Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет

С. В. ПОПОВА, И. А. ХОДЫРЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки магистров «Системный анализ и управление»

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2010

УДК
ББК
Т 41

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук, профессор СПбГУ И. Л. Братчиков;
кандидат физ.-мат. наук, доцент СПбГПУ С. С. Ефремова.

Попова С. В., Ходырев И. А. **Математическая логика**: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 217 с.

ISBN

Системно излагаются основы математической логики. Основное внимание уделяется методу резолюций и решению задач возникающих при применении метода в исчисление предикатов. Приводятся графические иллюстрации и примеры. Проводится постоянная систематизация материала в виде схем и упорядоченного изложения основных тезисов представленного материала. Используется методика изложения «от простого к сложному».

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению магистерской программы «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», направления подготовки магистров «Системный анализ и управление». Пособие может быть использовано при обучении по другим направлениям подготовки, а так же при обучении в учреждениях дополнительного профессионального образования.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики»

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© *Попова С. В., Ходырев И. А.* , 2010
© Санкт- Петербургский государственный политехнический университет, 2010

ISBN 978-5-7422-1845-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ДНФ – дизъюнктивная нормальная форма

КНФ – конъюнктивная нормальная форма

МР – «modus ponens»

НОУ – наиболее общий унификатор

ПНФ – предварённая нормальная форма

ССФ – сколемовская стандартная форма

ВВЕДЕНИЕ

В представленном учебном пособии мы постарались отразить классически изучаемые в высших учебных заведениях разделы математической логики. Учебное пособие ориентировано на магистерскую программу. Методологически пособие построено по схеме «от простого к сложному». Первая и вторая главы рекомендованы для самостоятельного изучения. Данные главы являются важными, но материал, изложенный в рамках этих глав, является достаточно простым и доступным для уровня подготовки магистр.

Четвёртая глава посвящена методу резолюций, предложенному в 1963 году Д. А. Робинсоном. Этот метод позволяет проверить является ли формула логики первого или второго порядка общезначимой. Идея метода восходит к Эрбрану, однако именно Робинсон сумел разработать метод пригодный для алгоритмизации. Метод резолюций имеет большое практическое значение в области вопросов искусственного интеллекта.

Изложение метода резолюций требует большого объема сопутствующего материала. Требуется хорошее понимания таких понятий как эрбрановкая интерпретация, эрбрановский универсум, множество основных примеров дизъюнктов. Объемным является изложение алгоритма унификации, а так же доказательство его корректности и полноты. Особенное внимание следует уделить суживающим стратегиям резолютивного вывода.

По мере изучения материала рекомендуется регулярно проводить систематизацию пройдённого, возвращаясь к исходной задаче, показывая, как от неё был совершён переход к текущей решаемой проблеме. Желательно поэтапно систематизировать материал, представив обучающимся общую схему проверки формул на противоречивость. Поочерёдно раскрывая каждый этап этой схемы, следует регулярно пояснять, как и почему происходит передвижение по ней.

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. ЛОГИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Логика зарождается как учение о верных формах рассуждения. Истоки данной науки уходят корнями в античность. Логика развивалась в европейской части и на Востоке. Мы ограничимся рассмотрением только европейской традиции. Среди многочисленных деятелей древней Греции как основателя логики в первую очередь выделяют Аристотеля. Важнейшая заслуга Аристотеля состоит в разработке теории силлогизма и доказательства. Мыслитель выделил ряд форм правильных умозаключений, которые позволяют из истинных посылок (посылка — исходное суждение) получить новое истинное суждение. Умозаключения, использующие выделенные правила, получили название силлогизмов.

Пример 1.1.1. Запишем силлогизм: «Все люди смертны, Сократ является человеком, значит, Сократ смертен»:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Все\_люди\_смертны}\\ \textit{Сократ\_является\_человеком}\end{array}}{\textit{Сократ\_смертен}}$$

Над чертой принято записывать посылки, под чертой вывод.

Силлогизм даёт новое знание на основе установления связей между уже имеющейся информацией. Новое истинное знание может быть получено, только если исходные посылки были истинными, а установленные связи между посылками логичны.

Аристотель делает значимый шаг, заменяет словесные выражения в высказываниях на буквенные выражения, тем самым подчёркивая, что истинность или ложность проведённого умозаключения определяется не смысловым содержанием суждений, из которых выведено заключение, а формой суждений и формой связи между ними.

Любое суждение всегда содержит в себе два элемента: S — имя того объекта, о котором говорится в суждении, и P — признак, присущего (или нет) данному объекту. Например, S — люди, P — быть смертным. Оба элемента можно представить в виде множеств. Первым множеством будет множество людей, вторым множеством будет множество объектов, обладающих свойством смертности.

Для построения силлогизмов выделяют высказывания нескольких видов, называемые суждениями: «все *S* есть *P*», «некоторые *S* есть *P*», «все *S* не есть *P*», «некоторые *S* не есть *P*».

Л. Эйлер проиллюстрировал, как эти суждения могут быть изображены графически, с помощью кругов, символизирующих множества. Используя круги Эйлера можно построить всевозможные силлогизмы и вывести основные законы логики, например такие как:

- объект не может одновременно принадлежать двум не пересекающимся областям, поэтому всегда ложно: A и $\neg A$,
- объект всегда принадлежит, либо множеству A, либо чему-то за пределами A: $\neg A$. Поэтому всегда истинно: A или $\neg A$,
- если объект не принадлежит области за пределами A, то объект принадлежит A, поэтом всегда истинно: $\neg\neg A = A$,
- если все объекты множества A содержатся во множестве B, то множество объектов не принадлежащих A содержит в себе множество объектов не принадлежащих B, поэтому всегда верно утверждение: $(A \subseteq B) = (\neg B \subseteq \neg A)$.

Таким образом, логика (формальная логика), зарождается как изучение форм мысли, их структурных особенностей и законов.

Основы математической логики закладывает Г. Лейбниц. Лейбниц предложил записывать исходные гипотезы с помощью специальных знаков и заменять рассуждения на вычисления. Лейбниц разработал то, что в дальнейшем получило название исчисления высказываний, и было представлено в строго аксиоматизированном виде Г. Фреге. После Лейбница история логики разделяется на традиционную (формальную логику) и математическую.

Особый интерес к математической логике возникает в связи с открытием парадоксов теории множеств, разрабатываемой как основание математики. Один из наиболее известных парадоксов сформулирован Расселом[1]. Для преодоления возникших парадоксов Гильберт предложил использовать аксиоматический метод. С помощью аксиоматического метода все математические рассуждения записываются в виде логических формул, часть из этих формул определяется как аксиомы, другая часть выводится из этих аксиом. Аксиомы должны были стать своего рода ограничителями, позволяющими избежать возникшие парадоксы.

В период XIX и XX веков математическая логика переживает расцвет. Огромнейший вклад в её развитие внесли работы таких авторов как Дж. Буль, Ч. Пирс, Г. Фреге, Дж. Пеано, Б. Рассел, Д. Гильберт, А. Черч, С. Клини, А. Н. Колмогоров, А. А. Марков, Н. А. Шанин и др.

В заключении рассмотрим небольшую иллюстрацию.

Пример 1.1.2. «Если в любой стране существует город являющийся столицей, то найдётся такой город, который будет столицей страны Италия»:

$$\frac{\begin{array}{l} Каждая\_страна\_имеет\_город-столицу \\ Италия\_является\_страной \end{array}}{В\_Италии\_есть\_город\_столица}$$

«Для любого непустого множества существует подмножество несовпадающее с самим множеством, значит, для некоторого конечного непустого множества A существует подмножество, не совпадающее с самим множеством A». Пусть M — любое непустое множество, а $M^{'}$ — его подмножество не совпадающее с M:

[1] Пусть K — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли K само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению K, оно не должно быть элементом множества K. Если нет, то, по определению K, оно должно быть элементом множествам K.

$$\frac{\begin{array}{l} Для\_любого\_M\_существует\_M' \\ A\_является\_M \end{array}}{Для\_A\_существует\_A'}$$

«На новый год фирма F подарила всем своим программистам часы, а значит, найдутся такие часы, которые достались конкретному программисту данной фирмы». Обозначим через F множество всех сотрудников указанной фирмы. Обозначим через s_i некоторого сотрудника, а через t будем обозначать свойство «обладать часами», тогда:

$$\frac{\begin{array}{l} Для\_любого\_s_i\_из\_F\_выполнено\_t \\ s\_входит\_в\_F \end{array}}{Для\_s\_выполнено\_t}$$

Все приведённые выше рассуждения истинны и выстроены согласно одному и тому же правилу формальной логики:

$$\frac{\begin{array}{l} Все\_S\_обладают\_свойством\_P \\ Объект\_I\_принадлежит\_S \end{array}}{I\_обладает\_свойством\_P}$$

Мы видим, что в посылках даны некоторые известные нам факты, из которых выводится прежде неочевидное утверждение. Так, например, знание о том, что некоторые часы принадлежат программисту фирмы F, было получено из знания о том, что каждый программист фирмы F получил в подарок на новый год часы. Фактически, мы не получили никакой новой информации ни о фирме F, ни о часах, ни о программистах этой фирмы. Мы имеющееся уже знание перевели в форму, которую удобнее использовать при рассуждении о часах, а именно: «что найдутся такие часы, которые принадлежат некоторому программисту из фирмы F». Логика позволяет выводить и менее очевидные утверждения, манипулируя с большим числом различных простых утверждений. Пусть, например, задана база знаний, и необходимо проверить, выводится ли некоторое утверждение из информации, хранимой в этой базе знаний. Для того, что бы такая проверка стала возможной необходимо разработать аппарат логического вывода. Для этого необходимо:

- разработать математическую модель представления знаний;
- разработать формальный язык, с помощью которого будут представлены знания;
- создать систему необходимых законов логики;
- проверить корректность логических законов;
- разработать алгоритм проверки выводимости одних предложений из других по заданным законам.

1.2. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В текущем параграфе мы рассмотрим логику высказываний (алгебру логики).

Определение 1.2.1. Высказыванием, называется некоторое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чём-либо. Это утверждение является либо истинным, либо ложным.

Высказывание имеет истинностное значение *Истина* («1»), если оно истинно, и ложное *Ложь* («0»), если оно ложно.

Пример 1.2.1. Выражения, являющиеся высказываниями: «Рим — столица Италии», «В Париже не бывает дождя». Выражения, не являющиеся высказываниями: «решите систему уравнений», «x делит y без остатка», «x — чётное число». Определив в последних выражениях значения x и y, мы получим высказывания.

Определение 1.2.2. Составным называется высказывание, построенное из простых высказываний с использованием связок «и», «или», «не», «тогда и только тогда», «если…, то…».

Будем записывать два простых высказывания с помощью букв A и B. За указанными выше связками закреплены определенные обозначения (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Обозначения логических связок

Название связки на естественном языке	Принятое название связки в логике высказываний	Обозначение связки
«И»: A и B	Конъюнкция	$A \wedge B$, $A \& B$
«ИЛИ»: A или B	Дизъюнкция	$A \vee B$
«Не»: не A	Отрицание	$\neg A$
«ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА»: если A то B, если B, то A.	Эквиваленция Эквивалентность	$A \equiv B$, $A \leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$
«ЕСЛИ…, ТО…»: если A, то B.	Импликация	$A \to B$, $A \supset B$

Пример 1.2.2. Пусть A: «6 делится на 3 без остатка», B: «6 делится на 2 без остатка», C: «6 делится без остатка на 2 и 3». Тогда запишем сложное высказывание: $C \equiv A \wedge B$. Данное высказывание является истинным, так выражение «6 делится без остатка на 2 и 3» эквивалентно тому, что «6 делится на 3 без остатка» и «6 делится на 2 без остатка».

Истинность любого сложного высказывания зависит только от истинностных значений входящих в него простых высказываний и применённых логических связок.

Пример 1.2.3. Сложное высказывание $A \vee B$ является истинным, если истинно, хотя бы одно из простых высказываний, не зависимо от того, что именно оно утверждает.

Заметим, что все выше перечисленные операции (связки), кроме отрицания, связывают вместе два простых высказывания. Такие операции в дальнейшем будем называть бинарными. В логике высказываний для бинарных операций и операции отрицания, предопределены таблицы истинности (табл. 1.2). Таблица истинности операции по-

Таблица 1.2

Таблица истинности основных логических связок

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \equiv B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

казывает, каким образом определяется значение истинности сложного высказывания, в зависимости от истинности простых высказываний, соединенных указанной связкой. Приведём таблицы истинности, для определённых выше операций. Примем следующие обозначения: 1 — истина, 0 — ложь.

Несложно заметить, что логических бинарных операций существует столько же, сколько различных функций ставящих всевозможным упорядоченным парам из 0 и 1 одно из значений 0 или 1. Всего таких различных упорядоченных пар 4: (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1). Любая функция имеет два варианта (0 и 1), что поставить в соответствие каждой из упорядоченных пар. Получаем, что всего таких функций: $16 = 2^4 = 2 \cdot 4$. Значит и операций должно существовать 16. Столько их и существует. Но в логике высказываний они не используются. В самом деле, каждая из оставшихся операций может быть выражена, посредством пяти операций, что мы уже ввели.

Пример 1.2.4. Операция « | », носящая название «штрих Шеффера», может быть выражена с использованием отрицания и операции конъюнкции. Рассмотри таблицу истинности операции «штрих Шеффера» (табл. 1.3).

Несложно проверить, что выражение $\neg(A \wedge B)$ будет иметь та-

Таблица 1.3

Таблица истинности операции «штрих Шеффера»

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

кую же таблицу истинности (табл. 1.4).

Упражнение 1.2.1. Читателю предлагается самостоятельно выписать все оставшиеся операции, и показать, что каждая из них может быть записана с использованием операций: конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция, импликация, отрицание.

Упражнение 1.2.2. Покажите, что любая бинарная связка, полученная в упражнение 1.2.1, может быть выражена с использованием только штриха Шеффера.

Определение 1.2.3. Полной системой связок (базисом), называется множество логических операций, используя которые можно выразить любую другую операцию рассматриваемой логики.

Выполнив упражнение 1.2.2 можно показать, что штрих Шеффера сам по себе представляет полную систему связок. Несложно так же показать, что полную систему связок представляют множества, состоящие из отрицания и конъюнкции или дизъюнкции.

В логике высказываний в качестве полной системы связок используется множество, состоящее из конъюнкции, дизъюнкции, отри-

Таблица 1.4

Таблица истинности выражения $\neg(A \wedge B)$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

цания, эквиваленции и импликации. Это означает, что в логике высказываний все высказывания и вывод новых высказываний используют только данные пять операций. Если в качестве полной системы связок мы выделим множество из операций: дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, то будет определён базис соответствующий «булевой алгебре».

Определение 1.2.4. Формулой логики высказывания называется любое сложное высказывание, полученное из простых высказываний посредством применения логических операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, эквиваленции, импликации.

Определение 1.2.5. Переменная, допустимыми значениями которой является некоторое высказывание, называется пропозициональной переменной.

Переформулируем определение формулы логики высказываний в терминах пропозициональных формул.

Определение 1.2.6. Пропозициональной формулой является:

- всякая пропозициональная переменная есть пропозициональная формула;
- если A и B пропозициональные формулы, то пропозициональными формулами так же являются выражения: $\neg A$, $\neg B$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \equiv B)$;
- никаких других пропозициональных формул нет.

Пример 1.2.5. Пропозициональными формулами являются следующие выражения: $((A \wedge B) \to (C \vee B))$, $(A \to (C \to D))$.

В дальнейшем вместо пропозициональной формулы будем писать просто «формула». Для всякой формулы логики высказываний может быть построена таблица истинности.

Пример 1.2.6. Построим таблицу истинности (табл. 1.5) для пропозициональной формулы $(A \wedge B) \to (C \vee B)$.

Таблица 1.5

Таблица истинности для формулы $(A \wedge B) \to (C \vee B)$

A	B	C	$\underbrace{(A \wedge B)}_{D}$	$\underbrace{(C \vee B)}_{K}$	$D \to K$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Последний столбец отображает результат. В выражении $(A \wedge B) \to (C \vee B)$ результат всегда истинен, вне зависимости от того, какие значения принимают пропозициональные переменные.

Во многих случаях скобки (вводящие порядок выполнения операций) можно опускать, если соблюдать правило очерёдности выполнения операций: вначале выполняется операция отрицания, затем операция конъюнкции, затем дизъюнкции, затем импликации и затем эквиваленции.

Пример 1.2.7. Формулу $(A \wedge B) \to (C \vee B)$ согласно правилам очерёдности выполнения операций можно записать так $A \wedge B \to C \vee B$. В формуле $A \wedge (B \to C)$ опустить скобки мы не можем.

Упражнение 1.2.3. Можно ли опустить скобки в выражении: $\neg(A \vee B)$. Для проверки постройте таблицы истинности исходного выражения и выражения полученного после удаления скобок.

Определение 1.2.7. Тождественно истинной или тавтологией называется такая пропозициональная формула, которая всегда истинна, независимо от значений пропозициональных переменных, входящих в неё.

Формула $A \wedge B \to C \vee B$, как было показано в примере 1.2.5, является тавтологий.

Упражнение 1.2.4. Проверьте, являются ли тавтологиями формулы: $A \to (B \to A)$, $A \vee \neg A$, $A \wedge \neg A$.

Определение 1.2.8. Две формулы называются равносильными (эквивалентными), если они истинны при одних и тех же значениях пропозициональных переменных. Иначе говоря, когда их таблицы истинности совпадают.

Упражнение 1.2.5. Проверьте, являются ли равносильными формулы: $A \wedge B \to C \vee B$ и $A \vee \neg A$, $(A \wedge \neg A) \vee B$ и B.

Понятие равносильности связано с операцией эквиваленции. Так если формулы A и B равносильны, то формула $A \equiv B$ тавтология. Если формула $A \equiv B$ тавтология, то формулы A и B равносильны.

Основные равносильности алгебры логики можно выписать в виде трёх групп.

Основные равносильности логики высказываний

Группа 1

- $A \wedge A \equiv A$;
- $A \wedge \neg A \equiv 0$;
- $A \vee \neg A \equiv 0$;
- $A \vee 1 \equiv 1$;
- $A \wedge 1 \equiv A$;
- $A \vee A \equiv A$;
- $A \wedge 0 \equiv 0$;
- $A \vee 0 \equiv A$;
- $A \vee (A \wedge B) \equiv A$;
- $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;

Упражнение 1.2.6. Докажите, используя таблицы истинности, что формулы $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ и $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ тавтологии.

Группа 2

Для наглядности будем использовать несколько обозначений эквиваленции: $\equiv$ и $\leftrightarrow$.

- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$;
- $A \to B \equiv \neg A \vee B$;
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$;
- $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$;
- $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$;
- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Упражнение 1.2.7. Докажите, используя таблицы истинности, что первые четыре формулы второй группы являются тавтологиями.

Группа 3

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$;
- $A \vee B \equiv B \vee A$;
- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$;
- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$;
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Используя вышеописанные равносильности, можно доказывать другие равносильности или приводить формулы к требуемому виду.

Пример 1.2.8. Покажите равносильность формул:

$$\neg(B \vee (A \wedge C)) \text{ и } \neg B \wedge (\neg A \vee \neg C).$$

Проведём следующие преобразования, используя равносильности логики высказываний:

$$\neg(B \vee (A \wedge C)) \equiv \neg((B \vee A) \wedge (B \vee C)),$$

$$\neg((B \vee A) \wedge (B \vee C)) = \neg(B \vee A) \vee \neg(B \vee C),$$

$$\neg(B \vee A) \vee \neg(B \vee C) \equiv (\neg B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge \neg C),$$

$$(\neg B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge \neg C) \equiv \neg B \wedge (\neg A \vee \neg C).$$

Получаем, что формулы равносильны и таблицы истинности для формул $\neg(B \vee (A \wedge C))$ и $\neg B \wedge (\neg A \vee \neg C)$ будут совпадать.

1.3. БУЛЕВА АЛГЕБРА

Определение 1.3.1. Булевой алгеброй называется система, состоящая из некоторого непустого множества $\aleph$ произвольных элементов (пусть $a, b, c \in \aleph$), отношения равенства (=) и трёх операций, называемых сложение (+), умножение ($\cdot$), отрицание $\neg$. Для перечисленных операций, всегда выполнены следующие аксиомы:

1) коммутативность:

- $a + b = b + a$;
- $a \cdot b = b \cdot a$;

2) ассоциативность:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

3) дистрибутивность:

- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$;
- $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$;

4) закон де-Моргана:

- $\neg(a + b) = \neg a \cdot \neg b$;
- $\neg(a \cdot b) = \neg a + \neg b$;

5) идемпотентность:

- $a + a = a$;
- $a \cdot a = a$;

6) поглощение:

- $a+(b \cdot a)=a$;
- $a \cdot (b+a)=a$;

7) двойное отрицание:

- $\neg\neg a = a$.

Определение. 1.3.2. Интерпретацией системы аксиом называется такое множество объектов и соотношений между этими объектами, что в терминах этих объектов и соотношений будут всегда выполняться аксиомы указанной системы.

Рассмотрим множество всевозможных высказываний и примем его за $\aleph$. Операцию дизъюнкции сопоставим определённой выше операции сложения, конъюнкцию сопоставим операции умножения, отрицанию сопоставим операцию отрицания. Отношению равенства сопоставим отношение эквиваленции. Проверив в таких обозначениях все перечисленные выше 7 аксиом, несложно убедится, что все они будут соблюдаться. Значит, логика высказываний является интерпретацией булевой алгебры. Заметим, что конъюнкция, дизъюнкция и отрицание образуют полную систему связок и, значит, посредством только этих операций может быть записана любая формула логики высказываний. Эти операции иногда называют «Булевы операции».

Пример 1.3.1. Приведём другой пример интерпретации булевой алгебры. Пусть элементами множества $\aleph$ будут множества. Под операциями сложения, умножения и отрицания будем понимать операции: объединение множеств, пересечение множеств и дополнение множества. Под знаком равенства будем подразумевать совпадение элементов содержащихся в результирующих множествах справа и слева от знака равенства. В построенной системе будут выполняться все аксиомы булевой алгебры, а сама система называется алгеброй множеств.

1.4. СХЕМЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представление формул логики высказываний посредством только трёх операций: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, оказывается весьма полезным.

Пример 1.4.1. Формула: $(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee \neg(B \vee C)$ приводится к виду $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C)$. Последняя формула считается проще первой, так как содержит меньше операций конъюнкции и дизъюнкции. Данные две формулы равносильны. Подобного упрощения можно добиться, если привести исходную формулу к дизъюнктивно нормальной форме (ДНФ). ДНФ — это такая форма представления, что формула представляется в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций. Для того чтобы построить ДНФ запишем (табл. 1.6) таблицу истинности формулы $(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee \neg(B \vee C)$.

Формула принимает истинные значения на наборах (0,0,0); (0,0,1) и (1,0,0). Значит, чтобы формула, представленная в ДНФ, приняла истинное значение на каждом из этих наборов, надо, чтобы хотя бы один из элементов дизъюнкции был истинен. Каждый элемент дизъюнкции представляет собой конъюнкцию (в нашем примере: $A \wedge B \wedge C$). На наборе (0,0,0) истинна конъюнкция, записанная в виде:

Таблица 1.6

Таблица истинности формулы $(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee \neg(B \vee C)$

A	B	C	$(\neg(A \wedge B) \wedge C) \vee \neg(B \vee C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$; на наборе (0,0,1): $\neg A \wedge \neg B \wedge C$; на наборе (1,0,0): $A \wedge \neg B \wedge \neg C$. Тогда искомая дизъюнкция (ДНФ) представима в следующем виде:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C). \qquad (1.1)$$

Полученная ДНФ может быть упрощена с помощью «карт Карно». Карты Карно, представляют собой табличное представление конъюнкций, входящих в ДНФ. В такой таблице имена строк и столбцов расставлены так, что переходя от столбца к столбцу, получается конъюнкция, отличная от предыдущей ровно на один символ (рис. 1.1).

Карты Карно, показывают конъюнкции, отличающиеся друг от друга ровно одним элементом: в одну конъюнкцию этот «один» элемент входит со знаком отрицания в другую без него. Рассмотри дизъюнкцию двух соседних конъюнктов:

$$(\underbrace{\neg A \wedge \neg B}_{G} \wedge C) \vee (\underbrace{\neg A \wedge \neg B}_{G} \wedge \neg C),$$

$$(G \wedge C) \vee (G \wedge \neg C) \equiv G \wedge (\underbrace{C \vee \neg C}_{\equiv 1}).$$

Истинность ДНФ (1.1) определяется исключительно истинностью формулы $\neg A \wedge \neg B$. Поэтому конъюнкции, находящиеся в соседних ячейках карты Карно «склеивают», удаляя тот элемент, который является отличным в конъюнкции. В текущем примере, соседние конъюнкции это:

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \text{ и } \neg A \wedge \neg B \wedge C \text{ по элементу } C,$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C \text{ и } \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \text{ по элементу } A.$$

Формула (1.1) тогда упрощается до вида:

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C).$$

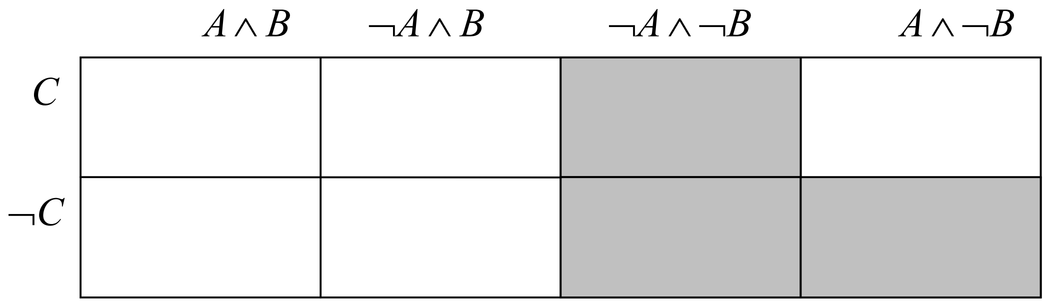


Рис. 1.1. Карта Карно для ДНФ

Если в первой формуле было использовано четыре бинарные операции, то в упрощённой формуле их всего три. Почему важно уметь так упрощать формулы?

Предположим нужно построить функциональную схему, которая будет определённым образом обрабатывать входные данные и выдавать некоторый результат. Данные, которые подаются на вход и получаются на выходе, представляют собой одно из двух значений: есть сигнал или нет. Вместо фразы «есть сигнал» будем писать «1», вместо «нет сигнала» — «0». Функциональные схемы, как правило, включают в себя три вида функциональных элементов, или, иначе говоря, переключателей. Первый переключатель 0 заменяет на 1, а 1 заменяет на 0. Второй переключатель подаёт на выход 1, если на вход по всем каналам одновременно поступили 1. Третий, подаёт на выход 1, если хотя бы по одному входящему каналу пришла 1 (рис. 1.2). Каждой схеме, построенной из таких функциональных элементов можно сопоставить некоторую формулу логики высказываний, а любую формулу логики высказываний можно реализовать посредством некоторой функциональной схемы. Будем обозначать функциональные элементы как указано на рис. 1.2.

Пусть нам известно, какой сигнал мы должны получить на выходе при определённых входных сигналах. Все входные и выходные сигналы представлены с помощью 0 и 1. Возникает вопрос, как построить такую функциональную схему, что бы она реализовывала тре-

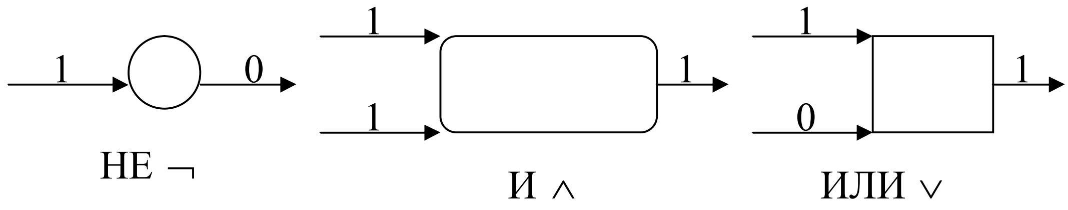


Рис. 1.2. Функциональные элементы

буемую обработку входных сигналов. Для решения поставленной задачи необходимо построить таблицу отражающую зависимость выходного сигнала, от значений входных сигналов. Такая таблица представляет собой таблицу истинности некоторой формулы логики высказываний. Используя таблицу истинности несложно построить формулу, представленную в ДНФ. Минимизировав полученную ДНФ, мы построим формулу, соответствующую требуемой функциональной схеме. Поскольку дизъюнкция и конъюнкция выразимы друг через друга, то функциональная схема при необходимости может состоять всего из двух элементов: отрицания и конъюнкции, или отрицания и дизъюнкции. Пусть нам нужно построить такую функциональную схему, на вход которой будут поступать три сигнала. Обозначим каналы, по которым поступают входные сигналы, за A, B и C, а сам входной сигнал: (A, B, C). Пусть известно, что на выход подаётся 1, только если получены входные сигналы: (0,0,0), (0,0,1), (1,0,0). В остальных случаях на выход подаётся 0. Построим таблицу истинности согласно поставленному условию. Построенная таблица полностью совпадает с табл. 1.6 истинности из примера 1.4.1. Тогда полученная ДНФ будет представима формулой (1.1), сократив которую получим формулу $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C)$. Представим последнюю формулу в виде функциональной схемы (рис. 1.3).

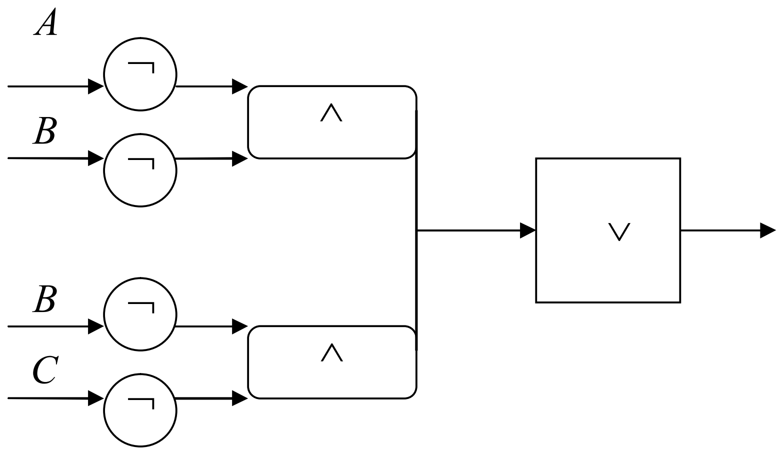


Рис. 1.3. Функциональная схема для формулы

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Понятия истинности и ложности едва ли можно назвать математическими понятиями. Определяя истинность или ложность понятия, мы, прежде всего, руководствуемся субъективным мнением. Зададимся вопросом, возможно ли построить такую аксиоматическую систему, которая не использует понятия истинности и ложности, и которой соответствует логика высказываний? Иначе говоря, построить такую систему аксиом и правил вывода из неё, что логика высказываний будет интерпретацией такой системы. Элементами множества, составляющего такую систему, будут не высказывания, а некоторые абстрактные обозначения, которые в общем случае могут и не быть высказываниями. Операции такой системы, не определяются посредством обозначений 0, 1 и таблиц истинности, как это делалось прежде в логике высказываний.

Утверждение 2.1.1. Исчисление высказываний — это такая аксиоматическая логическая система, что её интерпретацией является логика высказываний.

Чтобы описать какое-либо исчисление необходимо ввести символы этого исчисления. Будем в дальнейшем такие символы называть алфавитом. Заметим, что эти символы абстрактны, и не приставляют собой элементы какого-либо конкретного множества (кроме того множества, что образовано совокупностью этих символов), но этим символам могут быть сопоставлены объекты некоторого множества. Например, объекты из множества «различные высказывания». Помимо описания алфавита, требуется определить понятие формулы исчисления, аксиомы исчисления и правила выводимости формул.

Определение 2.1.1. Алфавитом исчисления высказываний называется множество символов трёх групп:

- символы x, y, z, … (или x_1, x_2, …) которые в дальнейшем будем называть переменными;
- символов $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, которые называются логическими связками;
- символов скобок: ( ).

Определение 2.1.2. Формула в исчислении высказываний определяется следующим образом:

- всякая переменная x, y, z, … является формулой;
- если даны две формулы, обозначим их за A и B, то формулами будут являться выражения: $\neg A$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \to B)$;
- никаких других формул исчисления высказываний не существует.

Обратите внимание, что символы A и B в алфавит не входят и используются лишь в качестве обозначения некоторой формулы.

Пример 2.1.1. Формулами являются следующие последовательности символов:

$$\neg((A \to B) \vee B) \to (A \wedge \neg B),\ (\neg(A \to \neg B) \vee (B \wedge A)) \to A.$$

Формулами не являются следующие последовательности:

$$\vee A,\ \neg AB,\ (A \wedge B.$$

Определим множество исходных формул (аксиом), истинность которых не требует доказательств, а считается предзаданной.

Определение 2.1.3. Системой аксиом исчисления высказываний называется следующая группа из 11 аксиом:

1) $A \to (B \to A)$;

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

3) $(A \wedge B) \to A$;

4) $(A \wedge B) \to B$;

5) $A \to (B \to (A \wedge B))$;

6) $A \to (A \vee B)$;

7) $B \to (A \vee B)$;

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;

9) $\neg A \to (A \to B)$;

10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;

11) $A \vee \neg A$.

В исчисление высказываний существует единственное правило вывода «modus ponens», в дальнейшем будем писать MP. Определим данное правило вывода.

Определение 2.1.4. Правилом вывода в исчислении высказываний является правило, согласно которому из формул A и $(A \to B)$ выводиться формула B. Данное правило принято записывать в форме: $\dfrac{A, A \to B}{B}$.

Определение 2.1.5. Выводом в исчислении высказываний называется конечная последовательность формул, каждая из которых есть либо аксиома, либо получается из двух предшествующих формул с помощью правила MP.

Пример 2.1.2. Будем считать, что формулы A и C состоят из одной переменной x, формула B состоит из переменной y. Запишем следующий вывод, где первая и вторая формулы соответствуют первой и второй аксиомам, а третья формула получена из первых двух с помощью правила MP:

$$(x \to (y \to x)),$$
$$(x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)),$$
$$((x \to y) \to (x \to x)).$$

Определение 2.1.6. Теоремой или выводимой формулой в исчислении высказываний называется такая формула A, которой завершается некоторый вывод. Если формула A является теоремой, то пишут: $\vdash A$.

Предположим, что к имеющейся системе аксиом исчисления высказываний, добавили некоторое конечное множество формул Γ.

Определение 2.1.7. Выводом из Γ называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит Γ, либо является аксиомой, либо получена из двух предшествующих формул с помощью правила MP. Правило MP в этом случае звучит так: если формула P выводима из Γ, и формула $(P \to Q)$, выводима из Γ, то из Γ выводима формула Q.

Определение 2.1.8. Формула Q называется выводимой из Γ, если существует вывод из Γ, оканчивающийся данной формулой. Если формула Q выводима из Γ, то пишут: $\Gamma \mid\!\text{-} Q$.

Пример 2.1.3. Нужно показать, что из множества формул $\Gamma = \{P, Q\}$ выводима формула $(P \wedge Q)$. Так как $P \in \Gamma$ и $Q \in \Gamma$, то $\Gamma \mid\!\text{-} P$ и $\Gamma \mid\!\text{-} Q$. Множество Γ добавлено к множеству аксиом, значит, аксиомы никуда не делись, и мы обязаны их соблюдать, в том числе и для P, Q. Выпишем, используя P и Q аксиому 5) и получим:

$$\Gamma \mid\!\text{-} P \to (Q \to (P \wedge Q)).$$

Добавим к последней формуле $\Gamma \mid\!\text{-} P$ и по правилу MP получим:

$$\Gamma \mid\!\text{-} (Q \to (P \wedge Q)).$$

Вспомним, что $\Gamma \mid\!\text{-} Q$ и применим правило MP ещё раз, в результате получим: $\Gamma \mid\!\text{-} (P \wedge Q)$.

Пример 2.1.4. Пусть $\Gamma = \{P, Q\}$, тогда выводом, соответствующим примеру 2.1.3., будет последовательность формул:

$$P,\ Q,\ P \to (Q \to (P \wedge Q)),\ (Q \to (P \wedge Q)),\ (P \wedge Q).$$

Упражнение 2.1.1. Пусть $\Gamma = \{(P \to H), (Q \to H)\}$. Покажите, что $\Gamma \mid\!\text{-} ((P \vee Q) \to H)$.

Пример 2.1.5. Рассмотрим аксиому 10), которая показывает, как можно вывести отрицание некоторой формулы Q. Для этого необходимо допустить истинность Q и из этого допущения вывести противоречие. Например: $\Gamma \cup \{Q\}$|-P и $\Gamma \cup \{Q\}$|-¬P. Из последних двух формул получается, что может иметь место только Г|-$\neg Q$, так как Г|-Q приводит к противоречию.

В самом деле, исходное утверждение можно записать так: Г|-Q → P и Г|-Q → ¬P. Тогда одновременно возможны P и $\neg P$, что не возможно.

Осталось разобраться, почему допустим переход от $\Gamma \cup \{Q\}$|-P к Г|-Q → P.

Лемма 2.1.1. Формула $(P \to P)$ всегда выводима в исчислении высказываний, для любой формулы P.

Доказательство. Воспользуемся аксиомами 1) и 2):

$$A \to (B \to A),$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

Будем считать, что $A = C = P$, $B = (P \to P)$. В результате получим формулы:

$$\underbrace{(\underbrace{P}_{A} \to ((\underbrace{P \to P)}_{B} \to \underbrace{P}_{C}))}_{D} \to ((\underbrace{P}_{A} \to \underbrace{(P \to P)}_{B}) \to (\underbrace{P}_{A} \to \underbrace{P}_{C})),$$

$$\underbrace{\underbrace{P}_{A} \to ((\underbrace{P \to P)}_{B} \to \underbrace{P}_{A})}_{D}.$$

Из приведённых выше формул с помощью правила MP получаем:

$$(P \to (P \to P)) \to (P \to P).$$

Первая часть формулы до импликации соответствует аксиоме 1) при обозначениях $A = B = C = P$. Применив правило MP, выводим формулу $(P \to P)$. Лемма доказана.

Теорема 2.1.1. О дедукции. Пусть дано множество формул Γ. Тогда $\Gamma | \text{-} Q \to P$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} P$.

Доказательство. Пусть $\Gamma | \text{-} (Q \to P)$. Тогда если к множеству формул Γ добавить ещё одну формулу, то из полученного множества формул будет по-прежнему выводиться $(Q \to P)$:

$$\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} (Q \to P).$$

Используя:

$$\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} Q,\ \Gamma \cup \{Q\} | \text{-} (Q \to P)$$

и правило MP получаем $\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} P$. Теперь покажем, что если имеет место $\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} P$, то имеет место и $\Gamma | \text{-} (Q \to P)$. Если формула P выводима из множества $\Gamma \cup \{Q\}$, то существует вывод заканчивающийся формулой P. Представим этот вывод в виде последовательности $F_1, F_2, ..., F_n$, где $F_n = P$. Так как $\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} Q$, а все формулы $F_1, F_2, ..., F_n$ выводимы из $\Gamma \cup \{Q\}$ и аксиом исчисления высказывания, то необходимо заключить, что имеют место формулы:

$$(Q \to F_1), (Q \to F_2), ..., (Q \to F_n).$$

Покажем, что такая последовательность представляет собой вывод формулы $(Q \to F_n)$ из Γ. В самом деле, будем брать поочерёдно формулы $(Q \to F_i)$. По начальному условию: $\Gamma \cup \{Q\} | \text{-} F_i$. Значит либо F_i совпадает с Q, либо F_i выводится из Γ или из начальных аксиом, либо F_i получается с помощью правила MP. Всего четыре случая. Рассмотрим их.

Случай 1. Пусть F_i совпадает с Q. Тогда получаем формулу $(Q \to Q)$. Согласно лемме 2.1.1. она выводима в исчислении высказываний, значит, выводима и из Γ: $\Gamma | \text{-} F_i$.

Случай 2. Пусть F_i принадлежит Γ, тогда: $\Gamma|\text{-}F_i$. Воспользуемся аксиомой 1) $A \to (B \to A)$ и будем считать, что $A = F_i$, $B = Q$: $F_i \to (Q \to F_i)$. Но тогда $\Gamma|\text{-}F_i \to (Q \to F_i)$ и $\Gamma|\text{-}F_i$. Воспользовавшись правилом MP, получаем: $\Gamma|\text{-}(Q \to F_i)$.

Случай 3. Пусть F_i аксиома исчисления высказываний, тогда: $|\text{-}F_i$. Воспользуемся аксиомой 1) $A \to (B \to A)$ и будем считать, что $A = F_i$, $B = Q$: $F_i \to (Q \to F_i)$. Тогда $|\text{-}F_i \to (Q \to F_i)$ и $|\text{-}F_i$. Воспользовавшись правилом MP, получаем: $|\text{-}(Q \to F_i)$, значит $\Gamma|\text{-}(Q \to F_i)$.

Случай 4. Пусть формула F_i была получена в выводе $F_1, F_2, ..., F_i, ..., F_n$ из двух предшествующих с помощью правила MP. Что бы это было возможно, среди формул предшествующего вывода должны присутствовать формулы F_j и $\underbrace{(F_j \to F_i)}_{F_k}$: $\Gamma|\text{-}F_j$, $\Gamma|\text{-}(F_j \to F_i)$.

Значит в выводе, который мы строим с помощью $(Q \to F_l)$, формуле $(Q \to F_i)$ должны были предшествовать формулы: $(Q \to F_j)$ и $(Q \to \underbrace{(F_j \to F_i)}_{F_k})$. Последние две формулы уже есть в выводе, который мы строим из Γ. Значит: $\Gamma|\text{-}(Q \to F_j)$, $\Gamma|\text{-}(Q \to (F_j \to F_i))$. Воспользуемся теперь аксиомой 2) и дважды применим правило MP:

$$\Gamma|\text{-}(\underbrace{Q}_{A} \to (\underbrace{F_j}_{B} \to \underbrace{F_i}_{C})) \to ((\underbrace{Q}_{A} \to \underbrace{F_j}_{B}) \to (\underbrace{Q}_{A} \to \underbrace{F_i}_{C})),$$

$$\Gamma|\text{-}((Q \to F_j) \to (Q \to F_i)),$$

$$\Gamma|\text{-}(Q \to F_i).$$

Таким образом, мы показали, что для любой формулы F_i, включая $F_n = P$, из множества Γ можно вывести формулу $(Q \to F_i)$. Значит, $\Gamma|\text{-}(Q \to P)$. Теорема о дедукции доказана.

2.2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Начиная говорить об исчислении высказываний, мы говорили, что интерпретацией исчисления высказываний является логика высказываний. Покажем это, построив интерпретацию.

Будем трактовать переменные исчисления высказываний как переменные логики высказываний: то есть как переменные, принимающие два значения 0 или 1. Операции исчисления высказываний $\neg$, $\vee$, $\vee$ и $\to$ определим с помощью таблиц истинности одноимённых операций логики высказываний. Любая формула исчисления высказываний при этом будет принимать одно из значений 0 или 1, в зависимости от значений переменных (которые становятся 0 или 1) и применённых операций (которые работают так же как и в логике высказываний). Так задаётся интерпретация исчисления высказываний, которая является логикой высказываний. Очевидно, что если мы построили такую интерпретацию, то все аксиомы исчисления высказываний и все выводимые в исчисление высказываний формулы отобразились в логику высказываний. В самом деле, несложно показать, что все теоремы в исчисление высказываний представляют собой тавтологии. Сложнее показать обратное, что всякая тавтология в логике высказываний является теоремой в исчислении высказываний.

Теорема 2.2.1. О корректности исчисления высказываний. Всякая теорема исчисления высказываний есть тавтология.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что все аксиомы в интерпретации логики высказываний будут тавтологиями. Проведём доказательство для одной из аксиом. Рассмотрим вторую аксиому:

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)). \tag{2.1}$$

Данная формула в логике высказываний, согласно таблице истинности импликации, может быть ложной тогда и только тогда, когда выражение $(A \to (B \to C))$ истинно, а выражение $((A \to B) \to (A \to C))$ ложно. Выражение $((A \to B) \to (A \to C))$ может быть ложным, если только $(A \to B)$ истинно, а $(A \to C)$ ложно. Выражение $(A \to C)$ ложно тогда и только тогда, когда A истина, а C ложно. Предположим это так. Тогда истинны выражения A, $(A \to B)$, $(A \to (B \to C))$, что возможно лишь, когда B и $(B \to C)$ истинны (в противном случае импликация будет ложной). Истинность последнего выражения возможна, только если C истина, а это противоречит тому, что C должно быть ложно. Так как C не может быть одновременно и истинной и ложью, то невозможно, чтобы формула (2.1) имела значение ложь. Значит, данная формула является тавтологией.

Покажем, что формула, выведенная из двух тавтологий с помощью правила MP будет тавтологией. Пусть известно, что формулы B и $(B \to C)$ всегда принимают лишь истинное значение. Такое возможно лишь в том случае, если формула C всегда истинна.

Упражнение 2.2.1. Покажите, что аксиомы 8) и 9) исчисления высказываний в логике высказываний являются тавтологиями.

Осталось доказать утверждение, что любая тавтология в логике высказываний является формулой, выводимой в исчислении высказываний. Рассмотрим лемму, которая нам потребуется в доказательстве.

Лемма 2.2.1. Пусть Q и P некоторые формулы. Тогда, выводимы следующие формулы:

- $Q \cup P|\text{-}(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$, $\neg Q \cup P|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$, $Q \cup \neg P|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$, $\neg Q \cup \neg P|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$;
- $Q \cup P|\text{-}(\mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$, $\neg Q \cup P|\text{-}(\mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$, $Q \cup \neg P|\text{-}(\mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$, $\neg Q \cup \neg P|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \vee \mathrm{P})$;
- $Q \cup P|\text{-}(\mathrm{Q} \to \mathrm{P})$, $\neg Q \cup P|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \to \mathrm{P})$, $Q \cup \neg P|\text{-}(\mathrm{Q} \to \mathrm{P})$, $\neg Q \cup \neg P|\text{-}(\mathrm{Q} \to \mathrm{P})$;
- $Q|\text{-}\neg(\neg\mathrm{Q})$, $\neg Q|\text{-}\neg\mathrm{Q}$.

В примере 2.1.3. мы уже доказывали, что $\Gamma|\text{-}(P \wedge Q)$, где $\Gamma = \{P, Q\}$. Проведём доказательство, например, для $Q \cup \neg P|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$. Остальные случаи предлагаем читателю доказать самостоятельно. Пусть дано $\Gamma = \{\neg P, Q\}$. Нужно показать, что $\Gamma|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$. Обратимся к примеру 2.1.5. Предположим, что $\Gamma|\text{-}(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$. Покажем, что множество формул $\Gamma' = \{\neg P, Q, (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})\}$ приводит к противоречию. Очевидно, что $\Gamma'|\text{-}\neg\mathrm{P}$, а согласно аксиоме 4) получаем $\Gamma'|\text{-}\mathrm{P}$. Получили противоречие, значит невозможно, что бы $\Gamma|\text{-}(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$, но тогда $\Gamma|\text{-}\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$.

