поля как фактора, влияющего на величину индукции в последней стадии магнитной кумуляции, будет рассмотрена ниже.

В момент остановки внутренней границы оболочки, в отличие от рассмотренной выше идеальной модели, даже при отсутствии диффузии поля в проводник не вся кинетическая энергия будет передана полю, а лишь энергия той части стенки, которая успевает остановиться к моменту максимума индукции. Только в том случае, когда материал оболочки ведет себя как несжимаемая жидкость и скорость распространения возмущения в ней неограниченно велика, произойдет мгновенная остановка всего проводника и полная передача энергии магнитному полю. Сжимаемость среды есть основной фактор, ограничивающий амплитуду индукции при МК, и его роль также будет далее рассмотрена.

Необходимым условием получения поля, близкого к расчётному, является сохранение симметрии при сжатии цилиндра. Потеря устойчивости оболочкой является основной причиной, нарушающей воспроизводимость экспериментов по получению сверхсильного магнитного поля методом МК. Далее мы остановимся на причинах потери устойчивости и мерах борьбы с этим явлением.

Рассмотрим некоторые особенности экспериментов по магнитодинамической кумуляции (МДК). Эти особенности проявляются в основном в начальной стадии процесса - стадии ускорения проводника электромагнитными силами. Финальные стадии процессов МК и МДК мало отличаются друг от друга.

Существуют две схемы ускорения проводящего цилиндра электромагнитными силами, аналогичные зет- и тэта-пинчам. Эти схемы (рис. 7.17) в основных чертах те же, что находят применение в технологии и описаны в главе 7. Схема зет-пинча обладает большей эффективностью сжатия, но в ней требуется обеспечить хороший контакт ускоряемого цилиндра с электродами. Остановимся несколько подробнее на схеме тэта-пинча. Поскольку время сжатия обычно меньше, чем τ, в процессе ускорения оболочки внешнее поле не успевает полностью проникнуть в полость, и индукция снаружи оболочки в начале сжатия больше, чем внутри. Разность магнитных давлений $\left(B_e^2 - B_i^2\right)/2\mu_0$ создает силу, ускоряющую проводник. Часть потока, успевающая проникнуть в полость за время ускорения, складывается с начальным потоком и захватывается сжимающимся контуром. Возможен эксперимент и без начального потока, когда захватывается только поток, проникающий через стенку в процессе разгона оболочки. В последнем случае, однако, теряется гибкость системы, возможность менять радиус обратного хода и амплитуду индукции.

В начальной стадии индукционного ускорения проводящего тонкостенного цилиндра при магнитодинамической кумуляции ток в стенке противоположен току соленоида. В момент, когда $B_e = B_i$, ток в стенке переходит через нуль, а в заключительной стадии процесса, когда $B_e > B_i$, оба тока совпадают по знаку (рис. 10.4).

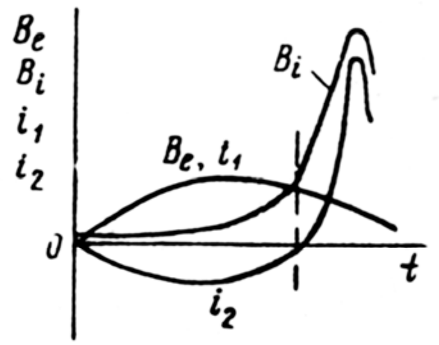


Рис. 10.4. Качественный ход зависимости индукции внешнего поля B_e, индукции на оси B_i, токов в соленоиде i_1 и в оболочке i_2 при МДК в схеме тэта-пинча

10.2. Оценка длительности импульса магнитного поля при магнитной кумуляции

Для ряда приложений, в частности, для целей удержания плотной плазмы, важно получить не только требуемую амплитуду индукции, но и обеспечить необходимую длительность существования поля на заданном уровне. Расчет формы импульса индукции можно провести в приближении идеально проводящей оболочки, считая ее материал несжимаемой идеально проводящей жидкостью. Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \gamma u_r\right) = 0 \tag{10.7}$$

для несжимаемой жидкости $\left(\gamma = \gamma_0 = \text{const}\right)$ следует равенство

$$r u_r = r_1 \dot{r}_1 = \text{const}\ , \tag{10.8}$$

где $\dot{r}_1 = dr_1 / dt$. Отсюда можно получить следующее выражение для кинетической энергии движущегося проводника:

$$W' = \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{2} \gamma_0 u_r^{\,2} \right) 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} \gamma_0 \left(r_1 r_1^{\,2} \right) \ln \left(1 + \frac{S_0}{\pi r_1^{\,2}} \right), \qquad (10.9)$$

где $S_0 = \pi \left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2} \right)$ - площадь поперечного сечения проводника. В каждый момент времени сумма кинетической энергии и энергии магнитного поля есть величина постоянная, равная энергии поля в момент максимума индукции: $W_K' + W_M' = W_M \left(t_M \right)$, или

$$\frac{\pi}{2} \gamma_0 \left(r_1 \dot{r}_1 \right)^2 \ln \left(1 + \frac{S_0}{\pi r_1^{\,2}} \right) + \frac{\pi r_1^{\,2} B_i^{\,2}}{2\mu_0} = \frac{\pi r_M^{\,2} B_M^{\,2}}{2\mu_0}. \qquad (10.10)$$