Теорема 2.2.2. О полноте исчисления высказываний. Любая тавтология является выводимой в исчислении высказываний формулой.

Доказательство. Проведём доказательство на примере. Пусть Q тавтология логики высказываний. Пусть в Q входят переменные $q_1, q_2, \ldots q_n$. Будем считать, что $n = 3$, тогда $q_1 = a$, $q_2 = b$, $q_3 = c$. Если предположить, что a, b и c принимают истинные значения, то будем их записывать их как a, b, c. Если предположить, что a, b, c принимают значение «ложь», то будем писать: $\neg a$, $\neg b$, $\neg c$. Аналогично, если формула Q записана как Q то считается, что Q принимает значение истины. Если записано $\neg Q$, то подразумевается ложность Q. Тогда запись $a \cup \neg b \cup c|\text{-}\mathrm{Q}$, будем понимать, как вывод формулы Q из предположения, что a истинно, b ложно, c истинно. Так как Q тавтология, то какие бы значения переменных из формулы Q мы ни взяли бы, из них всегда будет выводиться Q (а значение $\neg Q$ выводиться не будет). Теперь возьмём, например, $a \cup \neg b \cup c|\text{-}\mathrm{Q}$ и $a \cup b \cup c|\text{-}\mathrm{Q}$. Так как Q выводима в обоих случаях, вне зависимости от того что взято b или $\neg b$, то, воспользовавшись аксиомам 6), 7) можно записать $a \cup (b \vee \neg b) \cup c|\text{-}\mathrm{Q}$. Вспомним, что $(b \vee \neg b)$ — аксиома, значит уже принята по умолчанию. Тогда получаем: $a \cup c|\text{-}\mathrm{Q}$. Продолжая рассуждать так же, приходим к тому, что $|\text{-}\mathrm{Q}$, что и требовалось доказать.

Пример 2.2.1. Рассмотрим формулу $(a \wedge b) \to (a \vee b)$. Для того, что бы данная формула являлась тавтологией, необходимо, что бы она (а не её отрицание) выводилась из всевозможных комбинаций различных значений истинности входящих в неё переменных. В рассматриваемой формуле всего две переменных. Значит нужно проверить выводимость этой формулы, при предположениях, что имеют место: $\{a,b\}$, $\{a,\neg b\}$, $\{\neg a,b\}$, $\{\neg a,\neg b\}$.

Пусть $\Gamma = \{a,b\}$, тогда, воспользовавшись леммой 2.2.1, получим что: $a \cup b |\text{-}(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})$ и $a \cup b |\text{-}(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})$. Воспользуемся ещё раз леммой 2.2.1:

$$\underbrace{(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})}_{c}, \underbrace{(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{d} |\text{-}(\underbrace{(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{(c \to d)}).$$

В результате получаем: $a \cup b |\text{-}((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$.

Пусть $\Gamma = \{a,\neg b\}$, тогда, воспользовавшись леммой 2.2.1, получим что: $a \cup \neg b |\text{-}\neg(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})$ и $a \cup \neg b |\text{-}(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})$. Затем получаем:

$$\underbrace{\neg(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})}_{\neg c}, \underbrace{(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{d} |\text{-}(\underbrace{(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{(c \to d)}).$$

В результате получаем: $a \cup \neg b |\text{-}((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$.

Пусть $\Gamma = \{\neg a,b\}$, тогда, воспользовавшись леммой 2.2.1, получим что: $\neg a \cup b |\text{-}\neg(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})$ и $\neg a \cup b |\text{-}(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})$. Затем получаем:

$$\underbrace{\neg(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})}_{\neg c}, \underbrace{(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{d} |\text{-}(\underbrace{(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{(c \to d)}).$$

В результате получаем: $\neg a \cup b |\text{-}((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$.

Пусть $\Gamma = \{\neg a,\neg b\}$, тогда, воспользовавшись леммой 2.2.1, получим что: $\neg a \cup \neg b |\text{-}\neg(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})$ и $\neg a \cup \neg b |\text{-}\neg(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})$. Затем получаем:

$$\underbrace{\neg(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b})}_{\neg c}, \underbrace{\neg(\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{\neg d} |\text{-}(\underbrace{(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})}_{(c \to d)}).$$

В результате получаем: $\neg a \cup \neg b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$.

Таким образом, вне зависимости от того, какими мы полагаем истинностные значения a и b, из каждого такого предположения выводится формула $(a \wedge b) \to (a \vee b)$, а не её отрицание. Значит, данная формула является тавтологией. Воспользуемся последовательностью действий, описанных в доказательстве теоремы о полноте исчисления высказываний:

- $\left.\begin{array}{l} a \cup b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \\ a \cup \neg b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \end{array}\right\} a \cup (b \vee \neg b) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$,
- $\left.\begin{array}{l} a \cup \neg b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \\ \neg a \cup \neg b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \end{array}\right\} \neg b \cup (a \vee \neg a) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$,
- $\left.\begin{array}{l} \neg a \cup b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \\ a \cup b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \end{array}\right\} b \cup (a \vee \neg a) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$,
- $\left.\begin{array}{l} \neg a \cup \neg b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \\ \neg a \cup b | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \end{array}\right\} \neg a \cup (b \vee \neg b) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$,
- $\left.\begin{array}{l} \neg b \cup (a \wedge \neg a) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \\ b \cup (a \wedge \neg a) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \end{array}\right\} (\neg b \vee b) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$,
- $\left.\begin{array}{l} a \cup (b \wedge \neg b) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \\ \neg a \cup (b \wedge \neg b) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b})) \end{array}\right\} (a \vee \neg a) | \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$,
- $| \text{-} ((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \to (\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))$.

Упражнение 2.2.2. Проверьте, возможно ли провести все выкладки, аналогичные проведённым в примере 2.2.1, для формулы $(a \vee b) \to (a \wedge b)$.

Мы установили взаимосвязь между формулами выводимым в исчислении высказываний и тавтологиями в логике высказываний. Теперь, чтобы доказать что формула является выводимой в исчислении высказываний достаточно показать, что она является тавтологией в логике высказываний, а для этого достаточно построить таблицу истинности и убедиться в её истинности на всех значениях пропозициональных переменных, входящих в неё. Аналогично обратное утверждение: что бы доказать, что формула является тавтологией достаточно показать, что она выводима в исчислении высказываний.

2.3. ПРОБЛЕМА ДЕДУКЦИИ. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Вернёмся к логике высказываний, рассмотрим ещё несколько понятий и теорем данного раздела логики.

Определение 2.3.1. Говорят, что пропозициональная формула C логически следует из множества пропозициональных формул образующих множество $\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_i\}$, если C истинна всегда, когда истинны пропозициональные формулы из множества Γ. В этом случае пишут: $\Gamma \models C$, или $B_1, B_2, ..., B_i \models C$, или $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \models C$.

Запись $\models C$ означает, что формула C является тавтологий и для её истинности не требуется, что бы какая-либо другая формула логики высказываний была истинна.

Теорема 2.3.1. $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \models C$ тогда и только тогда, когда

$$\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C.$$

Доказательство. Формула $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to A$ может быть ложной в единственном случае, если конъюнкция $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i$ истинна, а C ложно. C является логическим следствием $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i$ и согласно определению 2.3.1. формула C истинна всегда, когда истинна формула $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i$. Значит, выражение $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$ всегда истинно: $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Теорема доказана.

Очевидно, что $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \models B_k$, где $k = 1, 2, ..., i$.

Определение 2.3.2. Проблемой дедукции называется решение задачи выясняющей, является ли C логическим следствием множества формул из Γ.

Теорема 2.3.2. Если $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \models C$, то формула $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \wedge \neg C$ невыполнима.

Доказательство. Так как формула $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \wedge \neg C$ невыполнима, то её отрицание выполнимо всегда и является тавтологией: $\models \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \wedge \neg C)$. Воспользуемся равносильностью (раздел 1.2):

$$\neg(\underbrace{A}_{B_1, B_2, ..., B_i} \vee \underbrace{B}_{C}) \equiv \neg \underbrace{A}_{B_1, B_2, ..., B_i} \wedge \neg \underbrace{B}_{C}.$$

В результате получим:

$$\models \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \vee \neg\neg C),$$
$$\models \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \vee C).$$

Воспользуемся равносильностью (раздел 1.2):

$$\underbrace{A}_{B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i} \to \underbrace{B}_{C} \equiv \neg \underbrace{A}_{B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i} \vee \underbrace{B}_{C}.$$

В результате получим: $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Теорема доказана.

Теорема 2.3.3. $\Gamma |\!- C \leftrightarrow \Gamma \models C$, где $\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_i\}$.

Доказательство. Рассмотрим первую запись: $\Gamma |\!- C$. Этой записью говорится, что формула C выводима в исчислении высказывании, если в качестве дополнительных гипотез принята истинность формул, входящих во множество Γ. Рассмотрим формулу $\Gamma \models C$, которая говорит, что C — логическое следствие множества формул Γ, или иначе, что формула логики высказываний: $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$ является тавтологией. Вспомним, что любая тавтология является выводимой в исчислении высказываний, тогда получим: $|\!-(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Воспользуемся теоремой 2.1.1. (о дедукции) и получим: $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) |\!- C$, или иначе: $\Gamma |\!- C$. Таким образом, если выполнено $\Gamma \models C$, то выполнено и $\Gamma |\!- C$.

В другую сторону. Вспомним, что выводимая в исчисление высказываний формула является тавтологией логики высказываний. Формула $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$, выводима в исчислении высказываний (Г|-C), значит, эта формула является тавтологией в исчислении высказываний: $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Тогда согласно теореме 2.3.2. $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \models C$, или иначе $\Gamma \models C$. Таким образом, если выполнено Г|-C, то выполнено и $\Gamma \models C$.

Вернёмся к проблеме дедукции, ставящей перед нами задачу: «определить, является ли формула C логическим следствием множества формул $\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_i\}$: $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Существует два подхода к решению данной задачи. Первый подход заключается в том, что бы проверить выводимость в исчислении высказываний формулы $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Второй подход сводится к доказательству невыполнимости в логике высказываний формулы $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \wedge \neg C$.

Рассмотрим первый подход. Чтобы показать, что формула $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$ выводима в исчислении высказываний, нужно либо определить сам вывод, либо доказать, что данная формула является тавтологией логики высказываний. Последнее сводится к построению таблицы истинности, с помощью которой можно проверить является ли указанная формула тавтологией или нет.

Второй подход реализуется с использованием метода резолюций, метода, позволяющего определить: «является ли формула невыполнимой или нет». Мы подробно рассмотрим данный метод для логики предикатов (частным случаем которой является логика высказываний). Сейчас лишь коротко осветим данный метод для логики высказываний на небольшом примере.

Пример 2.3.1. (Метод резолюций логики высказываний). Рассмотрим формулу $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \wedge \neg C$. Для данной формулы построим конъюнктивную нормальную форму (КНФ). КНФ — это такая форма представления, что формула представляется в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, или иначе дизъюнктов: $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j$. Каждый дизъюнкт представим в виде: $D = L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_k$, где объекты L называются литерами. Литера представляет собой пропозициональную переменную (высказывание) или её отрицание.

Пусть в конъюнкцию входят два дизъюнкта, такие что одна и та же литера L_m входит в один дизъюнкт без знака отрицания, а в другой дизъюнкт со знаком отрицания (какие другие литеры входят в эти дизъюнкты не имеет значения):

$$D_1 = \underbrace{A}_{L_1 \vee L_2 \vee ... \vee Lm} \vee \underbrace{B}_{L_m},$$

$$D_2 = \underbrace{Q}_{L_1^{'} \vee L_2^{'} \vee ... \vee L_g^{'}} \vee \neg \underbrace{B}_{L_m}.$$

С помощью таких двух дизъюнктов D_1 и D_2, строится третий дизъюнкт, называемый резольвентой. Это дизъюнкт $R_{1,2} = A \vee Q$.

Покажем, что резольвента является логическим следствием дизъюнктов, по которым она построена $D_1, D_2 \models R_{1,2}$, или иначе: $\models (D_1 \wedge D_2) \to R_{1,2}$. Последняя формула может быть ложной только тогда, когда выражение $D_1 \wedge D_2$ истинно, а $R_{1,2} = A \vee Q$ ложно.

Если выражение $D_1 \wedge D_2$ истинно, то одновременно истины дизъюнкты D_1 и D_2. Если высказывание соответствующее литере L_m истинно, то истинно и значение D_1. В этом случае высказывание соответствующее $\neg L_m$ ложно, а тогда утверждение, что D_2 истинно гарантирует, что Q — истина. Если Q — истина, то выражение $R_{1,2} = A \vee Q$ тоже истинно. Таким образом, при условии, что значение конъюнкции $D_1 \wedge D_2$ — истина, значение литеры L_m — истина, получаем, что резольвента дизъюнктов D_1 и D_2: $R_{1,2} = A \vee Q$ всегда истинна.

Теперь предположим, что конъюнкция $D_1 \wedge D_2$ — истина, а значение литеры L_m — ложь. Тогда в дизъюнкте D_2 выражение $\neg L_m$ истинно. Дизъюнкт D_1 тоже должен быть истинным. Так как L_m — ложь, то D_1 может быть истиной, только если значение A является истинной. Если A — истина, то значение резольвенты $R_{1,2} = A \vee Q$ тоже истина. Таким образом, если значение конъюнкции $D_1 \wedge D_2$ — истина, значение литеры L_m — ложь, получаем, что резольвента дизъюнктов D_1 и D_2: $R_{1,2} = A \vee Q$ всегда истинна.

Выше мы показали, что при условии что, $D_1 \wedge D_2$ — истина, резольвента $R_{1,2}$ всегда истинна. Значит, формула $(D_1 \wedge D_2) \to R_{1,2}$ всегда принимает только истинностные значения и является тавтологией: $\models (D_1 \wedge D_2) \to R_{1,2}$. Что нам и требовалось показать.

Поэтому, если для двух дизъюнктов D_1 и D_2 можно построить резольвенту, то в КНФ: $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_j$, конъюнкция $D_1 \wedge D_2$ заменяется на резольвенту $R_{1,2}$: $R_{1,2} \wedge D_3 \wedge \ldots \wedge D_j$. В этом случае резольвента становится одним из дизъюнктов, а дизъюнкты D_1 и D_2 из КНФ удалятся. Задача заключается в том, что бы подобрать такие дизъюнкты (или вывести их как резольвенты), что бы резольвентой таких дизъюнктов был пустой дизъюнкт $\Box$, или, иначе, дизъюнкт, не содержащий литер. Например, для дизъюнктов: $D_i = Q$ и $D_j = \neg Q$, резольвентой будет пустой дизъюнкт: $D_{i,j} = \Box$. В самом деле, исходные дизъюнкты можно записать в форме: $D_i = \Box \vee Q$, $D_j = \Box \vee \neg Q$, так как значение пустого дизъюнкта — ложь (поэтому значения истинности дизъюнктов D_i, D_j не изменятся). Если резольвентой двух дизъюнктов является пустой дизъюнкт $D_{i,j} = \Box$, то мы получаем, что логическим следствием данных двух дизъюнктов является значение ложь. $D_i, D_j \models \Box$.

Теперь нам потребуется утверждение, о том, что если $A \models B$ и

$B \models C$, то $A \models C$. Покажите истинность данного утверждения самостоятельно. Используя данное утверждение не сложно показать (покажите самостоятельно), что если логическим следствием двух дизъюнктов является значение ложь, то и логическим следствием всей КНФ $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j$ является ложь: $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j \models \square$. Значит $\models (D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j) \to \square$ и формула $(D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j) \to \square$ является тавтологией, что возможно, только если значение формулы $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j$ всегда ложно, или иначе, когда формула $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_j$ невыполнима (что и требовалась показать).

Два дизъюнкта, с помощью которых строится резольвента, образуют пару, которая называется контрарной парой. Один и тот же дизъюнкт может образовывать контрарные пары с достаточно большим числом других дизъюнктов. Возникает вопрос, как выбрать нужный дизъюнкт, чтобы не порождать лишних резольвент и максимально оптимальным образом вывести пустой дизъюнкт? Для решения этой задачи существуют различные стратегии резолютивного вывода, к которым мы обратимся в конце четвёртой главы.

3. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.1. ПРЕДИКАТЫ И ФУНКЦИИ

Логика высказываний не позволяет исследовать внутреннею структуру высказывания и строить на основании исследования этой структуры вывод. Например в логике высказываний не возможно доказать интуитивно достоверное утверждение:

- «Все картины, нарисованные Машей, красивы»;
- «Эта картина нарисована Машей, следовательно, эта картина красива».

Для доказательства правильности этого утверждения уже не достаточно просто знать истинность или ложность его составных частей. Нам необходимо знать, что говорится и о чём говорится. Чтобы провести разбор указанного утверждения, нужно выделить субъекты, объекты, предикаты и атрибуты:

«Маша нарисовала картину»,

Маша — субъект, нарисовала — предикат, картина — объект. Основные структуры, которые нас будут интересовать — это подлежащие, то о чём говорится, и предикаты, сказуемые — то, что говорится о подлежащем.

Определение 3.1.1. Субъект — это, то о чём что-то утверждается в высказывании.

Определение 3.1.2. Предикат — это, то, что утверждается о субъекте.

Пример 3.1.1. Запишем фразу «Маша нарисовала картину» в различных субъектно-предикатных формах. Посмотрим, как при этом будет меняться смысл.

Вариант 1. Пусть x — субъект «Маша», а G^1 — одноместный предикат «нарисовать картину». Тогда запись $G^1(x)$ означает, «что x (Маша) нарисовал картину».

Вариант 2. Пусть y — субъект «картина». Тогда, G^1 — одноместный предикат «быть нарисованным Машей», а обозначение $G^1(y)$, означает, что «картина y нарисована Машей».

Вариант 3. Пусть x и y — субъекты. Пусть x — это «картина», а y— «Маша». Тогда потребуется ввести двуместный предикат $G^2(x, y)$, означающий, что «что-то нарисовано кем-то». Получаем: «x нарисовано y», или, подставляя конкретные значения: «картина x нарисована Машей».

Вариант 4. Если принять, что x — «Маша», а y — «картина», то потребуется ввести двуместный предикат $K^2(x, y)$, означающий что «x нарисовал y». Подставляя конкретные значения вместо x и y, получаем: «Маша нарисовала картину».

Пример 3.1.2. Пусть область значения переменных x и y: $\{$Маша, Лена, картина, граффити$\}$. Будем использовать двуместный предикат $K^2(x, y)$: «x нарисовал y». Тогда получаем следующие выражения:

Маша нарисовала картину;
Маша нарисовала граффити;
Лена нарисовала картину;
Лена нарисовала граффити,
Граффити нарисовало Машу,
Картина нарисовала Лену,
…

Каждое из этих высказываний может быть как истинным, так и ложным.

Пример 3.1.2 показывает, что какой бы предикат мы ни взяли, по своей сути он — пропозициональная переменная, зависящая от внутренних параметров, которые тоже суть переменные. В предикате $K^2(x, y)$ параметрами являются x и y. С помощью подстановки вместо параметров в предикат $K^2(x, y)$ конкретных значений x и y получается высказывание, которое может быть как истинным, так и ложным. Таким образом, со всяким предикатом связана функция, которая каждый упорядоченный набор значений параметров сопоставляет некоторому истинному или ложному высказыванию.

Определение 3.1.3. Предикатом местности n называется функциональное отображение P:

$$\Im^n \to \{0,1\},\ \Im^n = \underbrace{\Im \times \Im \times \ldots \times \Im}_{n},$$

ставящее в соответствие каждому кортежу $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e_i \in \Im$, одно из значений 0 или 1. Записывается: P^n, где n — это число переменных от значения которых зависит истинность P. Множество $\Im$ называется носителем.

Пример 3.1.3. Пусть $\Im$ множество действительных чисел. Определим трёхместный предикат $R : \Im^3 \to \{0,1\}$ такой, что $R^3(x, y.z) = \textit{Истина}$ «1», тогда и только тогда, когда произведение $x \cdot y \cdot z = 100$, $x, y, z \in \Im$.

Пример 3.1.4. Зададим двуместный предикат $K^2 : \Im^2 \to \{0,1\}$, такой что $K^2(x, y) = \textit{Истина}$ «1», тогда и только тогда, когда x и y совпадают. Такой предикат, называют предикатом равенства и, как правило, записывают $x = y$ вместо $K^2 := (x, y)$.

Пример 3.1.5. Пусть множество $\Im$ — множество натуральных чисел без нуля. Определим двуместный предикат $L^2 : \Im^2 \to \{0,1\}$, такой что $L^2(x, y) = \textit{Истина}$ «1», тогда и только тогда, когда $x = y + z$, где $x, y, z \in \Im$. Такой предикат определяет отношение быть больше и может быть записан как $x > y$.

Определение 3.1.4. Функциональное отображение f:

$$\Im^n \to \Im,\ \Im^n = \underbrace{\Im \times \Im \times \ldots \times \Im}_{n},$$

ставящее в соответствие каждому кортежу $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e_i \in \Im$, некоторое значение из множества $\Im$, называется n-местным функциональным символом. Записывается: f^n, где n — это число переменных, от которых зависит значение f.

Далее приведена табл. 3.1, показывающая различия между предикатами и функциями.

Осталось ввести понятие константы. От переменной константу отличает только то, что это некоторый конкретный, уже заданный объект из носителя $\Im$, входящий в выражение. Примерами констант могут служить числа π и 0. Константа является нульместной функцией, то есть функцией не зависящий ни от каких переменных и всегда принимающей одно и то же, фиксированное значение.

Пример 3.1.6. Пусть на множестве $\Im$ натуральных чисел без нуля задан одноместный предикат $G^1 : \Im \to \{0,1\}$, $G^1(x,2)$ «быть чётным числом при умножении x на 2». Данный предикат всегда будет принимать только истинные значения, так как любое натуральное число, умноженное на 2, чётно. Но чтобы ввести данный предикат нам необходимо выделить константу 2.

Таблица 3.1

Предикаты и функции

Функции	Предикаты
Характеризует некоторую *операцию* над предметом или над множеством предметов из $\Im$, в результате которой получается некоторый конкретный *элемент принадлежащий множеству* $\Im$.	Характеризует *отношение* предмета из $\Im$ к чему-то, или некоторое отношение между предметами из $\Im$. Результатом действия является *высказывание, принимающее значений*: «0» или «1», «Истина» или «Ложь».
Примеры: +, *, взятие квадратного корня, возведение в степень n, взятие остатка по модулю m и т. д.	Пример: $\in$, =, $\leq$, «быть сделанным кем-то», «давать в сумме m», «быть красным», «быть чётным» и т. д.

Согласно определениям предиката и функции они есть конкретные отображения, ставящие в соответствие определённым кортежам, состоящим из элементов носителя, одно из значений 0 или 1 в случае предиката и определённый элемент носителя в случае функции. Допустим, мы хотим ввести некоторое абстрактное обозначение предиката, например $R^2(x, y)$. Пусть мы не хотим оговаривать, на каком носители задан этот предикат, и какое конкретно отображение ему соответствует. Нужно так определить $R^2(x, y)$, чтобы при необходимости его можно было рассматривать как любое отображение на всевозможных носителях. Например, предикат $R^2(x, y)$ может быть определён на множестве целых чисел и являться предикатом равенства, этот же предикат $R^2(x, y)$ может быть определён на множестве натуральных чисел и означает отношение $x \geq y$. Пусть решается задача, которая не требует от нас указания того, что именно подразумевается под $R^2(x, y)$. Нам достаточно знать только, что это некоторый двуместный предикат, зависящий от двух переменных x и y. Такое «абстрактное» обозначение называется предикатным символом.

Определение 3.1.5. Предикатным символом называется обозначение некоторого предиката определённой местности без уточнения того, на каком именно носители задан предикат и какое именно функциональное отображение его образует.

Пример 3.1.7. Запись $R^2(x, y)$ означает запись предикатного символа. Определив для этого предикатного символа носитель, например, $\Im = \{5, 6\}$ и, функциональное отображение (табл. 3.2) во множество $\{0,1\}$, получим конкретный предикат.

Аналогичным образом вводится понятие функционального символа.

Определение 3.1.6. Функциональным символом называется обозначение некоторой функции определённой местности без уточне-

Таблица 3.2

Функциональное отображение, определяющее предикат: $R^2(x,y)$

x	5	5	6	6
y	5	6	5	6
$R^2(x,y)$	0	1	0	0

ния того, на каком именно носители задана эта функция и какое именно функциональное отображение её образует.

Пример 3.1.8. Запись $f^2(x,y)$ означает запись функционального символа. Определив для этого функционального символа носитель, например, $\Im = \{5,6\}$ и, функциональное отображение (табл. 3.3), получим конкретную функцию.

Символы — это обозначения, которые становятся конкретными предикатами и функциями только после определения носителя и определённого функционального отображение, которое ассоциировано с полученным предикатом или функцией.

Договоримся об обозначениях. Под записью n-местного предикатного символа P^n (иногда будем писать $P^n(x_1,x_2,...x_n)$) будем понимать предикатный символ, содержащий n переменных, от значений которых зависит истинностное значение предиката ассоциированного с P^n. Под записью $P^1(x,c)$, где x — переменная, c — константа, будем понимать предикатный символ, содержащий одну переменную и

Таблица 3.3

Функциональное отображение, определяющее функцию: $f^2(x,y)$

x	5	5	6	6
y	5	6	5	6
$R^2(x,y)$	5	5	5	6

одну константу. Такой предикатный символ будем считать одноместным. Как правило, мы будем писать $P^1(x)$ вместо $P^1(x,c)$. Так же будем записывать и функциональные символы: f^m. Если в функциональный символ $f^1(y,c)$ входит одна константа и одна переменная, значение которой определяет значение функции ассоциированной с f^1, то f^1 будем считать одноместным. Такой функциональный символ будем записывать как: f^1, $f^1(x,c)$, $f^1(x)$.

3.2. КВАНТОРЫ, ТЕРМЫ, ФОРМУЛЫ

Определение 3.2.1. Конъюнкцией двух предикатов P^n и R^m, называется предикат $P^n \wedge R^m$, который принимает значение истины только при тех значениях переменных, входящих в P^n и R^m, при которых одновременно истинны предикаты P^n и R^m.

Пример 3.2.1. Пусть предикат $P^1(x)$ означает свойство для x быть чётным, а предикат $R^1(y)$означает свойство для y делится на 5 без остатка. Тогда предикат $P^1(x) \wedge R^1(y)$ истинен при $x=2$, $y=10$ и ложен при $x=2$, $y=7$ или при $x=3$ и $y=15$.

Пример 3.2.2. Пусть предикат $P^1(x)$ означает свойство для x быть чётным, а предикат $R^1(x)$означает свойство для y делится на 7 без остатка. Тогда предикат $P^1(x) \wedge R^1(x)$ истинен тогда и только когда x одновременно и чётное число, и делится на 7 без остатка.

Определение 3.2.2. Дизъюнкцией двух предикатов P^n и R^m, называется предикат $P^n \vee R^m$, который принимает значение истины только при тех значениях переменных, входящих в P^n и R^m, при которых истинен хотя бы один из предикатов P^n и R^m.

Пример 3.2.3. Пусть предикат $P^1(x)$ означает свойство для x быть нечётным, а предикат $R^1(y)$означает свойство для y делится на 3 без остатка. Тогда предикат $P^1(x) \vee R^1(y)$ истинен при $x=5$, $y=3$; истинен при $x=5$, $y=2$; истинен при $x=2$, $y=3$. Предикат $P^1(x) \vee R^1(y)$ ложен при $x=2$ и $y=2$.

Определение 3.2.3. Отрицанием предиката P^n называется такой предикат $\neg P^n$, который истинен, если P^n — ложь, и ложен, если P^n — истинен.

Определение 3.2.4. Импликацией двух предикатов P^n и R^m, называется предикат $P^n \to R^m$, который принимает значение ложь только при тех значениях переменных, входящих в P^n и R^m, при которых истинен предикат P^n и ложен предикат R^m.

Пример 3.2.4. Пусть предикат $P^1(x)$ означает свойство для x делиться на 9 без остатка, а предикат $R^1(x)$означает свойство для x быть чётным. Тогда предикат $P^1(x) \to R^1(x)$ истинен при $x=2$, истинен при $x=7$, истинен при $x=18$. Предикат $P^1(x) \to R^1(x)$ будет ложным при $x=9$.

Определение 3.2.5. Квантор общности обозначается $\forall$ и символизирует запись «для всех». Пусть $P^n(x)$ некоторый предикат, истинность которого определяется, в том числе, в зависимости от значения переменной x. Тогда запись $\forall x P^n(x)$ означает, что для любого x всегда истинно $P^n(x)$. Очевидно, что такое утверждение может быть как истинным, так и ложным.

Пример 3.2.5. Пусть за носитель $\mathfrak{I}$ принято множество натуральных чисел. Введём одноместный предикат $P^1(x)$ «x является чётным числом». Очевидно, что при $x=1$ получим $P^0(1)=0$, при $x=2$ получим $P^0(2)=1$. Запись $\forall x P^1(x)$ означает, что при любом x

предикат $P^1(x)$ будет истинным. Но не каждое натуральное число чётно, поэтому $\forall x P^1(x)$=0, или, иначе говоря, данное утверждение ложно.

Пример 3.2.6. За носитель $\mathfrak{I}$ примем множество всех натуральных чисел. Введём двуместный предикат $R^2(x,y)$ означающий, что $x \geq y$. Тогда выражение $\forall x R^2(x,y)$ означает, что для любого x выполнено, что $x \geq y$, где y изменяет своё значение на множестве $\mathfrak{I}$. Сказать о том истинно $\forall x R^2(x,y)$ или ложно мы не можем до тех пор, пока не определено значение y. При $y = 0$ очевидно, что $\forall x R^1(x,0) = 1$ так как все числа в натуральном ряду больше или равны 0. Если $y = 1$ утверждение $\forall x R^1(x,1) = 0$, так как при $x = 0$ предикат $R^1(x,1)$ становится ложным.

Пример 3.2.7. Определим носитель: $\mathfrak{I} = \{0,1\}$. Введём двуместный предикат $R^2(x,y)$ означающий, что $x + y \geq 0$. Тогда выражение $\forall x \forall y R^2(x,y)$ означает, что для любых x и y выполнено $x + y \geq 0$. Пусть x=0, тогда предикат $\forall y R^1(0,y)$ всегда истинен: $0+0 \geq 0$, $0+1 \geq 0$. Пусть x=1, тогда предикат $\forall y R^1(1,y)$ всегда истинен: $1+0 \geq 0$, $1+1 \geq 0$. Таким образом, получается, что действительно при любых x и y истинен предикат $\forall x \forall y R^2(x,y)$. А это означает, что $\forall x \forall y R^2(x,y) = 1$.

Определение 3.2.6. Квантор существования обозначается $\exists$ и символизирует запись «существует». Пусть $P^m(x)$ некоторый предикат, истинность которого определяется, в том числе в зависимости от значения переменной x. Тогда запись $\exists x P^m(x)$ означает, что существует такой x, что истинно $P^m(x)$. Очевидно, что такое утверждение может быть как истинным, так и ложным.

Пример 3.2.8. Пусть носитель $\Im$ — множество натуральных чисел. Введём одноместный предикат $P^1(x)$ «x строго меньше 0». Запись $\exists x P^1(x)$ означает, что существует x такой, что предикат $P^1(x)$ истинен. Но в натуральном ряде нет чисел меньших, чем 0. Значит, $\exists x P^1(x) = 0$.

Пример 3.2.9. Пусть носитель $\Im$ — множество натуральных чисел. Введём двуместный предикат $R^2(x, y)$ означающий, что $x + y = 0$. Тогда выражение $\exists x R^2(x, y)$ означает, что существует такой x, что будет выполнено $x + y = 0$. Значение предиката $\exists x R^2(x, y)$ остается неопределенным до тех пор, пока неуказанно значение y. Пусть $y = 0$, тогда $\exists x R^1(x, 0) = 1$, так как существует такой x, что $x + y = 0$. Это $x = 0$.

Пример 3.2.10. Определим носитель: $\Im = \{-1, 0, 1\}$. Введём двуместный предикат $R^2(x, y)$ означающий, что $x + y = 0$. Тогда выражение $\forall x \exists y R^2(x, y)$ означает, что для любого x существует такой y, что выполнено $x + y \geq 0$. Пусть x=0, тогда предикат $\exists y R^1(0, y) = 1$, так как среди элементов множества $\Im$ существует такой y, что $0 + y = 0$. Это $y = 0$. Пусть x=1, тогда предикат $\exists y R^1(1, y) = 1$, так как $R^0(1, -1) = 1$. Пусть x=-1, тогда предикат $\exists y R^1(-1, y) = 1$, так как при $y = 1$ истинно выражение $-1 + 1 = 0$. Таким образом, получается, что действительно при любых x существует y такой, что истинен предикат $R^2(x, y)$. А это означает, что $\forall x \exists y R^2(x, y) = 1$.

Определение 3.2.7. Сигнатурой будем называть систему, включающую в себя:

- множество переменных Var;
- множество констант $Const$;

- множество предикатных символов $Pred$ и функциональных символов $Funk$.

Сигнатура записывается как четвёрка $< Var, Const, Pred, Funk >$. В общем случае будем считать, что все множества входящие в сигнатуру являются конечными или счетными.

Определение 3.2.8. Пусть зафиксирована некоторая сигнатура. Термами данной сигнатуры являются:

- любая переменная или константа, заданная в сигнатуре;
- составным термом является функциональный символ, взятый из сигнатуры: $f(t_1, t_2, ..., t_k)$, если $t_1, t_2, ..., t_k$ — термы;
- других термов нет.

Множество всех термов выбранной сигнатуры обозначается как $Term$.

Пример 3.2.11. Зафиксируем сигнатуру:

$$< Var, Const, Pred, Funk >,$$

в которой: $Var = \{x_1, x_2\}$, $Const = \{c_1, \pi, e\}$, $Funk = \{f^1, g^2\}$, тогда:

- x_1 и x_2 — термы;
- c_1, π, e — термы;
- $f^1(c_1, f^1(x_1, c_1))$, $f^1(x_1, \pi)$, $g^2(f^1(x_1, c_1), f^1(x_2, e))$, $g^2(x_1, f^1(c_1, x_2))$, $g^2(g^2(x_1, x_1), f^1(c_1, x_2))$ и т. д. — термы.

Термы, являющиеся переменными или константами, называют основными термами. Остальные термы являются составными.

Индуктивное определение понятия терм достаточно полезно. Пусть нам требуется доказать, что все термы обладают некоторым свойством. Тогда нам достаточно показать, что все мельчайшие термы (переменные и константы) обладают этим свойством, и что если f^k есть k-местный функциональный символ, а $t_1, t_2, ..., t_k$ — термы обладающие требуемым свойством, то этим же свойством обладает и терм: $f(t_1, t_2, ..., t_k)$. Тогда, исходя из индуктивного определения терма, очевидно, что всякий сконструированный терм будет обладать требуемым свойством.

В понятие терма включаются переменные, константы и функциональные символы. Куда деваются предикаты и предикатные символы? С ними связано другое важнейшее понятие, которое так же определяется индуктивно — понятие формулы.

Определение 3.2.9. Атомарной формулой является выражение вида $P(t_1,t_2,...,t_n)$, где P предикатный символ, $t_1,t_2,...,t_n$ — термы, определённые в выбранной сигнатуре.

Определение 3.2.10. Зафиксируем сигнатуру. Пусть φ и ψ атомарные формулы выбранной сигнатуры, тогда формулами будут являться выражения вида:

- $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$;
- $\forall x(\varphi)$ и $\exists x(\varphi)$, где x — предметная переменная;
- никаких других формул нет.

Множество всех формул выбранной сигнатуры обозначается как $Form$.

Определение 3.2.11. Формулы, введённые согласно описанному выше способу, называют формулами первого порядка выбранной сигнатуры.

Пример 3.2.12. Зададим сигнатуру $< Var, Const, Pred, Funk >$. Пусть $Var = \{x, y, z\}$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^1, G^2\}$, $Funk = \{f^2\}$, тогда формулами являются выражения:

- $P^1(f^2(x,z))$;
- $G^2(x,y)$;
- $G^2(f^2(z,z),z)$;
- $\exists zP^1(f^2(z,y))$;
- $\exists x((G^2(f^2(z,y),z) \,\&\, G^2(z,f^2(z,z)) \to P^1(y))$;
- $(P^1(z) \wedge \forall xG^2(f^2(x,y),y) \to \exists zP^1(f^2(z,x)))$ и т. д.

Пример 3.2.13. Рассмотрим сигнатуру $< Var, Const, Pred, Funk >$, где $Var = \{x\}$, $Const = \{c\}$, $Pred = \{P^1, G^1\}$, $Funk = \varnothing$. Запишем формулу $\forall x P^1(x) \to G^1(x)$. Формула записана с помощью функциональных и предикатных символов. Именно так мы в дальнейшем и будем записывать формулы. Теперь примем за носитель $\mathfrak{I}$ множество всевозможных имён. Определим константу c как имя Маша. Пусть предикат $P(x)$ утверждает, что x — Маша, предикат $G(x)$ утверждает, что x — рисует. Тогда выше записанная формула обретает смысл, утверждающий, что: «для любого x из того, что x Маша следует, что x рисует », а предикатные символы, используемые в формуле, становятся предикатами.

Пример 3.2.14. Пусть заданы сигнатура, в которой $Var = \varnothing$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^0, G^0, H^0\}$, $Funk = \varnothing$, и формула первого порядка данной сигнатуры $P \vee G \to \neg H$. Пусть:

- P^0 означающий «на улице пасмурно»;
- G^0 означающий «на улице холодно»;
- H^0 означает «идти гулять».

Тогда формула: $P \vee G \to \neg H$, читается так: «на улице пасмурно или холодно, значит, не пойдём гулять».

Составные формулы записываются с использованием скобок. Такая запись позволяет в правильной последовательности применять логические операции к атомным формулам. Однако существует соглашение, позволяющее опустить многие скобки. Данное соглашение устанавливает для логических операций порядок старшинства: $\forall, \exists, \neg$, затем $\wedge, \vee$ и лишь затем $\to$. Иногда в качестве соглашения принимают, старшинство конъюнкции над дизъюнкцией.

Пример 3.2.15. Упростим запись следующей формулы:

$$\underline{(}\forall x((P(y) \,\&\, G(x,y)) \vee L(y))) \to (\exists z P(z)) \,\&\, (\exists y P(y))\underline{)},$$

$$\forall x((P(y) \,\&\, G(x,y)) \vee L(y))) \to \underline{(}\exists z P(z)\underline{)} \,\&\, \underline{(}\exists y P(y)\underline{)},$$

$$\forall x((P(y) \,\&\, G(x,y)) \vee L(y))) \to \exists z P(z) \,\&\, \exists y P(y).$$

Если принять старшинство конъюнкции над дизъюнкцией, то исходную формулу можно упростить:

Таблица 3.4

Функциональное отображение Λ

$x \in \Im$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	…
$P^1(x)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$	$P(7)$	…
0/1	1	0	1	0	1	0	1	0	…

$$\forall x(P(y) \,\&\, G(x,y) \vee L(y) \to \exists z P(z) \,\&\, \exists y P(y)$$

Пример 3.2.16. Восстановите скобки для следующей формулы:

$$\forall y(P(y) \wedge \exists x(G(x,y) \vee L(y) \wedge H)) \to \exists z(\neg R(z) \wedge P(z)),$$

$$(\forall y(P(y) \wedge \exists x(G(x,y) \vee (L(y) \wedge H)))) \to (\exists z((\neg R(z)) \wedge P(z))).$$

Для интерпретации мы часто используем естественный язык. В математике это обычно не принято. Более того, мы уже отмечали, что в логике нас интересуют только значения истинности, но не сам смысл утверждаемого. Нужно всегда помнить, что интерпретируя предикатные символы, мы определяем именно функциональные отображения. Так интерпретируя предикатный символ как предикат: «x делит на 2 без остатка», где $x \in \Im$, а $\Im$ — множество натуральных чисел, подразумевается функциональное отображение Λ, которое может быть представлено, в виде таблицы с бесконечным счётным числом элементов (табл. 3.4).

3.3. СВОБОДНЫЕ И СВЯЗАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Переменные, входящие в формулы могут быть как свободными, так и связанными.

Определение 3.3.1. Переменная, входящая в формулу, называется связанной, если она попадает в область действия одного из кванторов.

Определение 3.3.2. Переменная называется свободной, если она не является связанной.

Определение 3.3.3. Переменная, имеющая свободное вхождение в формулу называется параметром формулы (соответственно: параметром предикатного символа, функционального символа, предиката или функции).

Говоря о n-местном предикате или о n-местной функции, мы всегда говорим о предикате или функции содержащей n параметров, или иначе n отличных друг от друга свободных переменных. Кванторы позволяют уменьшать число параметров в формуле.

Пример 3.3.1. За носитель $\Im$ примем множество целых чисел. На данном множестве рассмотрим одноместный предикат $P^1 : N \to \{0,1\}$ такой, что $P^1(x)$ истинно только тогда, когда $x \geq 0$. Предикат $P^1(x)$ содержит одну свободную переменную x. Из предиката, содержащего один параметр, получается столько же высказываний (предикатов без параметров: P^0) сколько различных значений принимает параметр. Теперь добавим к данному предикату квантор общности по переменной x, получим выражение $\forall x P(x)$, говорящее: для любого x верно, что $x \geq 0$. Это утверждение ложно. Выражение $\forall x P(x)$ является уже не предикатом с одним параметром, а непосредственно высказыванием. От каждого конкретного x ничего не зависит, важно только то, что утверждение «быть больше или равным 0» не верно для всего множества целых чисел. Выражение $\forall x P^1(x)$ образует нульместный предикат, в то время как в выражение $P^1(x)$ являлось одноместным предикатом.

Пример 3.3.2. Воспользуемся условиями предыдущего примера, только вместо квантора общности будем рассматривать квантор существования. Запишем: $\exists x P(x)$ и получим утверждение: существует такой x, что $x \geq 0$. Это тоже высказывание, или нульместный предикат, значение этого предиката — истина.

В выражениях $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$ переменная x является связанной.

Кванторы применимы не только к одноместным предикатам, но и к двуместным и трехместным и так далее. Взяв n-местный предикат $P(x, y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ и приписав к нему, квантор всеобщности по x, мы получим $(n-1)$-местный предикат $\forall x P(x, y_1, y_2, ..., y_{n-1})$, уже не зависящий от параметра x (остальные параметры сохранились).

Пример 3.3.3. Выделим свободные и связанные переменные в формуле:

$$\forall x(\forall z \exists y(\neg P^1(y) \,\&\, R^2(y,z)) \to R^2(f^1(x),z)),$$

$$\forall \boxed{x}(\forall \bar{z} \exists \bar{\bar{y}}(\neg P^1(\bar{\bar{y}}) \,\&\, R^2(\bar{\bar{y}},\bar{z})) \to R^2(f^1(\boxed{x}),z)).$$

Данная формула имеет всего один параметр z, входящий в предикатный символ $R^2(f^1(x),z)$. Вхождение z в предикатный символ $R^2(y,z)$ является связанным.

В связи с кванторами в логике предикатов выделяют предикаты нулевого порядка (без использования кванторов), предикаты первого порядка (кванторы используются только по отношению к переменным), предикаты высшего порядка (кванторы используются по отношению к функциям). В дальнейшем мы будем рассматривать только предикаты первого порядка.

3.4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Рассмотрим сигнатуру $< Var, Const, Pred, Funk >$ и определим понятие интерпретации.

Определение 3.4.1. Говорят, что задана интерпретация I некоторой сигнатуры $< Var, Const, Pred, Funk >$, если:

- указанно не пустое множество $\mathfrak{I}$, называемое носителем интерпретации;
- каждому n-местному предикатному символу сигнатуры поставлен в соответствие n-местный предикат, определённый на множестве $\mathfrak{I}$;

- каждому m-местному функциональному символу сигнатуры поставлена в соответствие m-местная функция, определённая на множестве $\mathfrak{I}$;
- каждой константе поставлен в соответствие объект множества $\mathfrak{I}$.

Пример 3.4.1. Пусть задана сигнатура $< Var, Const, Pred, Funk >$, где $Var = \{x_1\}$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^1\}$, $Funk = \varnothing$. Построим некоторую интерпретацию I данной сигнатуры. За носитель $\mathfrak{I}$ интерпретации I выберем множество всех натуральных чисел, значение которых больше чем 3. Что бы задать интерпретацию потребуется предикатному символу $P^1(x_1)$ поставить в соответствие некоторый предикат, определённый на значениях $\mathfrak{I}$. Для этого необходимо задать функцию, которая каждой подстановке в предикат $P^1(x_1)$ вместо x_1 объекта из носителя $\mathfrak{I}$ будет ставить в соответствие одно их значений — истина «1» или ложь «0». Саму функцию можно задать с помощью таблицы истинности (табл. 3.5). Определим предикат $P^1(x_1)$ так, что при чётных значениях переменной x_1 он будет истинным, а при нечётных значениях x_1 — ложным. Таким образом, мы проинтерпретировали все элементы сигнатуры и интерпретация построена.

Интерпретация абстрактным обозначениям придаёт определённый семантический смысл. Зададимся вопросом: как в случае интерпретации ведёт себя нульместный предикат? Пусть заданная сигнатура содержит только предикатный символ P^0. Произвольным образом определим носитель $\mathfrak{I}$, а предикатному символу P^0 поставим в соответствие предикат P^0, выражающий некоторое ложное утверждение.

Таблица 3.5

Функция интерпретации предикатного символа $P^1(x_1)$

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
$I(P^1(x))$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	…

Таким образом, интерпретация будет построена. Сопоставив предикатному символу P^0 предикат P^0, выражающий некоторое истинное утверждение, получим другую интерпретацию. Предикат P^0 не содержит в себе параметров, и является высказыванием, которому соответствует одно из значений «0» или «1». Любой нульместный предикат всегда принимает строго одно неизменное значение «1» или «0» в зависимости от того, истинно или ложно высказываемое им в выбранной интерпретации.

Пример 3.4.2. Пусть задана сигнатура $< Var, Const, Pred, Funk >$, где $Var = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^1, P^2, P^3, P^4\}$, $Funk = \{f^1, f^2, f^3, f^4\}$. Пусть носитель $\mathfrak{I}$ интерпретации состоит всего из одного объекта k. Как будет выглядеть функция интерпретации в таком случае? Сколько различных интерпретаций можно задать при определённом таким образом носителе $\mathfrak{I}$? Очевидно, что какой бы функциональный n-местный символ выбранной сигнатуры мы ни взяли бы ($1 \le n \le 4$) при интерпретации ему будет поставлена в соответствие некоторая функция n переменных. Иначе говоря, во время интерпретации каждому n-местному функциональному символу будет поставлено в соответствие множество упорядоченных кортежей длины n состоящих из объектов носителя $\mathfrak{I}$, и каждому такому кортежу будет поставлен в соответствие один объект носителя $\mathfrak{I}$, то есть k. В самом деле так как носитель состоит всего из одного элемента k, то множество упорядоченных кортежей длины n будет состоять всего из одного кортежа: последовательности длины n из элементов k. Никаких других кортежей (содержащих объекты, отличные от k) мы получить не можем. Никакой кортеж ничему, кроме как k, мы сопоставить не можем. Поэтому все переменные сигнатуры принимают только одно значение равное k, и любой составной терм всегда своим значением имеет только k.

Таблица 3.6

Интерпретации функциональных символов

$f^m \in Funk$	$f^1(x)$	$f^2(x,y)$	$f^3(x,y,z)$	$f^4(x,y,z,l)$
Кортеж	(k)	(k,k)	(k,k,k)	(k,k,k,k)
$f^m \to \overline{f^m}$	$f^1(k)$	$f^2(k,k)$	$f^3(k,k,k)$	$f^4(k,k,k,k)$
$\overline{f^m} : \Im_I^m \to \Im_I$	k	k	k	k

Чтобы задать интерпретацию, нужно так же каждому предикатному символу поставить в соответствие некоторый предикат. При условии, что все переменные, от которых зависит значение предиката, принимают строго одно значение k, то каждому n-местному предикатному символу сигнатуры, может быть сопоставлен предикат, принимающий всегда либо ложное (в одной интерпретации), либо истинное (в другой интерпретации) значение при любых значениях термов входящих в него (значение всех этих термов есть k).

Выпишем все возможные интерпретации (табл. 3.6) функциональных символов выбранной сигнатуры при фиксированном носителе $\Im = \{k\}$. Будем использовать обозначения: $f^m \in Funk$ — функциональный символ; $f^m \to \overline{f^m}$ — функция $\overline{f^m}$, сопоставленная функциональному символу f^m; $\overline{f^m} : \Im_I^m \to \Im_I$ — значения, принимаемые функцией $\overline{f^m}$.

Исходя из вышесказанного ясно, что на носителе $\Im$, состоящего из одного элемента, существует лишь одна функция интерпретации для функциональных символов выбранной сигнатуры.

Построим функцию интерпретации (табл. 3.7) для предикатных символов. Примем следующие обозначения: $P^h \in Pred$ — предикатный символ; $P^h \to \overline{P^h}$ — предикат $\overline{P^h}$, сопоставленный предикатному символу P^h; $\overline{P^h} : \Im_I^h \to \{0,1\}$ — значения истинности, принимаемые предикатом $\overline{P^h}$.

Таблица 3.7

Интерпретация для предикатных символов

$P^h \in Pred$	$P^1(x)$	$P^2(x,y)$	$P^3(x,y,z)$	$P^4(x,y,z,l)$
Кортеж	(c)	(c,c)	(c,c,c)	(c,c,c,c)
$P^h \to \overline{P^h}$	$P^1(c)$	$P^2(c,c)$	$P^3(c,c,c)$	$P^4(c,c,c,c)$
$\overline{P^h} : \Im_I^h \to \{0,1\}$	0	0	0	0

Таблица 3.8

Другие возможные интерпретации P^h

$\overline{P^h} : \Im_I^h \to \{0,1\}$	0	1	1	0
$\overline{P^h} : \Im_I^h \to \{0,1\}$	1	0	0	0
$\overline{P^h} : \Im_I^h \to \{0,1\}$	1	1	1	1
…				

Мы так выбрали функцию интерпретации I, что каждому кортежу было поставлено в соответствие «0». Однако мы могли иначе задать функцию I, тогда последняя строчка выглядела бы иначе (табл. 3.8).

Несложно догадаться, что число способов, которыми можно задать различные функции интерпретации для предикатных символов равно 2^4. Именно таково число всех возможных различных последовательностей длины четыре, составленных из «0» и «1». Доказывается утверждение очень просто: первая позиция из четырёх принимает одно из двух значений, вторая позиция, так же принимает одно из двух значение и т. д. В результате получаем: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

Таким образом, на заданном носителе $\Im = \{k\}$ все функциональные символы могут быть оценены единственным образом, а предикатные символы 2^4 способами. Значит, для заданной сигнатуры при носителе $\Im = \{k\}$ всего возможно $1 \cdot 2^4 = 2^4$ попарно различных интерпретаций.

Упражнение 3.4.1. Воспользуйтесь исходными условиями примера 3.3.2 и посчитайте: сколько для выбранной сигнатуры возможно различных интерпретаций с носителем $\Im = \{k, l\}$.

Пусть задана сигнатура $< Var, Const, Pred, Funk >$, где $Var = \{x_1, x_2\}$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^2, G^2\}$, $Funk = \varnothing$. Рассмотрим формулу данной сигнатуры:

$$P^2(x_1, x_2) \wedge P^2(x_2, x_1) \to R^2(x_1, x_2).$$

Построим некоторую интерпретацию I выбранной сигнатуры. Носителем интерпретации $\Im$ выберем множество целых чисел. Предикатный символ P^2 определим как предикат $P^2(x_1, x_2)$ истинный тогда и только тогда, когда числовые значения переменных x_1 и x_2 находятся в отношение $x_1 \le x_2$. Предикатный символ G^2 определим как предикат $G^2(x_1, x_2)$ истинный тогда и только тогда, когда числовые значения переменных x_1 и x_2 совпадают: $x_1 = x_2$.Что можно сказать об истинности выше определённой формулы в данной интерпретации? Значение истинности этой формулы в построенной интерпретации определяется конкретными значениями переменных x_1 и x_2. Задав интерпретацию, можно построить таблицу истинности (табл. 3.9) для указанной формулы. Даная таблица будет состоять из бесконечного счётного числа элементов. Здесь выписана лишь часть таблицы. Указанная формула в выбранной интерпретации будет истинна при любых x_1 и x_2.

Возьмём первый столбец построенной таблицы: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Присвоив переменным x_1 и x_2 конкретные значения носителя $\Im$, мы тем самым «оценили» термы x_1 и x_2. Оценив термы, входящие в предикаты, мы из предикатов получили высказывания и их истинностные значения.

Таблица 3.9

Оценка формулы $P^2(x_1,x_2) \wedge P^2(x_2,x_1) \to R^2(x_1,x_2)$ в интерпретации I

x_1	0	0	-1	-1	6	-5	7	-8	18
x_2	-1	2	9	-1	5	-5	9	3	18
$P^2(x_1,x_2)$	0	1	1	1	0	1	1	1	1
$P^2(x_2,x_1)$	1	0	0	1	1	1	0	0	1
$P^2(x_1,x_2) \wedge P^2(x_2,x_1)$	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
$R^2(x_1,x_2)$	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
$P^2(x_1,x_2) \wedge P^2(x_2,x_1) \to R^2(x_1,x_2)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

В результате было получено истинностное значение формулы при фиксированной оценке термов x_1 и x_2. Таким образом, что бы определить истинностное значение формулы некоторой сигнатуры необходимо задать интерпретацию выбранной сигнатуры и в выбранной интерпретации оценить термы, входящие в предикаты. В этом случае предикаты, входящие в формулу, приобретают конкретные значения истинности, зная которые несложно определить истинностное значение формулы.

Упражнение 3.4.2. Задайте интерпретацию сигнатуры $< Var, Const, Pred, Funk >$, отличную от рассмотренной, где $Var = \{x_1, x_2\}$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^2, G^2\}$, $Funk = \varnothing$. Рассмотрите в выбранной интерпретации формулу:

$$\forall x_1 \forall x_2 P^2(x_1,x_2) \wedge P^2(x_2,x_1) \to R^2(x_1,x_2).$$

Каким будет истинностное значение данной формулы в построенной вам интерпретации?

Определение 3.4.2. Оценкой констант называется процедура, которая каждой константе из сигнатуры ставит в соответствие фиксированный объект из носителя $\mathfrak{I}$, который определяется заданной интерпретацией.

Пример 3.4.3. Пусть задана сигнатура $< Var, Const, Pred, Funk >$, где $Var = \{x_1\}$, $Const = \{c\}$, $Pred = \{P^1\}$, $Funk = \varnothing$. Зададим некоторую интерпретацию данной сигнатуры. В качестве носителя $\mathfrak{I}$ выберем множество натуральных чисел. Константу c примем равную 2. Предикатный символ P^1 определим как предикат $P^1(x_1)$ истинный только при $x_1 = 2$. При любой оценке константы c, в построенной интерпретации, её значение будет рано 2.

Определение 3.4.3. Оценкой переменных в формуле при заданной интерпретации называется процедура, ставящая в соответствие каждой переменной, входящей в формулу, некоторый элемент носителя интерпретации $\mathfrak{I}$.

Пример 3.4.4. Будем рассматривать сигнатуру и интерпретацию заданные в примере 3.3.1. Тогда вариантов различных оценок переменной x_1 столько же, сколько различных объектов содержит носитель $\mathfrak{I}$. То есть: $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_1 = 3$, $x_1 = 4$, … — это всё различные оценки переменной x_1. При оценке $x_1 = 1$ атомарная формула $P^1(x_1)$ ложна, при оценке $x_1 = 2$ атомарная формула $P^1(x_1)$ истинна.

Определение 3.4.4. Оценкой в выбранной интерпретации составного терма $f(t_1, t_2, ... t_n)$, входящего в формулу, где t_1, $t_2, \ldots$, t_n — некоторые термы, называется процедуры, которая:

- оценивает термы t_1, $t_2, \ldots$, t_n, и порождает кортеж $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где v_1, $v_2, \ldots$, v_n — значения из носителя $\mathfrak{I}$, являющиеся оценками термов t_1, $t_2, \ldots$, t_n;

- кортежу $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ставит в соответствие объект из носителя $\Im$, определяемый значением функции $f(v_1, v_2, ..., v_n)$ в выбранной интерпретации.

Пример 3.4.5. Пусть задана сигнатура $< Var, Const, Pred, Funk >$, где $Var = \{x_1, x_2\}$, $Const = \varnothing$, $Pred = \{P^1\}$, $Funk = \{f^2\}$. Будем рассматривать формулу $P^1(f^2(x_1, f^2(x_1, x_2)))$. Зададим некоторую интерпретацию данной сигнатуры. В качестве носителя $\Im$ выберем множество целых чисел. Предикатному символу P^1 поставим в соответствие предикат $P^1(t_1)$, принимающий истинностное значение, если $t_1 \geq 0$, где t_1 — терм выбранной сигнатуры. Функциональному символу f^2 поставим в соответствие функцию $f^2(t_2, t_3)$, задающую операцию сложения на множестве целых чисел: $t_2 + t_3$, где t_2, t_3 — термы выбранной сигнатуры. Термы t_1, t_2, t_3 не обязательно попарно различны. Введём оценку: $x_1 = -4$, $x_2 = 5$, тогда:

$$f^2(x_1, x_2) = -4 + 5 = 1,$$
$$f^2(x_1, f^2(x_1, x_2)) = -4 + 1 = -3,$$

истинностное значение полученного оценённого предиката:

$$P^1(f^2(x_1, f^2(x_1, x_2))) = P^1(-3) \text{ — ложь.}$$

Упражнение 3.4.3. Воспользуйтесь условиями примера 3.3.2. и в выбранной интерпретации определите истинностное значение формулы, оценив составные термы при оценке переменных: $x_1 = -1$, $x_2 = 12$. Для примера 3.3.2. задайте интерпретацию, отличную от заданной в примере и определите истинностное значение формулы на некоторой, произвольно выбранной оценке.

О формуле обычно говорят, что она истинная или ложна на выбранной оценке в выбранной интерпретации. Если сказано, что формула выбранной сигнатуры истинна на любой оценке в любой интерпретации, то это означает, что какая бы интерпретация для выбранной сигнатуры не была бы построена, при любых значениях переменных, если они взяты из носителя интерпретации, рассматриваемая формула будет истинна.

Определение 3.4.5. Формула называется оценённой, если данная формула рассматривается на конкретной оценке своих параметров в некоторой интерпретации I.

Пример 3.4.6. Пусть задана некоторая сигнатура и формула этой сигнатуры $P^1(x_1) \wedge G^0$. Построим интерпретацию I выбранной сигнатуры: носитель $\Im = \{e_1, e_2\}$, $G^0 = 1$, $P^1(e_1) = 0$ и $P^1(e_2) = 1$. Рассмотрим взятую формулу на оценке $x_1 = e_1$, тогда получим выражение, значение которого «ложь» $P^1(e_1) \wedge G^0$. Формулу $P^1(e_1) \wedge G^0$ будем называть формулой оценённой в интерпретации I или просто оценённой формулой.

3.5. ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ И ВЫПОЛНИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Определение 3.5.1. Зафиксируем сигнатуру. Формула заданной сигнатуры называется выполнимой, если она истинна, хотя бы на одной оценке какой-либо интерпретации I данной сигнатуры.

Определение 3.5.2. Зафиксируем сигнатуру. Формула заданной сигнатуры называется общезначимой, если она истина на каждой оценке любой интерпретации I выбранной сигнатуры.

Очевидна связь общезначимых формул с тавтологиями логики высказываний: если взять любую тавтологию и вместо её пропозициональных переменных подставить произвольные формулы выбранной сигнатуры, то получится общезначимая формула. Формулы, которые мы подставляем вместо пропозициональных переменных на каждой заданной оценке каждой интерпретации I принимают значение истина или ложь. Вне зависимости от того, какие значения приняли пропозициональные переменные, тавтология всегда принимает значение истина.

Пример 3.5.1. Рассмотрим тавтологию $A \vee \neg A$. Вместо пропозициональной переменной A подставим формулу некоторой сигнатуры Σ: $P^2(x, y) \to Q^1(f^1(x))$. Получим формулу:

$$(P^2(x, y) \to Q^1(f^1(x))) \vee \neg(P^2(x, y) \to Q^1(f^1(x))).$$

На каждой конкретной оценке функциональных и предикатных символов в выбранной сигнатуре формула $P^2(x, y) \to Q^1(f^1(x))$ будет принимать одно из двух значение истина или ложь. Например, значение $P^2(x, y) \to Q^1(f^1(x))$ ложь, тогда получаем что A ложь, значение $\neg A$ истина, значение исходной формулы $A \vee \neg A$ тогда истина. Аналогично, если значение формулы $P^2(x, y) \to Q^1(f^1(x))$ истина.

В логике предикатов существуют общезначимые формулы, не являющиеся частными случаями пропозициональных тавтологий. Приведём пример общезначимых и выполнимых формул, а затем приведём список основных общезначимых формул.

Пример 3.5.2. Пусть задана сигнатура $< Var, Const, Pred, Funk >$, включающая в себя $x, y \in Var$, $H^1, G^1, P^2, K^2 \in Pred$. Общезначимые формулы данной сигнатуры:

$$\exists x \forall y P^2(x, y) \to \forall y \exists x P^2(x, y),$$
$$\forall x \neg H^1(x) \to \neg \exists x H^1(x).$$

Выполнимые, но не общезначимые формулы:

$$\neg H^1(x) \wedge P^2(x, y),$$
$$\exists x G^1(x) \to \forall x G^1(x),$$
$$\exists x P^2(x, y) \vee \exists x G^1(x),$$
$$\exists y K^2(x, y) \to H^1(x).$$

Рассмотрим последнюю формулу. Она выполнима. Покажем это. Зададим интерпретацию I. За носитель $\mathfrak{I}$ интерпретации примем множество всех натуральных чисел. Предикатным символам $H^1(x)$ и $K^2(x,y)$ поставим в соответствие предикаты:

- $H^1(x)$ означающий: быть чётным числом;
- $K^2(x,y)$ означающий: x делится на y с остатком 7.

Рассмотрим формулу $\exists y K^2(x,y) \rightarrow H^1(x)$ в построенной интерпретации на оценке x=18: $\exists y K^1(18,y) \rightarrow H^0(18)$. Данная формула истинна, так как существует такой y=11, что x делится на y с остатком 7 и из этого следует, что x чётное.

Во введённой интерпретации существует оценка, показывающая, что формула $\exists y K^2(x,y) \rightarrow H^1(x)$ не общезначима. Возьмём оценку, на которой x=19. Тогда существует такой $y = 12$, что x делится на y с остатком 7, но при этом x нечётное число. Как мы знаем из таблицы истинности логической связки $\rightarrow$, всегда ложно выражение, в котором посылка истинна, а следствие ложно. Именно такой случай мы получили, поэтому рассматриваемая формула на выбранной оценке ложна.

Выполнимые формулы, служат для представления знаний и несут некоторую информацию о рассматриваемой интерпретации и объектах этой интерпретации, определяя истинно ли некоторое выражение для данной интерпретации или ложно. Определение истинности формулы зависит от значений составляющих её предикатов, а значение каждого предиката на каждой оценки выбранной интерпретации определяется человеком исходя из его опыта и понимания «как это должно быть». В тоже время общезначимые формулы не содержат в себе какой-либо информации, как «масло масляное», но они дают возможность обрабатывать информацию, извлекая из неё неочевидные прежде следствия.

Любая общезначимая формула, очевидно, выполнима.

Определение 3.5.3. Формула называется замкнутой, если не содержит свободных переменных.

Определение 3.5.4. Замыканием общности (существования) формулы называется формула, полученная путём добавления слева к исходной формуле кванторов общности (существования) по свободным переменным исходной формулы.

Очевидно, что если формула общезначима, то общезначимо и любое её замыкание. Если формула выполнима, то добавление слева кванторов существования по свободным переменным даст выполнимую формулу.

Пример 3.5.3. Рассмотрим формулу некоторой сигнатуры: $P^2(x,y) \wedge K^1(z)$, где $x,y,z \in Var$. Замыканием данной формулы является формула:

$$\forall x \forall y \forall z (P^2(x,y) \wedge K^1(z)).$$

Пример 3.5.4. Рассмотрим общезначимую формулу:

$$P^1(x) \wedge G^2(x,y) \to P^1(x) \vee G^2(x,y).$$

Данная формула истинна на любой оценке в любой интерпретации. Значит на любой оценке в любой интерпретации, замыкание общности данной формулы представляет собой истинное высказывание:

$$\forall x \forall y (P^1(x) \wedge G^2(x,y) \to P^1(x) \vee G^2(x,y)).$$

Упражнение 3.5.1. Покажите, что если формула, содержащая свободные переменные, выполнима, то выполнимо замыкание существования данной формулы.

Определение 3.5.5. Отношение $I \models \psi$ ($I \not\models \psi$), где ψ произвольная формула, записанная на некоторой оценки интерпретации I, определяется способом, описанным далее.

1. Пусть ψ атомарная формула вида $P^n(t_1, t_2, ..., t_n)$, где $t_1, t_2, ...t_n$ — термы. Если оценённая формула ψ, при фиксированной оценке термов $t_1, t_2, ...t_m$ истинна, то пишут $I \models \psi$;
2. Пусть ψ — оценённая формула (не обязательно атомарная). Если значение формулы ψ — истина, то пишут $I \models \psi$, если ложь, то пишут $I \not\models \psi$;
3. Пусть φ_1 и φ_2 атомарные формулы, входящие в оценённую формулу ψ, тогда:
   - $I \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $I \models \varphi_1$ и $I \models \varphi_2$;
   - $I \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $I \models \varphi_1$ или $I \models \varphi_2$;
   - $I \models \varphi_1 \to \varphi_2$ тогда и только тогда, когда $I \not\models \varphi_1$ или $I \models \varphi_2$;
4. $I \models \exists x \psi(x)$ тогда и только тогда, когда в области значений x есть такое значение x', что подстановка его в формулу $\psi(x)$ даёт в I истинное значение: $I \models \psi(x')$;
5. $I \models \forall x \psi(x)$ тогда и только тогда, когда подстановка любого значения x' из носителя $\mathfrak{I}$ интерпретации I в формулу $\psi(x)$ даёт истинное значение: $I \models \psi(x')$.

Пример 3.5.5. Пусть задана некоторая сигнатура и формула этой сигнатуры $P^1(x_1) \wedge G^0$. Построим интерпретацию I выбранной сигнатуры: носитель $\mathfrak{I} = \{e_1\}$, $G^0 = 1$, $P^1(e_1) = 1$ и $P^1(e_2) = 1$. Рассмотрим взятую формулу на оценке $x_1 = e_1$, тогда получим выражение, значение которого «истина» $P^1(e_1) \wedge G^0$. Для полученной оценённой формулы запишем: $I \models P^1(e_1) \wedge G^0$. Но тогда значение оценённой формулы $\neg(P^1(e_1) \wedge G^0)$ — «ложь», а это означает, что $I \not\models \neg(P^1(e_1) \wedge G^0)$.

Пример 3.5.6. Будем использовать все исходные данные примера 3.5.1. Рассмотрим оценённую формулу $P^1(e_1) \wedge G^0$:

$$P^1(e_1) = 1, \text{ значит } I \models P^1(e_1),$$

$f^2(x_1,x_2)$	2	3
$P^1(f^2(x_1,x_2))$	1	1

x_1	2	2	3	3
x_2	2	3	3	2
$f^2(x_1,x_2)$	2	2	2	3

Рис. 3.1. Функциональные отображения, соответствующие функции f^2 и предикату P^1

$$G^0 = 1\text{, значит } I \models G^0.$$

Тогда, согласно определению 3.5.3. получаем: $I \models P^1(e_1) \wedge G^0$.

Очевидно, что если формула φ общезначима, то при любой её оценке, в любой интерпретации будет выполнено $I \models \varphi$, поэтому для общезначимых формул принята запись: $\models \varphi$.

Рассмотрим замкнутую формулу ϕ. Раз формула замкнута, то она не имеет параметров. В каждой интерпретации замкнутая формула имеет ровно одно неизменное истинностное значение: 0 или 1. Если замкнутая формула истинна в интерпретации I, то пишут: $I \models \phi$, если ложна, то пишут: $I \not\models \phi$.

Пример 3.5.7. Рассмотрим замкнутую формулу ϕ имеющую вид: $\forall x_1 \forall x_2 (P^1(f^2(x_1,x_2)))$. Пусть задана некоторая интерпретация I, с носителем $\Im = \{2,3\}$, функциональному символу f^2 поставлена в соответствие функция f^2, а предикатному символу P^1 поставлен в соответствие предикат P^1. Функциональные отображения, соответствующие функции f^2 и предикату P^1, заданы следующими таблицами (рис. 3.1)

В построенной интерпретации I формула $(P^1(f^2(x_1,x_2)))$ истинна на любой оценке, значит в I истинно выражение $\forall x_1 \forall x_2 (P^1(f^2(x_1,x_2)))$, а тогда $I \models \forall x_1 \forall x_2 (P^1(f^2(x_1,x_2)))$.

В дальнейшем мы будем в основном работать с замкнутыми формулами, поэтому запомним, что запись $I \models \phi$, где ϕ — замкнутая формула буде означать, что значение формулы ϕ истинно в интерпретации I. Если формула ϕ ложна в интерпретации I, то: $I \not\models \phi$.

В заключение параграфа обратим ваше внимание на связь между понятием общезначимой формулы и выполнимой. Если формула ψ является общезначимой и, значит, выполнима всегда в любой интерпретации и на любой оценке, то формула $\neg\psi$ невыполнима. В противном случае, если формула $\neg\psi$ была бы выполнима на некоторой оценке некоторой интерпретации, то на этой же оценки этой же интерпретации оказалась бы невыполнимой формула ψ. Тогда формула ψ была бы не общезначимой, что противоречит исходному условию. Данное свойство используется для проверки общезначимости формулы ψ. Без него для такой проверки потребовалось бы проверить истинность формулы на всех интерпретациях и всех оценках, что, по сути, практически невозможно из-за бесконечного числа вариантов перебора.

3.6. РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Определение 3.6.1. Две формулы ω и ψ одной сигнатуры называются равносильными (эквивалентными, равнозначными), если на любой одинаковой оценке в каждой интерпретации обе формулы одновременно принимают значения «истина» или «ложь». Для обозначения равносильности будем использовать символ $\equiv$. Иначе говоря, две формулы ω и ψ равносильны тогда и только тогда, когда $\models (\omega \to \psi) \wedge (\psi \to \omega)$.

Приведём список основных равносильных формул.

Группа 1. Удаление импликации

- $\models \underbrace{\varphi_1 \to \varphi_2}_{\omega} \equiv \underbrace{\neg\varphi_1 \vee \varphi_2}_{\psi}$.

Группа 2.

Если формула $\varphi(x)$ не содержит свободных вхождений переменной y, а формула $\varphi(y)$ не содержит свободных вхождений переменной x, то выполнены следующие равносильности:

- $\models \forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$;
- $\models \exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$.

Группа 3. Вынесение кванторов

Если формула φ_2 не содержит вхождения свободной переменной x, то:

- $\models \forall x\varphi_1(x) \wedge \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2)$;
- $\models \exists x\varphi_1(x) \wedge \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2)$;
- $\models \forall x\varphi_1(x) \vee \varphi_2 \equiv \forall x(\varphi_1(x) \vee \varphi_2)$;
- $\models \exists x\varphi_1(x) \vee \varphi_2 \equiv \exists x(\varphi_1(x) \vee \varphi_2)$.

Группа 4. Продвижение отрицания

- $\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
- $\models \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$;
- $\models \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$;

$\left.\right\}$ Законы де Моргана

- $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$;
- $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$.

Группа 5.

- $\models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_1$;
- $\models \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \varphi_2 \vee \varphi_1$;
- $\models \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3$;
- $\models \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$;

- $\models \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\varphi_1 \wedge \varphi_3)$;
- $\models \varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$;
- $\models \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$;
- $\models \varphi \vee \varphi \equiv \varphi$.

Все формулы, приведённые выше и не содержащие кванторов, являются частными случаями тавтологий исчисления высказываний, в которых правая часть формулы, эквивалентна левой части.

Докажем, что:

$$\models \underbrace{\forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2}_{\omega} \equiv \underbrace{\forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2)}_{\psi}.$$

Для этого необходимо доказать: $\models (\omega \to \psi) \wedge (\psi \to \omega)$, или, иначе говоря, нужно показать общезначимость формулы:

$$(\underbrace{\forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2 \to \forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2)}_{A}) \wedge (\underbrace{\forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2) \to \forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2}_{B}).$$

Для этого нам потребуется показать, что формулы A и B общезначимы. Рассмотрим формулу A:

$$\forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2 \to \forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2).$$

Выберем некоторую произвольную интерпретацию I с носителем $\mathfrak{I}$. В этой интерпретации формула A на некоторой оценке, которую обозначим за χ, может быть ложной, только если формулы:

$$\forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2 \text{ — истинна;}$$

$$\forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2) \text{ — ложна.} \tag{3.1}$$

Иначе говоря, при оценке χ должно быть:

$$I \models \forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2,$$

$$I \not\models \forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2).$$

На выбранной оценке параметров χ формула (3.1) должна быть ложной. Это означает, что должно существовать такое значение $x = x^{'}$, $x^{'} \in \Im$, что формула $\varphi_1(x) \wedge \varphi_2$ будет ложной на оценке $\chi_x \cup x^{'}$ (все параметра, кроме x, оцениваются в соответствии с оценкой χ_x, а параметр x оценивается как $x^{'}$). Формула $\varphi_1(x) \wedge \varphi_2$ на оценке $\chi_x \cup x^{'}$ ложна ($I \not\models \varphi_1(x) \wedge \varphi_2$), если имеет место один из трёх случаев:

- на выбранной оценке $\chi_x \cup x^{'}$: $I \not\models \varphi_1(x)$;
- на выбранной оценке $\chi_x \cup x^{'}$: $I \not\models \varphi_2$;
- на выбранной оценке $\chi_x \cup x^{'}$: $I \not\models \varphi_1(x)$ и $I \not\models \varphi_2$.

Если $I \not\models \varphi_2$ то сразу получаем противоречие, так как по предположению на оценке χ: $I \models \forall x\varphi_1(x) \wedge \varphi_2$, а это возможно только, если $I \models \varphi_2$. Формула φ_2 не содержит параметра x по начальному условию, поэтому если $I \not\models \varphi_2$ на оценке $\chi_x \cup x^{'}$, то $I \not\models \varphi_2$ и на оценке χ.

Если при оценке $\chi_x \cup x^{'}$: $I \not\models \varphi_1(x)$, то тоже получаем противоречие. По предположению на оценке χ: $I \models \forall x\varphi_1(x) \wedge \varphi_2$, а это возможно только, если при χ имеет место $I \models \forall x\varphi_1(x)$. В свою очередь такое возможно, только если при χ имеет место $I \models \varphi_1(x)$.

Таким образом мы доказали, что формула A общезначима. Осталось показать, что формула B также общезначима.

Пусть B не общезначима. Тогда найдётся такая интерпретация I и такая оценка θ, что формула:

$$\forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2) \to \forall x\varphi_1(x) \wedge \varphi_2$$

будет ложной. Такое возможно только если при оценке θ:

$$I \not\models \forall x(\varphi_1(x) \wedge \varphi_2) \text{ и } I \models \forall x\varphi_1(x) \wedge \varphi_2.$$

Тогда в I существует такой $x = x''$, $x'' \in \Im$, что при оценке $\theta \cup x''$ будет: $I \models\!\!\!\!/\; \varphi_1(x) \wedge \varphi_2$. А это возможно только если при $\theta \cup x''$:

- $I \,|\!\neq \varphi_1(x)$;
- $I \,|\!\neq \varphi_2$;
- $I \,|\!\neq \varphi_1(x)$, $I \,|\!\neq \varphi_2$.

Если $I \,|\!\neq \varphi_2$ на оценке $\theta \cup x''$, то получили противоречие, так как $I \models \forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2$, а значит $I \models \varphi_2$ при оценке θ. Но так как φ_2 не содержит параметра x, то $I \models \varphi_2$ одновременно и при оценке θ и при оценке $\theta \cup x''$.

Если $I \,|\!\neq \varphi_1(x)$ на оценке $\theta \cup x''$, то тоже получили противоречие, так как $I \models \forall x \varphi_1(x) \wedge \varphi_2$, а значит $I \models \forall x \varphi_1(x)$ при оценке θ. Но последнее возможно, только если $I \models \varphi_1(x)$ на оценке $\theta \cup x''$.

Формулы A и B общезначимы, значит, общезначима конъюнкция $A \wedge B$, а это означает: $\models A \wedge B$. Осталось подставить вместо A и B формулы, которые мы обозначили с помощью этих букв, и исходная равносильность будет доказана.

Упражнение 3.6.1. Докажите оставшиеся равносильности, содержащие кванторы.

3.7. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Если формула общезначима, то она истинна на любой оценке в любой интерпретации вне зависимости ни от чего. Предположим, мы изучаем некоторую область и устанавливаем факты данной области. Записав полученные факты в виде формул логики предикатов и постулировав их истинность, мы хотим извлечь новые закономерности, следствия, вытекающие из установленных фактов. Например, определив некоторую сигнатуру, мы постулируем истинность некоторого множества замкнутых формул этой сигнатуры. Обозначим это множество за Γ и будем считать, что формулы, входящие в Γ — истинны.

После этого мы можем получить другие формулы, всегда истинные при условии истинности формул из Γ. Формулы из множества Γ должны быть непротиворечивы. Иначе говоря, если из Γ можно вывести некоторое утверждение φ, то утверждение $\neg\varphi$ из Γ не должно быть выводимо.

Метод, который мы начали описывать, называется аксиоматическим методом. Заключается этот метод в том, что мы, строя некоторую теорию, изначально выделяем ряд положений — аксиом, которые принимаем без доказательства, а затем из заданных аксиом выводим все утверждения строящейся теории. Такие утверждения называются теоремами выбранной системы аксиом, или, иначе, выбранной теории.

Пример 3.7.1. Теория групп, описывает основные утверждения для алгебр, с одной бинарной операцией $\circ$, такой что:

- операция $\circ$ ассоциативна;
- носитель алгебры $\mathfrak{R}$ содержит единичный элемент, являющийся и правой и левой единицей: $e \circ r = r \circ e = r$, $r \in \mathfrak{R}$;
- для любого $r \in \mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$ существует элемент r^{-1}, называемый обратным, такой, что $r \circ r^{-1} = r^{-1} \circ r = e$.

Зададим сигнатуру и запишем следующие формулы данной сигнатуры:

- $\forall x \forall y \forall z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$;
- $\forall x((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x))$;
- $\forall x \exists y((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e))$.

Предположив, что указанные выше формулы истинны, получим систему аксиом для теории групп. Теоремами построенной теории являются только те утверждения, что всегда необходимо истинны, во всех интерпретациях в которых истинны и выбранные аксиомы. Любая интерпретация, в которой истинны записанные выше аксиомы называется группой.

Определение 3.7.1. Пусть Γ множество замкнутых формул некоторой сигнатуры. Моделью множества Γ называется интерпретация I выбранной сигнатуры, если в этой интерпретации истинны все формулы из Γ.

Определение 3.7.2. Пусть Γ множество замкнутых формул некоторой сигнатуры. Множество Γ называется совместным, если оно имеет хотя бы одну модель.

Пример 3.7.2. Рассмотрим множество Γ образованное системой аксиом из примера 3.7.1. Любая группа является моделью выбранного таким образом множества Γ. Например, множество целых чисел с операцией сложения. Носитель интерпретации I тогда $\mathfrak{I}$ — всевозможные целые числа, константе e соответствует число 0, а функциональный символ $\circ$ определяется как операция сложения + на множестве целых чисел. Несложно убедится, что все аксиомы Γ истинны в выполненной интерпретации.

Для целых и рациональных чисел относительно операции умножения, элемент e соответствует числу 1. Множество целых чисел с операцией умножения не является моделью Γ, так как не выполнены последние две аксиомы из Γ. Множество целых чисел без 0 с операцией умножения не является моделью Γ, так как не выполнена последняя аксиома из Γ. Множество рациональных чисел с операцией умножения не является моделью Γ, так как не выполнена вторая аксиома из Γ. Множество рациональных чисел без 0 с операцией умножения является моделью Γ, так как выполнены все аксиомы из Γ.

Определение 3.7.3. Говорят, что замкнутая формула ϕ логически следует из множества аксиом Γ, если ϕ истинна во всех моделях множества Γ. Если ϕ логически следует из Γ, то пишут: $\Gamma \models \phi$.

Обратите, внимание, чтобы не путать обозначения. Запись $I \models \varphi$, для оценённой формулы φ означает, что значение оценённой формулы φ в интерпретации I — истина. Запись $\Gamma \models \varphi$, где φ является замкнутой формулой, означает, что φ истинна во всех моделях

Γ. Так как φ замкнута, то в любой интерпретации она принимает строго одно значение: истина или ложь, а значит, является сразу оценённой. Формулы, содержащиеся в Γ, тоже замкнуты. Тогда запись $\Gamma \models \varphi$, где $\Gamma = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k\}$, означает, что для всякой интерпретации I, для которой имеет место $I \models \psi_1$, $I \models \psi_2, \ldots$, $I \models \psi_k$, или иначе: $I \models \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_k$, всегда будет иметь место $I \models \varphi$.

Очевидно так же, что если $\Gamma \models \varphi_1$ и $\Gamma \models \varphi_2$, то и φ_1, и φ_2 истинны в любой модели Γ, а значит, в любой модели Γ истинна и формула $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, то есть: $\Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Теорема 3.7.1. Зафиксируем сигнатуру и некоторое множество замкнутых формул Γ этой сигнатуры. Пусть φ_1 и φ_2 — замкнутые формулы выбранной сигнатуры. Тогда $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \models \varphi_2$ эквивалентно тому, что $\Gamma \models \varphi_1 \to \varphi_2$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \models \varphi_2$. Обозначим за I_m произвольную модель множества Γ.

Если $I_m \not\models \varphi_1$, то $I_m \models \varphi_1 \to \varphi_2$. В самом деле, если φ_1 ложна в I_m, то формулу $\varphi_1 \to \varphi_2$ всегда истинна в I_m (так как ложной она может быть только при истинном значении φ_1 и ложном значении φ_2).

Если $I_m \models \varphi_1$, то I_m является моделью множества $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$ (в интерпретации I_m выполнимы все формулы из Γ и формула φ_1), значит $I_m \models \varphi_2$ (по начальному условию). Но если φ_1 и φ_2 истинны в I_m, то в I_m истинна и формула $\varphi_1 \to \varphi_2$: $I_m \models \varphi_1 \to \varphi_2$.

Значит, формула $\varphi_1 \to \varphi_2$ выполнена в любой модели Γ: $\Gamma \models \varphi_1 \to \varphi_2$. Таким образом, если $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \models \varphi_2$, то $\Gamma \models \varphi_1 \to \varphi_2$. Теперь покажем, что если выполнено $\Gamma \models \varphi_1 \to \varphi_2$, то обязательно будет выполнено и $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \models \varphi_2$.

Пусть $\Gamma \models \varphi_1 \to \varphi_2$ и I_n произвольная модель множества $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$, тогда $I_n \models \varphi_1 \to \varphi_2$ и $I_n \models \varphi_1$, что возможно, только если

$I_n \models \varphi_2$. Значит, φ_2 выполнена в любой модели множества $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$: $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \models \varphi_2$. Теорема доказана.

Следствие 3.7.1. Пусть ψ замкнутая формула, являющаяся следствием множества Γ, состоящего из замкнутых формул: $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. Тогда $\Gamma \models \psi$ эквивалентно $\models (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \psi$. Иначе говоря, если $\Gamma \models \psi$, то формула $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \psi$ общезначима.

Пусть I модель множества Γ, тогда: $I \models \varphi_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Но тогда:

$$I \models \underbrace{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n}_{\varphi}.$$

Поэтому представим множество формул Γ посредством одной формулы и применим теорему 3.7.1. В результате получим:

$$\models \underbrace{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)}_{\varphi} \to \psi.$$

Упражнение 3.7.1. Пусть зафиксирована сигнатура и некоторое множество замкнутых формул Γ этой сигнатуры. Докажите, что $\Gamma \cup \{\varphi\}$ равносильно тому, что множество $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ несовместно (не имеет модели).

Ещё раз обратимся к записи $\models \psi$, что, по сути, означает, что множество Γ пусто. Зададимся вопросом, какая интерпретация является моделью пустого множества замкнутых формул Γ? Любая интерпретация, поскольку пустое множество формул выполнимо в любой интерпретации. А что тогда является логическим следствием для такого множества Γ? Очевидно, что общезначимые формулы: они выполняются всегда во всех интерпретациях и не требуют для своей выполнимости каких-либо других формул. Вводя понятие логического следствия, мы говорили о замкнутых формулах. Все общезначимые формулы замкнуты? Нет, но любую общезначимую формулу можно замкнуть, приписав слева кванторы общности по всем сводным переменным. Полученная формула будет замкнутой и общезначимой. Так если $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ общезначима, то есть выполнима на любой оценке в любой интерпретации, то общезначима и $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 3.7.3. Пусть есть определённое знание, представленное в виде множества замкнутых формул: $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ некоторой сигнатуры Ω. Такое множество формул образует базу знаний. Нужно проверить истинность некоторого утверждения, представленного в виде замкнутой формулы ψ сигнатуры Ω и не входящего в базу знаний. Данная проверка сводится к выяснению: является ли формула $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \psi$ общезначимой. Или иначе, является ли формула ψ логическим следствием множества формул $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$.

Вопрос проверки общезначимости является одним из основных вопросов логики предикатов, и не имеет тривиального решения. Прежде всего, это связано с тем, что для проверки общезначимости нам не достаточно проверить, что формула истинная на любой оценке некоторого конечного множества конечных интерпретаций. Тогда мы смогли бы написать хоть какой-то алгоритм перебора. Следующее утверждение полностью лишает нас такой возможности.

Утверждение 3.7.1. Существуют замкнутые формулы истинные при любой оценке на конечных интерпретациях, и при этом не всегда выполнимые на бесконечных интерпретациях.

Пример 3.7.4. Зафиксируем некоторую сигнатуру и рассмотрим формулу данной сигнатуры:

$$\underbrace{\forall x \neg P^2(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P^2(x,y) \wedge P^2(y,z) \to P^2(x,z))}_{\varphi} \to \underbrace{\exists x \forall y \neg R^2(x,y)}_{\psi}$$

Носителем интерпретации $\mathfrak{I}$ выберем некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел; $P^2(x,y)$ будет означать, что $x > y$, тогда $\neg P^2(x,x)$ означает, что x не может быть меньше чем x. В построенной интерпретации данная формула всегда истинна.

Данная формула будет всегда истинна на любой интерпретации с конечным носителем. В самом деле, ложной она может быть, только φ — истина, а ψ — ложь. Пусть это так в конечной интерпретации I. Тогда $I \models \forall x \neg P^2(x,x)$, $I \models \forall x \forall y \forall z (P^2(x,y) \wedge P^2(y,z) \to P^2(x,z))$ и $I \not\models \exists x \forall y \neg R^2(x,y)$. Первые две формулы, по сути, линейно упорядочивают элементы носителя интерпретации I. Последняя формула, по сути, задаёт наименьший элемент носителя. В конечном линейно упорядоченном множестве наименьший элемент есть всегда, что противоречит утверждению: $I \not\models \exists x \forall y \neg R^2(x,y)$. Поэтому в любых конечных интерпретациях исходная формула истинна.

Если носитель интерпретации I не имеет наименьшего элемента, то может иметь место $I \not\models \exists x \forall y \neg R^2(x,y)$, а тогда и исходная формула может быть ложной. Например, на множестве целых чисел исходная формула не выполняется.

Как тогда возможно решить задачу проверки общезначимости формул? Данному вопросу мы посвятим всю следующую главу. А эту закончим исчислением предикатов.

3.8. ЭЛЕМЕНТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Мы познакомились с логикой предикатов, точнее, с логикой предикатов первого порядка (кванторы мы рассматривали только по переменным, но не по функциям). В логике предикатов, мы использовали те же операции, что и в логике высказываний (кроме операции эквиваленции, хотя часто её включают в рассмотрение), причём определены эти операции были так же как и логике высказываний. Разница в том, что прежде эти операции связывали высказывания, а теперь они связывают предикаты, которые, будучи оценёнными в некоторой интерпретации, становятся высказываниями. Так же мы рассмотрели основные равносильные формулы логики предикатов. Для формул без кванторов мы установили их связь с тавтологиями логики высказываний. Зададимся вопросом: в соответствии с какой логикой выстроена логика предикатов? В первой главе мы показали, что логика высказываний строится из исчисления высказываний. В исчислении высказываний логические связки — суть обозначения, не имеющие какой-то конкретной определённости. Определённый смысл они обретают в логике высказываний, будучи проинтерпретированными как бинарные связки, заданные таблицам истинности. Это не просто произвольная интерпретация, но такая, что в результате неё все аксиомы исчисления высказываний выполняются в логике высказываний. Именно исчисление высказываний задаёт ту «логику», на которой строится логика высказываний. Определим теперь исчисление предикатов. Параграф носит иллюстративный характер, мы не станем рассматривать исчисление предикатов полностью (доказывать его не противоречивость, корректность и полноту).

Определение 3.8.1. Алфавитом исчисления предикатов $\Omega = \langle Var, Const, Funk, Pred \rangle$ называется (сигнатура) набор счётных множеств, в который входят:

- множество предметных переменных $Var = \{x_1, x_2, ..., x_m, ...\}$;
- множество предметных констант, которые соответствуют именам предметов $Const = \{c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$;
- множество функциональных символов $Func = \{f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, ..., f_t^{m_t}, ...\}$, где m_i — местность функционального символа $f_i^{m_i}$, $m_i \geq 1$ (если m_i=0, то вместо функционального символа получается константа);
- множество предикатных символов $Pred = \{P_1^{k_1}, P_2^{k_2}, ..., P_n^{k_n}, ...\}$, где k_j — местность предикатного символа $P_j^{k_j}$, $k_j \geq 0$ (если k_j=0, то мы получаем предикатный символ, характеризующий утверждение, не зависящее от переменных).

Помимо перечисленных множеств в алфавит логики предикатов входят логические связки $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, кванторы $\forall$, $\exists$ и знаки препинания) , (.

Определение 3.8.2. Системой аксиом исчисления предикатов называется множество следующих аксиом, где φ, ψ, γ формулы сигнатуры Ω:

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;

2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$;

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;

4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;

5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$;

6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;

7) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$;

8) $(\varphi \to \gamma) \to ((\psi \to \gamma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \gamma))$;

9) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$;

10) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$;

11) $\varphi \vee \neg\varphi$;

12) $\forall x\varphi \to \varphi[x/t]$;

13) $\varphi[x/t] \to \exists x\varphi$.

Не сложно заметить, что первые 11 аксиом, ни что иное как аксиомы исчисления высказываний, только вместо формул исчисления высказываний использованы формулы сигнатуры Ω.

Поясним последние две аксиомы. В аксиомах $\forall x\varphi \to \varphi[x/t]$ и $\varphi[x/t] \to \exists x\varphi$, φ — формула любого числа переменных, x — любая переменная формулы, а t — любой терм сигнатуры. Частным случаем такой аксиомы является, например, выражение: $\forall xP(x) \to P(t)$, где t — терм сигнатуры, $P(x)$ — одноместный предикатный символ. Терм t всегда будет принимать значения из некоторого подмножества области значений x, поэтому будет выполнено $P(t)$, если выполнено $\forall xP(x)$. Для этого частного случая последние две аксиомы будут выглядеть так: $\forall xP(x) \to P(x)[x/t]$, то есть, говоря о подстановке терма

t вместо x, мы будем говорить о такой подстановке для выражения $P(x)$.

За $[x/t]$ обозначена корректная подстановка, поскольку не всякая подстановка терма t вместо переменной x корректна в аксиомах 12) и 13). Определим правила такой подстановки. И запомним, что эти правила являются частью двух последних аксиом, поэтому забывать о них нельзя.

Пусть формула φ, из двух последних аксиом, имеет вид: $G^1(x) \wedge \exists x(P^2(x,x))$. После замены всех вхождений переменной x на $f^1(y)$ мы получим абсурдное выражение:

$$G^1(f^1(y)) \wedge \exists f^1(y)(P^2(f^1(y), f^1(y))).$$

Вспомним, что мы договорились рассматривать кванторы только по переменным, но не по функциям.

Попробуем по-другому произвести подстановку, не касаясь переменной x, следующей за квантором общности:

$$G^1(f^1(y)) \wedge \exists x(P^2(f^1(y), f^1(y))).$$

Получили формулу, но смысл данной формулы отличается от смысла исходной формулы. Так до замены переменной x выражение $\exists x(P^2(x,x))$ представляло собой высказывание, а после подстановки вместо переменной x терма $f^1(y)$ в этом же выражении появились параметры.

Поэтому первое, что нужно учитывать, что в формуле φ подстановка $[x/t]$ допустима только на место свободных вхождений переменной x.

Второе, что нужно учитывать, что при подстановке $[x/t]$ в φ, переменные, входящие в терм t, не должны попадать в область одноимённых кванторов формулы φ. То есть не должно быть случаев, когда, например, в формулу $\forall y G^2(x,y)$ вместо x подставляется $f^1(y)$, в результате чего получается выражение $\forall y G^2(f^1(y), y)$, говорящее совсем не то, что подразумевалось изначально.