Исключая B_i с помощью равенства $B_i = B_M \left(r_M / r_1 \right)$, приходим к уравнению для внутреннего радиуса оболочки

$$\left(r_1 \dot{r}_1 \right)^2 \ln \left(1 + \frac{S_0}{\pi r_1^{\,2}} \right) = \frac{r_M^{\,2} B_M^{\,2}}{\mu_0 \gamma_0} \left(1 - \frac{r_M^{\,2}}{r_1^{\,2}} \right). \qquad (10.11)$$

Будем искать решение этого уравнения, описывающее изменение радиуса вблизи точки минимума $r_1 \approx r_M$. Для приближенных расчетов можно в аргументе логарифма заменить r_1 на r_M. Сравнение с численным расчетом показывает, что возникающая при этом погрешность мала. Длительность импульса индукции будем характеризовать отрезком времени τ_0, в течение которого индукция изменяется в пределах $\left(1/\sqrt{2} \right) < B_i / B_M < 1$, что соответствует изменению плотности энергии от $(1/2) B_M^{\,2} / 2\mu_0$ до $B_M^{\,2} / 2\mu_0$ и внутреннего радиуса от $2^{1/4} r_M$ до r_M. Разделяя переменные в уравнении (10.11), приходим к уравнению

$$\int_{r_M}^{2^{1/4} r_M} \frac{r_1 dr_1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{r_M}{r_1} \right)^2}} \approx \frac{r_M B_M \tau_0}{2 \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \ln \left(1 + \dfrac{S_0}{\pi r_M^{\,2}} \right)}}. \qquad (10.12)$$

После подстановки $r_1/r_M = x$ получаем

$$\int_1^{2^{1/4}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}} = 0{,}68 \approx \frac{r_M B_M \tau_0}{2\sqrt{\mu_0 \gamma_0 \ln\left(1+\dfrac{S_0}{\pi r_M^2}\right)}}.$$

Отсюда находим

$$\tau_0 \approx 1{,}36 \frac{r_M}{B_M} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \ln\left(1+\frac{S_0}{\pi r_M^2}\right)}. \qquad (10.13)$$

Численный множитель в этом выражении соответствует выбранному интервалу изменения индукции. Независимо от этого выбора τ_0 по порядку величины есть отношение r_M к альфвеновской скорости $V_A(t_M) = B_M(\mu_0\gamma_0)^{-1/2}$. Ускорение оболочки имеет наибольшее значение в момент ее остановки

$$\left.\frac{d^2 r_1}{dt^2}\right|_{r_1 = r_M} \approx \frac{B_M^2}{\mu_0 \gamma_0 r_M \ln\left(1+\dfrac{S_0}{\pi r_M^2}\right)}. \qquad (10.14)$$

В качестве примера использования полученного выражения найдем параметры устройства, предназначенного для удержания плотной термоядерной плазмы в течение времени, соответствующего параметру $n\tau_0 = 10^{20}$ м$^{-3}$с при амплитуде индукции удерживающего магнитного поля 300 Т. Если принять, что средние энергии ионов и электронов в плазме составляют 10 кэВ и газокинетическое давление равно магнитному, то полю с индукцией 300 Т соответствует плазма с концентрацией $n = 10^{25}$ м$^{-3}$, отсюда $\tau_0 = 10^{-5}$ с. Примем, что $\ln\left(1 + S_0/\pi r_M^2\right) = \ln 10 = 2{,}3$. Тогда по формуле (10.13) находим

$r_M = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ м. Энергия магнитного поля в момент максимального сжатия составляет $W'_M \approx 2{,}2 \cdot 10^7$ Дж/м.

10.3. Влияние диффузии поля на амплитуду индукции при магнитной кумуляции

Проникновение магнитного поля в стенку оболочки на заключительной стадии сжатия потока приводит к смещению эффективной границы поле-проводник. Координатой этой границы целесообразно считать такой радиус r_{eff}, что поток через окружность с этим радиусом есть Φ_0. Фактически поле существует в цилиндрической полости с радиусом r_1, где оно однородно, и в проводнике, где оно затухает. Отрезок $\Delta_1 = r_{eff} - r_1$ есть эффективная глубина проникновения потока.

Рассмотрим сначала случай, когда поверхностный эффект выражен резко. В этом случае выполняется условие $\Delta_1 << r_M$, или

$$\Delta_1 \approx a_0 \frac{B_M}{B_0} \sqrt{\frac{\rho_0 \tau_0}{2\mu_0}} << r_M , \tag{10.15}$$

где $\tau_0/2$ - характерное время нарастания индукции до максимума (см. § 10.2), a_0 - число порядка единицы (см. главу 3). В этом случае можно в первом приближении считать, что материал лайнера имеет идеальную проводимость, но его эффективный внутренний радиус есть $r_{ef} = r_1 + \Delta_1$ (рис. 10.5). Можно условно считать, что лайнер имеет на внутренней поверхности с радиусом r_1 прослойку толщиной Δ_1, «прозрачную» для поля. В рамках такой модели можно ожидать, что соотношения, описывающие идеальную магнитную кумуляцию (см. § 10.1), остаются в силе, лишь кинетическая энергия W'_K должна быть уменьшена, так как энергия, накопленная в слое толщиной Δ_1, не передается полю. Поскольку толщина слоя мала по сравнению с толщиной стенки, а изменение W'_K незначительно, амплитуда индукции близка к расчетной. Расчетный радиус обратного хода теперь есть радиус границы поле-проводник, следовательно, истинная граница оболочки есть $r_M - \Delta_1$. Высказанные соображения подтверждаются расчетами: при резко выраженном поверхностном эффекте имеет место дополнительное сжатие оболочки по радиусу на величину Δ_1. Это приводит к компенсации сдвига границы поле-проводник, благодаря чему нет существенного проигрыша в амплитуде индукции.

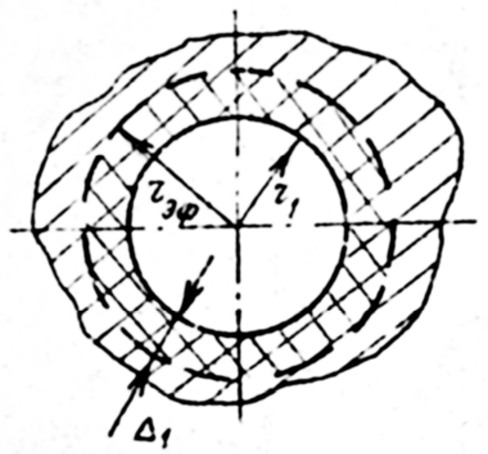


Рис. 10.5. К оценке влияния диффузии поля на амплитуду индукции при относительно малой глубине проникновения ($\Delta_1 << r_{эф}$)

Иная картина имеет место при условии $\Delta_1 > r_M$. В этом случае возможно полное захлопывание оболочки, поскольку область поверхностного слоя «прозрачна» для поля и слабо тормозится. При полном захлопывании амплитуда индукции остается конечной. Ее можно оценить, приняв, что поток Φ_0 пронизывает окружность радиуса Δ_1. В качестве характерного времени нарастания индукции естественно принять время заполнения материалом оболочки полости с радиусом Δ_1. Это время порядка Δ_1/u_0, где u_0 - скорость внутренней границы, которую при оценках будем считать постоянной. Тогда с точностью до порядка величины справедливо следующее равенство, где отброшены численные сомножители и вместо расчетной индукции B_M введена реально получаемая амплитуда индукции B_m:

$$B_m \approx \frac{\Phi_0}{\pi \Delta_1^2}. \qquad (10.16)$$

В формуле (10.15) следует принять $\tau_0 \approx \Delta_1 / u_0$ и заменить B_M на B_m. После этого выражение для эффективной толщины скин-слоя принимает вид $\Delta_1 \approx (B_m/B_0)(\rho_0\Delta_1/\mu_0 u_0)^{1/2}$, или $\Delta_1 \approx (B_m/B_0)^2(\rho_0/\mu_0 u_0)$; кроме того, используем равенство $\Phi_0 = \pi r_1^2(0)B_i(0)$. Далее, после подстановки выражения для Δ_1 в (10.16) и простых преобразований получаем:

$$B_m \approx B_0^{4/5} B_i^{1/5}(0)\left(\mu_0 v_0 r_1(0)/\rho_0\right)^{2/5}. \qquad (10.17)$$

Численный расчет дает близкий результат: он отличается лишь дополнительным множителем 1,1 [14]. Введем в окончательное выражение магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_M = \mu_0 u_0\, r_1(0)/\rho_0$. В итоге получаем оценку для индукции в полностью сжатом лайнере:

$$B_m = 1.1\mathrm{Re}_M^{2/5} B_0^{4/5} B_i(0)^{1/5}. \qquad (10.18)$$

Численные расчеты для оболочки из несжимаемого материала показывают, что максимум индукции достигается не при полном захлопывании оболочки, а несколько раньше, когда внутренний радиус принимает значение [14]

$$r_m \approx 0.25 r_1(0) B_i(0)^{2/5} B_0^{-2/5}\, \mathrm{Re}_M^{-1/5} \qquad (10.19)$$

При этом отношение потока в полости сечением $\pi r_m^{\ 2}$ к начальному (коэффициент компрессии) есть

$$\lambda = \frac{B_m r_m^{\ 2}}{B_i(0) r_1^{\ 2}(0)} \approx 0{,}07 \ .$$

Приведенные оценки роли диффузии поля показывают, что в отличие от модели идеальной магнитной кумуляции, амплитуда индукции не растет неограниченно при $B_i(0) \to 0$, а стремится к нулю как $B_i^{1/5}(0)$. В качестве примера оценим амплитуду индукции, создаваемой в медной оболочке со следующими начальными данными: радиус $r_1(0)$=3 · 10^{-2} м, толщина стенки h_0=2,5 мм, скорость u_0=2 · 10^3 м/с, $B_i(0)$=5 Т. Магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_M = 3{,}8 \cdot 10^3$. Амплитуда индукции, согласно (10.18), B_m=720 Т, если B_0=38 Т. Начальная кинетическая энергия оболочки $W_K' = 2\pi\, r_1(0) h \gamma_0 u_0^{\ 2} = 1{,}7 \cdot 10^7$ Дж/м, начальный поток $\Phi_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ Вб; при идеальной кумуляции B_M=1500 Т. В этом примере индукция снижается почти вдвое за счет диффузии поля в проводник.

10.4. Ограничения амплитуды индукции, обусловленные сжимаемостью среды. Результаты численного анализа процесса магнитной кумуляции

Роль сжимаемости как фактора, ограничивающего амплитуду индукции при магнитной кумуляции, легче всего рассмотреть на примере сжатия потока в зазоре шириной $2g$ между двумя проводниками с плоской границей (рис. 10.6) (модель плоского поршня [14]). По мере сжатия зазора индукция в нем растет, одновременно увеличивается магнитное давление, и в обоих проводниках формируется ударная волна.