Определение 3.8.3. Правилами вывода в исчислении предикатов, называются следующие правила (в последних двух правилах переменная x не входит свободно в ψ):

- из формул φ и $\varphi \to \psi$ выводится формула ψ;
- из формулы $\psi \to \varphi$ выводится формула $\psi \to \forall x\varphi$;
- из формулы $\varphi \to \psi$ выводится формула $\exists x\varphi \to \psi$.

Пример 3.8.1. Формула $\forall x P^1(x) \to \forall y P^1(y)$ выводима в исчислении предикатов. Согласно аксиоме 12): $\forall x P^1(x) \to P^1(y)$. Так как y не имеет свободных вхождений в $\forall x P^1(x)$, то по второму правилу вывода получаем: $\forall x P^1(x) \to \forall y P^1(y)$.

Введём понятие вывода из теории в исчислении предикатов. Для этого зафиксируем множество формул сигнатуры Ω. Обозначим это множество за Γ. В общем случае множество Γ состоит из произвольных формул сигнатуры Ω, но мы ограничимся рассмотрением лишь таких множеств Γ, которые содержат исключительно замкнутые формулы. Такое множество Γ называется теорией.

Определение 3.8.4. Фиксируем Γ — множество замкнутых формул сигнатуры Ω. Выводом из Γ называется последовательность формул A_1, $A_2,\ldots,A_l$ где каждая формула A_i, либо аксиома, либо принадлежит Γ, либо получается из двух предшествующих формул с помощью одного из правил вывода.

Определение 3.8.5. Фиксируем Γ — множество замкнутых формул сигнатуры Ω. Формула ψ называется выводимой из Γ, если существует вывод из Γ завершающийся формулой ψ. Если ψ выводима из Γ, то пишут: $\Gamma \vdash \psi$.

Теорема 3.8.1. Теорема о дедукции исчисления предикатов. Пусть Γ — множество замкнутых формул сигнатуры Ω. Формула ϕ

— замкнутая формула той же сигнатуры. Тогда $\Gamma |\text{-} \phi \to \gamma$ эквивалентно тому, что $\Gamma \cup \{\phi\} |\text{-} \gamma$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы о дедукции в исчислении высказываний. Разница только в том, что теперь появились два новых правила вывода. Например, нужно перейти от выводимости из Γ формулы $\phi \to (\psi \to \varphi)$ к выводимости $\phi \to (\psi \to \forall x\varphi)$, где x не имеет свободных вхождений в ψ. Для этого достаточно от формулы $\phi \to (\psi \to \varphi)$ перейти к $(\phi \wedge \psi) \to \varphi$, применить второе правило вывода, получив $(\phi \wedge \psi) \to \forall x\varphi$, после чего перейти обратно к форме $\phi \to (\psi \to \forall x\varphi)$. В случае второго правила переход осуществляется сходным образом: от формулы $\phi \to (\varphi \to \psi)$ переходим к формуле $\phi \to (\exists x\varphi \to \psi)$. Более тщательные выкладки читателю предлагается проделать самостоятельно. Для переходов между формулами, воспользуйтесь известными вам тавтологиями и тем, что любая тавтология выводима в исчислении высказываний, а значит и в исчислении предикатов.

Не путайте обозначения $\Gamma |\text{-} \psi$ и $\Gamma |= \psi$. Первая формула означает выводимость ψ из Γ в исчисление предикатов, вторая формула означает, что ψ есть логическое следствие Γ в логике предикатов. Но, если Γ — множество замкнутых формул сигнатуры Ω, а ψ — замкнутая формула той же сигнатуры то:

- если имеет место $\Gamma |\text{-} \psi$, то $\Gamma |= \psi$;
- если имеет место $\Gamma |= \psi$, то $\Gamma |\text{-} \psi$.

Если принять, что множество Γ пусто, то получим, что всякая выводимая в исчисление предикатов формула общезначима, а всякая общезначимая формула логики предикатов выводима в исчислении предикатов.

4. МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

4.1. ЗАДАЧА ПРОВЕРКИ ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛЫ

Вернёмся к проблеме, которую мы рассматривали в конце главы, посвящённой логике высказываний. А именно, к проблеме дедукции. В логике предикатов проблема дедукции звучит так же и в логике высказываний. Это проблема, связанная с решением задачи, выясняющей: является ли C логическим следствием множества формул из Γ. Так же как и логике высказываний в логике предикатов существует два способа решения данной задачи. Первый заключается в том, что бы проверить выводимость в исчислении предикатов формулы $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$. Второй способ сводится к доказательству общезначимости в логике предикатов формулы $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i) \to C$, или иначе, к доказательству невыполнимости формулы $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_i \wedge \neg C$. Весь последующий материал будет посвящён решению проблемы дедукции в логике предикатов вторым способом. Так же как и в логике высказываний, мы будем рассматривать метод резолюций, однако в логике предикатов он имеет более сложную форму, так как возникает потребность в алгоритме унификации. Аналогом конъюнктивной нормальной формы логике высказываний в логике предикатов является сколемовская стандартная форма.

Если формула общезначима, то она истинна на любой оценке в любой интерпретации. Иначе говоря, если формула общезначима, то в любой интерпретации не противоречиво её замыкание общности. В этой главе мы работаем с замкнутыми формулами, чего в дальнейшем не будем оговаривать отдельно. Как возможно установить, общезначимость замкнутой формулы логики предикатов, если проверка её истинности в каждой интерпретации невозможна? — перебор оказывается слишком большим. Задача проверки общезначимости сводится к следующим этапам (рис 4.1).

Логика предикатов является непротиворечивой. Это означает, что если $I \models \varphi$, то $I \not\models \neg\varphi$. Если формула φ общезначима, то она выполнима в любой интерпретации. Это означает, что формула $\neg\varphi$ невыполнима ни в одной интерпретации, или, иначе, $\neg\varphi$ противоречива. Поэтому можно перейти от задачи проверки общезначимости формулы φ к проверке противоречивости формулы $\neg\varphi$.

Определение 4.1.1. Предваренной нормальной формой (ПНФ) называется формула φ, приведённая к виду:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \varphi'(x_1, x_2, ..., x_n),$$

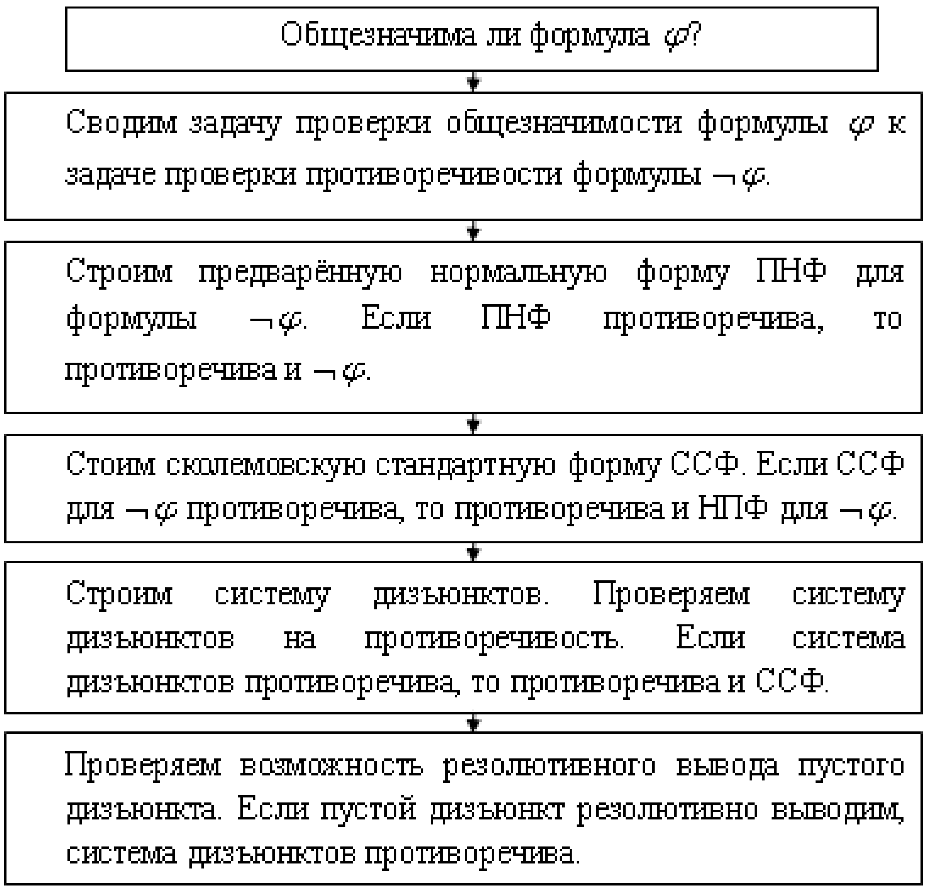


Рис. 4.1. Общая схема проверки общезначимости формулы

где $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ — кванторная приставка, $\varphi'(x_1, x_2, ..., x_n)$ — бескванторная формула, называемая матрицей, представленная в виде конъюнкции не пустых дизъюнктов: $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_n$, где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee ... \vee L_{ij}$. Каждый из символов L_{ik} называется литерой. Литера есть атомарная формула, или её отрицание.

В главе 3, параграфе 3.6 были приведены основные равносильности логики предикатов. Используя их любую формулу можно привести к ПНФ.

Пример 4.1.1. Рассмотрим формулу:

$$\exists x\varphi_1(x) \wedge \neg\exists y\varphi_2(y) \to \neg\forall x\varphi_3 x. \qquad (4.1)$$

Раскроем импликацию, используя $\models \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$:

$$\neg(\exists x\varphi_1(x) \wedge \neg\exists y\varphi_2(y)) \vee \forall x\varphi_3(x).$$

Раскроем скобки, используя $\models \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$:

$$\neg\exists x\varphi_1(x) \wedge \neg\neg\exists y\varphi_2(y) \vee \forall x\varphi_3(x).$$

Используем правило двойного отрицания $\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi$:

$$\neg\exists x\varphi_1(x) \wedge \exists y\varphi_2(y) \vee \forall x\varphi_3(x).$$

Протолкнем знак отрицания под кванторную приставку, используя $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$:

$$\forall\neg x\varphi_1(x) \wedge \exists y\varphi_2(y) \vee \forall x\varphi_3(x).$$

Будем полагать, что формула $\varphi_3(x)$ не содержит свободных вхождений переменной z, а формула $\varphi_2(y)$ не содержат свободных вхождений переменной x; тогда можно провести переименование переменных, используя $\models \exists x\varphi(x) \equiv \exists z\varphi(z)$. Переименовываем переменные так, что бы под знаком каждого квантора стоял свой уникальный символ:

$$\forall\neg x\varphi_1(x)\wedge\exists y\varphi_2(y)\vee\forall z\varphi_3(z).$$

Используя равносильность $\models\forall x\varphi_1(x)\wedge\varphi_2\equiv\forall x(\varphi_1(x)\wedge\varphi_2)$, получаем:

$$\forall x(\neg x\varphi_1(x)\wedge\exists y\varphi_2(y)\vee\forall z\varphi_3(z)).$$

Используя равносильности $\models\forall x\varphi_1(x)\vee\varphi_2\equiv\forall x(\varphi_1(x)\vee\varphi_2)$ и $\models\varphi_1\vee\varphi_2\equiv\varphi_2\vee\varphi_1$, получаем:

$$\forall x(\neg x\varphi_1(x)\wedge\forall z(\exists y\varphi_2(y)\vee\varphi_3(z))).$$

Используя $\models\exists x\varphi_1(x)\vee\varphi_2\equiv\exists x(\varphi_1(x)\vee\varphi_2)$, получаем:

$$\forall x(\neg x\varphi_1(x)\wedge\forall z\exists y(\varphi_2(y)\vee\varphi_3(z))).$$

Продолжая преобразования, получим:

$$\forall x\forall z(\neg x\varphi_1(x)\wedge\exists y(\varphi_2(y)\vee\varphi_3(z)))$$
$$\forall x\forall z\exists y(\neg x\varphi_1(x)\wedge(\varphi_2(y)\vee\varphi_3(z))).$$

Используя $\models\varphi_1\vee(\varphi_2\vee\varphi_3)\equiv(\varphi_1\vee\varphi_2)\vee\varphi_3$, получим:

$$\forall x\forall z\exists y((\neg x\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(y))\vee\varphi_3(z)).$$

Используя $\models\varphi_1\vee(\varphi_2\wedge\varphi_3)\equiv(\varphi_1\vee\varphi_2)\wedge(\varphi_1\vee\varphi_3)$ и $\models\varphi_1\vee\varphi_2\equiv\varphi_2\vee\varphi_1$, получим:

$$\forall x\forall z\exists y((\neg x\varphi_1(x)\wedge\varphi_2(y))\vee\varphi_3(z))\equiv\varphi_0.$$

В результате получена формула:

$$\varphi_0=\forall x\forall z\exists y\underbrace{(\neg x\varphi_1(x)\vee\varphi_3(z))\wedge(\neg x\varphi_1(x)\vee\varphi_3(z))}_{\psi}). \qquad (4.2)$$

С помощью проведённых преобразований задача проверки противоречивости формулы (4.1) перешла в задачу проверки противоречивости формулы (4.2). Последнее выражение представляет собой

ПНФ. Кванторной приставкой является последовательность $\forall x \forall z \exists y$, а формула ψ — бескванторная конъюнктивная нормальная форма, которую иначе можно записать с помощью дизъюнктов $D_1 \wedge D_2$, где:

- $D_1 = \neg x \varphi_1(x) \vee \varphi_3(z) = L_{11} \vee L_{12}$;
- $D_2 = \neg x \varphi_1(x) \vee \varphi_3(z) = L_{21} \vee L_{22}$.

Теорема 4.1.1. Для любой замкнутой формулы φ существует эквивалентная ей предварённая нормальная форма

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \varphi'(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Доказательство. Условие замкнутости формулы означает, что в формуле не встречаются параметры (свободные переменные). Поэтому можно переименовывать переменные (не задумываясь о возможности возникновения коллизий). При переименовании переменных нужно следить только за тем, что бы под каждым квантором в результате переименования стоял свой уникальный символ, а вместе с переименование подкванторной переменной, происходило переименование всех одноименных переменных, попадающих в область действия данного квантора. Используя равносильности логики предикатов (параграф 3.6) можно избавиться от всех операций, кроме отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. Знак отрицания всегда можно протолкнуть под кванторную приставку. Используя законы ассоциативности и коммутативности, можно поочерёдно вынести все кванторы вперёд общей формулы. Привести подкванторную формулу к конъюнкции дизъюнктов не представляет сложности.

Пример 4.1.2. Приведите к ПНФ формулу:

$$\forall x(\varphi_1(x) \to \forall y(\varphi_2(x, y) \to \forall x \varphi_3(y, x))).$$

Решение:

- $\forall \overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \forall y(\varphi_2(\overline{x}, y) \to \forall \overline{\overline{x}} \varphi_3(y, \overline{\overline{x}})))$;
- $\forall \overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \forall y(\varphi_2(\overline{x}, y) \to \forall \overline{\overline{z}} \varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;

- $\forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \neg\forall y(\varphi_2(\overline{x}, y) \vee \forall\overline{\overline{z}}\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y\neg(\varphi_2(\overline{x}, y) \vee \forall\overline{\overline{z}}\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \neg\forall\overline{\overline{z}}\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \exists\overline{\overline{z}}\neg\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \to \exists y\exists\overline{\overline{z}}(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \neg\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\neg\forall\overline{x}(\varphi_1(\overline{x}) \vee \exists y\exists\overline{\overline{z}}(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \neg\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\exists\overline{x}\neg(\varphi_1(\overline{x}) \vee \exists y\exists\overline{\overline{z}}(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \neg\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\exists\overline{x}(\neg\varphi_1(\overline{x}) \vee \neg\exists y\exists\overline{\overline{z}}(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \neg\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\exists\overline{x}(\neg\varphi_1(\overline{x}) \wedge \forall y\forall\overline{\overline{z}}\neg(\neg\varphi_2(\overline{x}, y) \wedge \neg\varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\exists\overline{x}(\neg\varphi_1(\overline{x}) \wedge \forall y\forall\overline{\overline{z}}(\varphi_2(\overline{x}, y) \vee \varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;
- $\exists\overline{x}\forall y\forall\overline{\overline{z}}(\neg\varphi_1(\overline{x}) \wedge (\varphi_2(\overline{x}, y) \vee \varphi_3(y, \overline{\overline{z}})))$;

Дизъюнкты: $D_1 = \neg\varphi_1(\overline{x})$, $D_2 = \varphi_2(\overline{x}, y) \vee \varphi_3(y, \overline{\overline{z}})$.

Итак, мы научились строить предварённую нормальную форму. Будем строить сколемовскую стандартную форму.

4.2. СКОЛЕМОВСКАЯ СТАНДАРТНАЯ ФОРМА

Основная задача данного параграфа из формулы, приведённой к ПНФ получить формулу, имеющую в кванторной приставке только кванторы общности. Что бы понять как это делается, вспомни значение квантора существования, стоящего следом за квантором общности. В качестве примера рассмотрим формулу: $\forall x\exists yP^2(x, y)$. Прочитаем ее: «для любого x, существует такой y, что выполнено отношение $P^2(x, y)$». Всмотримся в формулировку: «для любого x, существует y». Иначе говоря, какой бы x мы ни взяли бы, ему всегда будет соответствовать некоторое значение y, при котором $P^2(x, y)$ должно быть истиной. Поскольку каждое конкретное значение y, зависит от того, какой именно x был взят, мы можем записать: $y = f(x)$. Так, например, в формуле:

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \exists x_5 \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

выбор значения переменной x_3 зависит от выбранных значений переменных x_1 и x_2, то есть $x_3 = f(x_1, x_2)$. В этой же формуле выбор значения переменной x_5 зависит от значений присвоенных переменным x_1, x_2, x_3, x_4. Так как значение x_3 выражается через значения переменных x_1 и x_2, то $x_5 = g(x_1, x_2, x_4)$. Введённые функции f и g определяют в формуле φ некоторые конкретные объект, задаваемые в зависимости от значений переменных под кванторами общности. Поэтому сами кванторы существования могут быть опущены:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_4 \varphi(x_1, x_2, f(x_1, x_2), x_4, g(x_1, x_2, x_4)).$$

В результате проведённых преобразований получается формула, эквивалентная исходной формуле. Нужно помнить, что подстановки f и g вместо переменных должны быть корректными: они не должны порождать коллизий. Для формулы $\forall x \exists y P^2(x, y)$ сказанное выше можно было бы записать так: $\exists f \forall x P^2(x, y)$, но в логике предикатов первого порядка не существует кванторов по функциям.

Если квантор существования стоит в начале кванторной приставки, то ему сопоставляется не значение некоторой функции, а константа — то самое значение из носителя при котором формула истинна.

Определение 4.2.1. Введение функций вместо одного из видов кванторов называется *сколемизацией*, а сами функции называют *сколемовскими*. Если квантор существования стоит вначале кванторной приставки, то константа, которая ставится ему в соответствие, называется сколемовской константой.

Теорема 4.2.1. Для любой замкнутой формулы существует эквивалентная ей формула, находящаяся в ССФ.

Доказательство. Любую замкнутую формулу мы можем привести к ПНФ. Из ПНФ, используя лемму об удалении квантора существования, всегда можно получить ССФ.

Лемма 4.2.1. Об удалении кванторов существования. Пусть дана замкнутая формула:

$$\varphi_0 = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \exists x_{n+1} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}).$$

Введём n-местный функциональный символ f^n (не содержащийся в формуле φ). Тогда:

$$\varphi_0 \equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, f^n(x_1, x_2, ..., x_n))}_{\phi}.$$

Доказательство. Договоримся записывать φ на оценке $d_1, d_2, ..., d_n, ..., d_k$ переменных, входящих в φ, как $\varphi[d_1, d_2, ..., d_n, ..., d_k]$. Нужно показать, что:

- если существует интерпретация, в которой истинна ϕ, то существует интерпретация, в которой истинна формула φ_0;
- если существует интерпретация, в которой истинна формула φ_0, то существует интерпретация, в которой истинна формула ϕ.

Пусть I — некоторая интерпретация, в которой истинна ϕ: $I \models \phi$. Тогда на любой оценке формулы φ определена функция f^n, которая каждому набору $d_1, d_2, ..., d_n$ оценок $x_1, x_2, ..., x_n$ ставится в соответствие некоторое значение из носителя интерпретации. То есть для любого набора $d_1, d_2, ..., d_n$ определено значение $f^n(d_1, d_2, ..., d_n)$:

$$I \models \varphi[d_1, d_2, ..., d_n, f^n(d_1, d_2, ..., d_n)].$$

Получаем, что в интерпретации I на любой оценке $d_1, d_2, ..., d_n$ всегда существует элемент $d_{n+1} = f^n(d_1, d_2, ..., d_n)$, такой, что $I \models \varphi[d_1, d_2, ..., d_n, d_{n+1}]$. Иначе говоря, для любых $x_1, x_2, ..., x_n$ существует элемент x_{n+1}, такой что: $I \models \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$. А это означает, что:

$$I \models \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \exists x_{n+1} \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}),$$

или, иначе, что: $I \models \varphi_0$.

Пусть I такая интерпретация, что $I \models \varphi_0$. Это означает, что на любой оценке $d_1, d_2, ..., d_n$ элементов $x_1, x_2, ..., x_n$, всегда найдётся такая оценка d_{n+1} элемента x_{n+1}, что в интерпретации I на этой оценке будет истинна формула φ: $I \models \varphi[d_1, d_2, ..., d_n, d_{n+1}]$. Это равносильно тому, что в интерпретации I существует такая функция $\overline{f^n}$: $D_I^n \to D_I^1$, которая каждому кортежу $(d_1, d_2, ..., d_n)$ ставит в соответствие один элемент из носителя интерпретации: $d_{n+1} = \overline{f^n}(d_1, d_2, ..., d_n)$. Причём это такой элемент, что $I \models \varphi[d_1, d_2, ..., d_n, d_{n+1}]$. Записав иначе данную формулу, мы получим $I \models \varphi[d_1, d_2, ..., d_n, \overline{f^n}(d_1, d_2, ..., d_n)]$. А тогда $I \models \phi$. Лемма доказана.

В результате приведения формулы к ССФ получается формула, представленная в виде конъюнкции дизъюнктов и не содержащая кванторов существования в кванторной приставке:

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n (D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_n),$$

где $D_1, D_2, ... D_n$ — дизъюнкты.

Напомним, что каждый из дизъюнктов $D_1, D_2, ... D_n$ представляет собой дизъюнкцию литер. Каждая литера представляет собой атомарную формулу или её отрицание:

$$D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee ... \vee L_{ij}.$$

Существует особый дизъюнкт называемый пустым.

Определение 4.2.2. Пустым дизъюнктом называется дизъюнкт, не содержащий литер. Такой дизъюнкт будем обозначать $\square$.

Утверждение 4.2.1. В пустом дизъюнкте нет литер, которые могли бы быть истинными, а значит, такой дизъюнкт всегда ложен.

В самом деле, любой дизъюнкт, не изменяя его истинности, мы можем записать как $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee ... \vee L_{ij} \vee \textit{Ложь}$. Из определения дизъюнкции мы знаем, что если хотя бы одна из литер истина, то и весь дизъюнкт будет истинным вне зависимости от того, есть ли в конце дизъюнкта литера со значением «Ложь» или нет. Очевидно, что дописать в конец дизъюнкцию со значением «Истина» мы не можем, иначе значение дизъюнкта всегда будет истинным вне зависимости от значений входящих в него литер. Поэтому и пустой дизъюнкт мы можем представить лишь в форме: $D_i = \square \vee \textit{Ложь}$.

Определение 4.2.3. Единичным дизъюнктом называется дизъюнкт, содержащий одну литеру.

Запишем утверждение, которое нам в дальнейшем потребуется.

Утверждение 4.2.2. Формула: $\forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \forall x\varphi_1 \wedge \forall \varphi_2$ — общезначима.

В самом деле, если x содержится либо в φ_1 либо в φ_2, то мы приходим к уже известной из параграфа 3.6 общезначимой формуле. Пусть x содержится и в φ_1, и в φ_2. Очевидно, что если конъюнкция двух формул φ_1 и φ_2 истинна при всех x в некоторой интерпретации I: $I \models \forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, то при всех x истинна формула φ_1: $I \models \forall x\varphi_1$, а так же при всех x истинна формула φ_2: $I \models \forall x\varphi_2$. Но тогда: $I \models \forall x\varphi_1 \wedge \forall x\varphi_2$, что и требовалось доказать. Формулы $\forall x(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ и $\forall x\varphi_1 \wedge \forall x\varphi_2$ всегда истинны и ложны одновременно.

Вернёмся к исходной задаче: доказать, что формула ψ общезначима. Для этого нужно показать, что формула $\varphi = \neg\psi$ противоречива. Приведём формулу φ к ССФ:

$$\underbrace{\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n (D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_n)}_{\varphi}.$$

Очевидно, что если φ противоречива, то будучи приведённой к ССФ она останется противоречивой. Как определить, что ССФ противоречива?

Согласно утверждению 4.2.2. формула φ представима в виде конъюнкции, в которой кванторная приставка предшествует каждому из дизъюнктов. Запишем φ в таком виде, но не как большую формулу из конъюнкций дизъюнктов, а как систему дизъюнктов — множество, содержащее в себе все дизъюнкты конъюнкции:

$$S = \begin{cases} \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n (D_1) \\ \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n (D_2) \\ ... \\ \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n (D_n) \end{cases}.$$

Определение 4.2.4. Определенная выше система S называется системой дизъюнктов.

В дальнейшем, записывая систему дизъюнктов или говоря о ней, будем помнить, что перед каждым дизъюнктом стоит кванторная приставка общности по всем переменным, входящим в дизъюнкт. Для упрощения записи, в дальнейшем не будем выписывать кванторную приставку, записывая дизъюнкты, но всегда будем её подразумевать.

4.3. ЭРБРАНОВСКИЙ УНИВЕРСУМ И ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Итак, если формула φ противоречива, то будучи представленной в ССФ она остается противоречивой. Иначе говоря, если в любой интерпретации ССФ невыполнима, то φ противоречива. ССФ невыполнима только тогда, когда система дизъюнктов противоречива. В самом деле, если система дизъюнктов выполнима в некоторой интерпретации I, то в этой интерпретации выполнима и ССФ (покажите самостоятельно), но тогда в этой интерпретации I выполнима φ, что противоречит исходному предположению.

Что означает, что система дизъюнктов противоречива? Это означает, что в любой интерпретации I найдется хотя бы один дизъюнкт $D_j \in S$, такой, что $I \models\!\!\!\!/\, D_j$. Проверить все возможные интерпретации, практически невозможно. Но было показано, что существует класс интерпретаций с определённым носителем, называемым эрбрановским универсумом, и если на множестве таких интерпретаций система дизъюнктов противоречива, то система дизъюнктов противоречива на множестве всех интерпретаций.

Определение 4.3.1. Множество эрбрановских констант: $HConst$, состоит из констант, используемых в системе дизъюнктов, или, если таких констант нет, из одной константы c, называемой эрбрановский константой.

Определение 4.3.2. Эрбрановским универсумом называется множество всевозможных термов, построенных с помощью множества эрбрановских констант $HConst$ и функциональных символов, встречающихся во множестве дизъюнктов. Эрбрановский универсум записывается как $H = \{h_1, h_2, ..., h_n ...\}$, где h_i, некоторый объект эрбрановского универсума.

Эрбрановский универсум в своей сути представляет собой множество констант различного уровня:

- под константами нулевого уровня (H_0) понимаются все константы, встречающиеся в рассматриваемой системе дизъюнктов;
- константы уровня $i+1$ образуют множество, полученное путём объединения констант уровня i и множества всех термов, полученных в результате подстановки в функциональные символы сигнатуры термов уровня i: $f^n(t_1,t_2,...,t_n)$, где t_i — множество термов полученных на уровне i.

Для констант уровня i используется обозначение H_i. Эрбрановский универсум образуется множеством констант: H_∞, записывается просто H.

Пример 4.3.1. Пусть для некоторой формулы была построена система дизъюнктов (здесь и далее c — константа):

$$\{D_1 = R^1(x) \vee P^1(c), D_2 = \neg G^1(x)\}.$$

Система дизъюнктов не содержит функциональных символов. Тогда $H_0 = H_1 = ... = H_\infty = \{c\}$.

Пример 4.3.2. Пусть для некоторой формулы была построена система дизъюнктов:

$$\{D_1 = R^1(c) \vee P^1(f^1(x)), D_2 = \neg G^1(y)\}.$$

Построим множество констант различного уровня:

$$H_0 = \{c\},$$
$$H_1 = H_0 \cup \{f^1(t_i)\} = \{c, f^1(c)\},$$
$$H_2 = H_1 \cup \{f^1(t_i)\} = \{c, f^1(c), f^1(f^1(c))\},$$
$$\dots$$
$$H_\infty = \{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c)))...\}.$$

Последнее множество образует эрбрановский универсум.

Пример 4.3.3. Пусть для некоторой формулы была построена система дизъюнктов:

$$D_1 = R^1(c) \vee P^2(f(x,x)), D_2 = \neg G^1(y).$$

Построим множество эрбрановских констант различного уровня:

$$H_0 = \{c\},$$

$$H_1 = H_0 \cup \{f^2(t_i,t_j)\} = \{c, f^2(c,c)\},$$

$$H_2 = H_1 \cup \{f^2(t_i,t_j)\} = \{c, f^2(c,c), f^2(c, f^2(c,c)), f^2(f^2(c,c),c)\} \cup$$
$$\cup \{f^2(f^2(c,c), f^2(c,c))\},$$

$$\ldots$$

$$H = \{c, f^2(c,c), f^2(c, f^2(c,c)), f^2(f^2(c,c),c), f^2(f^2(c,c), f^2(c,c)),...$$
$$..., f(f(f(c), f(c)),c)...\}.$$

Пример 4.3.4. Пусть для некоторой формулы была построена система дизъюнктов:

$$\{D_1 = R^1(c) \vee P^1(f(x)), D_2 = \neg G^2(x, f(z,y))\}.$$

Построим множество констант нулевого, первого и второго уровня:

$$H_0 = \{c\},$$

$$H_1 = H_0 \cup \{f^1(t_k), g^2(t_i,t_j)\} = \{c, g^2(c,c), f^1(c)\},$$

$$H_2 = H_1 \cup \{f^1(t_k), g^2(t_i,t_j)\} == \{c, g^2(c,c), f^1(c), g^2(f^1(c),c),...$$
$$...g^2(c, f^1(c)),..., g^2(c, g^2(c,c))...\}.$$

Введём понятия эрбрановского базиса и эрбрановской интерпретации.

Определение 4.3.3. Пусть построена система дизъюнктов S и пусть эта система принадлежит сигнатуре:

$$\Sigma = < Var, Const, Funk, Pred > .$$

Эрбрановской интерпретацией (H-интерпретацией), называется такая интерпретация:

$$I_H = < H, \overline{Const}, \overline{Funk}, \overline{Pred} >$$

в которой:

- носителем интерпретации является эрбрановский универсум;
- все константы системы дизъюнктов отображаются сами в себя: $\overline{Const}(c) = c$;
- каждому n-местному функциональному символу сигнатуры ставится в соответствие некоторая n-местная функция $f^n : H^n \to H$, которая переводит каждый кортеж вида $(h_1, h_2, ..., h_n)$, где $h_1, h_2, ..., h_n$ — объекты эрбрановского универсума, в некоторый объект эрбрановского универсума: $(h_1, h_2, ..., h_n) \to \overline{f}(h_1, h_2, ..., h_n)$;
- предикатные символы получают некоторую, условно произвольную оценку.

Все эрбрановские интерпретации идентичны и отличаются друг от друга лишь оценкой предикатных символов. Покажем, что подразумевается под оценкой предикатных символов.

Пример 4.3.5. Пусть для некоторой формулы была построена система дизъюнктов:

$$\{ D_1 = R^1(x), D_2 = P^1(f^2(x, y)) \}.$$

Зададим некоторую интерпретацию I. Носитель интерпретации пусть содержит два элемента: $\Im = \{2,3\}$. Тогда:

$$f^2(2,2) = 2,\ f^2(2,3) = 3,\ f^2(3,2) = 2,\ f^2(3,3) = 2;$$

$$R^1(2)=0,\ R^1(3)=1,\ P^1(f^2(2,2))=P^1(2)=1,$$

$$P^1(f^2(2,3))=P^1(3)=0,\ P^1(f^2(3,3))=P^1(2)=1,$$
$$P^1(f^2(3,2))=P^1(2)=0.$$

Построим H-интерпретацию I_H соответствующую введённой выше интерпретации I, выбрав в качестве эрбрановской константы 2:

$$H_\infty=\{2,f^2(2,2),f^2(2,f^2(2,2)),f^2(f^2(2,2),2),\ldots$$
$$\ldots f^2(f^2(2,2),f^2(2,2))\ldots\},$$

$$R^1(2)=0,\ P^1(f^2(2,2))=P^1(2)=1,\ R^1(f^2(2,2))=R^1(2)=0,$$

$$P^1(f^2(2,f^2(2,2)))=P^1(f^2(2,2))=1,$$

$$P^1(f^2(f^2(2,2),2))=P^1(f^2(2,2))=1,$$

$$P^1(f^2(f^2(2,2),f^2(2,2)))=P^1(f^2(2,2))=1\ldots$$

Построенная H-интерпретация обладает следующим свойством: каждый предикатный символ в такой интерпретации получает оценку истина или ложь, в зависимости от того, какое значение принимает этот предикатный символ в интерпретации I, при подстановке в него вместо соответствующих параметров объектов эрбрановского универсума.

В последнем примере в качестве эрбрановской константы (раз система дизъюнктов не содержит констант), могло быть взято число 3. Не играет роли, какое из значений носителя мы выбрали в качестве эрбрановской константы. Далее мы это покажем. Прежде чем перейти к иллюстрации механики работы эрбрановских интерпретаций, сделаем замечание. Понятие эрбрановского универсума может быть введено иначе, чем было сделано нами. Так константы всех уровней выше нулевого, порождаются не только посредством функциональных символов системы дизъюнктов, но посредством всех функциональных символов сигнатуры. В нашем случае мы берём лишь подмножество такого универсума, но этого подмножества хватает для работы.

Пример 4.3.6. Дальнейший материал будем рассматривать на основании этого примера**.** Пусть для формулы φ была построена ССФ:

$$\forall x \forall y (R^1(x) \wedge P^1(f^1(y,2)),$$

и система дизъюнктов:

$$S = \{ D_1 = R^1(x), D_2 = P^1(f^1(y,2)) \}.$$

Построенная система дизъюнктов S противоречива, если S невыполнима ни в одной интерпретации. Необходимость рассматривать всевозможные интерпретации, приводит к необходимости рассматривать различные носители, возможные для S. Выберем простой носитель: $\mathfrak{I} = \{1,2\}$. Рассмотрим интерпретации, возможные при данном носителе. Будем считать, что $Const(2) = 2$.

Функциональный символ f^1 может быть проинтерпретирован всего четырьмя способами (каждая строчка задаёт свою интерпретацию I):

- $f^1(1,2) = 1, f^1(2,2) = 1$;
- $f^1(1,2) = 2, f^1(2,2) = 2$;
- $f^1(1,2) = 1, f^1(2,2) = 2$;
- $f^1(1,2) = 2, f^1(2,2) = 1$.

Обозначим Int_f множество всевозможных оценок функционального символа $f^1(y,2)$, во всех интерпретациях I с носителем $\mathfrak{I}$.

Видим, что как бы мы ни оценили $y = y'$, если мы рассмотрим все возможные элементы множества Int_f, то в этом множестве значение функционального символа $f(y',2)$ пробегает по всем элементам носителя $\mathfrak{I}$. В текущем примере таких элементов всего два. Множество Int_f, например, включает в себя такие объекты как: $f(2,2)=1$, $f(2,2)=2$, где $y=2$. То есть на множестве Int_f, областью значений $f(2,2)$ является множество из всех элементов носителя $\Im$.. Поэтому на множестве Int_f функциональный символ $f^1(2,2)$ сам по себе играет роль переменной принимающей значения из множества носителя $\Im$.

Мы всё ещё работаем в рамках примера 4.3.6. Перейдём к H-интерпретациям. Вспомним, что каждой интерпретации по построению соответствует некоторая H-интерпретация. Получается, что для каждой из констант h эрбрановского универсума, чей уровень больше «0» (то есть для каждой константы, заданной через функциональный символ), существует H-интерпретация, в которой этой константе присваивается некоторый элемент носителя $\Im$. Возьмём например H-интерпретацию, соответствующую интерпретации I в которой $f^1(1,2)=1, f^1(2,2)=1$. Посчитаем значения эрбрановских констант:

$$H_0 = c = 2,$$

$$H_\infty = \{2, f^1(2,2), f^1(f^2(2,2),2), f^1(f^1(f^1(2,2),2),2),...$$
$$..., f^1(f^1(f^1(f^1(f^1(f^1(2,2),2),2),2),2),2)...\},$$

$$c = h_0 = 2.\ f^1(c,2) = f^1(2,2) = 1,$$

$$f^1(f^1(c,2),2) = f^1(f^1(2,2),2) = f^1(1,2) = 1,$$

$$f^1(f^1(f^1(c,2),2),2) = f^1(f^1(f^1(2,2),2),2) = f^1(f^1(1,2),2) =$$
$$= f^1(1,2),2) = 1$$

$$\ldots$$

В H-интерпретации соответствующей выбранной интерпретации I эрбрановские константы принимают те же значения, что и термы интерпретации I.

Построим множество H-интерпретаций соответствующих всевозможным интерпретациям I с носителем $\Im = \{1, 2\}$. Получим множество H-интерпретаций $HInt_f$. На множестве $HInt_f$ каждой константе (функциональному символу от эрбрановской константы) h поочерёдно ставится в соответствие каждый из элементов носителя $\Im$. Следует это из того, что функциональный символ $f(2,2)$ на множестве Int_f принимает всевозможные значения из $\Im$. Таким образом, на множестве $HInt_f$ эрбрановская константа h начинает играть роль переменной, принимающей значения из множества $\Im$. Рассмотрите графическую иллюстрацию (рис. 4.1) сказанного выше.

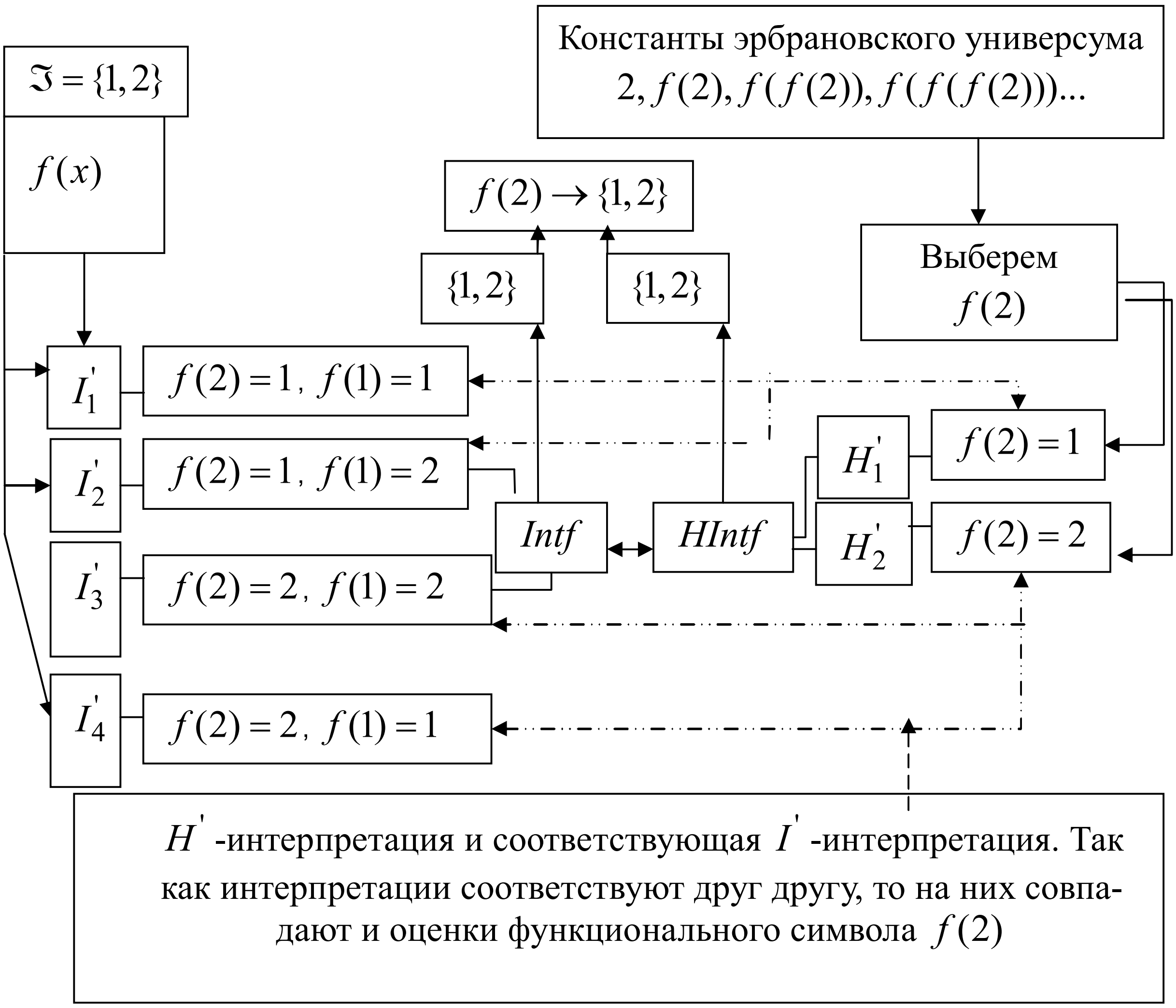


Рис. 4.1

Итак, рассматриваемая система дизъюнктов:

$$\{D_1 = R^1(x),\ D_2 = P^1(f^1(y,2))\},$$

не будет противоречивой тогда и только тогда, когда существует H-интерпретация, в которой эта система дизъюнктов выполнима. Тогда система дизъюнктов выполнима в интерпретации, соответствующей найденной H-интерпретации.

Проиллюстрируем ещё раз выше сказанное. Рассмотрим H-интерпретацию такую что:

$$H_\infty = \{2, f^2(2,2), f^2(2, f^2(2,2)), f^2(f^2(2,2),2), f^2(f^2(2,2), f^2(2,2))...\}$$

$$R^1(2) = 0,\ P^1(f^2(2,2)) = P^1(2) = 1,\ R^1(f^2(2,2)) = R^1(2) = 0,$$

$$P^1(f^2(2, f^2(2,2))) = P^1(f^2(2,2)) = 1,$$

$$P^1(f^2(f^2(2,2),2)) = P^1(f^2(2,2)) = 1,$$

$$P^1(f^2(f^2(2,2), f^2(2,2))) = P^1(f^2(2,2)) = 1\ldots$$

Почему $P^1(f^2(2,2)) = P^1(2) = 1$? Потому, что в интерпретации I, соответствующей данной H-интерпретации, $f^2(2,2) = 2$, а $P^1(2) = 1$.

Рассмотрим теперь H-интерпретацию, в которой: $P^1(f^2(2,2)) = P^1(1) = 1$. Такая H-интерпретация соответствует интерпретации I, в которой $f^2(2,2) = 1$, а $P^1(1) = 1$.

Рассмотрим ещё одну H-интерпретацию, в которой будет: $P^1(f^2(2,2)) = P^1(12) = 0$. Такая H-интерпретация соответствует интерпретации I, в которой $f^2(2,2) = 12$, а $P^1(12) = 0$ (теперь мы не ограничиваемся носителем $\{1,2\}$).

Наконец можно рассмотреть H-интерпретацию, в которой: $P^1(f^2(2,2)) = P^1(\Delta) = 1$. Такая H-интерпретация соответствует интерпретации I в которой $f^2(2,2) = \Delta$, а $P^1(\Delta) = 1$.

Так перебирая друг за другом всевозможные H-интерпретации несложно заметить, что константа эрбрановского универсума $f^2(2,2)$, будет поочерёдно ассоциироваться со всеми мыслимыми и немыслимыми объектами, принимая их значения. Именно это мы имели ввиду, говоря, что эрбрановская константа на множестве H-интерпретаций играет роль своего рода переменной.

Возникает вопрос: почему бы при переходе от интерпретаций I к H-интерпретациям не ограничится эрбрановскими константами нулевого и первого уровня? Рассмотрим самый простой пример. Возьмём предикатный символ $P^n(x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть в интерпретации $I^{'}$, только на оценке, когда $x_1 \neq x_2 \neq ... \neq x_n$, P^n оценивается как истинный: $I^{'} \models P^n$. Если в H-интерпретации мы запишем $P^n(f(c), f(c), ..., f(c)) = 1$, то такой H-интерпретации будет соответствовать интерпретация I в которой P^n истинен при $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Как построить H-интерпретацию соответствующую $I^{'}$? Для этого понадобиться записать:

$$P^n(f(c), f(f(c)), ..., f(f(...f(c)...))) = 1,$$

если по построению $f(c) = x_1$, $f(f(c)) = x_2, \ldots$, $f(f(...f(c)...)) = x_n$.

Вернёмся к построению H-интерпретаций. Чтобы задать интерпретацию необходимо проинтерпретировать и функциональные символы, и предикатные. Для каждого из вариантов интерпретации I функционального символа $f^1(y,2)$, предикатный символ P^1 может быть проинтерпретирован четырьмя способами. Например, для случая $f^1(1,2) = 1, f^1(2,2) = 2$ получаем:

- $P^1(f^1(1,2)) = P^1(1) = 0, P^1(f^1(2,2)) = P^1(2) = 0$;
- $P^1(f^1(1,2)) = P^1(1) = 1, P^1(f^1(2,2)) = P^1(2) = 1$;
- $P^1(f^1(1,2)) = P^1(1) = 0, P^1(f^1(2,2)) = P^1(2) = 1$;
- $P^1(f^1(1,2)) = P^1(1) = 1, P^1(f^1(2,2)) = P^1(2) = 0$.

Несложно посчитать число возможных интерпретаций I с носителями $\Im = \{1,2\}$ для системы дизъюнктов S примера 4.3.6. Число таких интерпретаций равно $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Четыре способа задать интерпретацию функционального символа $f^1(x,2)$, для каждого такого способа есть ещё по четыре различных возможности интерпретации предикатного символа $P^1(f^1(y,2))$. Для каждой из этих 16 интерпретаций существует по четыре возможные интерпретации предикатного символа $R^1(x)$. Складывая все интерпретации вместе, получаем 64. Это число попарно различных интерпретаций при носители всего из двух элементов. А во множестве всех возможных интерпретаций, многие интерпретации имеют бесконечный носитель.

Вне зависимости от того как задать функцию интерпретации функционального символ f^1, каждой такой функции интерпретации будет соответствовать по 16 различных возможностей проинтерпретировать предикатные символы P^1 и R^1 (рис. 4.2).