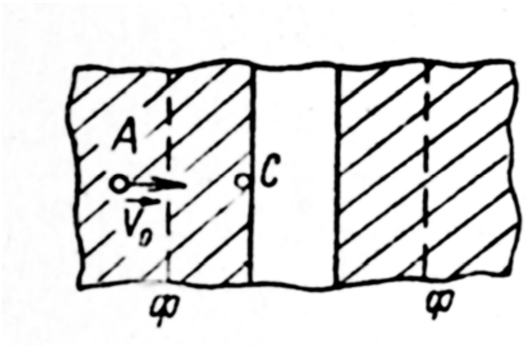


Рис. 10.6. Сжатие потока в зазоре между проводниками с плоской границей. Ф - плоскость фронта ударной волны

На наблюдателя, связанного с одним из проводников, например, с левым (рис. 10.6) и находящегося перед фронтом ударной волны в точке A, граница «набегает» со скоростью течения за фронтом ударной волны — $-u_f$. В лабораторной системе координат скорость точки C есть $u_C = V_0 - u_f$. Амплитуда индукции достигается в момент остановки границы, когда $u_C = 0$. В этот момент $V_0 = u_f$. Скорость поршня u_f можно связать с магнитным давлением с помощью уравнения (9.2). При этом возникает неточность, связанная с тем, что указанное соотношение описывает стационарную ударную волну. В условиях, когда магнитное давление нарастает, процесс является нестационарным, однако сравнение с результатами численных расчетов показывает, что применение соотношения Ренкина-Гюгонио не вносит большой погрешности в расчет амплитуды индукции. Она определяется из уравнения

$$B_\Pi = V_0 \sqrt{2\mu_0 \gamma_0 \left(\lambda + \frac{C_1}{V_0} \right)} \qquad (10.20)$$

где C_1 близко к скорости звука, λ - численный параметр (для меди C_1=4 · 10^3 м/с, λ =1,5). Далее сохраним обозначение B_Π для индукции, определяемой по формуле (10.20). Если воспользоваться аппроксимацией вида $V_0 = a_0 B_П{}^{3/2}$, то индукцию $B_П$ можно связать со скоростью стенки следующим выражением:

$$B_П = \left(\frac{V_0}{a_0}\right)^{2/3}. \qquad (10.21)$$

Как было отмечено в § 5.3, эта аппроксимация, а значит и формула (10.21), справедливы для меди (a_0=0,15) вплоть до полей с индукцией около 10^3 Т. Пусть V_0=2 · 10^3 м/с, тогда B_m=560 Т. В формуле (10.20) не фигурирует толщина проводников, сжимающих поток. При неограниченно большой толщине проводников, т.е. при сколь угодно большой кинетической энергии сталкивающихся тел, индукция, а значит и энергия, переданная полю, остаются конечными и зависят лишь от скорости тел. В энергию поля переходит лишь кинетическая энергия слоя, который успевает потерять скорость к моменту максимума индукции. Толщину этого слоя d_0 можно найти из равенства

$$\frac{B_П{}^2 g_П}{2\mu_0} = \frac{\gamma_0 V_0{}^2 d_0}{2}, \qquad (10.22)$$

где слева фигурирует энергия магнитного поля и значение полуширины зазора в момент максимума индукции, справа - кинетическая энергия слоя толщиной d_0. Можно сравнить амплитуду индукции в рассмотренном примере с ее значением в случае, когда материал стенки является несжимаемой средой, и кинетическая энергия полностью передается полю при остановке стенки. Если толщина каждого из проводников есть h, то для проводников из несжимаемого материала справедливо равенство

$$\frac{B_M{}^2 g_M}{2\mu_0} = \frac{\gamma_0 V_0{}^2 h}{2}, \qquad (10.22)$$

где B_M и g_M - расчетные значения индукции и половины зазора в момент остановки границы в случае несжимаемой среды. Поскольку при идеальной проводимости поток в зазоре сохраняется, то имеет место условие $B_{\Pi} g_{\Pi} = B_M g_M$. После почленного деления (10.21) на (10.22) с учетом указанного условия, получаем

$$\frac{B_{\Pi}}{B_M} = \frac{d_0}{h}. \qquad (10.23)$$

Это равенство справедливо, пока $d_0 < h$. Если d_0 становится равно или меньше h, то в рамках рассмотренной модели амплитуда индукции становится равной расчетному значению B_M. Более точный численный расчет позволяет найти амплитуду индукции B_m и сравнить ее с оценочными значениями. Зависимость $B_m / B_{\Pi} = f(B_M / B_{\Pi})$ представлена на рис. 10.7.

При идеальной кумуляции $B_m = B_M$ (прямая 1). Это гипотетический случай, когда материал ведет себя как несжимаемая жидкость, кинетическая энергия полностью переходит в энергию поля в момент остановки лайнера и применима формула (10.22). При сжатии потока между плоскими листами поле, рассчитанное с учетом сжимаемости среды, близко к расчётному, определяемому по формуле (10.22), если амплитуда индукции меньше B_{Π}: Именно в этом случае проводники передают энергию полю и ведут себя как несжимаемая жидкость. При $B_M > B_{\Pi}$ расчётное значение не достигается, амплитуда индукции определяется сжимаемостью и равна B_{Π} (кривая 3). Численный расчет дает результат, близкий к изложенному (см. рис. 10.7). Это подтверждает применимость соотношения (10.20), несмотря на нестационарность процесса.

В случае цилиндра зависимость $B_m / B_{\Pi} = f(B_M / B_{\Pi})$ несколько усложняется из-за того, что скорость внутренних слоев полого цилиндрического проводника растет при сжатии. Вследствие этого индукция растет и при условии $B_M > B_{\Pi}$, однако этот рост незначителен. Численные расчеты показывают, что в области, где $B_M > B_П$, возможна следующая аппроксимация:

$$\frac{B_m}{B_П} \approx \left(\frac{B_M}{B_П}\right)^{1/3}. \tag{10.24}$$

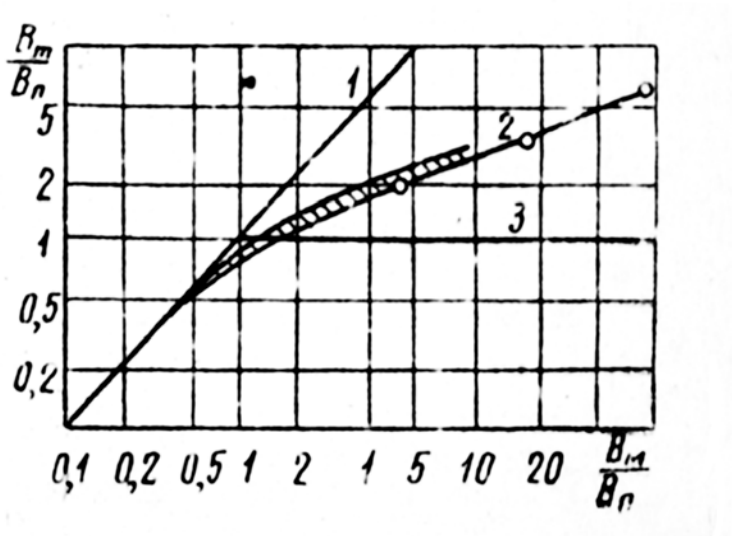


Рис. 10.7. Зависимости, характеризующие роль сжимаемости при магнитной кумуляции (результаты численных расчётов Сомона, Н.Б. Волкова и др.).
1 - идеальная кумуляция ($B_m = B_M$); ***2*** - сжимаемая цилиндрическая оболочка (часть расчётных значений отмечена точками, остальные находятся в заштрихованной области);
3 - плоский случай

Из сказанного следует, что сжимаемость приводит к значительному ограничению в амплитуде индукции. Согласно (10.24) имеем:

$$B_m \approx {B_П}^{2/3}{B_M}^{1/3},$$

или

$$B_m = \left[2\mu_0\gamma_0V_0\left(C_1 + \lambda V_0\right)\right]^{1/3}\left[\frac{2\mu_0 h_0\gamma_0{V_0}^2}{r_1(0)B_i(0)}\right]^{1/3}, \tag{10.25}$$

где h_0 - начальная толщина, $r_1(0)$ - начальный радиус оболочки. В пределе $\lambda V_0 >> C$ (или $B_П >> \overline{B}$) $B_m = \text{const}\cdot\gamma_0^{2/3} V_0^{4/3} = \text{const}\cdot\left(W'_K\right)^{1/3}$.

В рассмотренных до сих пор моделях процесса магнитной кумуляции учитывались ограничения, накладываемые на амплитуду индукции каким-либо одним из процессов, тогда как в реальных условиях они выступают совместно. Анализ совместного действия всех поддающихся учету факторов и их влияния на амплитуду индукции возможен численными методами. Большая серия численных расчетов была выполнена в работе [34]. В этих расчетах использованы трехчленное уравнение состояния для металлов и плазменная модель проводимости. В тех опытах, где оболочка не теряла устойчивости, и расчетный радиус обратного хода был больше радиуса зонда, результаты численного и натурного экспериментов были близки.

Расчеты показали, что у оболочек из хорошо проводящих материалов роль диффузии поля и электрического взрыва несущественна во всем исследованном диапазоне полей. При этом в полях с индукцией до 400 Т процесс близок к идеальной кумуляции, а в полях с индукцией, близкой к 10^3 Т и выше определяющим фактором была сжимаемость материала. У оболочек из плохо проводящих материалов (нержавеющая сталь) диффузия поля и электрический взрыв оказывали существенное влияние на процесс сжатия потока в полях с индукцией, меньшей 10^3 Т. В более сильном поле и у этих оболочек роль сжимаемости становилась определяющей.

10.5. Нарушение устойчивости оболочки при сжатии потока

До сих пор при описании магнитной кумуляции мы считали, что в процессе сжатия оболочка сохраняет форму цилиндра. Нарушение симметрии при сжатии может привести к снижению индукции по сравнению с её расчетным значением вследствие захвата потока в складки, образующиеся на внутренней поверхности оболочки. Выступы на внутренней поверхности проводника пересекают полость, в точках их касания возникает местный перегрев. Это приводит к росту сопротивления образующихся замкнутых контуров, быстрому затуханию потока в них и потерям энергии. Признаком развивающейся неустойчивости является разрушение измерительного зонда задолго до расчетного максимума индукции и плохая воспроизводимость результатов.