В интерпретации каждая переменная функционального символа становится некоторой константой эрбрановского универсума (а каждой такой константе соответствует некоторый элемент носителя). Переходя от простых интерпретаций к H-интерпретациям мы сокращаем число перебора всевозможных интерпретаций, на число способов, которые порождались всевозможными оценками функциональных символов (рис. 4.2). Нас интересуют именно функции интерпретации предикатных символов, поэтому мы, можем ограничиться рассмотрением всего одной функции интерпретации

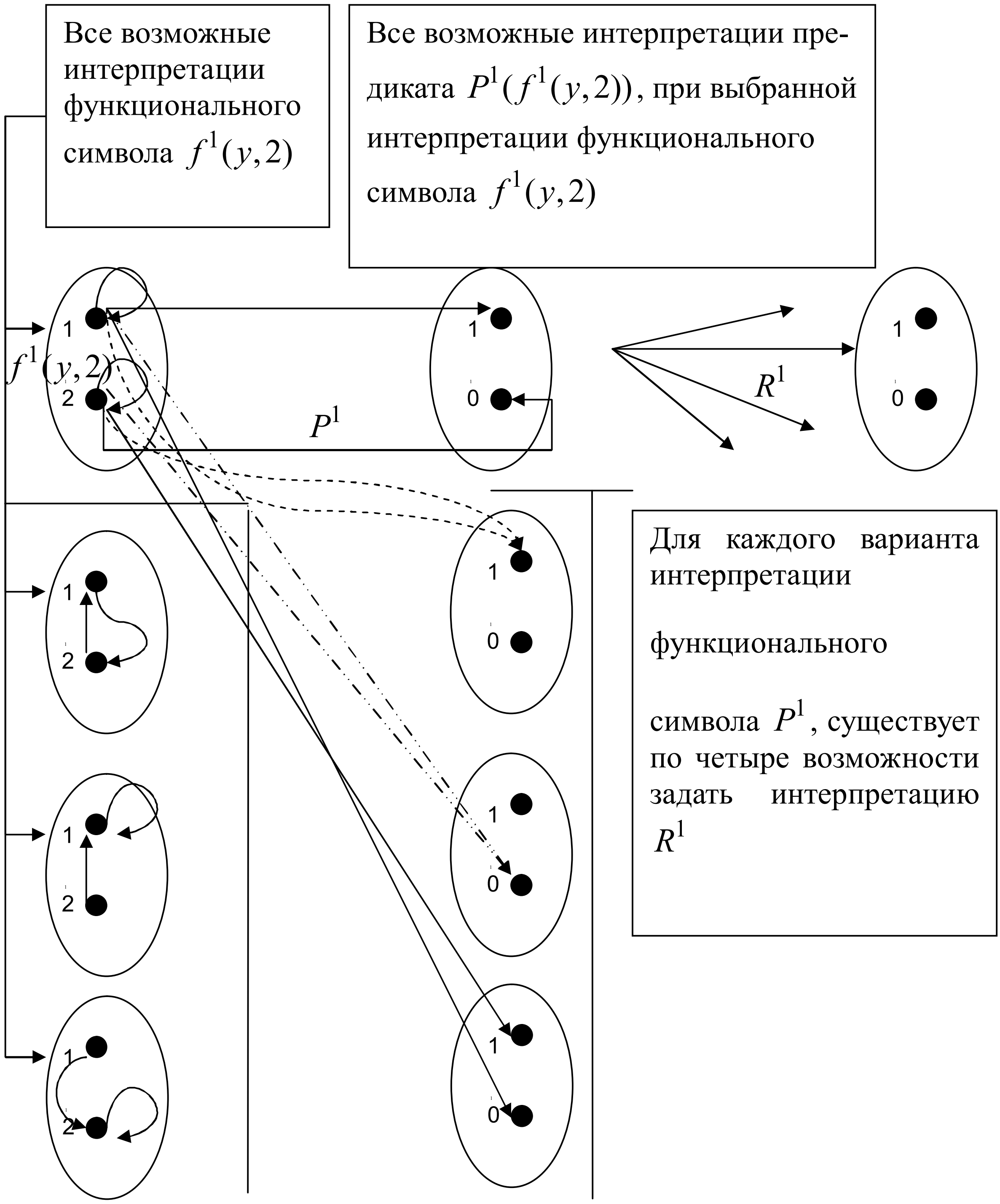


Рис. 4.2. Интерпретация функциональных и предикатных символов

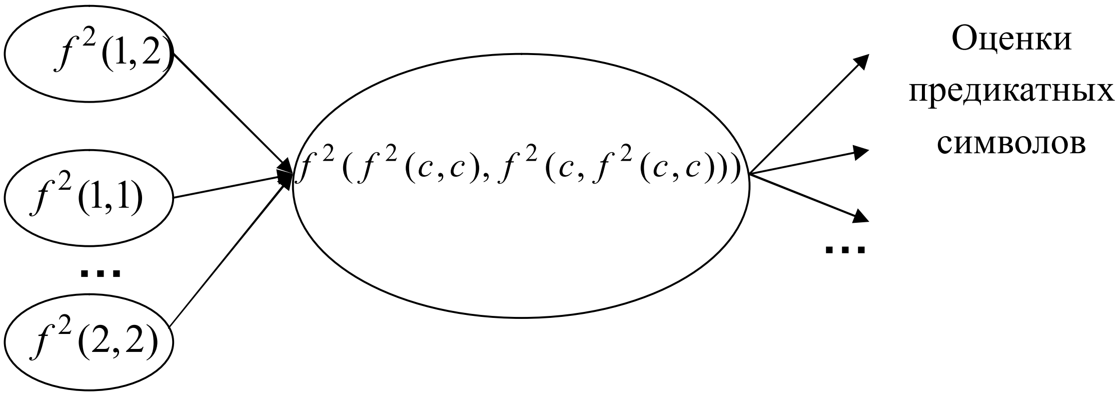


Рис. 4.3. Переход от интерпретаций к H -интерпретациям

функционального символа $f^1(x,2)$. Какой? Отвечая на вопрос какой, скажем «некоторой абстрактной», которой соответствует H-интерпретация с которой мы в дальнейшем будем работать. При такой интерпретации каждая переменная функционального символа становится некоторой константой эрбрановского универсума (а каждой такой константе соответствует некоторый элемент носителя). Переходя от простых интерпретаций к H -интерпретациям мы сокращаем число перебора всех возможных интерпретаций, на число способов, которые порождались всевозможными оценками функциональных символов (рис. 4.3).

Делая такой переход, мы фактически заменяем переменные в системе дизъюнктов (с которой работаем) на константы, и получаем высказывания.

Таким образом, мы от задачи проверки противоречивости системы дизъюнктов для предикатов можем перейти к проверке противоречивости системы дизъюнктов высказываний и использовать методы известные в логике высказываний (в том числе и метод резолюций).

Обратим внимание, что записанные внутри предикатов эрбрановские константы, рассматриваются как константы, некоторые абстракции имеющие «абстрактное» фиксированное значение. Но само по себе это «абстрактное» может принять любое значение из любого носителя любой интерпретации I, поскольку на множестве всевозможных интерпретаций эрбрановкая константа оказывается своего рода переменной, принимающей значения из носителя $\Im$. Теперь мы можем сформулировать следующую лемму.

Лемма 4.3.1. Если существует интерпретация I, в которой выполнима построенная система дизъюнктов S, то в любой из H-интерпретаций соответствующих I, так же выполнима система дизъюнктов S.

Теорема 4.3.1. Система дизъюнктов противоречива тогда и только тогда, когда она невыполнима во всех H-интерпретациях.

Доказательство. Система дизъюнктов невыполнима тогда и только тогда когда она ложна в любой интерпретации I. Если предположить что множество дизъюнктов выполняется хотя бы в одной интерпретации I, то в соответствии с леммой 4.3.1. существует H-интерпретация, соответствующая I, что в ней множество дизъюнктов так же выполнимо. Если такой интерпретации I не существует, то нет и соответствующей ей H-интерпретации, в которой множество дизъюнктов было бы разрешимо.

Теперь предположим, что множество дизъюнктов невыполнимо на всех H-интерпретациях и при этом это же множество дизъюнктов выполнимо на некоторой интерпретации I. Пусть I^H — H-интерпретация соответствующая I (как мы видели выше по построению такая H-интерпретация всегда существует). Но тогда по условию леммы 4.3.1. в I^H выполнима система дизъюнктов. Получили противоречие. Поэтому если множество дизъюнктов не удовлетворяет ни одной H-интерпретации, то оно не удовлетворяет никакой интерпретации I. Теорема доказана.

Следствие 4.3.1 Система дизъюнктов противоречива тогда и только тогда, когда она невыполнима ни в одной эрбрановской интерпретации.

Определение 4.3.4. Эрбрановским базисом называется множество всех атомарных формул вида $R^n(h_1, h_2, ..., h_n)$, где R^n — предикат, входящий в систему дизъюнктов S, а $h_1, h_2, ..., h_n$ — объекты (константы) эрбрановского универсума. Формулы $R^n(h_1, h_2, ..., h_n)$ называются основными атомами.

Определение 4.3.5. Основным примером D_i^{osp} дизъюнкта D_i:

$$D_i = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_k (L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_k),$$

называется дизъюнкт, полученный из $D_i^{'} = L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_k$ в результате подстановки объектов эрбрановского универсум вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_k$:

$$D_i^{osp} = (L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_k)[x_1 / h_1, x_2 / h_2, ..., x_n / h_n],$$

где $h_1, h_2, ..., h_n \in H$.

Пример 4.3.7. Рассмотрим дизъюнкт:

$$D = \forall x_1 \forall x_2 (R^1(x_2) \vee P^2(x_1, f(x_2))).$$

Основной пример дизъюнкта D: $D^{os} = R^1(h(c)) \vee P^2(c, f(h(c)))$, где $c, h(c)$ — объекты эрбрановского универсума.

Итак, H-интерпретации обладают рядом преимуществ в сравнении с простыми интерпретациями. Во-первых, не нужно рассматривать всевозможные носители: носителем соответствующим H-интерпретациям является эрбрановский универсум. Во-вторых, больше не нужно рассматривать всевозможные функции интерпретации функциональных символов. Во всех H-интерпретациях используется одна и та же функция интерпретации для констант и функциональных символов.

Таким образом, каждая H-интерпретация определяется тем, какие предикаты были поставлены в соответствие предикатным символам. Поэтому что бы указать всевозможные H-интерпретации оказывается достаточным перебрать всевозможные функции интерпретации предикатных символов. Каждая H-интерпретация задаётся эрбрановским базисом. Обычно принято говорить, что каждая H-интерпретация задаётся подмножеством истинных основных атомов (то есть из всех основных атомов указываются только те, что истинны). Очевидно, что такое подмножество пусто, если H-интерпретация соответствует интерпретации, в которой все предикатные символы соответствуют значению ложь.

Вернёмся к исходной задаче: задаче проверки общезначимости формулы ψ. Данную задачу мы сперва свели к проверки противоречивости формулы $\varphi = \neg\psi$. Проверку противоречивости формулы φ мы свели к проверки противоречивости ПНФ построенной для φ. Проверку противоречивости полученной ПНФ мы свели к задаче проверки противоречивости ССФ построенной для данной ПНФ. От задачи проверки противоречивости ССФ мы перешли к проверке противоречивости системы дизъюнктов S соответствующей ССФ. Затем мы показали, что система дизъюнктов противоречива тогда и только тогда, когда не существует H-интерпретации в которой данная система была бы выполнима. Таким образом, для решения исходной задачи, нам теперь нужно найти метод, с помощью которого можно было бы показать: существует или нет H-интерпретация такая, что проверяемая система дизъюнктов S в ней выполнима.

То, что система дизъюнктов противоречива, значит в каждой H-интерпретации соответствующей некоторой интерпретации I, хотя бы один из дизъюнктов является ложным. Иначе говоря, в системе дизъюнктов найдётся такой дизъюнкт (без кванторной приставки) $D_i = (L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{ij})$ и найдётся такой набор термов из эрбрановского универсума $h_1, h_2, \ldots, h_n$, что:

$$I \mid\neq D_i[x_1 / h_1, x_2 / h_2, \ldots, x_n / h_n].$$

Пример 4.3.8. Система дизъюнктов имеет вид:

$$\forall x(P^1(x) \vee K^0(2) \wedge \neg R^1(f^1(x)) \vee Q(f^1(x))),$$

$$S = \begin{cases} D_1 = (P^1(x) \vee K^0(2)) \\ D_2 = (\neg R^1(f^1(x)) \vee Q^1(f^1(x))) \end{cases}.$$

Построим некоторую интерпретацию I. За носитель $\Im$ примем множество всех натуральных чисел. Функциональному символу f^1 сопоставим функцию: $f^1(x) = 2 \cdot x$. С предикатным символом P^1 свяжем предикат «быть натуральным числом». С предикатным символом R^1 свяжем отношение «быть чётным». Предикатному символу $K^0(2)$ поставим в соответствие значение истины (например, данное высказывание может читаться «два делится на 2»). Предикатному символу $Q^1(f^1(x))$ сопоставим предикат «не быть числом».

Такой интерпретации будет соответствовать следующая H-интерпретация:

- носитель: эрбрановский универсум: $c = 2$, $f(2), f(f(2))$, $f(f(f(2))), \ldots$;
- $P^1(c) = P^1(2) = 1$, $P^1(f(2)) = P^1(4) = 1$, $P^1(f(f(2))) = P^1(8) = 1, \ldots.$
- $R^1(f(2)) = 1$, $R^1(f(f(2))) = 1, \ldots$
- $K^0(2) = 1$;
- $Q^1(f^1(2)) = 0$, $Q^1(f^1(f^1(2))) = 0, \ldots.$

Проверим, будет ли в построенной H-интерпретации противоречива система дизъюнктов:

$$\begin{cases} D_1 = P^1(h_1) \vee K^0(2) \\ D_2 = \neg R^1(h_2) \vee Q(h_3) \end{cases},$$

где h_1, h_2, h_3 объекты эрбрановского универсума. При любом h_1 предикату $P^1(h_1)$ соответствует истинное значение, предикату $K^0(2)$ соответствует истинное значение. Поэтому дизъюнкт D_1 в построенной H-интерпретации всегда истинен. Рассмотрим дизъюнкт $D_2 = \neg R^1(h_2) \vee Q(h_3)$. При любых h_2, h_3 предикат $R^1(h_2)$ тождественно истинен, а литера $\neg R^1(h_2)$ ложна, предикат $Q(h_3)$ тождественно ложен. Значит, D_2 есть дизъюнкция двух тождественно ложных предикатов, и всегда выдаёт результатом «ложь», что означает невыполнимость данного дизъюнкта. Это означает, что существует (хотя бы один) такой набор h_1, h_2, h_3 из эрбрановского универсума, что один из дизъюнктов невыполним, а значит, при данном наборе невыполнима и вся конъюнкция дизъюнктов. Это нам говорит о том, что в интерпретации, которой соответствует H-интерпретация, существует такое значение x, что конъюнкция дизъюнктов невыполнима. Поскольку формула представлена в ССФ и замкнута, то по переменной x вначале формулы стоит квантор всеобщности. Раз есть x, при котором подкванторная формула невыполнима, то вся формула (взятая с кванторной приставкой) оказывается невыполнимой в выбранной интерпретации. Поэтому, если в каждой H-интерпретации хотя бы один дизъюнкт на некотором наборе констант из эрбрановского универсума оказывается невыполнимым, то вся система дизъюнктов, взятая с кванторной приставкой невыполнима. Или, если сказать иначе, система дизъюнктов будет противоречивой, если в каждой H-интерпретации существует такая подстановка $h_1, h_2, ..., h_n \in H$, что система дизъюнктов оказывается ложной. По определению, подстановка объектов эрбрановского универсума вместо вхождений переменных в системе дизъюнктов порождает основной пример. Значит система дизъюнктов противоречива в некоторой H-интерпретации тогда и только тогда, когда хотя бы один основной пример системы дизъюнктов будет ложным.

В текущем примере 4.3.8. это не так. Показать это достаточно легко. Для этого достаточно построить H-интерпретацию, соответствующую интерпретации I, в которой предикатному символу

$Q^1(f^1(x))$ ставится в соответствие одноместный предикат «быть числом», вместо предиката «не быть числом». В построенной H система дизъюнктов будет выполнима.

4.4. СЕМАНТИЧЕСКОЕ ДЕРЕВО. ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Чтобы проверить формулу на противоречивость, необходимо проверить на противоречивость систему дизъюнктов S. Для этого нужно построить опровергающую систему основных примеров дизъюнктов из S. Чтобы построить такую систему, может потребоваться перебрать множество всех возможных основных примеров дизъюнктов из S. Если мы сможем обнаружить противоречивую систему основных примеров за конечное число шагов, то мы сможем с точностью сказать, что рассматриваемая система дизъюнктов противоречива (рис 4.4).

Каким образом лучше организовать перебор всех возможных основных примеров? Вспомним, что каждый дизъюнкт представляет собой дизъюнкцию литер $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{ik}$. Каждая литера есть атомарная формула или её отрицание. Что бы получить некоторый основной пример дизъюнкта, мы должны каждую переменную в каждой литере заменить на объект эрбрановского универсума. Какие именно объекты эрбрановского универсума нужно подставить вместо переменных, входящих в литеры, чтобы получить противоречивое множество основных примеров дизъюнктов? Изначально мы этого не знаем. Нам требуется задать механизм, который бы осуществил перебор возможных подстановок различных объектов эрбрановского универсума вместо переменных, входящих в литеры.

Представим перебор в виде бинарного дерева, где $h_i \in H$, L_i — некоторая литера из рассматриваемой системы дизъюнктов (рис. 4.5). В таком дереве, корневая вершина не несёт какой-либо функциональной нагрузки. Все остальные вершины есть литеры, в которых вместо переменных подставлены объекты эрбрановского универсума.

Система дизъюнктов $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ противоречива

$\Updownarrow$

В любой H-интерпретации, соответствующей некоторой интерпретации I, в системе дизъюнктов $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ всегда найдётся хотя бы один дизъюнкт D_i и такой набор $h_1, h_2, ..., h_m \in H$, что при подстановке: $D_i[x_1 / h_1, x_2 / h_2, ..., x_k / h_k]$, дизъюнкт D_i будет ложным. Тогда при аналогичной подстановке в интерпретации I будет получена ложь:

$I \mid\neq D_i[x_1 / h_1, x_2 / h_2, ..., x_k / h_k]$, $D_i \in \{D_1, D_2, ..., D_n\}$, $x_1, x_2, ..., x_k$.

$\Updownarrow$

В любой H-интерпретации, соответствующей некоторой интерпретации I, для системы дизъюнктов $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ существует система основных примеров D^{osp}, которая невыполнима. Данная система примеров будет невыполним и в соответствующей интерпретации I: $I \mid\neq D^{os}$

Рис. 4.4

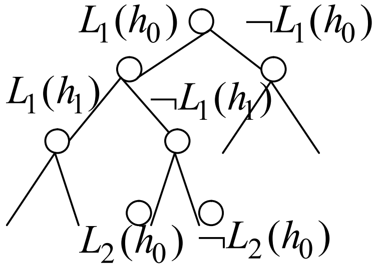


Рис. 4.5. Семантическое дерево

Будем подставлять в литеры вначале эрбрановские константы нулевого уровня, затем первого уровня и т. д. Литера, в которой вместо одной и той же переменной подставлены разные объекты эрбрановского универсума образует две разные вершины. Так литере $L_1(x/c)$, $c \in H$ будет соответствовать одна вершина, а литере $L_1(x/f(c))$, $f(c) \in H$ будет соответствовать другая вершина. Если при движении от некоторой вершины k вправо получена литера $L_i^j(h_1, h_2, ..., h_j)$, то при движении от вершины k влево получится та же литера знаком отрицания: $\neg L_i^j(h_1, h_2, ..., h_j)$, h_1, $h_2, \ldots$, h_j — фиксированные объекты эрбрановского универсума. Через вершину $L_i^j(h_1, h_2, ..., h_j)$ не может проходить ни одна ветвь, содержащая вершину $\neg L_i^j(h_1, h_2, ..., h_j)$. Маршрут от корня дерева до некоторой вершины представляет собой конъюнкцию всех промежуточных вершин.

Рассмотрим маршрут v от корневой вершины до вершины L_i, образующий ветвь: $v = L_1 \wedge L_2 \wedge ... \wedge Li$. Подставим литеры из этой конъюнкции вместо соответствующих литер в системе дизъюнктов. Если при этом будет получен хотя бы один противоречивый основной пример дизъюнкта, то на вершине L_i ветвь оборвётся. Такая вершина L_i называется противоречивой, тупиковой, или опровергающей.

Дерево, заданное описанным выше способом, называется семантическим деревом. Рассмотрим пример и дадим формальное определение понятия семантического дерево.

Пример 4.4.1. Построим выше описанным способом дерево для системы дизъюнктов:

$$\forall x(P^1(x) \wedge \neg R^1(f^1(x)) \wedge \neg P^1(x) \vee R^1(f^1(x))),$$

$$D_1 = P^1(x),\ D_2 = \neg R^1(f^1(x)),\ D_3 = \neg P^1(x) \vee R^1(f^1(x)),$$

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}.$$

Построим эрбрановский универсум:

$$\{c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \ldots\}$$

Будем строить семантическое дерево (рис. 4.6). Вершина $\neg P^1(c)$ является опровергающей, так как противоречит основному примеру дизъюнкта $D_1 = P^1(x)$ при подстановке $[x/c]$: если мы считаем, что выражению $\neg P^1(c)$ соответствует истина, то выражение $P^1(c)$ ложно, а тогда ложно и выражение: $(P^1(c) \wedge \neg R^1(f^1(c)) \wedge \neg P^1(c) \vee R^1(f^1(c)))$.

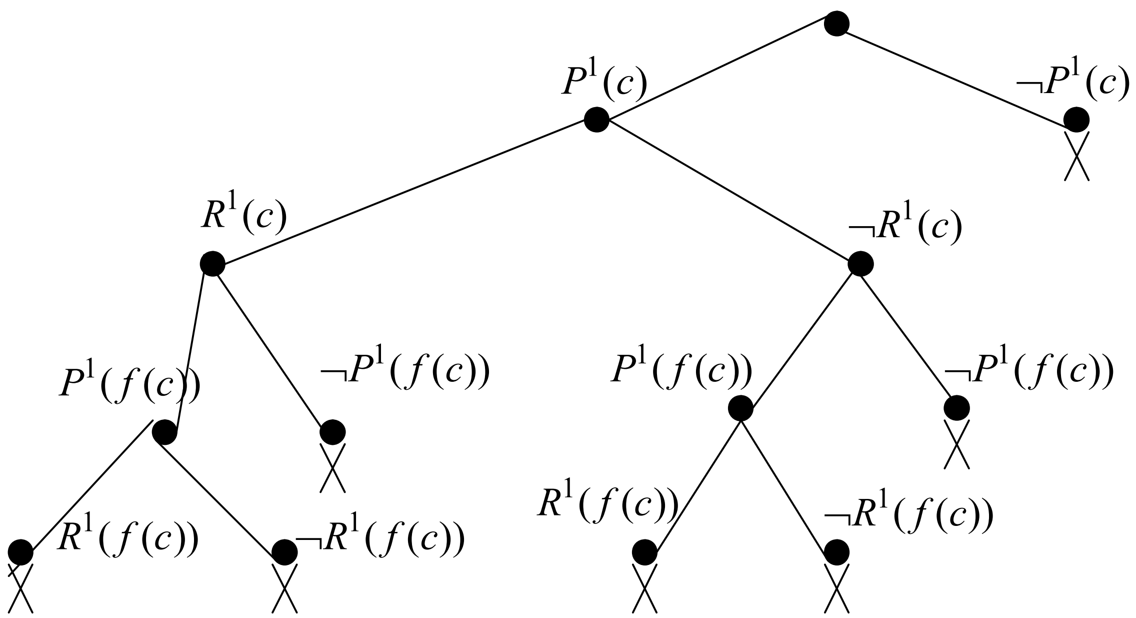


Рис. 4.6. Семантическое дерево для системы дизъюнктов
$S = \{D_1, D_2, D_3\}$

Ветвь $P^1(x) \wedge R^1(c) \wedge \neg P^1(f(c))$ противоречива, так как содержит литеру $\neg P^1(f(c))$, вступающую в противоречие с основным примером дизъюнкта $D_1 = P^1(x)$ при подстановке $[x / f(c)]$.

Ветвь $P^1(x) \wedge \neg R^1(c) \wedge P^1(f(c))$, противоречит основному примеру дизъюнкта $D_3 = \neg P^1(x) \vee R^1(f^1(x))$ при подстановке $[x / f(c), f^1(x) / c]$. Формализуем выше сказанное.

Определение 4.4.1. Семантическим деревом называется бинарное дерево, в котором выполнены следующие условия:

- корень дерева — произвольная вершина;
- каждая отличная от корня вершина является основным примером литеры (атомарной формулой или её отрицанием, в которой каждая переменная заменена на определённый объект эрбрановского универсума):

$$L_i^{'} = L_i(x_1, x_2, ..., x_j)[x_1 / h_{i1}, x_2 / h_{i2}, ..., x_j / h_{ij}];$$

- одна и та же ветвь не может содержать основной пример литеры и его отрицание: $L_j^{'}(h_{j1}, h_{j2}, ..., h_{jj})$ и $\neg L_j^{'}(h_{j1}, h_{j2}, ..., h_{jj})$;
- если в дереве получена противоречивая вершина, то данная вершина является тупиковой. От этой вершины дерево дальше не строится.

Определение 4.4.2. Вершина $L_k^{'}$ называется опровергающей, если маршрут от корня до данной вершины, состоящий из основных примеров литер $L_1^{'}, L_2^{'}, ..., L_k^{'}$, опровергает, хотя бы один дизъюнкт сис

темы дизъюнктов S. При этом ни одна из вершин маршрута $L_1^{'}, L_2^{'}, ..., L_{k-1}^{'}$ не является опровергающей. Если вершина $L_k^{'}$ опровергающая, то подставив некоторое подмножество основных примеров литер из множества $\{L_1^{'}, L_2^{'}, ..., L_k^{'}\}$, включая литеру $L_k^{'}$, вместо соответствующих литер в некоторый дизъюнкт из S, будет получен основной пример дизъюнкта со значением ложь.

Определение 4.4.3. Семантическое дерево называется закрытым, если любая его ветвь содержит опровергающую вершину на конечном расстоянии от корня.

В примере 4.4.1. было получено конечное дерево, каждая ветвь которого заканчивается противоречивой вершиной.

Несложно заметить, что спускаясь по семантическому дереву, мы фактически перебираем все возможные H-интерпретации. Каждая ветвь семантического дерева задаёт некоторую интерпретацию, в которой истинны основные примеры литер, через которые проходит ветвь.

В примере 4.4.1. первые две вершины $P^1(c)$ и $\neg P^1(c)$. фактически делят множество всевозможных H-интерпретаций на два подмножества: в одно входят только те H-интерпретации, в которых истинно значение $P^1(c)$, в другое подмножество входят только те H-интерпретации, в которых истинно $\neg P^1(c)$. От вершины $P^1(c)$ исходят два ребра в вершины $R^1(c)$ и $\neg R^1(c)$. Это означает что, когда мы дошли до этих вершин множество всех H- интерпретаций, в которых истинно $P^1(c)$, распалось ещё на два подмножества: в первом подмножестве всегда истинно $R^1(c)$, во втором $\neg R^1(c)$. И так далее (рис. 4.7).

Пусть H_p множество H-интерпретаций, в которых $\neg P^1(c)=1$. Вершина $\neg P^1(c)$ является опровергающей вершиной. Значит, на любом подмножестве $\Omega \subset H_p$ система дизъюнктов $S=\{D_1, D_2, D_3\}$ будет противоречива. Иначе говоря, вне зависимости от того какие основные примеры мы выберем для других предикатных символов системы S, если $\neg P^1(c)=1$, то система дизъюнктов S будет являться противоречивой.

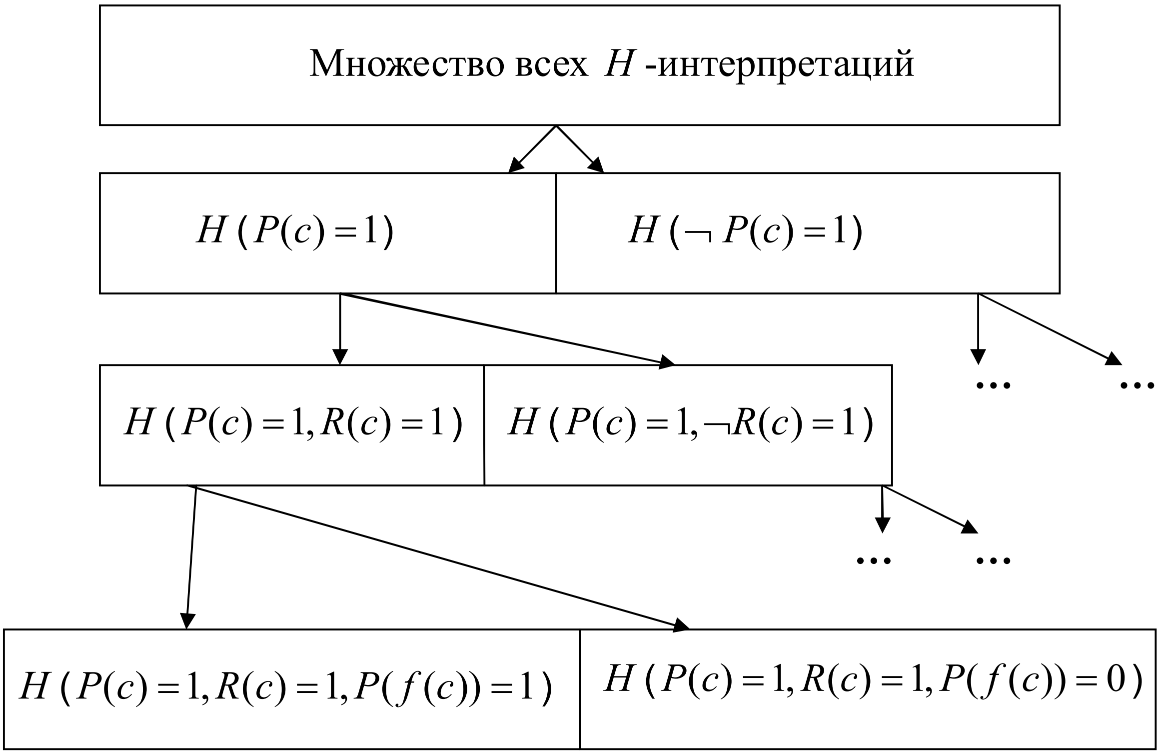


Рис. 4.7

Теперь можно сделать следующий вывод. Если каждая ветвь семантического дерева имеет опровергающую вершину, то в любой H-интерпретации существует такой набор $h_1, h_2, ..., h_i \in H$ и такой дизъюнкт D_j, что:

$$D_j^{osp} = D_j^{'} = (L_{i1} \vee L_{i2} \vee ... \vee L_{ik})[x_1 / h_1, x_2 / h_2, ..., x_n / h_n]$$

невыполним ни в одной. Иначе говоря, не существует такой H-интерпретации, в которой все основные примеры были бы истинны. Соответственно этот дизъюнкт будет невыполним в каждой интерпретации I.

Лемма 4.4.1. О семантическом дереве. Система дизъюнктов противоречива тогда и только тогда, когда в её семантическом дереве каждая ветвь содержит опровергающую вершину. Дойти до всех таких вершин можно за конечное число шагов, значит число опровергающих вершин конечно.

Теорема 4.4.1. Эрбрана (формулировка 1). Система дизъюнктов S противоречива тогда и тогда когда этой системе дизъюнктов соответствует закрытое семантическое дерево.

Доказательство. Пусть система дизъюнктов S невыполнима. Построим семантическое дерево для S. Пусть $L_1^{'},\ L_2^{'},\ldots,\ L_k^{'}$ множество всех основных примеров литер некоторого пути v. Тогда множество истинных $L_1^{'},\ L_2^{'},\ldots,\ L_k^{'}$ задаёт некоторую интерпретацию системы дизъюнктов S. Так как S невыполнима, то в любой H-интерпретации существует невыполнимый основной пример одного из дизъюнктов. Значит любая ветвь, задающая некоторую H-интерпретацию содержит вершину, опровергающую основной пример хотя бы одного дизъюнкта. Поскольку каждый дизъюнкт из S представляет собой дизъюнкцию конечного числа литер, а каждая литера содержит конечное число переменных, то число литер предшествующих опровергающей вершине конечно. Значит, каждая ветвь содержит опровергающий узел, находящийся на конечном расстоянии от вершины и так, как из каждой вершины исходит конечное число дуг, то число таких узлов конечно.

Пусть семантическое дерево, построенное для системы дизъюнктов S, является закрытым деревом. Значит, любая его ветвь на конечном расстоянии от вершины имеет опровергающую вершину. Тогда в любой H-интерпретации, задаваемой некоторой ветвью, существует конечный набор основных примеров литер, который опровергает основной пример хотя бы одного дизъюнкта. Это означает что в каждой H-интерпретации существует такая подстановка

$$D_i = (L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{ij})[x_1 / h_{i1}, x_2 / h_{i2}, \ldots, x_k / h_{ik}],$$

$h_{i1}, h_{i2}, \ldots, h_{ij} \in H$, что значение D_i ложь. Значит, система дизъюнктов S противоречива.

Теорема 4.4.2. Эрбрана (формулировка 2). Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов из S.

Доказательство. Пусть S противоречива. Тогда для S существует закрытое семантическое дерево. Множество всех опровергающих вершин в закрытом семантическом дереве конечно. Каждой опровергающей вершине соответствует основной пример дизъюнкта, который невыполним в H-интерпретации, задаваемой маршрутом от корня до опровергающей вершины. Такой основной пример является противоречивым. Таким образом, получается конечное множество противоречивых основных примеров дизъюнктов из S.

Пусть S^{pr} конечная противоречивая система основных примеров системы дизъюнктов S. Так как S^{pr} противоречива, то она невыполнима ни в одной H-интерпретации. S^{pr} представляет собой конъюнкцию некоторых основных примеров дизъюнктов из S, значит в каждой H-интерпретации невыполним, должен быть хотя бы один из основных примеров S^{pr}. Пусть в каждой H-интерпретации это будет некоторый основной пример $D_H^{'}$ дизъюнкта $D_H \in S$. Каждая H-интерпретация задаётся ветвью семантического дерева соответствующего S. Если в каждой H-интерпретации есть невыполнимый основный пример из S^{pr}, то каждая ветвь семантического дерева на конечном расстоянии от корневой вершины имеет вершину, опровергающую основной пример $D_H^{'}$. Значит, семантическое дерево является закрытым и соответствует противоречивой системе дизъюнктов S.

Теорема Эрбрана сводит задачу проверки противоречивости некоторой формулы к задаче нахождения конечного противоречивого множества S^{pr} основных примеров дизъюнктов из S. Теорема Эрбрана ничего не говорит о том, как найти такое противоречивое множество S^{pr}, но она даёт возможность исследовать вопрос противоречивости системы дизъюнктов с помощью основных примеров дизъюнктов. В основных примерах дизъюнктов вместо переменных подставлены конкретные объекты эрбрановского универсума, а они есть суть константы, значит, основные примеры дизъюнктов представляют собой высказывания.

4.5. ПРАВИЛО РЕЗОЛЮЦИЙ

Систематизируем ещё раз весь механизм проверки формулы на общезначимость (рис. 4.8.). Зададим вопросы: почему мы ищем невыполнимый основной пример хотя бы одного из дизъюнктов? Как мы осуществляем этот поиск? И почему мы этот поиск предпринимаем?

Для поиска противоречивой системы основных примеров дизъюнктов из S Дэвис и Патнем предложили алгоритм перебора всевозможных эрбрановских интерпретаций в поиске противоречивой системы основных примеров дизъюнктов. Так как система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда когда существует конечное противоречивое множество основных примеров дизъюнктов из S, то такое множество будет найдено через некоторое (возможно очень большое) конечное число шагов. В противном случае система дизъюнктов S противоречивой не является. Используя ЭВМ можно организовать некоторое (достаточно большое) число шагов данного алгоритма. Суть алгоритм можно представить в виде двух основных пунктов:

- начиная от корневой вершины, строится семантическое дерево соответствующее системе дизъюнктов S;
- на каждом этапе построения семантического дерева порождаются основные примеры дизъюнктов из S. Проверяется, является ли вновь построенная вершина опровергающей.

Алгоритм успешно завершает работу, если удалось построить закрытое семантическое дерево.

Более интересный алгоритм в 1965 году предложил Дж. Робинсон. Идея алгоритма заключается в том, чтобы устранять все противоречия из системы дизъюнктов S, которые возможно устранить, пока либо не будет получено неустранимое противоречие, либо не будут устранены все противоречия. Явным противоречием в системе дизъюнктов S будет наличие дизъюнктов: $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$. В этом случае S всегда противоречива. А если система дизъюнктов состоит из двух дизъюнктов: $D_1 = L_1 \vee L_3$ и $D_2 = L_2 \vee \neg L_3$? Проведём следующее рассуждение: если в некоторой интерпретации I выполнимы D_1 и D_2: $I \models D_1 \wedge D_2$, то это возможно, лишь тогда, когда $I \models L_1 \vee L_2$. Если $I \not\models L_1 \vee L_2$, то всегда $I \not\models D_1 \wedge D_2$. Если вместо дизъюнктов D_1 и D_2 в систему дизъюнктов S будет подставлен дизъюнкт $L_1 \vee L_2$, то на выполнимость или противоречивость S это не повлияет. Таким образом, устраняется возможное противоречие между L_3 и $\neg L_3$, которое необходимо, но не достаточно для того, чтобы система S была противоречивой.

Поясним, почему замена $D_1 \wedge D_2$ на $L_1 \vee L_2$ не влияет на выполнимость или противоречивость системы S? Случай $I \not\models L_1 \vee L_2$ мы рассмотрели. Рассмотрим случай $I \models L_1 \vee L_2$ и покажем, что в этом случае выражение $D_1 \wedge D_2$ не будет противоречивым. Если предположить, что $I \models L_1 \vee L_2$, причём $I \models L_1$, $I \not\models L_2$, $I \models L_3$ то в этом случае всегда $I \not\models D_1 \wedge D_2$. Однако, чтобы выражение $D_1 \wedge D_2$ было противоречивым нужно показать, что $I \not\models D_1 \wedge D_2$ в любой интерпретации, а не только в той, которую мы рассмотрели выше. Теперь выберем интерпретацию I', такую что $I' \models L_1$, $I' \not\models L_2$, $I' \not\models L_3$, получим $I' \models D_1 \wedge D_2$. Полученный результат гарантирует непротиворечивость системы дизъюнктов S.

Доказать, почему замена $D_1 \wedge D_2$ на $L_1 \vee L_2$ не влияет на выполнимость или противоречивость системы S можно и другим способом. Для этого достаточно вспомнить, что в каждой интерпретации на каждой конкретной оценке любой предикат становится (значит и любая литера), становится высказыванием и принимает одно из двух значений истина или ложь. После этого можно обратиться к материалу, которой показывает корректность такой замены в методе резолюций для логики высказываний (см. раздел 2.3).

Далее, при замене $D_1 \wedge D_2$ на $L_1 \vee L_2$, вместо L_1 и L_2 будем записывать $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$. Тогда вместо дизъюнктов $D_1 = D_1^{'} \vee L$ и $D_2 = D_2^{'} \vee \neg L$ в систему дизъюнктов S может быть подставлен дизъюнкт $D_{1,2} = D_1^{'} \vee D_2^{'}$. Будем говорить, что дизъюнкт $D_{1,2}$ выводим из дизъюнктов D_1 и D_2. Такой вывод называется выводом по правилу резолюции и записывается:

$$\frac{D_1^{'} \vee L, D_2^{'} \vee \neg L}{D_1^{'} \vee D_2^{'}}$$

Если в результате устранения возможных противоречий мы, например, получили два дизъюнкта $P^1(x)$ и $\neg P^1(x)$, то каждый из таких дизъюнктов можно представить в форме $\square \vee P^1(x)$ и $\square \vee \neg P^1(x)$, где $\square$ означает пустой дизъюнкт (см. определение 4.2.2.). Тогда выводим пустой дизъюнкт:

$$\frac{\square \vee P^1(x), \square \vee \neg P^1(x)}{\square}$$

Если, используя выше описанные преобразования, из системы S был выведен пустой дизъюнкт (а мы уже показывали, что он всегда тождественно ложен) то система дизъюнктов S противоречива.

Определение 4.5.1. Правило вывода описанное выше, называется правилом резолюции.

Определение 4.5.2. Резольвентой называется дизъюнкт $D_{1,2} = D_1^{'} \vee D_2^{'}$, полученный с помощью правила резолюции из дизъюнктов $D_1 = D_1^{'} \vee L$ и $D_2 = D_2^{'} \vee \neg L$.

Правило резолюции можно применять до тех пор, пока не будет получено явное противоречие. Возникает вопрос: будет ли явным про-

Противоречива ли формула?

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_7 (P^3(x_1, f(x_2), g(x_3)) \wedge R^2(x_4, x_5) \wedge G^1(x_6) \vee J^1(g(x_7)))$$
$$x_1, x_1, ..., x_7 \in \Im$$

$D_1 = \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 P^3(x_1, f(x_2), g(x_3))$

$D_3 = \forall x_6 \forall x_7 (G^1(x_6) \vee$
$\vee J^1(g(x_7)))$

$D_2 = \forall x_4 \forall x_5 R^2(x_4, x_5)$

$D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$
система дизъюнктов
$S = \{D_1, D_2, D_3\}$

Формула противоречива, если противоречива система дизъюнктов S. Система дизъюнктов S противоречива, если она невыполнима ни в одной интерпретации, или иначе, если она невыполнима ни в одной H-интерпретации.

Если в любой H-интерпретации хотя бы один дизъюнкт из S невыполним, тогда в любой интерпретации невыполнимо некоторое подмножество из системы $\{D_1, D_2, D_3\}$.

То что дизъюнкт, например D_3, невыполним в некоторой H-интерпретации, например H_1, означает, что в H_1 невыполнима формула $D_3 = \forall x_6 \forall x_7 (G^1(x_6) \vee J^1(g(x_7)))$, где $x_6, x_7 \in H$. Значит, существует набор объектов из эрбрановского универсума $h_1, h_2 \in H$, что формула $G^1(h_1) \vee J^1(h_2)$ ложна, то есть существует основной пример дизъюнкта D_3, невыполнимый в H_1. $H_1 \not\models G^1(h_1) \vee J^1(h_2)$.

Рис. 4.8. Общая схема проверки противоречивости формулы

Значит, что бы исходная формула была противоречива необходимо и достаточно, что бы в любой H-интерпретации существовал невыполнимый основной пример хотя бы одного из дизъюнктов S.

Если в любой H-интерпретации существует невыполнимый основной пример хотя бы одного дизъюнкта из S, то существует конечное множество основных примеров дизъюнктов из S невыполнимое ни в одной из H-интерпретаций или, иначе говоря, существует конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов из S.

Рис. 4.8. Окончание

тиворечием наличие в S двух дизъюнктов $D_1 = P^1(f(x_1))$ и $D_2 = \neg P^1(x_2)$? Явного противоречия здесь как будто нет. Теперь рассмотрим некоторую H-интерпретацию системы дизъюнктов S. В любой такой интерпретации, существуют основные примеры для D_1 и D_2, такие что:

$$D_1^{osp} = P^1(f^1(x_1))[x_1 / h_i] = P^1(f(h_i));$$

$$D_2^{osp} = \neg P^1(x_2)[x_2 / f(h_i)] = \neg P^1(f(h_i)),$$

где h_i фиксированный терм эрбрановского универсума. Полученные основные примеры дизъюнктов D_1 и D_2 содержат явное противоречие $P^1(f(h_i))$ и $\neg P^1(f(h_i))$.

Поскольку выражение $P^1(f(h_i)) \wedge \neg P^1(f(h_i))$ невыполнимо ни в одной H-интерпретации, то данная конъюнкция противоречива, значит, противоречива конъюнкция дизъюнктов D_1 и D_2, и значит, противоречива система дизъюнктов S.

Приведённый выше пример показывает, что нам необходим механизм, способный привести $P^1(f(x_1))$ и $P^1(x_2)$ к идентичной записи. Такой механизм называется унификацией.

4.6. АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение 4.6.1. Подстановкой называется конечное множество

$$\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\},$$

где $x_1, x_2, ... x_n$ попарно различные переменные, а $t_1, t_2, ..., t_n$ термы, причём каждый t_i терм отличен от x_i. Пусть E выражение, содержащее переменные x_1, $x_2, \ldots$, $.x_n$, тогда результатом подстановки $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\}$ будет выражение E, зависящее от $t_1, t_2, ... t_n$. Результат подстановки записывается как $E\theta$.

Пример 4.6.1. Дано:

$$E = P^2(x, f^1(y)),\ \theta = \{x/t_1, y/t_2\}.$$

Тогда $E\theta = P^2(t_1, f^1(t_2))$.

Введём понятие композиции перестановок.

Определение 4.6.2. Композицией двух подстановок:

$$\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\},$$
$$\xi = \{y_1/u_1, y_2/u_2, ..., y_m/u_m\},$$

является подстановка $\theta\xi$, полученная из множества M:

$$\{x_1/t_1', x_2/t_2', ..., x_n/t_n', y_1/u_1, y_2/u_2, ..., y_m/u_m\},$$

где t_1' это либо t_1, либо результат последовательного применения подстановки x_1/t_1 из θ и подстановки y_i/u_i из ξ, в которой $u_i = t_1$ (в результате такой последовательной подстановки получаем подстановку x_1/t_1', где $t_1' = y_i$). Что бы закончить определение композиции подстановок, необходимо из M вычёркнуть некоторые элементы. Какие элементы необходимо вычеркнуть? Рассмотрим на примере.

Пусть $E = P^1(x_1)$, $\theta = \{x_1 / t_1\} = \{x_1 / y\}$, $\xi = \{y / x_1\}$. Тогда $E\theta = P^1(y)$, $E\theta\xi = P^1(x_1)$. Подстановка $\theta\xi$ оставила E без изменений и в целом бессмысленна. Значит из M нужно удалить такие $x_i / t_i^{'}$ в которых $t_i^{'} = x_i$. Так исключаются подстановка элемента вместо самого себя.