Оптические и рентгеновские измерения, а также изучение отпечатков внутренней поверхности оболочки на твердых цилиндрических матрицах показали, что неустойчивость в некоторых случаях может возникнуть в начальной стадии сжатия, когда поле является относительно слабым, а материал еще сохраняет прочностные свойства. Известно, что в тонкостенном цилиндре из упругого материала, стенка которого внезапно нагружается извне давлением P, возникают возмущения с длиной волны

$$l = \frac{2\pi r_1(0)}{n}, \tag{10.26}$$

где n - число продольных складок (гофров) на поверхности цилиндра. Согласно теории М.А. Лаврентьева и И.Ю. Ишлинского, наибольшей скоростью роста обладают возмущения с числом складок

$$n = n_M = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{P r_1^3(0)}{E h_0^3} \cdot 12\left(1 - \nu^2\right) + 1\right]}, \tag{10.27}$$

где E - модуль упругости, $\nu \approx 0{,}32$ - коэффициент Пуассона, h_0 - толщина стенки. В экспериментах, выполненных с тонкостенными цилиндрами из меди, латуни и алюминиевых сплавов ($h_0/r_1(0) = 0{,}025 - 0{,}1$) было показано, что при относительно небольшой скорости изменения радиуса (менее 500-600 м/с) начальное число гофров по порядку величины близко к n_M, а в процессе сжатия число складок уменьшается так, что длина волны возмущения практически не меняется при уменьшении радиуса примерно до $0{,}2r_1(0)$. В этих режимах в лайнере развиваются большие пластические деформации, которые нельзя описать в рамках модели малых возмущений цилиндра из упругого материала. Опыты показали, что при относительно медленном сжатии не происходит утолщения стенки цилиндра, а идет образование складок, что приводит к уменьшению среднего радиуса: стенка цилиндра складывается «в гармошку».

При быстром сжатии тонкостенных цилиндров можно избежать образования складок, поскольку время, необходимое для их развития $t_s \approx l/C_s$ (C_s - скорость звука), составляет несколько микросекунд. Это соизмеримо со временем разгона оболочки и достижения материалом проводника такого состояния, когда механические напряжения в нем становятся много выше предела текучести, так что среда будет приближаться по своим свойствам к жидкости. В опытах по получению мегагауссных полей скорость стенки проводника достигает нескольких километров в секунду, при этом в отсутствие неустойчивости при сжатии цилиндра растет толщина его стенки. Потеря симметрии в стадии ускорения проводника возможна, если толщина стенки, плотность материала стенки или внешние силы по азимуту непостоянны. Опыты по магнитодинамической кумуляции показывают, что весьма незначительные нарушения однородности стенки или внешнего поля приводят к нарушению симметрии. В экспериментах по магнитно-динамической кумуляции было показано, что воспроизводимое получение поля с индукцией до 340 Т при сжатии оболочки по радиусу в 20 раз можно было обеспечить лишь тогда, когда в цилиндрах диаметром около 40 мм со стенкой 0,4 мм неоднородность толщины не превышала 5 %. В этих опытах было показано, что незначительное снижение напряженности магнитного поля в щели одновиткового магнита, использовавшегося для ускорения оболочки, приводило к значительной асимметрии в последней стадии ее сжатия. Для выравнивания поля использовались прокладки из изолированных полос фольги, которые размещались в зазоре между одновитковым магнитом и оболочкой вблизи щели. Их применение позволяет обеспечить симметрию сжатия. Таким образом, требуется достаточно тщательная подготовка эксперимента, чтобы избежать потери симметрии оболочки в стадии её ускорения.

В заключительной стадии магнитной кумуляции внутренняя поверхность проводника испытывает воздействие магнитного давления, а весь проводник находится в поле объемных сил инерции $f_r = -\gamma\, du_r/dt$, где u_r - скорость элемента среды. Поскольку $u_r < 0$ и по абсолютной величине уменьшается, f_r направлено в сторону поля, и в проводнике возможна раскачка желобковой неустойчивости. Магнитогидродинамическая теория этого процесса позволяет оценить τ_1 - время, по истечении которого амплитуда синусоидального возмущения возрастает в **e** раз. В рамках теории малых возмущений

$$\tau_1 = \left(\frac{2\pi}{l}\frac{du_r}{dt}\right)^{-1/2}, \qquad (10.28)$$

где l - длина волны возмущения. В этой формуле не учтено влияние сил поверхностного натяжения. На внутренней границе оболочки $du_r/dt = d^2 r_1/dt^2$.

Численные расчеты позволяют построить более полную картину развития неустойчивости с учётом, как радиального характера течения, так и нелинейных эффектов. Согласно [14], синусоидальные возмущения по мере роста их амплитуды меняют свою форму: их «горбы» заостряются, а впадины становятся плавными. Теория малых возмущений, хотя и не дает полной картины развития неустойчивости, позволяет выразить τ_1 через характерные параметры импульса магнитного поля, воспользовавшись выражением (10.14) для ускорения внутренней границы оболочки. Для возмущения моды $n = 2\pi\, r_M/l$ получаем

$$\tau_1 \approx \frac{r_M}{\sqrt{n} B_M} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \ln\left(1 + \frac{S_0}{\pi r_M{}^2}\right)} = \frac{\theta \tau_0}{\sqrt{n}}, \qquad (10.29)$$

где θ - численный множитель, близкий к единице. Поскольку амплитуда возмущения растет как $\Delta r_n \exp(t/\tau_1)$, где Δr_n - начальное возмущение данной моды, то при условии $t >> \tau_1$ эта амплитуда, даже при весьма малом начальном значении, может стать близкой к r_M. Однако при магнитной кумуляции время удержания поля и время развития неустойчивости, согласно формуле (10.29), близки, если число n порядка единицы. По этой причине роль начальных возмущений оболочки существенна: достаточно малые начальные возмущения не успевают развиваться за время, близкое к τ_0.