Рассмотрим другой пример. Пусть:

$$E = P^2(x_1, x_2),$$

$$\theta = \{x_1 / t_1, x_2 / t_2\} = \{x_1 / y, x_2 / z\},$$

$$\xi = \{y_1 / u_1\} = \{x_1 / z\}.$$

Обе подстановки заменяют x_1 на некоторые разные элементы. Такая ситуация создаёт неоднозначность подстановки. Поэтому из M также удаляются подстановки вида y_i / u_i, где $y_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Пример 4.6.2. Пусть $E = P^3(x, y, z)$,

$$\theta = \{x_1 / t_1, x_2 / t_2, x_3 / t_3\} = \{x / f(u), y / w, z / g(v)\};$$

$$\xi = \{y_1 / u_1, y_2 / u_2, y_2 / u_2\} = \{x / t, w / y, u / h(a)\}.$$

Тогда множество M для «$\theta\xi$»:

$$\{x / f(h(a)), y / y, z / g(v), x / t, w / y, u / h(a)\}.$$

Удалим из полученного множества по первому правилу y / y, и x / t по второму правилу:

$$\theta\xi = \{x / f(h(a)), z / g(v), w / y, u / h(a)\},$$

$$E\theta\xi = P^3(f(h(a)), y, g(v)).$$

Определение 4.6.3. Пусть даны выражения $E_1, E_2, ..., E_n$. Подстановка θ называется унификатором множества $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, если $E_1\theta = E_2\theta = ... = E_n\theta$. Если такая подстановка θ существует, то множество $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ называется унифицируемым.

Пример 4.6.3. Пусть даны предикаты $E_1 = P^3(t_1, t_2, t_3)$, $E_2 = P^3(f^1(x_1), x_2, g(x_3))$. Проверим, является ли унификатором подстановка:

$$\mu = \{\underbrace{t_1 / z, t_2 / x_2, t_3 / \underbrace{a, a} / g(x_3), y / x_2, z / f(x_1)}\}.$$

В самом деле $E_1\mu = P^3(f(x_1), x_2, g(x_3))$, $E_2\mu = P^3(f(x_1), x_2, g(x_3))$. Таким образом $E_1\mu = E_2\mu$, μ является унификатором, а множество $\{E_1, E_2\}$ — унифицируемо. Подстановка μ могла быть получена в результате композиции $\mu = \theta\xi$, где ξ некоторая подстановка, а θ унификатор $\{E_1, E_2\}$. Например:

$$\theta = \{t_1 / z, t_2 / x_2, t_3 / a, a / g(x_3), z / f(x_1)\},$$

$$\xi = \{y / x_2\}.$$

Определение 4.6.4. Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений $E_1, E_2, ..., E_n$, если:

- θ — унификатор выражений $E_1, E_2, ..., E_n$ и $E_1\theta = E_2\theta = ... = E_n\theta$;
- для любого другого унификатора χ выражений $E_1, E_2, ..., E_n$ существует такая подстановка ξ, что: $\chi = \theta\xi$. Иначе говоря, любой другой унификатор является частным случаем θ.

Мы подошли к задаче, согласно которой требуется выяснить, являются ли два выражения унифицируемыми и если являются, то какой у них НОУ.

Систематизируем ещё раз материал, от исходной задачи, до текущей решаемой проблемы. Является ли формула φ противоречивой? Для формулы φ построим систему дизъюнктов S эквивалентную φ. Формула φ противоречива тогда и только тогда, когда противоречива построенная система дизъюнктов S. Если система S противоречива, то правило резолюции $\dfrac{D_1^{'} \vee L, D_2^{'} \vee \neg L}{D_1^{'} \vee D_2^{'}}$, примененное к системе некоторое число, раз выдаст явное противоречие, в виде невыполнимой дизъюнкции, а именно в виде пустого дизъюнкта. Чтобы применять правило резолюции необходимо унифицировать, привести к общему виду литеры, обозначенные одной и той же буквой, но содержащие различные термы.

Задача доказательства противоречивости дизъюнктов, сводится к унификации (приведению к общему виду) всех литер, и получению с помощью метода резолюции конъюнкции двух литер представляющих собой один и тот же предикатный символ, входящих в конъюнкцию со знаком отрицания и без. Задача унификации, по сути, есть обнаружение противоречивого множества основных примеров дизъюнктов из S. Иначе говоря, задача унификации сводится к нахождению такой подстановки θ, которая унифицирует литеры дизъюнктов. Если посмотреть на эту задачу исходя из H-интерпретаций, то мы увидим, что задача унификации тогда сводится к нахождению такой подстановки θ, которая унифицирует литеры дизъюнктов, подставляя в них вместо переменных объекты эрбрановского универсума. Почему? Рассмотрим на примере.

Пример 4.6.4. Даны два дизъюнкта:

$$D_1 = \underbrace{R^2(x, g(y))}_{L_1} = \square \vee L_1,$$

$$D_2 = \neg \underbrace{R^2(f^1(z), a)}_{L_2} = \square \vee \neg L_2,$$

где $x, y, z, a \in Var$. Необходимо проверить данные два дизъюнкта на противоречивость. Взятые дизъюнкты будут противоречивы, если в любой интерпретации они невыполнимы одновременно. Это возможно тогда и только тогда, когда невыполнимы одновременно $R^2(x, g(y))$ и $\neg R^2(f^1(z), a)$. Каждой интерпретации I соответствует некоторая H-интерпретация. Тогда дизъюнкты D_1 и D_2 противоречивы тогда и только тогда, когда в каждой H-интерпретации найдутся такие объекты эрбрановского универсума $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$, что подставив их вместо переменных x, y, z, a получим противоречивую систему основных примеров. Иначе говоря, когда $R^2(h_1, g(h_2))$ и $\neg R^2(f(h_3), h_4)$, одновременно невыполнимы. Для текущего примера два дизъюнкта одновременно невыполнимы тогда и только тогда, когда существует такая подстановка θ, что $h_1 = f(h_3)$ и $h_4 = g(h_2)$.

Задача унификации сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} x = f(z) \\ a = g(y) \end{cases}.$$

Будем искать такую подстановку θ, которая есть решение данной системы в терминах H-интерпретаций. Пусть, вместо переменной z был выбран объект эрбрановского универсума, например, константа c. Тогда переменной x будет соответствовать терм $f(c) \in H$. Переменной y в H-интерпретациях сопоставим $f(f(c)) \in H$. Тогда переменной a будет сопоставлен терм $g(f(f(c))) \in H$. Переменные a, x, y, z изначально независимы друг от друга, поэтому каждой переменной должен соответствовать свой объект эрбрановского универсума. В данном случае это выполнено. В результате получена подстановка:

$$\theta = \{z / c, y / f(f(c)), x / f(c), a / g(f(f(c)))\},$$

и система:

$$\begin{cases} f(c) = f(c) \\ g(f(f(c))) = g(f(f(c))) \end{cases}.$$

Проверим:

$$E_1 = R^2(x, g(y))\theta = R^2(f(c), g(f(f(c)))),$$

$$E_2 = R^2(f^1(z), a)\theta = R^2(f(c), g(f(f(c)))),$$

$$E_1 = E_2,$$

следовательно, θ унифицирует литеры $R^2(x, g(y))$ и $R^2(f^1(z), a)$.

Очевидно, что равенства $f(c) = f(c)$ и $g(f(f(c))) = g(f(f(c)))$ имеют место в любой H-интерпретации. Поэтому в любой H-интерпретации выполнено $R^2(f(c), g(f(f(c)))) = R^2(f(c), g(f(f(c))))$. Это означает, что в любой интерпретации I найдётся такая оценка переменных x, y, z, a, что выполнено $R^2(x, g(y)) = R^2(f^1(z), a)$. Вспомним, что $D_1 = R^2(x, g(y))$, $D_2 = \neg R^2(f^1(z), a)$, а каждый из дизъюнктов замкнут по всем свободным переменным. Рассмотрим дизъюнкт $D_1 = R^2(x, g(y))$. Если хотя бы на одной оценке переменных x и y интерпретации I, выражение $R^2(x, g(y))$ принимает значение ложь, то дизъюнкт D_1 невыполним в I. Если на любой оценке переменных x и y интерпретации I, $R^2(x, g(y))$ принимает значение истина, то дизъюнкт D_1 выполним в I. Но, тогда в интерпретации I существует такая оценка переменных z, a, что выражение $\neg R^2(f^1(z), a)$ принимает значение ложь. Это та самая оценка переменных x, y, z, a при которой $R^2(x, g(y)) = R^2(f^1(z), a)$. Тогда в интерпретации I невыполним дизъюнкт D_2, а значит, невыполнима и конъюнкция дизъюнктов $D_1 \wedge D_2$.

Пример 4.6.5. Дано: $D_1 = \underbrace{R^2(x, g(y))}_{L_1}$, $D_2 = \neg \underbrace{R^2(f^1(\underline{x}), a)}_{L_2}$.

Нужно унифицировать, если это возможно, $E_1 = R^2(\boxed{x}, g(y))$ и $E_2 = R^2(\boxed{f^1(x)}, a)$. E_1 и E_2 не унифицируемы. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = f(x) \\ a = g(y) \end{cases}.$$

Во-первых, мы не можем в подстановке использовать замену $x / f(x)$, так как становится непонятным, что именно подставлять вместо x, ведь в этом случае нам потребуется заменить и x, входящий в $f(x)$. Во-вторых, очевидно, что есть такие интерпретации I, в которых выполнимо равенство $x = f(x)$, но также очевидно, что есть интерпретации, в которых равенство $x = f(x)$ невыполнимо (например множество целых чисел и $f(x) = x + 2$). Значит не в каждой H-интерпретации выполнено $c = f(c)$. Если попробовать использовать подстановку $\theta = \{x / c, y / c, a / g(c)\}$, то придём к системе:

$$\begin{cases} c = f(c) \\ g(c) = g(c) \end{cases},$$

выполнимой не во всех H-интерпретациях, а значит не во всех H-интерпретациях приводящая E_1 и E_2 к идентичному виду. Это означает, что не в каждой H-интерпретации может быть порождено противоречивое множество основных примеров дизъюнктов D_1 и D_2.

Так же недопустима подстановка $f(x)/a$, то есть вместо функционального символа не может быть подставлена переменная. Переменная пробегает по всем значениям носителя выбранной интерпретации, в то время как $f(x)$ в области значений может иметь лишь часть из элементов носителя. В частности переменная a может в любой интерпретации I иметь такую оценку, при которой будет порождаться противоречие. Однако возможно, что не в каждой интерпретации I найдётся такая оценка $f(x)$, что будет получено противоречие.

Поэтому в случае подстановки $f(x)/a$ мы рискуем получить ответ, что система дизъюнктов является противоречивой, хотя это не будет соответствовать действительности.

Выше мы постарались отобразить взаимосвязь операции унификации литер, входящих в дизъюнкты, и теории H-интерпретаций. В дальнейшем мы будем говорить об унификации, не обращаясь к H-интерпретациям.

Определение 4.6.5. Задачей унификации является задача, описанная далее.

Пусть:

$$E_1 = P(r_1, r_2, ..., r_n),\ E_2 = P(k_1, k_2, ..., k_n).$$

Что бы привести E_1 и E_2 к общему виду, требуется попарно привести к общему виду переменные входящие в E_1 и E_2:

$$\Sigma = \begin{cases} r_1 = k_1 \\ r_2 = k_2 \\ \ldots \\ r_n = k_n \end{cases}.$$

Задачу нахождения *НОУ* для E_1 и E_2 можно решить с помощью определения *НОУ* $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, ..., x_n/t_n\}$ такого, что термы $r_i\theta$ и $k_i\theta$ будут одинаковы. Унификатор θ в этом случае называют наиболее общим унификатором системы Σ. *НОУ* для системы Σ является искомым *НОУ* для E_1 и E_2.

Во время унификации важно помнить, что вместо переменной могут быть подставлены только термы, не содержащие данной переменной.

Лемма 4.6.1. О связке. Пусть $x \in Var$, $t \in Term$, и x не имеет свободных вхождений в t. Тогда подстановка $\{x/t\}$ является *НОУ*. Если терм t содержит в себе свободное вхождение переменной x и $x \neq t$, то не существует $НОУ(x,t)$.

Доказательство. Пусть терм t не содержит свободных вхождений переменной x. Нужно проверить является ли подстановка $\theta = \{x/t\}$ унификатором, и если является, то будет ли этот унификатор $НОУ$. Пусть $E_1 = P(x)$, $E_2 = P(t)$, тогда $E_1\theta = P(t) = E_2\theta$. Значит θ — унификатор.

Если θ $НОУ$, то для всякого унификатора μ выполнено: $\mu = \{x/t\}\mu$. Это может быть подстановка $\theta = \{x/t\}$. Тогда $\theta\theta = \{x/t, x/t\} - \{x/t\}_{правило 2} = \{x/t\} = \theta$.

Пусть $\mu \neq \theta$. Подставить $x \in Var$ вместо $t \in Term$ мы не можем. Значит, любой возможный унификатор будет включать в себя подстановку терма t, содержащегося в E_2, на место переменной x, входящей в E_1, а это $\{x/t\}$. Это означает, что всегда сперва будет применяться подстановка θ.

Пример 4.6.6. Дано: x и t.

$$\mu = \{x/y, t/k, y/k\},\ x\mu = k = t\mu,$$

$$\theta\mu = \{x/t\}\{x/y, t/k, y/k\} = \{x/k, x/y, t/k, y/k\} - \{x/y\} =$$
$$= \{x/k, t/k, y/k\},$$

$$x\theta\mu = k = t\theta\mu.$$

Определение 4.6.6. Система:

$$\Sigma = \begin{cases} r_1 = k_1 \\ r_2 = k_2 \\ \ldots \\ r_n = k_n \end{cases},$$

называется приведённой, если все $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — попарно различные переменные, такие что никакая переменная r_i не имеет свободного вхождения ни в один терм $k_1, k_2, \ldots, k_n \in Term$.

Пример 4.6.7. Система Σ_1 является приведенной, а системы Σ_2, Σ_3 нет.

$$\Sigma_1 = \begin{cases} r_1 = f^1(x) \\ r_2 = g^2(z, y), \\ r_n = a \end{cases} \quad \Sigma_2 = \begin{cases} r_1 = f^1(x) \\ r_2 = g^2(z, y), \\ r_n = h^1(r_2) \end{cases} \quad \Sigma_3 = \begin{cases} r_1 = f^1(x) \\ r_2 = g^2(z, r_n). \\ r_n = h^1(r_2) \end{cases}$$

Система Σ_2 может быть преобразована к приведённой системе:

$$\Sigma_2 = \begin{cases} r_1 = f^1(x) \\ r_2 = g^2(z, y) \\ r_n = h^1(g^2(z, y)) \end{cases} .$$

А система Σ_3 преобразована к приведённой системе быть не может.

Теорема 4.6.1. О приведённой системе уравнений. Пусть Σ_{pr} — приведённая система уравнений из определения 4.6.6. Тогда *НОУ* такой системы $\theta = \{r_1 / k_1, r_2 / k_2, ..., r_n / k_n\}$. Доказательство следует из леммы о связке 4.6.1.

Пусть необходимо унифицировать два атома E_1 и E_2. Для E_1 и E_2 построим систему уравнений Σ, прировняв термы в соответствующих позициях. Что бы найти *НОУ* для E_1 и E_2, необходимо преобразовать систему Σ к равносильной приведённой системе Σ_{pr}. *НОУ* для Σ_{pr} и будет являться *НОУ* для E_1 и E_2. Осталось систему Σ преобразовать в приведённую систему Σ_{pr} или показать, что такое преобразование не возможно и система не унифицируема. Система Σ_{pr} представляет собой решение уравнений системы Σ. Для необходимого преобразования будем использовать алгоритм Мортелло-Мортанари. Алгоритм состоит из шести правил, которые применяются к системе до тех пор, пока не будет получена система Σ_{pr} или пока не будет выдано сообщение о невозможности унификации.

Алгоритм Мортелло-Мортанари. Обрабатываем систему уравнений Σ, используя правила:

1) если в системе Σ есть уравнение:

$$f^n(r_1, r_2, ..., r_n) = g^n(s_1, s_2, ..., s_n),$$

такое что $f \neq g$, то алгоритм останавливается с ошибкой;

2) если в системе Σ есть уравнение вида:

$$f^n(r_1, r_2, ..., r_n) = f^n(s_1, s_2, ..., s_n),$$

то оно замещается системой уравнений:

$$\begin{cases} r_1 = s_1 \\ r_2 = s_2 \\ ... \\ r_n = s_n \end{cases};$$

3) если в системе Σ встречается уравнение вида $t = x$, где $x \in Var$, $t \in Term$, то такое уравнение замещается на уравнение $x = t$;
4) если встречается уравнение вида $x = x$, где $x \in Var$ или $x \in Const$, то такое уравнение удаляется;
5) если встречается уравнение вида $x = k$, где $x \in Var$ и x не имеет свободных вхождений в k, то во всех других уравнениях системы, где x встречается нужно провести замену $\{x / k\}$;
6) если встречается уравнение вида $x = k$, где $x \in Var$, $k \in Term$ и x имеет свободные вхождения в k, то алгоритм останавливается с ошибкой.

Пример 4.6.8. Найти *НОУ* для E_1, E_2:

$$E_1 = P^2(f^2(h^2(a, q^1(b), g^1(u)), \psi^2(x, z)),$$

$$E_2 = P^2(f^2(w, y), w).$$

Построим систему Σ:

$$\Sigma = \begin{cases} f^2(\psi^2(a, q^1(b), g^1(u)) = f^2(w, y) \\ \psi^2(x, z) = w \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило2}} \Sigma = \begin{cases} \psi^2(a, q^1(b)) = w, \\ g^1(u) = y \\ \psi^2(x, z) = w \end{cases} \xleftrightarrow{\text{правило3}} \Sigma = \begin{cases} w = \psi^2(a, q^1(b)), \\ y = g^1(u) \\ w = \psi^2(x, z) \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило5}} \Sigma = \begin{cases} w = \psi^2(a, q^1(b)), \\ y = g^1(u) \\ \psi^2(a, q^1(b)) = \psi^2(x, z) \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило2}} \Sigma = \begin{cases} w = \psi^2(a, q(b)), \\ y = g^1(u) \\ a = x \\ q^1(b) = z \end{cases} \xleftrightarrow{\text{правило5}} \Sigma = \begin{cases} w = \psi^2(x, q(b)), \\ y = g^1(u) \\ a = x \\ q^1(b) = z \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило3}} \Sigma_{pr} = \begin{cases} w = \psi^2(x, q(b)), \\ y = g^1(u) \\ a = x \\ z = q^1(b) \end{cases}$$

$$\theta = \{w / \psi^2(x, q(b)), a / x, y / g^1(u), z / q^1(b)\}.$$

Проверяем:

$$\omega = P^2(f^2(\psi^2(a, q^1(b), g^1(u)), \psi^2(x, z)),$$

$$E_1\theta = \omega[w / \psi^2(x, q(b)), a / x, y / g^1(u), z / q^1(b)],$$

$$E_1\theta = P^2(f^2(\psi^2(x, q^1(b), g^1(u)), \psi^2(x, q^1(b))),$$

$$E_2\theta = P^2(f^2(w,y),w)[w/\psi^2(x,q(b)),a/x,y/g^1(u),z/q^1(b)],$$

$$E_2\theta = P^2(f^2(\psi^2(x,q^1(b)),g^1(u)),\psi^2(x,q^1(b))),$$

$$E_1\theta = E_2\theta .$$

Обратите внимание, что мы не можем применить правило 4 к $a = x$, поскольку имена переменных разные, а правило 4 работает тогда и только тогда, когда $x = x$. Например, если мы удалим $a = x$ в следующий системе Σ, то будет получен абсолютно неправильный результат:

$$\Sigma = \begin{cases} a = f^1(x) \\ a = x \end{cases}$$

Удалив $a = x$, мы получим подстановку $\theta = \{a / f^1(x)\}$, что неверно, так как система Σ не унифицируема. Покажем это:

$$\Sigma = \begin{cases} a = f^1(x) \\ a = x \end{cases} \xleftrightarrow{\text{правило5}} \Sigma = \begin{cases} x = f^1(x) \\ a = x \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило6}} \Sigma = \begin{cases} \boxed{x} = f^1(\boxed{x}) \\ a = x \end{cases} \xrightarrow{\text{ошибка}}$$

Что означает, что E_1 и E_2 могут быть унифицированы? Это означает, что решением системы уравнений Σ, построенной для E_1 и E_2, является приведённая системы уравнений Σ_{pr}. Приведённая система уравнений представляет собой допустимую подстановку вместо переменных некоторых термов, не вызывающую коллизий. Если переменная заменяется на переменную, то это просто переименование переменных не как не влияющее на выполнимость уравнения $E_1 = E_2$, хотя бы на одной оценке в каждой интерпретации. Допустимая замена переменной на функциональный символ также не влияет на выполнимость $E_1 = E_2$. В самом деле, в любой интерпретации I переменная пробегает по всем элементам носителя $\mathfrak{I}$, область значений функции лежит в некотором подмножестве носителя $\Im$, но всегда содержит хотя бы один элемент. Это означает, что в любой интерпретации существует такой объект носителя $x^{fix} \in \Im$, что он соответствует значению функции на некоторой её оценке: $x^{fix} = f^n(a_1, a_2, ..., a_n)$. По определению интерпретации функция оценивается на всех элементах носителя, в том числе и когда все $a_i = c$: $f^n(c, c, ..., c)$, где c объект носителя $\Im$, поставленный в соответствие эрбрановской константе. В каждой интерпретации I такой функции соответствует некоторый элемент носителя $x_c \in \Im$, такой что $x_c = f^n(c, c, ..., c)$. По определению в каждой H-интерпретации функциональный символ $f^n(c, c, ..., c)$ оценивается так же как и в соответствующей интерпретации I: $x_c = f^n(c, c, ..., c)$. Рассмотрим приведённую систему текущего примера:

$$\Sigma_{pr} = \begin{cases} w = \psi^2(a, q(b)) \\ y = g^1(u) \\ z = q^1(b) \end{cases},$$

заменим все переменные в функциональных символах на объект носителя $\Im$, соответствующий эрбрановской константе c:

$$\Sigma_{pr} = \begin{cases} w = \psi(c, q(c)) \\ y = g(c) \\ z = q(c) \end{cases}.$$

Тогда в любой H-интерпретации (по определению) переменные w, y, z будут выражаться через объекты эрбрановского универсума, определённые следующим образом:

$$w = \psi(c, q(c)),\ y = g(c),\ z = q(c).$$

Тогда в любой H-интерпретации рассматриваемая приведённая система Σ_{pr} будет иметь вид:

$$\Sigma_{pr}^{H} = \begin{cases} \psi(c, q(c)) = \psi(c, q(c)) \\ g(c) = g(c) \\ q(c) = q(c) \end{cases} .$$

Это означает, что в любой H-интерпретации для атомов E_1 и E_2 существуют такие основные примеры, что E_1 и E_2 полностью совпадают. Вспомним, что унифицируем мы литеры системы дизъюнктов, а E_1, E_2 есть литеры, выражающие одинаковые предикатные символы.

Пусть E_1 и E_2 унифицируемы, и им соответствует предикатный символ P, входящий в систему дизъюнктов в виде E_1 и в виде $\neg E_2$. Тогда если в системе дизъюнктов S есть дизъюнкты $D_i = E_1$, $D_j = \neg E_2$ или резольвенты, имеющие вид E_1, $\neg E_2$, то S всегда невыполнима, то есть противоречива. Существование унификатора θ для $E_1^{'}$ и $E_2^{'}$ равносильно тому, что существуют такие основные примеры $E_1 = E_1^{'}\theta$ и $E_2 = E_2^{'}\theta$, что E_1, E_2 полностью совпадают. Это равносильно тому, основные примеры, полученные при унификации $E_1^{'}$, $E_2^{'}$, образуют противоречивое конечное множество основных примеров дизъюнктов из S, а точнее всегда являются подмножеством каждого такого множества. Таким образом, мы установили взаимосвязи между понятиями:

- противоречивая система дизъюнктов S;
- противоречивое конечное множество основных примеров дизъюнктов из S;
- правило резолюции;
- унификация.

$$\Sigma_{pr} = \begin{cases} w = \psi^2(a, q(b)), \\ y = g^1(u) \\ z = q^1(b) \end{cases}$$

Пример 4.6.9. Рассмотрим пример не унифицируемых E_1 и E_2. Пусть:

$$E_1 = P^2(f^2(h^2(y, q^1(b), g^1(w)), h^2(x, z));$$

$$E_2 = P^2(f^2(w, y), w).$$

Тогда:

$$\Sigma = \begin{cases} f^2(h^2(y, q^1(b), g^1(w)) = f^2(w, y) \\ h^2(x, z) = w \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правила2,3}} \Sigma = \begin{cases} w = h^2(y, q^1(b)), \\ y = g^1(w) \\ w = h^2(x, z) \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило5}} \Sigma = \begin{cases} w = h^2(g^1(w), q^1(b)), \\ y = g^1(w) \\ w = h^2(x, z) \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{правило6}} \Sigma = \begin{cases} \boxed{w} = h^2(g^1(\boxed{w}), q^1(b)), \\ y = g^1(w) \\ w = h^2(x, z) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ошибка}}$$

Атомы E_1 и E_2 не могут быть унифицированы.

4.7. КОРРЕКТНОСТЬ И ПОЛНОТА АЛГОРИТМА УНИФИКАЦИИ

Алгоритм унификации Мортелло-Мортанари всегда завершает свою работу за конечное число шагов. Результат, полученный алгоритмом Мортелло-Мортанари, всегда корректен: если система не унифицируема, то будет выдано сообщение об ошибке, если у системы есть $НОУ$, то в результате работы алгоритма будет получена приведённая система уравнений.

Теорема 4.7.1. Алгоритм унификации Мортелло-Мортанари всегда завершает свою работу за конечное число шагов.

Доказательство. Из теории множеств известно, что если нужно гарантировать завершение некоторого алгоритма, то необходимо ввести параметр, принимающий значения из некоторого фундированного множества и уменьшающийся на каждом шаге алгоритма. По определению любое непустое подмножество фундированного множества Φ всегда имеет минимальный элемент. Значит, ни в каком фундированном множестве Φ не существует бесконечной строго убывающей последовательности элементов из Φ. Это условие гарантирует, что если параметр на каждом шаге уменьшается, то алгоритм не будет выполнять бесконечное число шагов и остановится, дойдя до минимального элемента множества Φ.

Примером фундированного множества является множество натуральных чисел N. Значит, для доказательства нам нужно показать, что в алгоритме Мортелло-Мортанари существует такой параметр, принимающий значения из фундированного множества и что значение этого параметра на каждом шаге уменьшается. В качестве такого параметра введём характеристику, представляющую собой упорядоченный кортеж из трёх элементов $(\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma})$, где:

1) γ^{Σ} — число непереведенных переменных в Σ (переменная x называется приведённой, если она не имеет свободных вхождений

ни в один из термов системы Σ и представлена в виде $x = t$, $t \in Term$);

2) ϑ^{Σ} — число функциональных символов и констант (функциональных нульместных символов), находящихся в левых частях уравнений системы Σ;

3) ϖ^{Σ} — число уравнений в системе Σ.

Множество кортежей вида $(\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma})$ будем обозначать Ψ. Каждый из параметров ϖ^{Σ}, ϑ^{Σ}, γ^{Σ} принимает значения из некоторого фундированного множества. В самом деле, всегда $\gamma^{\Sigma} \geq 0$, $\vartheta^{\Sigma} \geq 0$, $\varpi^{\Sigma} \geq 1$ и все значения, которые принимаются параметрами $\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma} \in \mathrm{N}$. Упорядочим множестве кортежей вида $(\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma})$, используя лексикографический порядок:

$$(\varpi_1^{\Sigma}, \vartheta_1^{\Sigma}, \gamma_1^{\Sigma}) \succ (\varpi_2^{\Sigma}, \vartheta_2^{\Sigma}, \gamma_2^{\Sigma}),$$

тогда и только тогда, когда:

$$\gamma_1^{\Sigma} > \gamma_2^{\Sigma},$$

$$\text{или } \gamma_1^{\Sigma} = \gamma_2^{\Sigma} \text{ и } \vartheta_1^{\Sigma} > \vartheta_2^{\Sigma},$$

$$\text{или } \gamma_1^{\Sigma} = \gamma_2^{\Sigma} \text{ и } \vartheta_1^{\Sigma} = \vartheta_2^{\Sigma} \text{ и } \varpi_1^{\Sigma} > \varpi_2^{\Sigma}.$$

Пример 4.7.1. $(0,0,1) \succ (1967,10,0) \succ (15,10,0)$.

Покажем, что множество кортежей Ψ, упорядоченных таким образом, образует фундированное множество. Во множестве Ψ не существует бесконечной убывающей последовательности, так как есть наименьший элемент $(\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma}) = (1,0,0)$, и каждый элемент множества Ψ имеет соседний. В данном случае это означает, что для любого $\psi_i, \psi_{i+1} \in \Psi$, где $i \geq 0$ не существует такого элемента $\psi_j \in \Psi$, что $\psi_i < \psi_j < \psi_{i+1}$. Значит Ψ по определению — фундированное множество. Теперь покажем, что на каждом шаге при использовании правил 2, 3, 4, 5 значение параметра $(\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma})$ становится меньше. В результате применения правил 1 и 6 алгоритм сразу завершиться.

Пусть $(\varpi_1^{\Sigma}, \vartheta_1^{\Sigma}, \gamma_1^{\Sigma})$ кортеж соответствующий системе Σ, тогда $(\varpi_2^{\Sigma}, \vartheta_2^{\Sigma}, \gamma_2^{\Sigma})$ кортеж соответствующий системе Σ после применения одного из правил 2,3,4,5.

Правило 2. В результате применения правила 2 число функциональных символов в левых частях уравнений Σ становится на единицу меньше (на шаге 2 всегда раскрывается один из функциональных символов) $\vartheta_2^{\Sigma} < \vartheta_1^{\Sigma}$:

$$(\varpi_2^{\Sigma}, \vartheta_2^{\Sigma}, \gamma_2^{\Sigma}) < (\varpi_1^{\Sigma}, \vartheta_1^{\Sigma}, \gamma_1^{\Sigma}),$$

так как $\gamma_2^{\Sigma} \le \gamma_1^{\Sigma}$ и $\vartheta_2^{\Sigma} < \vartheta_1^{\Sigma}$.

Правило 3. При использовании правила 3 происходит перестановка функционального символа из левой части уравнения в Σ в правую часть, этого же уравнения. В левую часть ставится переменная. Значит, параметр ϑ^{Σ} всегда уменьшается на единицу при применении правила 3:

$$(\varpi_2^{\Sigma}, \vartheta_2^{\Sigma}, \gamma_2^{\Sigma}) < (\varpi_1^{\Sigma}, \vartheta_1^{\Sigma}, \gamma_1^{\Sigma}),$$

так как $\gamma_2^{\Sigma} \le \gamma_1^{\Sigma}$ и $\vartheta_2^{\Sigma} < \vartheta_1^{\Sigma}$.

Правило 4. При использовании правила 4 происходит удаление некоторого уравнения из Σ. Параметр ϖ^{Σ} при этом уменьшается на единицу:

$$(\varpi_2^{\Sigma}, \vartheta_2^{\Sigma}, \gamma_2^{\Sigma}) < (\varpi_1^{\Sigma}, \vartheta_1^{\Sigma}, \gamma_1^{\Sigma}),$$

так как $\gamma_2^{\Sigma} \le \gamma_1^{\Sigma}$ и $\vartheta_2^{\Sigma} \le \vartheta_1^{\Sigma}$ и $\varpi_2^{\Sigma} < \varpi_1^{\Sigma}$.

Правило 5. При использовании правила некоторая переменная x становится приведённой (такая переменная больше не имеет вхождений ни в один терм системы уравнений Σ, все такие вхождения заменены $\{x/k\}$, где $x=k$, $x \in Var$, $k \in Term$).

$$(\varpi_2^{\Sigma}, \vartheta_2^{\Sigma}, \gamma_2^{\Sigma}) < (\varpi_1^{\Sigma}, \vartheta_1^{\Sigma}, \gamma_1^{\Sigma}),$$

так как $\gamma_2^{\Sigma} < \gamma_1^{\Sigma}$.

В алгоритме существует параметр, принимающий значения из фундированного множества Ψ кортежей $(\varpi^{\Sigma}, \vartheta^{\Sigma}, \gamma^{\Sigma})$. Каждый шаг алгоритма, применяющий правила 2, 3, 4, 5 уменьшает значение параметра. Значит, число таких шагов не может быть бесконечным и работа алгоритма завершится. Применение правил 1, 6 приводят к немедленной остановке алгоритма. Теорема доказана.

Теорема 4.7.2. Алгоритм унификации Мортелло-Мортанари корректен.

Доказательство. Что бы доказать корректность алгоритма потребуется показать, что применение любого из правил 2, 3, 4, 5 порождает такую систему уравнений для которой *НОУ* будет тем же, что и для исходной системы уравнений. Для этого, с одной стороны, нужно показать, что всякий унификатор θ для Σ так же является унификатором для Σ'. Система Σ', получается из Σ после применения одного из правил 2, 3, 4, 5. С другой стороны, нужно показать, что всякий унификатор для Σ' так же является унификатором для Σ.

Пусть дана система Σ:

$$\Sigma = \begin{cases} s_1 = k_1 \\ s_2 = k_2 \\ \dots \\ s_n = k_n \end{cases}$$

и θ — унификатор для Σ.

Правило 2.

$$\Sigma = \begin{cases} s_1(m_1, m_2, ..., m_l) = s_1(t_1, t_2, ..., t_l) \\ s_2 = k_2 \\ ... \\ s_n = k_n \end{cases}.$$

Пусть η — $НОУ$ для $s_1(m_1, m_2, ..., m_n) = s_1(t_1, t_2, ..., t_n)$, тогда любой другой унификатор θ для $s_1(m_1, m_2, ..., m_n) = s_1(t_1, t_2, ..., t_n)$ является частным случаем унификатора η и может быть получен с помощью него: $\theta = \eta\xi_1$, где ξ_1 — некоторая подстановка. Пусть подстановка θ — унифицирует Σ, тогда:

$$\begin{cases} \theta = НОУ(s_1(m_1, m_2, ..., m_l), s_1(t_1, t_2, ..., t_l))\xi_1 = \eta\xi_1 \\ \theta = НОУ(s_2, k_2)\xi_2 \\ ... \\ \theta = НОУ(s_n, k_n)\xi_n \end{cases}.$$

Так как η — $НОУ$ для $s_1(m_1, m_2, ..., m_n) = s_1(t_1, t_2, ..., t_n)$, то, по определению, η — это $НОУ$ для системы Ξ:

$$\Xi = \begin{cases} m_1 = t_1 \\ m_2 = t_2 \\ ... \\ m_l = t_l \end{cases}.$$

Значит η такая подстановка, что:

$$\begin{cases} \eta = НОУ(m_1, t_1)\varsigma_1 \\ \eta = НОУ(m_2, t_2)\varsigma_2 \\ ... \\ \eta = НОУ(m_l, t_l)\varsigma_l \end{cases},$$

где ς_i — некоторая подстановка. Тогда получаем:

$$\begin{cases} \theta = НОУ(m_1, t_1)\varsigma_1 \\ \theta = НОУ(m_2, t_2)\varsigma_2 \\ \ldots \\ \theta = НОУ(m_l, t_l)\varsigma_l \\ \theta = НОУ(s_2, k_2)\xi_2 \\ \ldots \\ \theta = НОУ(s_n, k_n)\xi_n \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \theta = НОУ(m_1, t_1)\mu_1 \\ \theta = НОУ(m_2, t_2)\mu_2 \\ \ldots \\ \theta = НОУ(m_l, t_l)\mu_l \\ \theta = НОУ(s_2, k_2)\mu_{l+1} \\ \ldots \\ \theta = НОУ(s_n, k_n)\mu_{l+n} \end{cases}$$

μ_i — некоторые подстановки, соответствующие ς_j и ξ_s. Так как θ удовлетворяет решению последней системы, то θ является унификатором Σ':

$$\Sigma' = \begin{cases} m_1 = t_1 \\ m_2 = t_2 \\ \ldots \\ m_l = t_l \\ s_2 = k_2 \\ \ldots \\ s_n = k_n \end{cases},$$

а это система, полученная из Σ после применения правила 2. Таким образом, каждый унификатор для Σ является так же унификатором для Σ'.

В обратную сторону. Пусть θ' унификатор системы:

$$\Sigma' = \begin{cases} m_1 = t_1 \\ m_2 = t_2 \\ \ldots \\ m_l = t_l \\ s_2 = k_2 \\ \ldots \\ s_n = k_n \end{cases}.$$

Тогда θ' удовлетворяет решению системы:

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(m_1, t_1)\lambda_1 \\ \theta' = НОУ(m_2, t_2)\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(m_l, t_l)\lambda_l \\ \theta' = НОУ(s_2, k_2)\lambda_{l+1} \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(s_n, k_n)\lambda_{l+n} \end{cases},$$

где λ_i — некоторые подстановки. Тогда θ' удовлетворяет и решению системы:

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(m_1, t_1)\lambda_1 \\ \theta' = НОУ(m_2, t_2)\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(m_l, t_l)\lambda_l \end{cases},$$

где θ' является унификатором уравнения $f(m_1, m_2, ..., m_l) = f(t_1, t_2, ..., t_l)$. Тогда θ' удовлетворяет решению системы:

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(f(m_1, m_2, ..., m_l), f(t_1, t_2, ..., t_l))\kappa_1 \\ \theta' = НОУ(m_{l+1}, t_{l+1})\kappa_2 \\ ... \\ \theta' = НОУ(m_{l+n}, t_{l+n})\kappa_{n+1} \end{cases},$$

где κ_i — некоторые подстановки. Так как θ' удовлетворяет последней системе уравнений, то θ' является унификатором для системы Σ, из которой с помощью применения правила 2 была получена система Σ':

$$\Sigma = \begin{cases} f(m_1, m_2, ..., m_l) = f(t_1, t_2, ..., t_l) \\ m_{l+1} = t_{l+1} \\ ... \\ m_{n+l} = t_{n+l} \end{cases}.$$

Упражнение 4.7.1. Провести доказательство корректность правил 3 и 4, предлагается самостоятельно.

Правило 5. Рассмотрим систему:

$$\Sigma = \begin{cases} s_1 = k_1 \\ s_2 = k_2 \\ ... \\ s_n = k_n \end{cases}.$$

Пусть θ — унификатор для Σ. Тогда θ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \theta = НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 \\ \theta = НОУ(s_2, k_2)\lambda_2 \\ ... \\ \theta = НОУ(s_n, k_n)\lambda_n \end{cases},$$

где λ_i — некоторые подстановки. Пусть в Σ существует такое уравнение, что $s_i = k_i$ $s_i \in Var$, $k_i \in Term$ и s_i не имеет свободных вхождений в k_i. Пусть в каждом другом уравнение, отличном от i, проведена замена переменной s_i на терм k_i. Тогда унификатор θ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \theta = НОУ(s_1[s_2/k_2], k_1[s_2/k_2])\lambda_1 \\ \theta = \{s_2/k_2\}\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta = НОУ(s_n[s_2/k_2], k_n[s_2/k_2])\lambda_n \end{cases}.$$

Так как θ удовлетворяет последней системе, то θ является унификатором системы $\Sigma^{'}$:

$$\Sigma^{'} = \begin{cases} s_1[s_2/k_2] = k_1[s_2/k_2] \\ s_2 = k_2 \\ \ldots \\ s_n[s_2/k_2] = k_n[s_2/k_2] \end{cases}.$$

Значит каждая подстановка θ унифицирующая Σ, является унификатором $\Sigma^{'}$.

В обратную сторону. Пусть уравнение $s_2 = k_2$ подпадает под действие правила 5. Тогда в уравнение $s_2 = k_2$, $s_2 \in Var$, $k_2 \in Term$, s_2 не имеет свободных вхождений в k_2 и согласно теореме о связке подстановка $\{s_2/k_2\}$ является $НОУ(s_2, k_2)$. По правилу 5 из Σ получаем систему $\Sigma^{'}$:

$$\Sigma^{'} = \begin{cases} s_1[s_2/k_2] = k_1[s_2/k_2] \\ s_2 = k_2 \\ \ldots \\ s_n[s_2/k_2] = k_n[s_2/k_2] \end{cases}.$$

Пусть $\theta^{'}$ — унификатор для $\Sigma^{'}$, тогда $\theta^{'}$ удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(s_1[s_2/k_2], k_1[s_2/k_2])\lambda_1 = \{s_2/k_2\}НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 \\ \theta' = \{s_2/k_2\}\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(s_n[s_2/k_2], k_n[s_2/k_2])\lambda_n = \{s_2/k_2\}НОУ(s_n, k_n)\lambda_n \end{cases},$$

где λ_i — некоторые подстановки. Вспомним доказательство леммы о связке. Если $s_2 = k_2$ $s_2 \in Var$, $k_2 \in Term$ и s_2 не имеет свободных вхождений в k_2, то $НОУ(s_2, k_2) = \{s_2/k_2\}$ и для любой подстановки ζ унифицирующей s_2 и k_2 выполнено: $\zeta = НОУ(s_2, k_2)\zeta$. Тогда:

$$\begin{cases} \theta' = \{s_2/k_2\}НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 = НОУ(s_2, k_2)НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 \\ \theta' = \{s_2/k_2\}\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = \{s_2/k_2\}НОУ(s_n, k_n)\lambda_n = НОУ(s_2, k_2)НОУ(s_n, k_n)\lambda_n \end{cases},$$

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(s_2, k_2)НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 = НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 \\ \theta' = \{s_2/k_2\}\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(s_2, k_2)НОУ(s_n, k_n)\lambda_n = НОУ(s_n, k_n)\lambda_n \end{cases},$$

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(s_1, k_1)\lambda_1 \\ \theta' = \{s_2/k_2\}\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(s_n, k_n)\lambda_n \end{cases},$$

$$\begin{cases} \theta' = НОУ(s_1,k_1)\lambda_1 \\ \theta' = НОУ(s_2,k_2)\lambda_2 \\ \ldots \\ \theta' = НОУ(s_n,k_n)\lambda_n \end{cases}.$$

Так как проведённые над системой преобразования корректны (см. доказательство теоремы о связке), то унификатор θ' удовлетворяет последней системе. Это означает, что θ' унифицирует систему Σ:

$$\Sigma = \begin{cases} s_1 = k_1 \\ s_2 = k_2 \\ \ldots \\ s_n = k_n \end{cases}.$$

Таким образом, любой унификатор для Σ' есть унификатор для Σ.

Покажем, что если срабатывают правила 1 или 6, то система не унифицируема.

Если выполнено **правило 1**, то в Σ имеет место уравнение вида:

$$f_1^n(m_1,m_2,\ldots,m_n) = g_1^l(t_1,t_2,\ldots,t_l),$$

где $f_1^n \neq g_1^l$. Но тогда какой бы унификатор θ мы не взяли бы $f_1^n\theta \neq g_1^l\theta$. Значит, система не унифицируема. Алгоритм выдаёт ошибку.

Если выполнено **правило 6**, то в Σ имеет место уравнение вида $x = k$, где $x \in Var$, $k \in Term$ и x имеет свободные вхождения в k. Тогда согласно теореме о связке не существует такого унификатора θ, что $x\theta = k\theta$. Система в этом случае не унифицируема и алгоритм останавливается с ошибкой. Теорема доказана.

Теорема 4.7.3. Если алгоритм не может примерить ни одного из правил, то получена приведённая система.

Доказательство. Пусть не применимо **правило 1**. Тогда в Σ не существует таких уравнений, что:

$$f_1^n(m_1, m_2, ..., m_n) = g_1^l(t_1, t_2, ..., t_l),\ f_1^n \neq g_1^l.$$

Пусть не применимо **правило 2**. Тогда в Σ не существует уравнений вида:

$$f_1^n(m_1, m_2, ..., m_n) = f_1^n(t_1, t_2, ..., t_n).$$

Вследствие не применимости правил 1 и 2, в Σ не существует уравнений, содержащих функциональные символы и в правой и в левой части уравнения.

Пусть неприменимо **правило 3**. Значит все функциональные символы, встречающиеся в Σ, находятся в правых частях уравнений из Σ, тогда в силу невыполнимости 1 и 2 в левых частях находятся только переменные.

Пусть не применимы **правила 4, 5 или 6**. Это гарантирует, что ни одна из переменных левой части уравнений из Σ, не встречается ни в одном другом терме содержащемся в Σ.

Тогда полученная система, к которой не применимо ни одно из правил является приведённой системой. Осталось выписать *НОУ* такой системы. Теорема доказана.

Таким образом, мы показали корректность и полноту алгоритма унификации, а так же его выполнимость за конечное число шагов.

4.8. РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Теперь мы умеем унифицировать данные нам выражения и можем вернуться к методу резолюций. Введём ряд определений.

Вспомним правило резолюций:

$$\frac{D_1' \vee L, D_2' \vee \neg L}{D_1' \vee D_2'}.$$

Запишем правило резолюций с использование понятия унификация.

Определение 4.8.1. Пусть $D_1 = D_1^{'} \vee L_1$ и $D_2 = D_2^{'} \vee L_2$ два дизъюнкта из системы дизъюнктов S. Что можно было применить правило резолюций необходимо унифицировать L_1 и L_2. Пусть θ — $НОУ(L_1, L_2)$: $L_1\theta = L_2\theta$. Тогда резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 называется такой дизъюнкт D_0, что $D_0 = (D_1^{'} \vee D_2^{'})\theta$. Иначе говоря, подстановка θ применяется к D_1 и к D_2, в результате чего унифицируются L_1 и L_2. Получаем:

$$\frac{D_1^{'}\theta \vee L, D_2^{'}\theta \vee \neg L}{(D_1^{'} \vee D_2^{'})\theta},$$

где $L = L_1\theta = L_2\theta$, $(D_1^{'} \vee D_2^{'})\theta = D_1^{'}\theta \vee D_2^{'}\theta$.

Определение 4.8.2. Если существует унификатор θ для L_1 и L_2 такой, что $L = L_1\theta = L_2\theta$, то пара L и $\neg L$ называется контрарной парой.

Пример 4.8.1. Пусть:

$$D_1 = \underbrace{Q^2(v, f^1(x))}_{D_1^{'}} \vee R_1^2(g^2(h(z), q(m)), w) \vee \underbrace{L^1(u)}_{D_1^{'}},$$

$$D_2 = \underbrace{P^3(m, k, r)}_{D_2^{'}} \vee \neg R_2^2(g^2(k, q(v)), \rho^1(t)).$$

Возможная контрарная пара:

$$R_1^2(g^2(h(z), q(m)), w) \text{ и } \neg R_2^2(g^2(k, q(v)), \rho^1(t)).$$

Существует ли унификатор для R_1^2 и R_2^2? Для проверки используем алгоритм Мортелло-Мортанари:

$$\Sigma = \begin{cases} g^2(h(z), q(m)) = g^2(k, q(v)) \\ w = \rho^1(t) \end{cases} \xrightarrow{правило 2} \Sigma = \begin{cases} h(z) = k \\ q(m) = q(v) \\ w = \rho^1(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правило 2} \Sigma = \begin{cases} h(z) = k \\ m = v \\ w = \rho^1(t) \end{cases} \xrightarrow{правило 3} \Sigma = \begin{cases} k = h(z) \\ m = v \\ w = \rho^1(t) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правила\_1\text{–}6\_неприменимы}$$

$\mu = \{k / h(z), m / v, w / \rho^1(t)\}$. Для R_1^2 и R_2^2 существует *НОУ* μ, поэтому:

$$\frac{D_1^{'} \vee P_1^2, D_2^{'} \vee P_2^2}{(D_1^{'} \vee D_2^{'})\mu}.$$

Резольвента:

$$D_0 = (D_1^{'} \vee D_2^{'})\mu,$$

$$D_0 = (\underbrace{Q^2(v, f^1(x)) \vee L^1(u)}_{D_1^{'}} \vee \underbrace{P^3(m, k, r)}_{D_2^{'}})\mu,$$

$$D_0 = (\underbrace{Q^2(v, f^1(x)) \vee L^1(u)}_{D_1^{'}} \vee \underbrace{P^3(\boxed{m}, \boxed{k}, r)}_{D_2^{'}})[\boxed{k / h(z)}, \boxed{m / v}, w / \rho^1(t)]$$

$$D_0 = \underbrace{Q^2(v, f^1(x)) \vee L^1(u)}_{D_1^{'}} \vee \underbrace{P^3(\boxed{v}, \boxed{h(z)}, r)}_{D_2^{'}}.$$

Алгоритм унификации помимо того, что позволяет использовать правило резолюции в логике предикатов первого порядка, позволяет упрощать дизъюнкты из системы дизъюнктов S. Пусть некоторый дизъюнкт из S имеет вид: $D_i = D_i^{'} \vee L_1 \vee L_2$ и L_1 и L_2 унифицируемы. Тогда существует такой θ, что он является $НОУ(L_1, L_2)$. Применив θ

к D_i, получаем: $D_i\theta = D_i^{'}\theta \vee L_1\theta \vee L_2\theta$. Так как $L_1\theta = L_2\theta = L$, то $D_i\theta = D_i^{'}\theta \vee L \vee L = D_i^{'}\theta \vee L = (D_i^{'} \vee L_1)\theta$.

Определение 4.8.3. Правилом склеивания для дизъюнкта $D_i = D_i^{'} \vee L_1 \vee L_2$ и $НОУ(L_1, L_2)$ называется получение склейки по паре L_1 и L_2 такой что: $D_0 = (D_i^{'} \vee L_1)\theta$.

Пример 4.8.2. Правило склеивания. Пусть дан дизъюнкт:

$$D_1 = P^1(g^1(y)) \vee R^2(x, y) \vee R^2(f^2(a, z), h^0(c)),$$

$$D_1 = \underbrace{P^1(g^1(y))}_{D_1^{'}} \vee \underbrace{R^2(x, y) \vee R^2(f^2(a, z), h^0(c))}_{возможна\_склейка?}.$$

Проверим, существует ли $НОУ$ для $R^2(x, y) \vee R^2(f^2(a, z), h^0(c)$:

$$\Sigma = \begin{cases} x = f^2(a, z) \\ y = h^0(c) \end{cases}.$$

Используем алгоритм Мортелло-Мортанари. Ни одно из правил 1-6 не применимо, значит, Σ является приведённой системой. $НОУ$ $\theta = \{x / f^2(a, z), y / h^0(c)\}$ и склейка возможна:

$$D_0 = (\underbrace{P^1(g^1(y))}_{D_1^{'}} \vee \underbrace{R^2(x, y)}_{R})\theta$$

Пример 4.8.3. Пусть дан дизъюнкт:

$$D_1 = P^1(g^1(y)) \vee R_1^3(f^2(b, q), f^2(z, h^1(a)), y) \vee R_2^3(m, f^2(g^1(x), y), a),$$

$$D_1 = \underbrace{P^1(g^1(y))}_{D_1^{'}} \vee \underbrace{R_1^3(f^2(b, q), f^2(z, h^1(a)), y) \vee R_2^3(m, f^2(g^1(x), y), a)}_{возможна\_склейка?},$$

$$\begin{cases} f^2(b,q)=m \\ f^2(z,h(a))=f^2(g(x),y) \\ y=a \end{cases} \xrightarrow{\text{правило}2} \begin{cases} f^2(b,q)=m \\ z=g^1(x) \\ h^1(a)=y \\ y=a \end{cases} \xrightarrow{\text{правило}3}$$

$$\begin{cases} m=f^2(b,q) \\ z=g^1(x) \\ y=h^1(a) \\ y=a \end{cases} \xrightarrow{\text{правило}5} \begin{cases} m=f^2(b,q) \\ z=g^1(x) \\ a=h^1(a) \\ y=a \end{cases} \xrightarrow{\text{правило}6} \begin{cases} m=f^2(b,q) \\ z=g^1(x) \\ \boxed{a}=h^1(\boxed{a}) \\ y=a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ошибка}}$$

R_1 и R_2 не унифицируемы, и склейка не возможна.

Очевидно, что если R_1 и R_2 унифицируемы, но входят в дизъюнкт со знаком отрицания и без него, то склейка невозможна:

$$D_i = D_i^{'} \vee L_1 \vee \neg L_2 \text{ и } \theta \;\; HOY(L_1, L_2).$$

Дизъюнкт $D_i\theta = D_i^{'}\theta \vee L_1\theta \vee \neg L_2\theta$ всегда выполним, поскольку в любой интерпретации всегда выполняется либо $L_1\theta$, либо $\neg L_2\theta$.

Пример 3.8.4. Правило Резолюций и правило склеивания. Пусть:

$$D_1 = \underbrace{R^2(f^1(x),z)}_{D_1^{'}} \vee P_1^3(h^1(a), g^2(x,y), \upsilon^0(c)),$$

$$D_2 = \underbrace{Q^1(k)}_{D_2^{'}} \vee \underbrace{\neg P_2^3(k, g^2(a,b), l) \vee \neg P_3^3(m, g^2(f^1(y),u), l)}_{\text{возможно\_склеивание?}}.$$

Проверяем, могут ли быть унифицированы P_2^3 и P_3^3. Используем алгоритм Мортелло-Мортанари:

$$\Sigma = \begin{cases} k = m \\ g^2(a,b) = g^2(f^1(y),u) \\ l = l \end{cases} \xrightarrow{\textit{правило}4}$$

$$\Sigma = \begin{cases} k = m \\ g^2(a,b) = g^2(f^1(y),u) \end{cases} \xrightarrow{\textit{правило}2} \Sigma = \begin{cases} k = m \\ a = f^1(y) \\ b = u \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\textit{правила\_1–6\_неприменимы}}$$

$\theta = \{k/m, a/f^1(y), b/u\}$. Результат склеивания:

$$D_2\theta = \underbrace{Q^1(k)}_{D_2'}\theta \vee \neg P_2^3(k, g^2(a,b), l)\theta \vee \neg P_3^3(m, g^2(f^1(y),u), l)\theta,$$

$$D_2\theta = (\underbrace{Q^1(k)}_{D_2'} \vee \neg P_2^3(k, g^2(a,b), l))\theta,$$

$${}^{\theta}D_2 = D_2\theta = \underbrace{Q^1(m)}_{{}^{\theta}D_2'} \vee \neg P_2^3(m, g^2(f^1(y),u), l).$$

Применимо ли правило резолюций к дизъюнктам D_1 и ${}^{\theta}D_2$?

$$D_1 = \underbrace{R^2(f^1(x),z)}_{D_1'} \vee P_1^3(h^1(a), g^2(x,y), \upsilon^0(c)),$$

$${}^{\theta}D_2 = D_2\theta = \underbrace{Q^1(m)}_{{}^{\theta}D_2'} \vee \neg P_2^3(m, g^2(f^1(y),u), l).$$

Возможная контрарная пара:

$$P_1^3(h^1(a), g^2(x,y), \upsilon^0(c)) \text{ и } \neg P_2^3(m, g^2(f^1(y),u), l).$$

Проверяем, могут ли быть унифицированы P_1^3 и P_2^3:

$$\Sigma = \begin{cases} h^1(a) = m \\ g^2(x,y) = g^2(f^1(y),u) \\ v^0(c) = l \end{cases} \xrightarrow{правило 2} \Sigma = \begin{cases} h^1(a) = m \\ x = f^1(y) \\ y = u \\ v^0(c) = l \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правило 3} \Sigma = \begin{cases} m = h^1(a) \\ x = f^1(y) \\ y = u \\ l = v^0(c) \end{cases} \xrightarrow{правило 5} \Sigma = \begin{cases} m = h^1(a) \\ x = f^1(u) \\ y = u \\ l = v^0(c) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правила\_1\text{–}6\_неприменимы}$$

$\eta = \{m / h^1(a), x / f^1(u), y / u, l / \upsilon^0(c)\}$. Тогда $P = P_1^3\eta = P_2^3\eta$:

$$\frac{D_1' \vee P_1^3, {}^{\theta}D_2' \vee \neg P_2^3}{(D_1' \vee {}^{\theta}D_2')\eta}.$$

Резольвента:

$$D_0 = (D_1' \vee {}^{\theta}D_2')\eta,$$

$$D_0 = (D_1' \vee {}^{\theta}D_2')\eta = (R^2(f^1(x), z) \vee Q^1(m))\eta,$$

$$(R^2(f^1(x), z) \vee Q^1(m))\eta = \beta[m / h^1(a), x / f^1(u), y / u, l / \upsilon^0(c)],$$

где $\beta = (R^2(f^1(x), z) \vee Q^1(m))$,

$$(R^2(f^1(x), z) \vee Q^1(m))\eta = R^2(f^1(f^1(u)), z) \vee Q^1(h^1(a)).$$

Используя правило резолюции, мы из двух дизъюнктов получаем один. Если система противоречива, то в её основании лежит неустранимое противоречие. Этим противоречием является пара, каждый элемент которой представляет собой один и тот же дизъюнкт со знаком отрицания и без него, например, $S = \{P^1(x), \neg P^1(x)\}$. S очевидно противоречива, так как всегда противоречива конъюнкция $P^1(x) \wedge \neg P^1(x)$. Если в системе дизъюнктов S обнаружена такая пара, то говорят, что из S выводим пустой дизъюнкт:

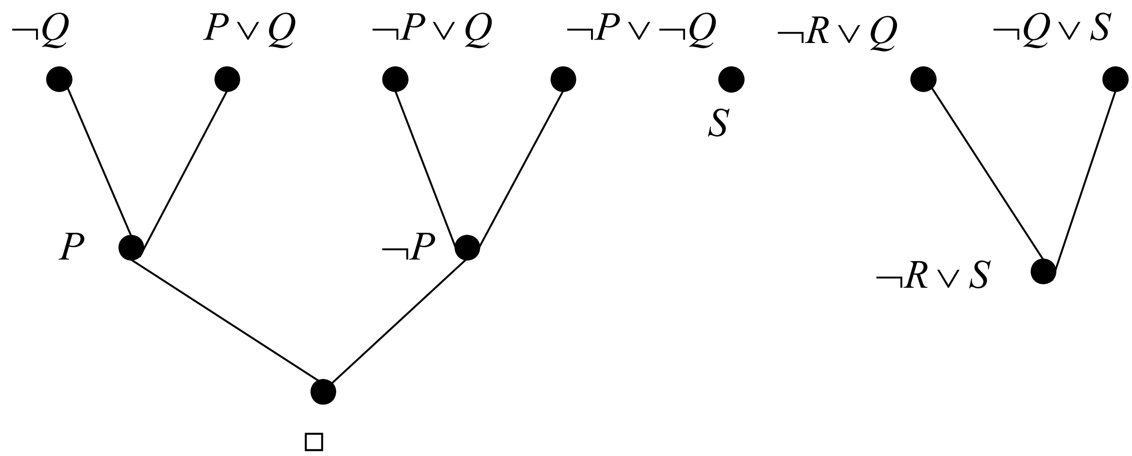
$$\frac{\square \vee P^1(x), \square \vee \neg P^1(x)}{\square}.$$

Если система дизъюнктов противоречива, используя правило резолюций можно построить «перевёрнутое» дерево, корнем которого будет являться пустой дизъюнкт. Листовые вершины такого дерева образуют противоречивое подмножество множества дизъюнктов (рис. 4.9).

Рис. 4.9 показывает, что пустой дизъюнкт выводим из S, значит система S противоречива.

Пример 3.8.5. Пусть дано множество дизъюнктов:

$$S = \{\neg Q, P \vee Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q, \neg R \vee Q, \neg Q \vee S\}.$$



Пустой дизъюнкт выводим, значит,
система дизъюнктов S противоречива.

Рис. 4.9. Дерево вывода пустого дизъюнкта

В примере 3.8.5 мы считали, что все предикатные символы, обозначенные одной буквой, уже приведены к общему виду. Теперь допустим, что это не так. Тогда на каждом шаге построения нам нужно проверять, можно ли унифицировать предикатные символы, обозначенные одной и той же буквой и входящие в два разных дизъюнкта со знаком отрицания и без него. Если унификация возможна, то предикаты приводятся к общему виду, и выполняется правило резолюции.

Пример 3.8.6. Дана система дизъюнктов:

$$S = \{\neg Q_1, P_1 \vee Q_2, \neg P_2 \vee R_1, \neg P_2 \vee \neg R_2\},$$

где $Q_1 = Q(x)$, $Q_2 = Q(f^1(z))$, $P_1 = P^2(y,x)$, $P_2 = P^2(a,b)$, $R_1 = R^2(m, g^1(n))$, $R_2 = R^2(a, g^1(b))$.

Среди возможных контрарных пар выделим:

$$Q_1 \text{ и } \neg Q_2,\ R_1 \text{ и } \neg R_2.$$

Проверяем, возможна ли унификация:

$$Q_1 = Q(x) \text{ и } Q_2 = Q(f^1(z)).$$

$$\Sigma = \left\{ x = f^1(z) \right. \xrightarrow{\text{правила\_1–6\_неприменимы}}$$

система Σ является приведённой, $\eta = \{x / f^1(z)\}$ — $НОУ(Q_1, Q_2)$.

Применяем правило резолюций: $\dfrac{\neg Q_1, P_1 \vee Q_2}{P_1\eta}$.

Резольвента: $P_1\eta = P^2(y,x)[x / f^1(z)] = P^2(y, f^1(z))$.

Проверяем, возможно ли унифицировать контрарную пару:

$$R_1 = R^2(m, g^1(n)) \text{ и } R_2 = R^2(a, g^1(b)).$$

$$\Sigma = \begin{cases} m = a \\ g^1(n) = g^1(b) \end{cases} \xrightarrow{\text{правило2}} \Sigma = \begin{cases} m = a \\ n = b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правила\_1-6\_неприменимы}$$

система Σ является приведённой, $\mu = \{m/a, n/b\}$ — $НОУ(R_1, R_2)$.

Применяем правило резолюций:

$$\frac{\neg P_2 \vee R_1, \neg P_2 \vee \neg R_2}{P_2\mu}.$$

Резольвента:

$$P_2\mu = P^2(a,b)[m/a, n/b] = P^2(a,b).$$

Проверяем, можно ли унифицировать дизъюнкты:

$$P_1\eta = P^2(y, f^1(z)) \text{ и } P_2\mu = P^2(a,b).$$

$$\Sigma = \begin{cases} y = a \\ f^1(z) = b \end{cases} \xrightarrow{правило 2} \Sigma = \begin{cases} y = a \\ b = f^1(z) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правила\_1-6\_неприменимы}$$

система Σ является приведённой, $\theta = \{y/a, b/f^1(z)\}$ — $НОУ(P_1, P_2)$.

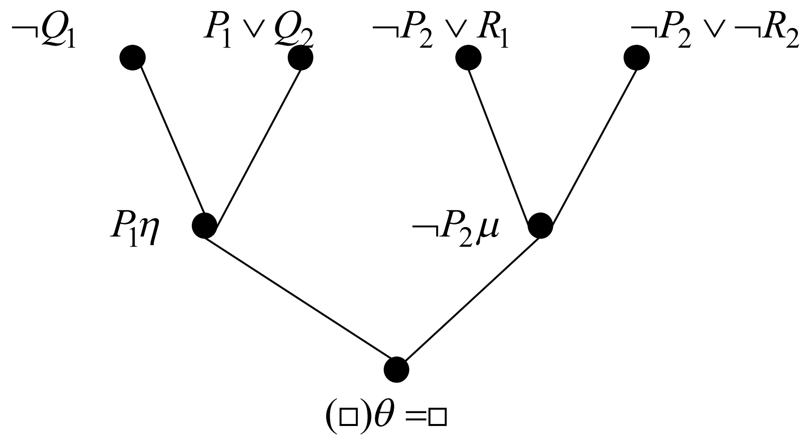
Применяем правило резолюций:

$$\frac{P_1, \neg P_2}{\square\theta}$$

$\square\theta = \square$ (любая подстановка оставляет пустой дизъюнкт пустым).

Таким образом, из системы дизъюнктов S выводим пустой дизъюнкт, и, значит, система S противоречива. Выводу пустого дизъюнкта в системе S соответствует дерево, представленное на рис. 4.10.

Построенное выше дерево представляет собой последовательность вывода пустого дизъюнкта из исходного множества дизъюнктов. Перенумеруем все дизъюнкты в таком дереве, причём так, что вершины находящиеся ближе к корню получают больший индекс, чем вершины расположенные ближе к листьям. Иначе говоря, нумеруем по



η — $НОУ(Q_1, Q_2)$, μ — $НОУ(R_1, R_2)$, θ — $НОУ(P_1\eta, \neg P_2\mu)$

Пустой дизъюнкт выводим, значит, система дизъюнктов S противоречива.

Рис. 4.10. Дерево вывода пустого дизъюнкта

уровням, отсчитывая уровни сверху вниз. Выпишем затем все дизъюнкты из дерева согласно порядку индекса: ${}^{v}D_1, {}^{v}D_2, ..., {}^{v}D_n$.

Определение 4.8.4. Резолютивным выводом для системы дизъюнктов S, называется такая последовательность дизъюнктов ${}^{v}D_1, {}^{v}D_2, ..., {}^{v}D_n$, что для любого ${}^{v}Di$, $1 \le i \le n$ выполнено одно из трёх условий:

1) ${}^{v}D_i$ — дизъюнкт, полученный из некоторого дизъюнкта $D \in S$ с помощью подстановки θ, осуществляющей взаимно-однозначное переименование переменных;
2) ${}^{v}D_i$ — резольвента двух дизъюнктов с меньшими значениями индекса i;
3) ${}^{v}D_i$ — склейка дизъюнкта с меньшим значением индекса i.

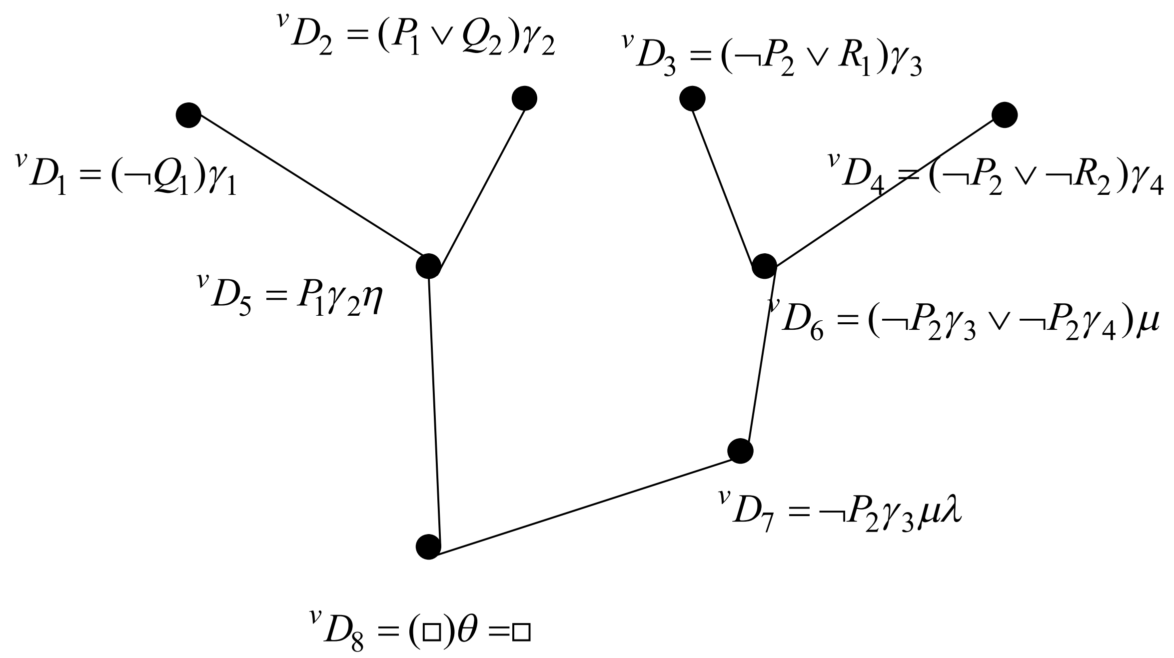
Если такая последовательность получена, то говорят, что дизъюнкты ${}^{v}D_1, {}^{v}D_2, ..., {}^{v}D_n$ резолютивно выводимы из S.

Пример 3.8.7. Построим резолютивный вывод для системы дизъюнктов из примера 3.8.6:

$$S = \{\neg Q_1, P_1 \vee Q_2, \neg P_2 \vee R_1, \neg P_2 \vee \neg R_2\},$$

где $Q_1 = Q(x)$, $Q_2 = Q(f^1(z))$, $P_1 = P^2(y, x)$, $P_2 = P^2(a, b)$, $R_1 = R^2(m, g^1(n))$, $R_2 = R^2(a, g^1(b))$.

Будем использовать подстановки γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 (согласно пункту 1, определения резолютивного вывода), чтобы переименовать переменные в каждом дизъюнкте так, что бы в попарно различных дизъюнктах не встречалось одинаковых переменных. Далее все переменные y с различными индексами j: y_j являются различными переменными.



$$\eta \text{ — } НОУ(Q_1\gamma_1, Q_2\gamma_2),\ \mu \text{ — } НОУ(R_1\gamma_3, R_2\gamma_4),$$

$$\lambda \text{ — } НОУ(P_2\gamma_3, P_2\gamma_4),\ \theta \text{ — } НОУ(P_1\gamma_2\eta, P_2\gamma_3\mu\lambda),$$

подстановки γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, осуществляют взаимно-однозначное переименование переменных. В результате вывода получен пустой дизъюнкт, значит, система дизъюнктов S противоречива.

Рис. 4.11. Резолютивный вывод: ${}^vD_1, {}^vD_2, \ldots, {}^vD_8$

- ${}^{v}D_1 = (\neg Q_1)\gamma_1 = \neg Q(x)[x / y_1] = \neg Q(y_1)$;
- ${}^{v}D_2 = (P_1 \vee Q_2)\gamma_2 = (P^2(y, x) \vee Q(f^1(z)))[y / y_2, x / y_3, z / y_4]$;
  ${}^{v}D_2 = P^2(y_2, y_3) \vee Q(f^1(y_4))$;
- ${}^{v}D_3 = (\neg P_2 \vee R_1)\gamma_3 =$
  $= (\neg P^2(a, b) \vee R^2(m, g^1(n)))[a / y_5, b / y_6, m / y_7, n / y_8]$;
  ${}^{v}D_3 = \neg P^2(y_5, y_6) \vee R^2(y_7, g^1(y_8))$;
- ${}^{v}D_4 = (\neg P_2 \vee \neg R_2)\gamma_4 = (\neg P^2(a, b) \vee \neg R^2(a, g^1(b)))[a / y_9, b / y_{10}]$;
  ${}^{v}D_4 = \neg P^2(y_9, y_{10}) \vee \neg R^2(y_9, g^1(y_{10}))$.

Возможная контрарная пара:

$$\neg Q(y_1) \text{ и } Q(f^1(y_4)).$$

По правилу резолюции:

$$\frac{\underbrace{\square \vee \neg Q(y_1)}_{{}^{v}D_1}, \underbrace{P^2(y_2, y_3) \vee Q(f^1(y_4))}_{{}^{v}D_2}}{\underbrace{(\square \vee P^2(y_2, y_3))\eta}_{{}^{v}D_5}}.$$

${}^{v}D_5 = P_1\gamma_2\eta = (P^2(y_2, y_3))\eta$, где η — $НОУ(Q_1\gamma_1, Q_2\gamma_2)$.

Проверим, существует ли η и если существует, то найдём его. Унификатор η должен унифицировать выражения $Q_1\gamma_1 = Q(y_1)$ и $Q_2\gamma_2 = Q(f^1(y_4))$:

$$\Sigma = \left\{ y_1 = f^1(y_4) \right. \xrightarrow{правила\_1\text{–}6\_неприменимы} \eta = \{y_1 / f^1(y_4)\}$$

- ${}^{v}D_5 = P_1\gamma_2\eta = (P^2(y_2, y_3))[y_1 / f^1(y_4)] = P^2(y_2, y_3)$

Возможная контрарная пара:

$$R^2(y_7, g^1(y_8)) \text{ и } \neg R^2(y_9, g^1(y_{10})).$$

По правилу резолюции:

$$\frac{\underbrace{\neg P^2(y_5, y_6) \vee R^2(y_7, g^1(y_8)))}_{{}^vD_3}, \underbrace{\neg P^2(y_9, y_{10}) \vee \neg R^2(y_9, g^1(y_{10}))}_{{}^vD_4}}{\underbrace{(\neg P^2(y_5, y_6) \vee \neg P^2(y_9, y_{10}))\mu}_{{}^vD_6}},$$

$${}^vD_6 = (\neg P_2\gamma_3 \vee \neg P_2\gamma_4)\mu = (\neg P^2(y_5, y_6) \vee \neg P^2(y_9, y_{10}))\mu,$$

где μ — $НОУ(R_1\gamma_3, R_2\gamma_4)$

Проверим, существует ли унификатор μ и если существует, то найдём его. Унификатор μ должен унифицировать выражения:

$$R_1\gamma_3 = R^2(y_7, g^1(y_8))) \text{ и } R_2\gamma_4 = R^2(y_9, g^1(y_{10})).$$

$$\Sigma = \begin{cases} y_7 = y_9 \\ g^1(y_8) = g^1(y_{10}) \end{cases} \xrightarrow{правилj\,2} \Sigma = \begin{cases} y_7 = y_9 \\ y_8 = y_{10} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{правила\_1\text{–}6\_неприменимы}$$

$\mu = \{y_7 / y_9, y_8 / y_{10}\}$.

${}^vD_6 = (\neg P_2\gamma_3 \vee \neg P_2\gamma_4)\mu = (\neg P^2(y_5, y_6) \vee \neg P^2(y_9, y_{10}))[y_7 / y_9, y_8 / y_{10}]$,

- ${}^vD_6 = \neg P^2(y_5, y_6) \vee \neg P^2(y_9, y_{10})$.

По правилу склеивания из ${}^vD_6$ получаем ${}^vD_7 = \neg P_2\gamma_3\mu\lambda$:

$${}^vD_6 = \square \vee \neg P^2(y_5, y_6) \vee \neg P^2(y_9, y_{10}) = \square \vee P_2\gamma_3 \vee P_2\gamma_4.$$

Проверим, существует ли унификатор λ для:

$$\neg P^2(y_5, y_6) \text{ и } \neg P^2(y_9, y_{10}),$$

если унификатор существует, то найдём его:

$$\Sigma=\begin{cases} y_5=y_9 \\ y_6=y_{10} \end{cases} \xrightarrow{правила\_1\text{–}6\_неприменимы} \lambda=\{y_5/y_9, y_6/y_{10}\}$$

λ — $НОУ(P_2\gamma_3, P_2\gamma_4)$. Тогда:

$$^vD_7=(\square\vee\neg P^2(y_5,y_6)\vee\neg P^2(y_9,y_{10}))\lambda=(\square\vee\neg P^2(y_5,y_6))\lambda$$

- $^vD_7=(\square\vee\neg P^2(y_5,y_6))[y_5/y_9,y_6/y_{10}]=\square\vee\neg P^2(y_9,y_{10})=\neg P^2(y_9,y_{10})$

Возможная контрарная пара:

$$P^2(y_2,y_3) \text{ и } \neg P^2(y_9,y_{10}).$$

По правилу резолюции:

$$\frac{\underbrace{\square\vee P^2(y_2,y_3)}_{^vD_5},\underbrace{\square\vee\neg P^2(y_9,y_{10})}_{^vD_7}}{\underbrace{(\square)\theta}_{^vD_8}}.$$

θ — $НОУ(P_1\gamma_2\eta, P_2\gamma_3\mu\lambda)$. Проверим, существует ли θ и если существует, то найдём его. Унификатор θ должен унифицировать выражения:

$$P^2(y_2,y_3) \text{ и } \neg P^2(y_9,y_{10}).$$

$$\Sigma=\begin{cases} y_2=y_9 \\ y_3=y_{10} \end{cases} \xrightarrow{правила\_1\text{–}6\_неприменимы}$$

$\theta=\{y_2/y_9, y_3/y_{10}\}$.

- $^vD_8=(\square)\theta=\square[y_2/y_9,y_3/y_{10}]=\square$

Резолютивный вывод: $^vD_1, {}^vD_2, ..., {}^vD_8$, причём $^vD_8=\square$, значит, пустой дизъюнкт выводим из системы дизъюнктов S и система S противоречива.

В определении резолютивного вывода важно обратить взимание на первый пункт. Он говорит о том, что в последовательность ${}^{v}D_1, {}^{v}D_2, ..., {}^{v}D_n$ непосредственно дизъюнкты из S не входят. Используя пункт 1) мы в каждом дизъюнкте производим переименование переменных так, что бы имена этих переменных не встречались в других дизъюнктах. Делается это для того, что бы при унификации предикатных символов, входящих в различные дизъюнкты, не возникало коллизий переменных, из-за которых унификатор может быть не найден.

Пример 3.8.8. Дана система дизъюнктов $S = \{D_1, D_2\}$, где:

$$D_1 = R^1(x) \vee P^2(a,x),\ D_2 = R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x)).$$

Рассмотрим решение, если не использовать переименование переменных. Возможная контрарная пара:

$$P^2(a,x) \text{ и } \neg P^2(f^1(x), g^1(x)).$$

Проверяем, существует ли $НОУ(P^2(a,x), P^2(f^1(x), g^1(x)))$:

$$\Sigma = \begin{cases} a = f(x) \\ x = g(x) \end{cases} \xrightarrow{\textit{правило}6} \Sigma = \begin{cases} a = f(x) \\ \boxed{x} = g(\boxed{x}) \end{cases} \xrightarrow{\textit{ошибка}}$$

Унификация не возможна и дальнейший резолютивный вывод тоже. Решение, если использовать переименование переменных:

$${}^{v}D_1 = D_1\lambda_1 = R^1(x) \vee P^2(a,x)[x/y_1, a/y_2] = R^1(y_1) \vee P(y_2, y_1),$$

$${}^{v}D_2 = D_2\lambda_2 = R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x))[a/y_3, x/y_4],$$

$${}^{v}D_2 = R^1(f^1(y_3)) \vee \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)),$$

где $y_1, y_2, y_3, y_4 \in Var$ и обозначают попарно различные переменные. Контрарная пара:

$$P(y_2, y_1) \text{ и } \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)).$$

Проверяем, существует ли $НОУ(P(y_2, y_1), P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)))$:

$$\Sigma = \begin{cases} y_2 = f^1(y_4) \\ y_1 = g^1(y_4) \end{cases} \xrightarrow{\textit{правила}\_1-6\_\textit{неприменимы}}$$

$\mu = \{y_2 / f^1(y_4), y_1 / g^1(y_4)\}$. Можем применить правило резолюций и продолжить резолютивный вывод.

Теперь поставим два вопроса:

1. Почему мы можем производить переименование переменных согласно пункту 1) определения резолютивного вывода?
2. Согласно пункту 1) определения резолютивного вывода проводится переименование переменных. Зачем тогда в алгоритме унификации существует правило 6, говорящее, что если встретилось предложение вида $x = g^1(x)$, где $x \in Var$, $g^1(x) \in Term$, то унификация не возможна? Если мы переименовываем переменные, то когда возникают ситуации, что правило 6 становится актуальным?

Разберёмся подробно в первом вопросе на примере.

Вспомним, что система дизъюнктов представляет собой конъюнкцию дизъюнктов. Этой конъюнкции предшествует кванторная приставка из кванторов общности, которая замыкает конъюнкцию по всем входящим в неё переменным. Пусть дана система дизъюнктов

$$S = \{R^1(x) \vee P^2(a, x), R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x))\}.$$

Данная система дизъюнктов представляет собой формулу:

$$\varphi = \forall x \forall a \underbrace{(R^1(x) \vee P^2(a, x)) \wedge (R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x)))}_{\psi}.$$

Формула φ непротиворечива тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна интерпретация I, в которой φ выполнима. В такой интерпретации I выражение ψ должно выполняться при любых значениях переменных x и a. Значит, если φ противоречива, то в каждой интерпретации I найдутся такие оценки переменных x и a, что ψ будет невыполнима на этих оценках. Рассмотри дизъюнкты:

$$D_1 = R^1(x) \vee P^2(a,x),$$

$$D_2 = R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x)).$$

Возможная контрарная пара:

$$P^2(a,x) \text{ и } \neg P^2(f^1(x), g^1(x)).$$

Нужно показать, что в любой интерпретации существуют такие оценки переменных x и a, что система дизъюнктов S невыполнима. Значит, нужно показать, что существуют оценки переменных x и a, такие что пара $P^2(a,x)$ и $\neg P^2(f^1(x), g^1(x))$ является контрарной. Обратите внимание, на слово существует. Именно оно нам позволяет использовать пункт 1) определения резолютивного вывода. Для пары $P^2(a,x)$ и $\neg P^2(f^1(x), g^1(x))$ такие значения существуют: $a = f^1(x)$, $x = g^1(x)$. В любой интерпретации I функциональному символу $f^1(x)$ на каждой конкретной оценке x будет соответствовать некоторый объект из носителя $\Im$ интерпретации I. Функциональному символу $f^1(x)$ с оценённым значением x соответствует конкретное значение *некоторой* переменной, неважно обозначена эта переменная как a или y_1, так как область определения любой переменной совпадает с носителем выбранной интерпретации. Поэтому, вместо выражений $a = f^1(x)$ и $x = g^1(x)$, мы можем записать выражения $y_1 = f^1(x)$,

$y_2 = g^1(x)$ $y_1, y_2 \in Var$. Результат такого переименования — стало возможно унифицировать пару $P^2(a,x)$ и $\neg P^2(f^1(x), g^1(x))$.

Определив унификатор, мы показали, что в любой интерпретации I существуют такие оценки переменных x, a и такие оценки термов $f^1(x)$ и $g^1(x)$, что $P^2(a,x)$ и $\neg P^2(f^1(x), g^1(x))$ образуют контрарную пару. На такой оценке выполняется одно из двух: либо $P^2(a,x)$ истинно, либо $\neg P^2(f^1(x), g^1(x))$ истинно. На этой оценке выполнимость конъюнкции:

$$R^1(x) \vee P^2(a,x) \wedge R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x)),$$

зависит только от истинности $R^1(x)$ и $R^1(f^1(a))$. Если в любой интерпретации I при найденных оценках x и a дизъюнкция $R^1(x) \vee R^1(f^1(a))$ невыполнима, то ψ невыполнима. Очевидно, что существует интерпретация, в которой дизъюнкция $R^1(x) \vee R^1(f^1(a))$ выполнима, а значит, выполнима ψ, и значит, выполнима формула φ. Пример интерпретации I_1, на которой формула φ выполнима:

- Носитель $\{1\}$;
- $f^1(a) = f^1(1) = 1$, $f^1(x) = f^1(1) = 1$, $g^1(x) = g^1(1) = 1$;
- $R^1(x) = R^1(1) = R^1(f^1(a)) = R^1(1) = 1$;
- $P^2(a,x) = P^2(1,1) = 0$;
- $P^2(f^1(x), g^1(x)) = P^2(f^1(1), g^1(1)) = P^2(1,1) = 0$.
- $\varphi = \forall x \forall a (R^1(x) \vee P^2(a,x)) \wedge (R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x)))$
- $I_1 \models \varphi$

Вернёмся к исходной задаче, рассматриваемой формуле и системе дизъюнктов S. Переименуем переменные с помощью подстановок λ_1, λ_2:

$${}^{v}D_1 = D_1\lambda_1 = R^1(x) \vee P^2(a,x)[x/y_1, a/y_2] = R^1(y_1) \vee P(y_2, y_1),$$

$${}^{v}D_2 = D_2\lambda_2 = R^1(f^1(a)) \vee \neg P^2(f^1(x), g^1(x))[a/y_3, x/y_4],$$

$${}^{v}D_2 = R^1(f^1(y_3)) \vee \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)).$$

Результат после унификации:

$$P(y_2, y_1) \text{ и } \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)),$$

$$НОУ(P(y_2, y_1), P^2(f^1(y_4), g^1(y_4))): \ \mu = \{y_2 / f^1(y_4), y_1 / g^1(y_4)\}:$$

$$P(f^1(y_4), g^1(y_4)) \text{ и } \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)).$$

Применим правило резолюции:

$$\frac{R^1(y_1) \vee P(y_2, y_1) \wedge R^1(f^1(y_3)) \vee \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4))}{(R^1(y_1) \vee R^1(f^1(y_3)))\mu}.$$

$$(R^1(y_1) \vee R^1(f^1(y_3)))\mu = (R^1(y_1) \vee R^1(f^1(y_3))[y_2 / f^1(y_4), y_1 / g^1(y_4)],$$

$$(R^1(y_1) \vee R^1(f^1(y_3)))\mu = (R^1(g^1(y_4)) \vee R^1(f^1(y_3)).$$

Продолжим проверку формулу φ на противоречивость. Будем продолжать проверять: в каждой ли интерпретации I существует такая оценка переменных, что формула ψ невыполнима. Но теперь нас будут интересовать не все оценки для R^1, а лишь те на которых:

$$R^1(y_1) = R^1(g^1(y_4)), \ R^1(f^1(y_3) = R^1(f^1(y_3),$$

так как если формула ψ невыполнима, то она может быть невыполнима только на этих оценках. На всех других оценках $P(y_2, y_1)$ и $\neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4))$ не образуют контрарной пары, а значит, данные предикатные символы могут принимать такие значения, что формула ψ не содержит противоречия и выполнима. Таким образом, используя правило резолюции, мы выбрали для каждой интерпретации такое подмножество оценок, на которых $P(y_2, y_1)$ и $\neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4))$ — контрарная пара. И если мы проверяем систему дизъюнктов на противоречивость, то только на этом множестве оценок имеет смысл дальше искать невыполнимое множество дизъюнктов. Поэтому для R^1 нас будут интересовать только такие оценки, при которых $y_1 = g^1(y_4)$, $y_3 = y_3$ (рис. 4.12).

Ограничение на значения переменных предиката R^1 дизъюнкта ${}^vD_1 = R^1(y_1) \vee P(y_2, y_1)$ вносит $P(y_2, y_1)$, при значениях $y_1 = g^1(y_4)$, $y_2 = f^1(y_4)$. Ограничения на значения переменных предиката R^1 в дизъюнкте:

$${}^vD_2 = R^1(f^1(y_3)) \vee \neg P^2(f^1(y_4), g^1(y_4)),$$

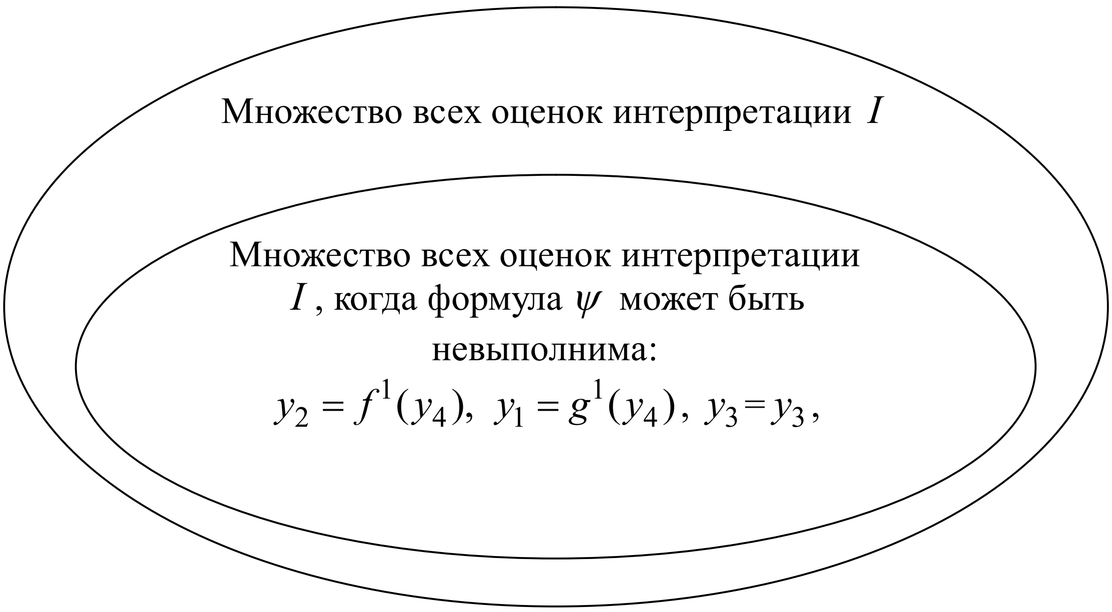


Рис. 4.12

вносит $P^2(f^1(y_4), g^1(y_4))$. Поэтому внутри одной дизъюнкции одноимённые переменные оказываются связанными, и литера, вошедшая в контрарную пару, определяет множество оценок другой литеры дизъюнкта. Очевидно, что в одном дизъюнкте по этой причине одноимённые переменные внутри литер нельзя называть разными именами.

Пример 4.7.9. Дано:

$$D_1 = R^1(x) \vee P^2(a,x).$$

Недопустимое переименование:

$$^{v}D_1 \neq D_1\lambda_1 = (R^1(x) \vee P^2(a,x))\lambda_1 = R^1(y_1) \vee P^2(y_2, y_3).$$

В дизъюнкте D_1, заменив имя переменной x на y_1 в литере $P^2(a,x)$, мы, одновременно, заменили x на y_1 в литере $R^1(x)$. Предикатные символы $R^1(y_1)$ и $P^2(a, y_1)$ остаются взаимосвязанными в той же степени, что были взаимосвязаны $R^1(x)$ и $P^2(a,x)$. Если же мы переименуем переменную x в этих предикатах разными именами, то эта связь будет разрушена. Но, если переменная с одним и тем же именем входит в разные дизъюнкты, то замена её разноимёнными переменными для каждого из дизъюнкта возможна и необходима.

Введём правило: во время построения резолютивного вывода, каждому дизъюнкту из системы дизъюнктов S будем сопоставлять свой уникальный набор переменных. Одноимённые переменные внутри одного дизъюнкта будем переименовывать одинаково. Это правило суть пункта 1) определения резолютивного вывода.

Обратите внимание, что операция склеивания происходит внутри одного дизъюнкта, поэтому при склеивании нельзя одноимённые переменные называть разными именами.

Зададим вопрос: если у каждого дизъюнкта свой уникальный набор переменных, когда срабатывает правило 6 алгоритма унификации? Переименование переменных не избавляет нас от всех возможных коллизий. Допусти в системе дизъюнктов S всего два дизъюнкта

$D_1 = P_1^2(x,x)$ и $D_2 = \neg P_2^2(y, f^1(y))$. Попытка унификации P_1^2 и P_2^2 выдаст ошибку по правилу 6:

$$\Sigma = \begin{cases} x = y \\ x = f^1(y) \end{cases} \xrightarrow{\textit{правило}5} \Sigma = \begin{cases} x = y \\ \boxed{y} = f^1(\boxed{y}) \end{cases} \xrightarrow[\textit{ошибка}]{\textit{правило}6}$$

4.9. КОРРЕКТНОСТЬ И ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Прежде было показано, что если из системы дизъюнктов выводим пустой дизъюнкт, то система дизъюнктов является противоречивой. Докажем формально этот факт.

Определение 4.9.1. Резолютивный вывод называется успешным, если из системы дизъюнктов S выводи пустой дизъюнкт.

Теорема 4.9.1. О корректности резолютивного вывода. Если из системы дизъюнктов S существует успешный резолютивный вывод, то система S противоречива.

Доказательство. Покажем, что:

- если D_0 — склейка дизъюнкта D, то D_0 логическое следствие D: $D \models D_0$;
- если D_0 резольвента дизъюнктов D_1 и D_2, то $D_1, D_2 \models D_0$.

Покажем, что если дизъюнкт D_0 получен в результате склеивания дизъюнкта D, то $D \models D_0$. Данное утверждение доказывают следующие выкладки:

$$D \models D = D_1^{'} \vee L_1 \vee L_2 \, .$$

Пусть μ — $НОУ(L_1, L_2)$, тогда $L = L_1\mu \vee L_2\mu$,

$$D \models (D_1^{'} \vee L_1 \vee L_2)\mu = D_1^{'}\mu \vee L_1\mu \vee L_2\mu \, ,$$

$$D \models (D_1^{'} \vee L_1 \vee L_2)\mu = D_1^{'}\mu \vee L \vee L = D_1^{'}\mu \vee L \, ,$$

$$D \models D_1^{'}\mu \vee L = (D_1^{'} \vee L_1)\mu = D_0 .$$

Результат:

$$D \models D_0 .$$

Покажем что, что резольвента D_0, полученная из дизъюнктов D_1 и D_2, является логическим следствием D_1 и D_2: $D_1, D_2 \models D_0$. Найдём θ — *НОУ* D_1 и D_2. Тогда:

$$D_1 = D_1^{'} \vee L_1, \; D_2 = D_2^{'} \vee \neg L_2, \; L = L_1\theta = L_2\theta .$$

Из дизъюнктов D_1 и D_2 всегда выводим дизъюнкт D_1: $D_1, D_2 \models D_1$. Тогда верны выражения $D_1, D_2 \models D_1\theta$ и $D_1, D_2 \models D_1^{'}\theta \vee L_1\theta$. Если из D_1, D_2 выводимо выражение $D_1^{'}\theta \vee L_1\theta$, то выводимость сохраниться и после того, как к дизъюнкту будет добавлена дизъюнкция с ещё одной литерой:

$$D_1, D_2 \models D_1^{'}\theta \vee L_1\theta \vee D_2^{1}\theta .$$

Аналогичные рассуждения проводим для D_2:

$$D_1, D_2 \models D_2\theta ,$$

$$D_1, D_2 \models D_2^{'}\theta \vee \neg L_1\theta ,$$

$$D_1, D_2 \models D_2^{'}\theta \vee \neg L_1\theta \vee D_1^{'}\theta .$$

В результате получаем:

$$D_1, D_2 \models D_1^{'}\theta \vee L_1\theta \vee D_2^{1}\theta = D_1^{'}\theta \vee D_2^{1}\theta \vee L ,$$

$$D_1, D_2 \models D_2^{'}\theta \vee \neg L_1\theta \vee D_1^{'}\theta = D_1^{'}\theta \vee D_2^{'}\theta \vee \neg L .$$

Последние формулы имеют место, только тогда, когда значение истины в правых частях не зависит от L. Это означает, что выражение $D_1^{'}\theta \vee D_2^{1}\theta$ выводимо из D_1 и D_2. Результат:

$$D_1, D_2 \models D_1^{'}\theta \vee D_2^{'}\theta = (D_1^{'} \vee D_2^{'})\theta = D_0.$$

Если из S выводим пустой дизъюнкт ${}^{v}D_i$, то:

- он является логическим следствием (резольвентой) двух дизъюнктов ${}^{v}D_j$ и ${}^{v}D_k$, где $j,k < i$;
- ${}^{v}D_i$ является логическим следствием (склейкой) дизъюнкта ${}^{v}D_m$, где $m < i$.