Приведённые оценки ещё раз подтверждают важность симметрии сжатия оболочки в стадии её ускорения, поскольку начальные возмущения, о которых здесь шла речь, формируются в этой стадии.

Существует принципиальная возможность уменьшить по абсолютной величине или даже изменить знак объемной силы, действующей на проводник в финальной стадии магнитной кумуляции. Для этого следует создать вращение оболочки вокруг оси. Центробежная сила создает стабилизирующее действие и может предотвратить развитие желобковых возмущений.

Можно уменьшить влияние начальной неоднородности и замедлить развитие неустойчивости, если внутри сжимающейся оболочки соосно с ней разместить цилиндры с продольными разрезами или, как было сделано в работе А.И. Павловского и его сотрудников [35], установить многовитковые разомкнутые соленоиды.

Оболочка при соударении с соосными телами закорачивает соответствующие контуры и вовлекает их в движение. При каждом таком столкновении восстанавливается симметрия внутренней границы движущегося тела и тем самым ликвидируются развившиеся к моменту столкновения возмущения. В работе [8] таким способом удалось воспроизводимо получить поле с рекордной индукцией 2800 Т. Осциллограмма индукции, полученной в этих экспериментах, представлена на рис. 10.9.

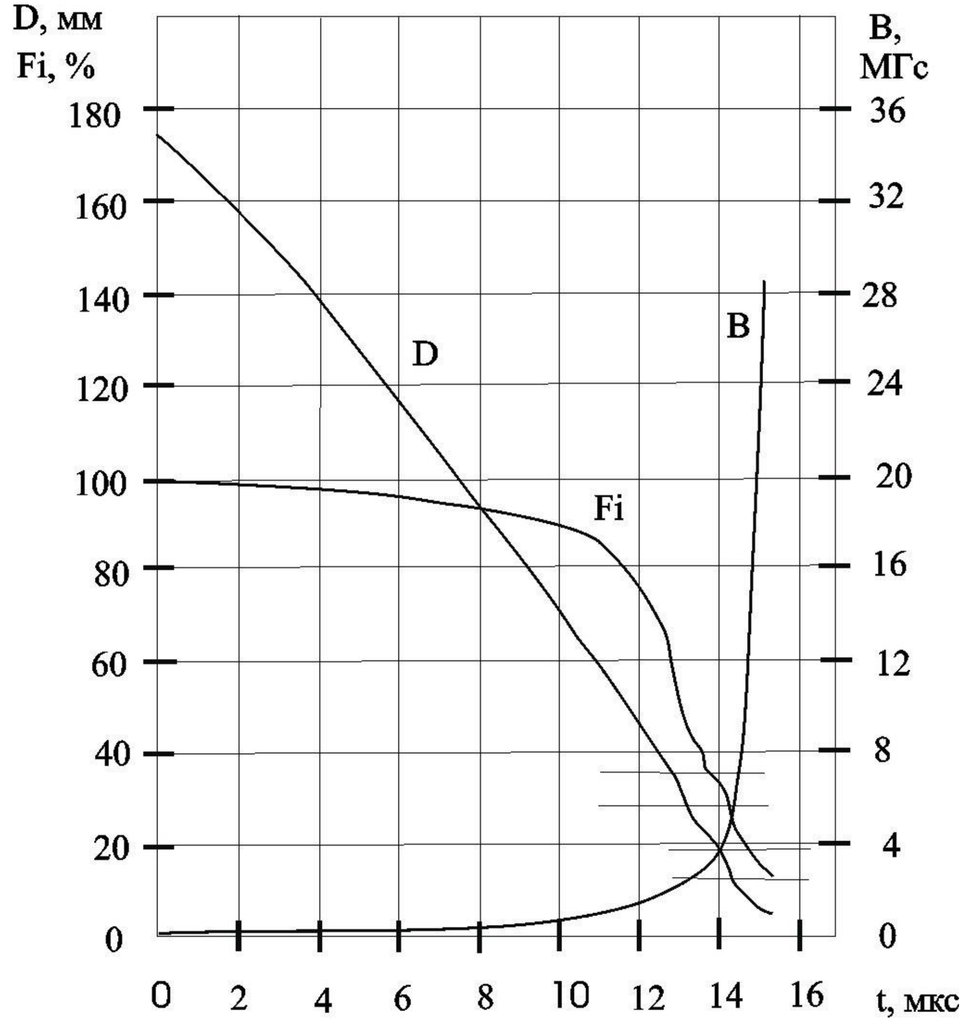


Рис. 10.9. Экспериментальные данные
по сжатию магнитного потока.
D – внутренний диаметр,
Fi – коэффициент сохранения потока,
B - индукция магнитного поля.
По данным [8]

Получение сверхсильных магнитных полей в сжимающихся цилиндрических оболочках не связано с использованием источников тока, способных к быстрой передаче энергии в нагрузку. Сам процесс сжатия оболочки создает «обострение» импульса мощности: вначале, при ускорении оболочки, мощность, вкладываемая в поле, мала, а вблизи максимума индукции она резко возрастает. С точки зрения требований к собственному импедансу и напряжению источника питания магнитная кумуляция предпочтительна перед методом получения сверхсильного магнитного поля, основанного на непосредственном разряде накопителя на соленоид. Однако осуществление магнитной кумуляции требует гораздо более тщательной подготовки эксперимента, чтобы избежать неустойчивости при сжатии лайнера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Капица П.Л. //Proc. Roy. Soc., A105, 691(1924).

2. Капица П.Л. //Proc.Roy.Soc., A115, 658 (1927).

3. Wall T.F. J. //Inst.Elecrt.Engrs., 64, 745 (1926).

4. Furth H.P., Levine M.A., Waniek R.W. //Rev. Sci. Instr., 1957, vol 28, N 11, p. 949.

5. Кривошеев С.И., Титков В.В., Шнеерсон Г.А. //ЖТФ, 1997, т. 67, № 4, с. 32-47.

6. N. Miura. Solid state physics in megagauss fields generated by electromagnetic flux compression and singl-turn coils// Physica B, 201, 1994, pp. 40-48.

7. Lemke R.W., Knudsen M.D., Harjes C.H. et al // Shockless acceleration of flyer plates at multimegabar pressure on the Z-machine. Proc. Of Xth Inter. Conf. on Megagauss Field Generation and Related Topics. Ed. By M. von Oretenberg. Berlin. 2005. P. 403-405.

8. Boyko B.A., Bikov A.I., Dolotenko M.I. et al. //In “Megagauss Field Generation, its Applications to Science and Ultra-high Pulsed-Power technology. Ed. by H J. Schneider-Muntau. World Scientific. 2004. P. 61-66.

9. Страховский Г.М., Кравцов Н.В. //Успехи физ. наук, 1960, т. LXX, с. 693.

10. Паркинсон Д., Малхолл Б. Получение сильных магнитных полей. М.: Атомиздат, 1971.

11. Монтгомери Д. Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971.

12. Карасик В.Р. Физика и техника сильных магнитных полей. М.: Наука, 1964.

13. Лагутин А.С., Ожогин В.И.. Сильные импульсные магнитные поля в физическом эксперименте. М.: Энергоатомиздат, 1988.

14. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.

15. Дашук П.Н., Зайенц С.Л., Комельков В.С. и др. Техника больших импульсных токов и магнитных полей. М.: Атомиздат, 1970.

16. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применения. Под редакцией Ф. Герлаха. //М.: изд. «Мир», 1988.

17. Смирнов С.А., Георгиевский А.В., Юштина В.М. Физика и техника сильных магнитных полей. Сборник рефератов. М.: Атомиздат, 1970.

18. Кривошеев С.И, Шнеерсон Г.А. // Доклад на XII Междунар. конф. по мегагауссным полям. Новосибирск, 2008.

19. Demichev V.F., Shneerson G.A. In “Megagauss technology and Pulse power applications, ed. C.M. Fowler, R.S. Caird and D.J. Ericson. New-York, Plenum Press (1987), p. 49-63.

20. High Magnetc Fields. Science and Technology, In 3 Volumes/ Ed. by F. Herlach and N. Miura. World Scientific. 2003.

21. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Гостехиздат, 1956.

22. Нейман Л.Р., Демирчян К.С., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники, т. 2, «Питер», 2009, с. 431.

23. Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1992.

24. Кузнецов А.А. Журн. техн. физ., 1961, т. 31, с. 650-655.

25. Шнеерсон Г.А., Колтунов О.С., Хозиков В.Ю. // Журн. техн. физ., 2002, т. 72, № 1, с. 110-116.

26. Лонгмайр К.Л. Физика плазмы. М. Атомиздат, 1966.

27. Шнеерсон Г.А. Журнал техн. физики, 1962, т. 32, с. 1153.

28. Shearer J.W. J. Appl. Phys., 1969, V. 40, № 11, P. 4490-4497.

29. Кривошеев С.И., Титков В.В., Шнеерсон Г.А. Журнал. техн. физики. 1997, т. 42, № 4, с. 352-356.

30. В.А. Бурцев, Н.В. Калинин, А.В. Лучинский. Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках. Энергоатомиздат: 1990.

31. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1968

32. Сахаров А.Д., Людаев Р.З. // Доклады АН СССР, 1965, т. 163, с. 65.

33. Caird R.S., Garn W.B., Thompson D.B., Fowler C.M. //Journ. Appl. Phys., 1964, V.35, P.781.

34. Волков Н.Б., Михкельсоо В.Т., Шнеерсон Г.А. // ПМТФ, 1982, № 2, с. 15.

35. Павловский А.И., Колокольчиков И.П., Долотенко М.И., Быков А.И., Таценко О.М., Егоров Н.И. В книге «Сверхсильные магнитные поля. Физика. Техника. Применения». Ред. В.М. Титов, Г.А. Швецов. М.: Наука, 1984, с. 19.

Шнеерсон Герман Абрамович

Основы техники получения сильных и сверхсильных импульсных магнитных полей

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 20.05.2010. Формат 60×84/16 Печать цифровая
Усл. печ. л. 8,75. Уч.-изд. л. 8,75. Тираж 130. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором
в цифровом типографском центре Издательства Политехнического
университета:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел. (812) 540-40-14
Тел./факс: (812) 927-57-76