Дизъюнкты ${}^{v}D_j$, ${}^{v}D_k$, ${}^{v}D_m$ в свою очередь выводимы из дизъюнктов системы S, либо напрямую, либо посредством промежуточных резольвент и склеек. Значит, если $S \models {}^{v}D_i = \square$, то пустой дизъюнкт является следствием S. Пустой дизъюнкт всегда ложен и, значит, система S противоречива. Теорема доказана.

Зададимся вопросом: может ли с помощью резолютивного вывода быть проверена общезначимость любой формулы? Поставим тот же вопрос иначе: является ли резолютивный вывод полным?

Теорема 4.9.2. О полноте резолютивного вывода. Если система дизъюнктов S противоречива, то из S всегда выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Вспомним теорему Эрбрана: если система дизъюнктов S противоречива, то в S существует противоречивый набор основных примеров дизъюнктов из S. Свяжем теорему Эрбрана с доказательством, покажем: если в S существует противоречивый множество основных примеров дизъюнктов из S, то из этого противоречивого множества резолютивно выводим пустой дизъюнкт. После этого, покажем, что пустой дизъюнкт выводим из самой системы S, если S является противоречивой.

Лемма 4.9.1. Если S^{osp} — противоречивое множество основных примеров дизъюнктов из S, то из S^{osp} резолютивно выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Договоримся об обозначениях. Пусть $S_1^{osp} = \{D_1^{osp}, D_2^{osp}, ..., D_m^{osp}\}$ — противоречивая конечная система (множество) основных примеров из S. Пусть в S_x^{osp} число попарно различных атомов равно N, будем записывать: ${}^{N}S_x^{osp}$. Система S_{x+1}^{osp} получается из системы S_x^{osp} следующим образом:

- из S_x^{osp}, используя правила резолютивного вывода, получена последовательность, образующая резолютивный вывод: $D_1', D_2', ...D_k'$, где $D_1', D_2', ...D_j'$ дизъюнкты, выведенные прежде, $D_{j+1}', D_{j+2}', ...D_k'$ дизъюнкты, полученные на текущем шаге вывода;
- из последовательности $D_1', D_2', ...D_k'$ удалим те дизъюнкты, к которым были применены правила 2), 3) определения резолютивного вывода (правило склеивания, правило резолюции).

Очевидно, что число попарно различных атомов в системе S_{x+1}^{osp} либо осталось тем же, что и в S_x^{osp} (если использовалось правило склеивания), либо уменьшилось на единицу (если было применено правило резолюции).

Логика доказательства леммы:

1) покажем, что если система S_x^{osp} противоречива, то после применения правила склеивания, всегда становится возможным применить правило резолюции;
2) покажем, что если резолютивный вывод возможен на каждом шаге (в соответствии с пунктом 1) до получения пустого дизъюнкта □, то в результате резолютивного вывода получаем по-

следовательность ${}^{N_1}S_1^{osp}, {}^{N_2}S_2^{osp}, \ldots, {}^{N_y}S_y^{osp}$, причём $N_1 \geq N_2 \geq \ldots \geq N_y = \square$;

3) покажем, что если S_x^{osp} противоречивое множество, то S_{x+1}^{osp} так же противоречивое множество.

Пункт 1. Пусть S_x^{osp} — конечное множество основных примеров дизъюнктов системы S. Если после применения правила склеивания (или без его применения, если склеивание невозможно) не образуется ни одного основного атома A_0, такого, что A_0 и $\neg A_0$ входят в различные дизъюнкты S_x^{osp}, то система S_x^{osp} непротиворечива. В самом деле, в этом случае S_x^{osp} не может быть противоречивой, так как не содержит атомов, которые потенциально могли бы противоречить друг другу и тем самым делать систему S_x^{osp} противоречивой. Поэтому, если S_x^{osp} противоречива, то всегда найдутся такие литеры L_1 и L_2, входящие в различные дизъюнкты: $L_1 = A_0$, $L_2 = \neg A_0$, и правило резолюции будет применимо.

Пункт 2. Пусть для некоторого дизъюнкта в системе S_x^{osp} применимо правило склеивания. Тогда получаем систему основных примеров дизъюнктов S_{x+1}^{osp}, причём (по определению S_{x+1}^{osp}) число основных попарно различных атомов в S_{x+1}^{osp} и в S_x^{osp} совпадают: $N_{(x)} = N_{(x+1)}$.

Пусть S_x^{osp} противоречива и не содержит дизъюнктов, для которых возможно склеивание. Согласно пункту 1, в системе S_x^{osp} существуют такие литеры $L_1 = A_0$, $L_2 = \neg A_0$ входящие в различные дизъюнкты, что для них применимо правило резолюции. Если применено правило резолюций и получена система S_{x+1}^{osp}, то число попарно различных атомов в S_{x+1}^{osp} на один меньше, чем в S_x^{osp}. В самом деле, разделим множество основных примеров дизъюнктов S_x^{osp} на три части:

- ${}_1S_x^{osp} = \{{}_1D_i^{'} : {}_1D_i^{'} \in S_x^{osp}, {}_1D_i^{'} = \overline{{}_1D_i^{'}} \vee A_0\}$;
- ${}_2S_x^{osp} \{{}_2D_i^{'} : {}_2D_i^{'} \in S_x^{osp}, {}_2D_i^{'} = \overline{{}_2D_i^{'}} \vee \neg A_0\}$;
- ${}_3S_x^{osp} \{{}_3D_i^{'} : {}_3D_i^{'} \in S_x^{osp}, A_0 \notin {}_3D_i^{'}\}$.

Возможная резольвента: $\overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}}$. Построим множество S_{x+1}^{osp}. По определению множества S_{x+1}^{osp} в этом множестве не содержится атом A_0. Никаких новых атомов в S_{x+1}^{osp} отличных от атомов входящих в S_x^{osp} появиться не могло. Значит величина $N_{(x)}$ больше на единицу, чем величина $N_{(x+1)}$: $N_{(x)} > N_{(x+1)}$.

Пункт 3. Продолжим использовать обозначения из пункта 2. Что бы доказать третий пункт, нужно показать, что множество $S_{x+1}^{osp} = {}_3S_x^{osp} \cup (\overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}})$ является противоречивым, если множество S_x^{osp} было противоречивым. Раз S_x^{osp} противоречиво, то оно невыполнимо в любой интерпретации I:

$$I \not\models S_x^{osp} = {}_1S_x^{osp} \cup {}_2S_x^{osp} \cup {}_3S_x^{osp}.$$

Пусть атом A_0, входящий в контрарную пару, выполним в некоторой интерпретации I: $I \models A_0$. Тогда:

$$I \models {}_1S_x^{osp} = \{{}_1D_i^{'} : {}_1D_i^{'} \in S_x^{osp}, {}_1D_i^{'} = \overline{{}_1D_i^{'}} \vee \boxed{A_0}\}.$$

В результате получаем, что:

$$I \not\models S_x^{osp} = \cancel{{}_1S_x^{osp}} \cup {}_2S_x^{osp} \cup {}_3S_x^{osp} = {}_2S_x^{osp} \cup {}_3S_x^{osp}.$$

Таким образом, в выбранной интерпретации I обязательно будет невыполнимо либо ${}_2S_x^{osp}$, либо ${}_3S_x^{osp}$, либо оба. Если $I \not\models {}_3S_x^{osp}$, то $I \not\models {}_3S_x^{osp} \cup (\overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}})$ и доказательство закончено. Если это не так, то должно быть выполнено $I \not\models {}_2S_x^{osp}$. Но:

$$ {}_2S_x^{osp}\{{}_2D_i^{'} : {}_2D_i^{'} \in S_x^{osp}, {}_2D_i^{'} = \overline{{}_2D_i^{'}} \vee \neg A_0\} \text{ и } I \not\models \neg A_0, $$

так как $I \models A_0$. Значит $I \not\models \overline{{}_2D_i^{'}}$, иначе в I был бы выполним дизъюнкт ${}_2D_i^{'}$, а тогда в I было выполнимо ${}_2S_x^{osp}$. Получили: $I \not\models \overline{{}_2D_i^{'}}$. Так как $A_0 \notin \overline{{}_2D_i^{'}}$, то $I^{'} \not\models \overline{{}_2D_i^{'}}$, где $I^{'}$ отличается от I лишь на значение атома A_0.

Рассмотрим интерпретацию $I^{'}$, отличающуюся от I лишь тем, что $I^{'} \not\models A_0$ и $I^{'} \models \neg A_0$:

$$ I^{'} \not\models {}_1S_x^{osp} = \{{}_1D_i^{'} : {}_1D_i^{'} \in S_x^{osp}, {}_1D_i^{'} = \overline{{}_1D_i^{'}} \vee \boxed{A_0}\}, $$

$$ I^{'} \models {}_2S_x^{osp}\{{}_2D_i^{'} : {}_2D_i^{'} \in S_x^{osp}, {}_2D_i^{'} = \overline{{}_2D_i^{'}} \vee \boxed{\neg A_0}\}. $$

Пусть:

$$ I^{'} \models {}_3S_x^{osp}\{{}_3D_i^{'} : {}_3D_i^{'} \in S_x^{osp}, A_0 \notin {}_3D_i^{'}\}, $$

в противном случае было бы выполнено $I^{'} \not\models {}_3S_x^{osp}$, а так как $A_0 \notin {}_3S_x^{osp}$ и $I^{'}$ отличается от I только значением A_0, то было бы автоматически выполнено $I \not\models {}_3S_x^{osp}$. Тогда:

$$ I \not\models {}_3S_x^{osp} \cup (\overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}}), $$

а это то, что нам было нужно показать. Поэтому будем считать, что $I^{'} \models {}_3S_x^{osp}$.

Так как $I^{'} \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}} \vee \boxed{A_0}$ и $I^{'} \mid\neq A_0$, то выполнено: $I^{'} \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}}$. Но $A_0 \notin \overline{{}_1D_i^{'}}$, и значит дизъюнкт $\overline{{}_1D_i^{'}}$ невыполним ни в одной интерпретации, отличной от $I^{'}$ лишь на значение атома A_0. Такой интерпретацией является I, поэтому $I \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}}$.

В результате получили, что $I \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}}$ и $I \mid\neq \overline{{}_2D_i^{'}}$, значит $I \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}}$ во всех интерпретациях I, в которых выполнено A_0. Так как $A_0 \notin \overline{{}_1D_i^{'}}$ и $A_0 \notin \overline{{}_2D_i^{'}}$, то $I^{'} \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}}$ и $I^{'} \mid\neq \overline{{}_2D_i^{'}}$ для всех интерпретаций $I^{'}$ в которых A_0 невыполнимо. Это означает, что дизъюнкция $\overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}}$ невыполнима ни в одной возможной интерпретации.

В результате мы показали, что система:

$$S_{x+1}^{osp} = {}_3S_x^{osp} \cup (\overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}})$$

всегда противоречива, если была противоречива система S_x^{osp}. В любой интерпретации I всегда, либо $I \mid\neq {}_3S_x^{osp}$, либо, если $I \models {}_3S_x^{osp}$, то всегда для таких случаев $I \mid\neq \overline{{}_1D_i^{'}} \vee \overline{{}_2D_i^{'}}$. Значит, для любой интерпретации I верно, что $I \mid\neq S_{x+1}^{osp}$ и система S_{x+1}^{osp} противоречива. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы о полноте резолютивного вывода осталось показать, что если из конечного множества основных примеров дизъюнктов из S выводим пустой дизъюнкт, то и из S всегда выводим пустой дизъюнкт. Для этого нам потребуется лемма о подъеме для резолюции.

Лемма 4.9.1. О подъеме для резолюции. Пусть $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$ — основные примеры дизъюнктов D_1 и D_2. Пусть $D_0^{'}$ — резольвента дизъюнктов $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$. Пусть дизъюнкт D_0 — резолютивно выводим из дизъюнктов D_1 и D_2. Тогда $D_0^{'}$ — основной пример для дизъюнкта $D_0^{'}$. Будем считать (согласно пункту 1) определения резолютивного вывода), что каждому из дизъюнктов D_1 и D_2 соответствует свой уникальный набор переменных.

Доказательство. Пусть подстановка θ_1 заменяет все переменные дизъюнкта D_1 на объекты эрбрановского универсума, причём так, что из D_1 получается основной пример $D_1^{'}$. Пусть подстановка θ_2 заменяет все переменные дизъюнкта D_2 на объекты эрбрановского универсума, причём так, что из D_2 получается основной пример $D_2^{'}$. По условию $D_0^{'}$ — резольвента дизъюнктов $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$. Так как $D_0^{'}$ — резольвента дизъюнктов $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$, то дизъюнкты $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$ представимы в виде:

$$D_0^{'} = \overline{D_1^{'}} \vee \overline{D_2^{'}},\ D_1^{'} = \overline{D_1^{'}} \vee L^{'},\ \ D_2^{'} = \overline{D_2^{'}} \vee \neg L^{'}.$$

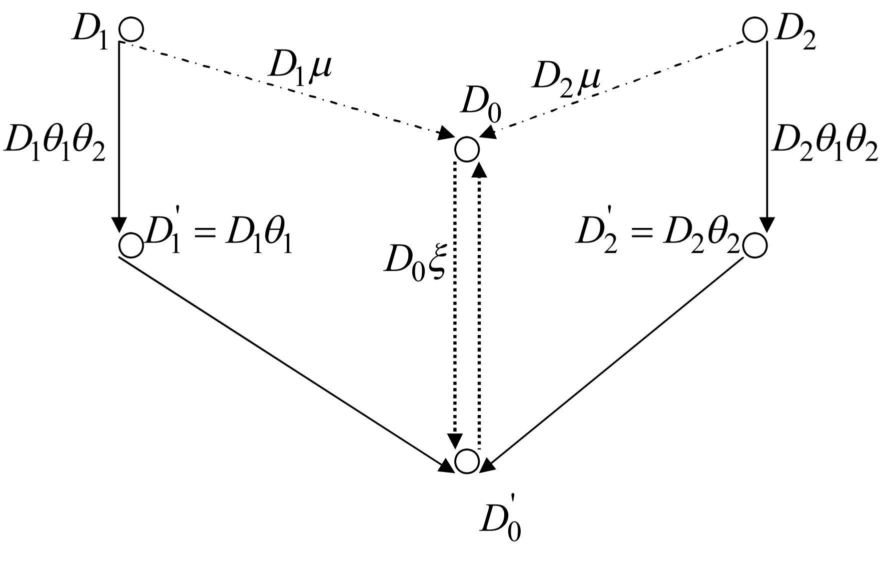


Рис. 4.13. Лемма о подъёме

Если D_0 резолютивно выводим из дизъюнктов D_1 и D_2, то D_1 и D_2 представимы в виде:

$$D_0 = \overline{D_1} \vee \overline{D_2}\,,\; D_1 = \overline{D_1} \vee L_1,\; D_2 = \overline{D_2} \vee \neg L_2,$$

где литеры L_1 и L_2 унифицируемы. Тогда:

$$D_1^{'} = D_1\theta_1 = (\overline{D}1 \vee L_1)\theta_1 = \overline{D_1^{'}} \vee L^{'},$$

$$D_2^{'} = D_2\theta_2 = (\overline{D}2 \vee \neg L_2)\theta_2 = \overline{D_2^{'}} \vee L^{'}.$$

Дизъюнкты D_1 и D_2 могут содержать большее число литер, чем две:

$$D_1 = \overline{D_1} \vee L_{11} \vee L_{12} \vee ... \vee L_{1k},$$

$$D_2 = \overline{D_2} \vee \neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee ... \vee \neg L_{2l}.$$

В этом случае получаем:

$$D_1^{'} = D_1\theta_1 = (\overline{D}1 \vee L_{11} \vee L_{12} \vee ... \vee L_{1k})\theta_1 = \overline{D_1^{'}} \vee L^{'},$$
$$D_2^{'} = D_2\theta_2 = (\overline{D}2 \vee \neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee ... \vee \neg L_{2l})\theta_2 = \overline{D_2^{'}} \vee L^{'}.$$

Приведённая выше запись означает, что подстановка θ_1 унифицирует литеры $L_{11}, L_{12}, ..., L_{1k}$, приводя их к общему виду:

$$L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = ... = L_{1k}\theta_1 = L^{'},$$

иначе, если бы такой подстановки не нашлось, мы не смогли получить из D_1 выражение $D_1^{'} = \overline{D_1^{'}} \vee L^{'}$ (а без него не было бы и $D_0^{'}$). Используя правило склеивания после унификации, получаем выражение:

$$D_1^{'} = D_1\theta_1 = \overline{D}1\theta_1 \vee L^{'} \vee L^{'} \vee ... \vee L^{'} = \overline{D}1\theta_1 \vee L^{'} = \overline{D_1^{'}} \vee L^{'}.$$

Аналогичные рассуждения проводим для D_2 и $D_2^{'}$ в результате получаем выражение:

$$D_2^{'} = D_2\theta_2 = \overline{D}_2\theta_2 \vee \neg L^{'} \vee \neg L^{'} \vee \ldots \vee \neg L^{'} = \overline{D}_2\theta_2 \vee \neg L^{'} = \overline{D_2^{'}} \vee \neg L^{'}.$$

Если дизъюнкт $D_0^{'}$ резолютивно выводим из дизъюнктов $D_1^{'}$ и $D_2^{'}$, то для дизъюнктов:

$$D_1 = \overline{D_1} \vee L_{11} \vee L_{12} \vee \ldots \vee L_{1k} \text{ и } D_2 = \overline{D_2} \vee L_{21} \vee L_{22} \vee \ldots \vee L_{2l},$$

всегда существуют такие подстановки θ_1 и θ_2, что:

$$L_{11}\theta_1 = L_{12}\theta_1 = \ldots = L_{1k}\theta_1 = L^{'},\ L_{21}\theta_2 = L_{22}\theta_2 = \ldots = L_{2l}\theta_2 = L^{'}.$$

Так как каждый дизъюнкт D_1 и D_2 имеет свой уникальный набор переменных то, можно взять подстановку $\theta_1\theta_2$ и применить её к литерам $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k}$ и к литерам $L_{21}, L_{22}, \ldots, L_{2l}$. Результат:

$$L_{11}\theta_1\theta_2 = L_{12}\theta_1\theta_2 = \ldots = L_{1k}\theta_1\theta_2 = L^{'},$$
$$L_{21}\theta_1\theta_2 = L_{22}\theta_1\theta_2 = \ldots = L_{2l}\theta_1\theta_2 = L^{'},$$

означает, что в выражениях:

$$D_1 = \overline{D_1} \vee \underbrace{L_{11} \vee L_{12} \vee \ldots \vee L_{1k}}_{L_1},$$

$$D_2 = \overline{D_2} \vee \underbrace{\neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee \ldots \vee \neg L_{2l}}_{L_2}.$$

унифицируемы все значения $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k}$, $L_{21}, L_{22}, \ldots, L_{2l}$. Раз эти значения унифицируемы, то существует:

$$НОУ(L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k}, L_{21}, L_{22}, \ldots, L_{2l}) = \mu.$$

Это означает, что $\theta_1\theta_2 = \mu\xi$, где ξ — некоторая подстановка. Подстановка μ осуществляет унификацию атомов $L_{11}, L_{12}, ..., L_{1k}$, $L_{21}, L_{22}, ..., L_{2l}$ используя наборы переменных из D_1 и D_2, а подстановка ξ в уже унифицированные атомы L_{ij} подставляет объекты эрбрановского универсума. Это означает, что:

$$D_1\mu = \overline{D_1}\mu \vee \underbrace{L_{11}\mu \vee L_{12}\mu \vee ... \vee L_{1k}\mu}_{L_1\mu} = \overline{D_1}\mu \vee L,$$

$$D_2\mu = \overline{D_2}\mu \vee \underbrace{\neg L_{21}\mu \vee \neg L_{22}\mu \vee ... \vee \neg L_{2l}\mu}_{L_2\mu} = \overline{D_2}\mu \vee \neg L,$$

$$\frac{\overline{D_1}\mu \vee L, \overline{D_2}\mu \vee \neg L}{\underbrace{(\overline{D_1} \vee \overline{D_2})\mu}_{D_0}}.$$

Несложно убедиться: $D_0\xi = D_0^{'}$, где ξ подставляет вместо термов D_0 объекты эрбрановского универсума. Получаем вывод, с которого начали доказательство леммы:

$$\frac{\overline{D_1}\mu\xi \vee L^{'}, \overline{D_2}\mu\xi \vee \neg L^{'}}{\underbrace{(\overline{D_1} \vee \overline{D_2})\,\underbrace{\mu\xi}_{\theta_1\theta_2}}_{D_0^{'}}}.$$

Лемма доказана.

Мы показали, что если $D_1^{'}$, $D_2^{'}$ — основные примеры дизъюнктов D_1, D_2, и из $D_1^{'}$, $D_2^{'}$ резолютивно выводим дизъюнкт $D_0^{'}$, то всегда существует дизъюнкт D_0, являющейся резольвентой дизъюнктов D_1, D_2. Причём $D_0^{'}$ — основной пример для D_0. Это означает, что если существует резолютивный вывод пустого дизъюнкта из некоторого конечного множества основных примеров дизъюнктов из S, то в S

будет выводим пустой дизъюнкт. Основным пример пустого дизъюнкта является пустой дизъюнкт. Теорема доказана.

4.10. ПОСТРОЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ВЫВОДА ПО СЕМАНТИЧЕСКОМУ ДЕРЕВУ

Во время применения правила резолюции в резолютивном выводе, по сути, строится семантическое дерево. Если резолютивный вывод является успешным, т. е. выводится пустой дизъюнкт, то построенное семантическое дерево будет закрытым. В правилах резолютивного вывода никак не описано, какой именно стратегии стоит придерживаться при выборе контрарной пары, когда в системе дизъюнктов S можно выделить сразу несколько таких пар. От выбора каждой конкретной контрарной пары зависит построение резолютивного вывода, каждому построенному выводу соответствует своё семантическое дерево. Выше сказанное, аналогично утверждению, что замкнутое семантическое дерево не всегда может быть построено единственным образом. Для одной и той же противоречивой формулы, может быть построено несколько семантических деревьев, но какой бы способ построения не был бы выбран, дерево будет закрытым.

Покажем взаимосвязь резолютивного вывода и семантического дерева. Для того, что бы пункты 2) и 3) определения резолютивного вывода были применимы, необходимо, чтобы были унифицированы атомы, склеиваемые друг с другом, а так же атомы, образующие контрарную пару при применении правила резолюции. Во время унификации формируется подстановка, которая сужает области значений переменных в унифицируемых атомах. Тем самым определяется область таких значений переменных, при которых исходная формула может быть потенциально невыполнима. Если мы сузили область значений переменных, для унифицируемых атомов, то мы сузили область определения этих переменных, во всех атомах в которые они входят. Каждый дизъюнкт системы дизъюнктов S имеет свой набор переменных. Поэтому унификация ограничивает область значения, только тех переменных, что входят в унифицируемые дизъюнкты. То же самое происходит во время склеивания. Отличие в том, что во время склеивания ограничиваются области значений переменных, входящих лишь в один дизъюнкт. Строя резолютивный вывод мы тем самым на каждом шаге вывода ограничиваем области значений переменных, оставляя лишь те значения, на которых потенциально возможно противоречие. Пустой дизъюнкт выводим, когда в системе дизъюнктов S получены два дизъюнкта P_1 и $\neg P_2$:

$$S=\{\underbrace{P_1}_{D_1},\underbrace{\neg P_2}_{D_2},D_3,\ldots,D_n\},$$

причём P_1 и P_2 унифицируемы. При построении резолютивного вывода, предшествующего получению P_1 и $\neg P_2$, области значений переменных входящих в P_1 и $\neg P_2$ были «сужены» до тех значений, при которых, в случае противоречивости $P_1 \wedge \neg P_2$, вся система S становится противоречивой. Если P_1 и P_2 унифицируемы, то области значений переменных, входящих в P_1, P_2, сужаются до таких значений, при которых система дизъюнктов S становится противоречивой в любой интерпретации. Заметим, что говоря о сужении области значений переменных, мы говорим не о конкретных значениях на конкретном множестве, а о том, что между переменными, входящими в систему дизъюнктов устанавливаются взаимозависимости, которые и ограничивают возможные области значений переменных на каждой выбранной интерпретации (например: система S может быть противоречивой не при любом значение x из области интерпретации I, а только при тех значениях, когда $x=f(y)$). Такая зависимость сохраняется на всех интерпретациях. Это гарантирует, что в любой интерпретации будет существовать (или не существовать) набор значений переменных из S при которых S будет невыполнима (выполнима).

Если P_1 и P_2 не унифицируемы то «сужение» областей значений переменных, полученное в ходе резолютивного вывода, оказалось таковым, что области значений переменных (на которых возможно противоречие), входящих в P_1 и P_2, не пересекаются. Как следствие, нет такого набора значений переменных, входящих в S, чтобы конъюнкция дизъюнктов из S была невыполнима.

Пример 4.10.1. Пусть необходимо показать противоречивость формулы, представленной в ССФ:

$$\varphi = \forall x \forall y \forall z(\neg R^2(f^1(x), f^1(y)) \wedge P^2(x,z) \vee \neg R^2(x,z) \wedge$$
$$\wedge \neg P^2(f^1(g^1(x)), f^1(h^1(z)))).$$

В предикатные символы $P^2(x,z)$ и $P^2(f^1(g^1(x)), f^1(h^1(z))$ входят разные термы, поэтому будем обозначать их: $P_1^2(x,z)$, $P_2^2(f^1(g^1(x)), f^1(h^1(z))$. Аналогично: $R_1^2(f^1(x), f^1(y))$ и $R_2^2(x,z)$. Выпишем дизъюнкты из системы S:

$$\forall x \forall y \underbrace{(\neg R_1^2(f^1(x), f^1(y)))}_{D_1},$$

$$\forall x \forall z \underbrace{(P_2^2(x,z) \vee R_2^2(x,z))}_{D_2},$$

$$\forall x \forall z \underbrace{(\neg P_2^2(f^1(g^1(x)), f^1(h^1(z))))}_{D_3},$$

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}.$$

Построим резолютивный вывод. Вспомним правило «каждому дизъюнкту свой набор переменных»:

- ${}^vD_1 = \neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))$;
- ${}^vD_2 = P_1^2(y_3, y_4) \vee R_2^2(y_3, y_4)$;
- ${}^vD_3 = \neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6)))$.

Возможная контрарная пара:

$$\neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)) \text{ и } R_2^2(y_3, y_4).$$

Попробуем унифицировать R_1^2 и R_2^2:

$$\Sigma = \begin{cases} f^1(y_1) = y_3 \\ f^1(y_2) = y_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{правило}3} \Sigma = \begin{cases} y_3 = f^1(y_1) \\ y_4 = f^1(y_2) \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{cases} y_3 = f^1(y_1) \\ y_4 = f^1(y_2) \end{cases} \xrightarrow{\text{правила\_1–6\_неприменимы}}$$

$\theta = \{y_3 / f^1(y_1), y_4 / f^1(y_2)\}$. Получили контрарную пару:

$$\neg R^2(f^1(y_1), f^1(y_2)) = \neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))[y_3 / f^1(y_1), y_4 / f^1(y_2)],$$

$$R^2(f^1(y_1), f^1(y_2)) = R_2^2(y_3, y_4)\theta = R_2^2(y_3, y_4)[y_3 / f^1(y_1), y_4 / f^1(y_2)].$$

Выбрав возможную контрарную пару R^2 и $\neg R^2$, и унифицировав её, мы фактически сказали: «в любой интерпретации, при рассмотрении $R_2^2(y_3, y_4)$ нас будут интересовать только такие оценки предикатного символа $R_2^2(y_3, y_4)$, на которых $y_3 = f^1(y_1)$, а $y_4 = f^1(y_2)$». Тогда в любой интерпретации I мы будем рассматривать дизъюнкт:

$$^{v}D_2 = P_2^2(y_3, y_4) \vee R_2^2(y_3, y_4)$$

не на всех оценках его переменных, а лишь на тех, при которых $y_3 = f^1(y_1)$ и $y_4 = f^1(y_2)$. Поэтому, в дальнейшем резолютивном выводе, мы используем $P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))$, вместо $P_1^2(y_3, y_4)$. Области значения переменных, входящих в $\neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))$, при унификации не были изменены, значит, и области значения одноимённых переменных, входящих в тот же дизъюнкт, что и $\neg R_1^2$, остались без изменений. Применим правило резолюции к ${}^{v}D_1$ и ${}^{v}D_2$, и увидим, что правило резолюции отображает приведённое выше рассуждение:

$$\frac{(\neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)))\theta, (P_1^2(y_3, y_4) \vee R_2^2(y_3, y_4))\theta}{\underbrace{(P_1^2(y_3, y_4))\theta}_{{}^{v}D_4}}.$$

Получили резольвенту, которую будем использовать в дальнейшем:

$${}^{v}D_4 = P_1^2(y_3, y_4)[y_3 / f^1(y_1), y_4 / f^1(y_2)] = P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)).$$

Уже построенный резолютивный вывод: ${}^{v}D_1$, ${}^{v}D_2$, ${}^{v}D_3$, ${}^{v}D_4$. Среди дизъюнктов ${}^{v}D_1$, ${}^{v}D_2$, ${}^{v}D_3$, ${}^{v}D_4$ есть дизъюнкты, содержащие возможную контрарную пару:

$${}^{v}D_3 = \neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))) \text{ и } {}^{v}D_4 = P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)).$$

Возможная контрарная пара:

$$P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)) \text{ и } \neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))).$$

Попробуем унифицировать P_1^2 и P_2^2.

$$\Sigma = \begin{cases} f^1(y_1) = f^1(g^1(y_5)) \\ f^1(y_2) = f^1(h^1(y_6)) \end{cases} \xrightarrow{\text{правило2}} \Sigma = \begin{cases} y_1 = g^1(y_5) \\ y_2 = h^1(y_6) \end{cases}$$

$$\Sigma = \begin{cases} y_1 = g^1(y_5) \\ y_2 = h^1(y_6) \end{cases} \xrightarrow{\text{правила\_1–6\_неприменимы}}$$

$\mu = \{y_1 / g^1(y_5), y_2 / h^1(y_6)\}$.

Полученная контрарная пара:

$$\neg P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))) = \neg P_2^2[y_1 / g^1(y_5), y_2 / h^1(y_6)],$$

$$P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))) = P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))[y_1 / g^1(y_5), y_2 / h^1(y_6)].$$

Таким образом, было получено уточнение (сужение) тех значений y_1 и y_2, при которых конъюнкция дизъюнктов из системы S может быть невыполнима: $y_1 = g^1(y_5)$ и $y_2 = h^1(y_6)$. В результате, если конъюнкция дизъюнктов из системы S невыполнима, то невыполнимой она может быть только если:

$$\mathrm{E} = \begin{cases} y_3 = f^1(y_1) \\ y_4 = f^1(y_2) \\ y_1 = g^1(y_5) \\ y_2 = h^1(y_6) \end{cases} \leftrightarrow \mathrm{E} = \begin{cases} y_3 = f^1(g^1(y_5)) \\ y_4 = f^1(h^1(y_6)) \end{cases}.$$

Так как y_3, y_4, y_5, y_6 разноимённые переменные, принимающие значения из некоторого носителя $\Im$ интерпретации I, то очевидно, что в любой интерпретации I всегда найдутся такие значения y_3, y_4, y_5, y_6, что будет выполнено E.

Проверим, действительно ли система дизъюнктов S невыполнима:

$$\frac{(\sim \vee \neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))))\mu, (\sim \vee P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)))\mu}{\underbrace{(\square)\mu}_{{}^vD_5}}$$

Резольвента ${}^vD_5 = (\square)\mu = \square$. Резолютивный вывод ${}^vD_1, {}^vD_2, {}^vD_3, {}^vD_4, {}^vD_5 = \square$ оказался успешным, значит, на любой интерпретации I существует такая оценка переменных, входящих в S, что система дизъюнктов S невыполнима и, значит, исходная формула φ противоречива.

Теперь покажем, как будет выглядеть семантическое дерево соответствующее последнему примеру. Вспомним, что семантическое дерево называется закрытым, если любая его ветвь на конечном расстоянии от корня имеет опровергающий узел. Узел называет опровергающим, если он опровергает основной пример какого-либо дизъюнкта из S. Вспомним, что если система S противоречива, то существует конечное множество основных примеров дизъюнктов из S, и из этого множества резолютивно выводим пустой дизъюнкт. Вспомним лемму о подъеме из доказательства о полноте резолютивного вывода и применим её. Пустой дизъюнкт в последнем примере был получен из дизъюнктов ${}^{v}D_3$ и ${}^{v}D_4$:

$$ {}^{v}D_3 = \neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))), $$

$$ {}^{v}D_4 = P_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)). $$

После применения к $D_3^{'}$ и $D_4^{'}$ подстановки:

$$ \mu = \{y_1 / g^1(y_5), y_2 / h^1(y_6)\}, $$

$$ {}^{v}D_3\mu = \neg P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))), $$

$$ {}^{v}D_4\mu = P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))). $$

Применим лемму о подъёме:

$$ D_0^{osp} = D_0 = \square, $$

$$ {}^{v}D_3\mu = \neg P^2(\underbrace{f^1(g^1(y_5))}_{h_1}, \underbrace{f^1(h^1(y_6))}_{h_2}) \rightarrow {}^{v}D_3^{osp} = \neg P^2(h_1, h_2), $$

$$ {}^{v}D_4\mu = P^2(\underbrace{f^1(g^1(y_5))}_{h_1}, \underbrace{f^1(h^1(y_6))}_{h_2}) \rightarrow {}^{v}D_4^{osp} = P^2(h_1, h_2), $$

где $h_1, h_2 \in H$ соответствующие попарно различные объекты эрбрановского универсума. Пусть:

$$h_1 = f(g(c)),$$

$$h_2 = f(h(f(c))).$$

Начнём построение семантического дерева с вершин $P^2(h_1, h_2)$ и $\neg P^2(h_1, h_2)$. Левая ветвь такого дерева сразу содержит в себе вершину $P^2(f(g(c)), f(h(f(c))))$, опровергающую основной пример дизъюнкта:

$$D_3 = \neg P_2^2(f^1(g^1(x)), f^1(h^1(z))),$$

$$D_3^{osp} = \neg P_2^2(f(g(c)), f(h(f(c)))).$$

Левая ветвь является тупиковой (рис 4.14.).

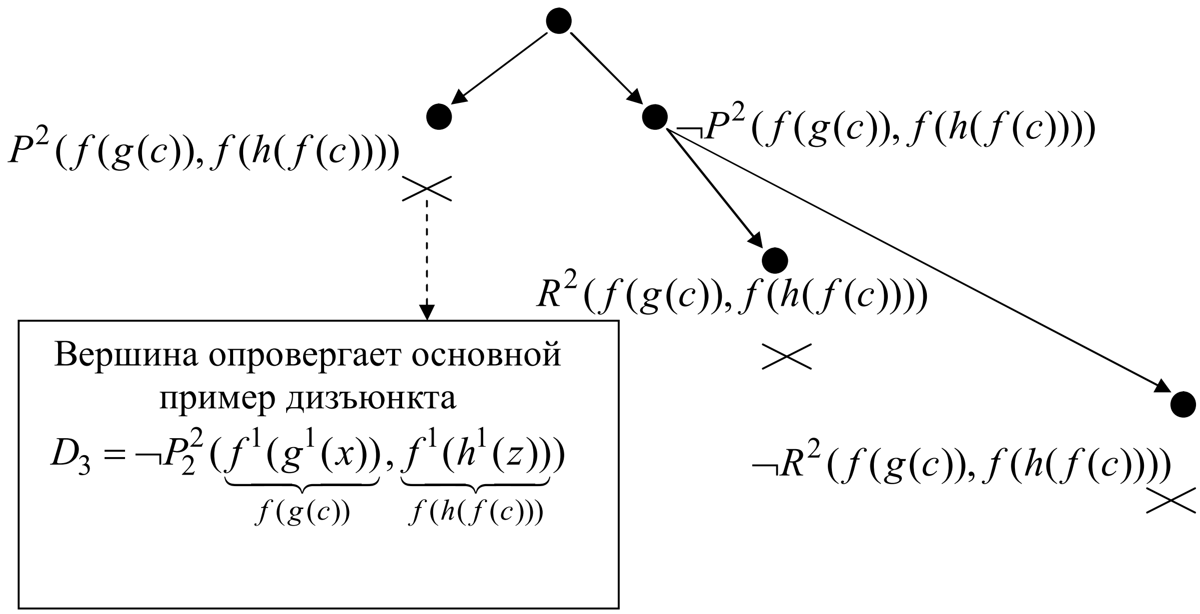


Рис. 4.14. Построение закрытого семантического дерева

Рассмотрим контрарную пару P^2 и $\neg P^2$. В данной паре литера P^2 была получена в результате резолютивного вывода из дизъюнктов:

$$^{v}D_1 = \neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)),$$

$$^{v}D_2 = P_2^2(y_3, y_4) \vee R_2^2(y_3, y_4),$$

и подстановки $\theta = \{y_3 / f^1(y_1), y_4 / f^1(y_2)\}$, унифицирующей литеры $R_2^2(y_3, y_4)$ и $R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))$. Используем лемму о подъёме. Будем помнить уже полученное ограничение:

$$y_1 = g^1(y_5),\ y_2 = h^1(y_6).$$

Резольвента:

$$^{v}D_4\mu = P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))) \to {}^{v}D_4^{osp} = P^2(h_1, h_2).$$

Дизъюнкты:

$$^{v}D_1\theta = \neg R^2(f^1(y_1), f^1(y_2)) = \neg R^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))).$$

$$^{v}D_1\theta = \neg R^2(\underbrace{f^1(g^1(y_5))}_{h_1}, \underbrace{f^1(h^1(y_6))}_{h_2}) \to {}^{v}D_1^{osp} = \neg R^2(h_1, h_2).$$

$$^{v}D_2\theta = P^2(f^1(y_1), f^1(y_2)) \vee R^2(f^1(y_1), f^1(y_2)).$$

$$^{v}D_2\theta = P^2(\underbrace{f^1(g^1(y_5))}_{h_1}, \underbrace{f^1(h^1(y_6))}_{h_2}) \vee R^2(\underbrace{f^1(g^1(y_5))}_{h_1}, \underbrace{f^1(h^1(y_6))}_{h_2}).$$

$$\to {}^{v}D_2^{osp} = P^2(h_1, h_2) \vee R^2(h_1, h_2).$$

Так как была использована подстановка, заменяющая терм $f^1(g^1(y_5)$ на h_1, а терм $f^1(h^1(y_6))$ на h_2, то при построении основного примера для R^2 мы обязаны сохранить данную подстановку. Следующими вершинами в семантическом дереве становятся основные атомы:

$$\neg R^2(h_1, h_2) = \neg R^2(f(g(c)), f(h(f(c)))),$$

$$R^2(h_1, h_2) = R^2(f(g(c)), f(h(f(c)))).$$

Каждая из полученных вершины опровергает один из основных примеров некоторого дизъюнкта из S. Вершина, завершающая ветвь:

$$\neg P^2(f(g(c)), f(h(f(c)))) \vee \neg R^2(f(g(c)), f(h(f(c)))),$$

опровергает основной пример дизъюнкта $D_2 = P_2^2(x,z) \vee R_2^2(x,z)$. Вершина, завершающая ветвь:

$$\neg P^2(f(g(c)), f(h(f(c)))) \vee R^2(f(g(c)), f(h(f(c))))$$

опровергает основной пример дизъюнкта $D_1 = \neg R_1^2(f^1(x), f^1(y))$.

Мы ещё раз увидели взаимосвязь вывода по семантическому дереву и резолютивного вывода. Резолютивный вывод показывает, какие именно основные атомы нужно использовать при построении семантического дерева.

В самом деле, унификаторы θ и μ унифицируют предикатные символы R_1^2, R_2^2, P_1^2 и P_2^2, приводя их к виду R^2 и P^2. Таким образом, вся система дизъюнктов S оказывается построенной из идентичных предикатных символов. Такая система дизъюнктов S может быть противоречивой тогда и только тогда, когда противоречива система дизъюнктов, в которую вместо предикатных символов R_1^2, R_2^2, P_1^2 и входят предикатные символы R^2 и P^2:

$$P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))),$$

$$R^2(f^1(y_1), f^1(y_2)),$$

причём как было показано $y_1 = g^1(y_5)$, $y_2 = g^1(y_6)$. Тогда получаем:

$$P^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))),$$

$$R^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))).$$

В качестве основных примеров дизъюнктов R^2 и P^2 выберем:

$$P^2(f(g(c)), f(h(f(c)))) \text{ и } R^2(f(g(c)), f(h(f(c)))).$$

С помощью таких основных атомов можно построить два семантических дерева, оба дерева будут закрытыми (рис. 4.15, рис. 4.16). Оба варианта построения семантического дерева дают эквивалентные результат: семантическое дерево закрыто.

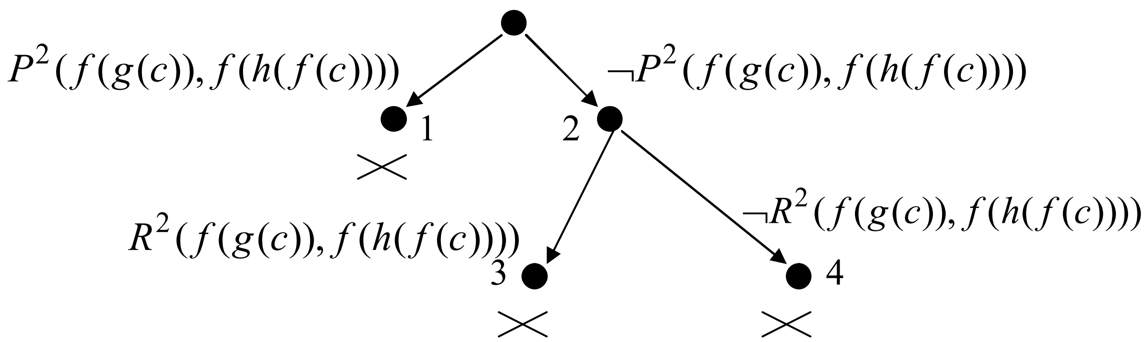


Рис. 4.15

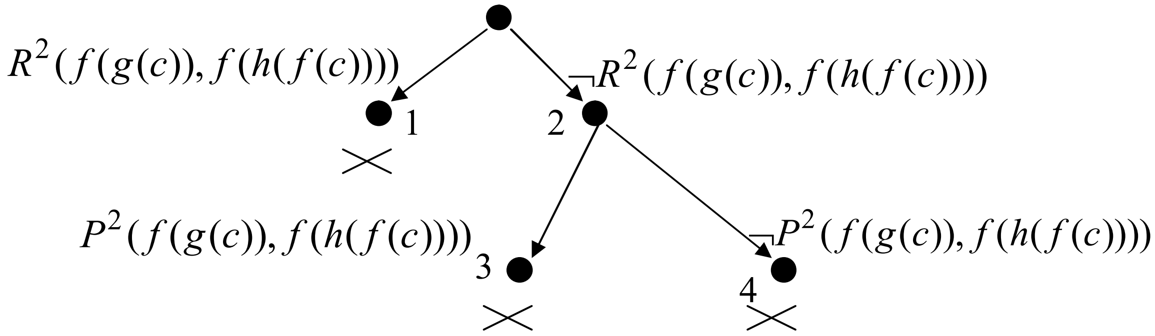


Рис. 4.16

Два различных построенных семантического дерева соответствуют двум возможностям резолютивного вывода. В самом деле, было два варианта выбора контрарных пар для:

$$^{v}D_1 = \neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2)),$$

$$^{v}D_2 = P_1^2(y_3, y_4) \vee R_2^2(y_3, y_4),$$

$$^{v}D_3 = \neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6))).$$

Вариант 1: $\neg R_1^2(f^1(y_1), f^1(y_2))$ и $R_2^2(y_3, y_4)$.

Вариант 2: $\neg P_2^2(f^1(g^1(y_5)), f^1(h^1(y_6)))$ и $P_1^2(y_3, y_4)$.

В зависимости от выбора строятся два различных успешных резолютивных вывода. Длина различных резолютивных выводов, для одной и той же системы дизъюнктов S, может не совпадать. Например, могут быть посчитаны резольвенты, которые в дальнейшем окажутся невостребованными. Возникает вопрос, как лучше осуществить выбор контрарной пары?

4.11. СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Метод резолюций имеет одно слабое место, он не указывает, какие именно дизъюнкты должны быть выбраны для получения резольвенты. Вариантов может оказаться огромное количество. Существуют различные стратегии построения резолютивного вывода, позволяющие избежать полного перебора всевозможных вариантов. Рассмотрим некоторые из этих стратегий. Не будем оговаривать в дальнейшем, что «сейчас производится операция склеивания дизъюнкта». Будем выполнять её всегда, когда она становится возможной.

Метод насыщения уровня. Рассмотрим систему дизъюнктов $S_1 = \{D_i : D_i \in S, 0 < i \leq m\}$. Идея стратегии заключается в следующей последовательности действий:

- вычислить резольвенты всех возможных контрарных пар дизъюнктов из S, обозначим множество полученных резольвент как S_1;
- объединить множества S и S_1, обозначим полученное множество $S \cup S_1$ как ^1S:
- вычислить резольвенты всех возможных контрарных пар множества ^1S, в результате получим множество S_2;
- объединить множества ^1S и S_2: $^2S = {}^1S \cup S_2$;
- вычислить резольвенты всех возможных контрарных пар множества ^2S;
- и так далее.

Вычисление резольвент всевозможных контрарных пар S удобнее всего осуществить следующим образом. Введём на множестве дизъюнктов некоторый порядок и зафиксируем его. Будем последовательно брать самый левый, не просмотренный дизъюнкт, D_i и сравнивать его с каждым дизъюнктом, расположенным правее D_k. В результате сравнения выдаётся ответ: образуют ли дизъюнкты D_i и D_k контрарную пару или нет. Если дизъюнкты D_i и D_k образуют контрарную пару, то считается резольвента данных двух дизъюнктов, которая заносится в множество S_1. Дизъюнкт D_i помечается как просмотренный. Когда все дизъюнкты из S просмотрены, в конец упорядоченной последовательности дизъюнктов из S дописываются все резольвенты из множества S_1. Получается упорядоченная последовательность ${}^1S$. После этого начинается просмотр последовательности ${}^1S$ с самого первого дизъюнкта. Просматриваемый дизъюнкт последовательно сравнивается с каждым дизъюнктом, стоящим правее. Одновременно строится множество S_2 всех резольвент полученных в результате последовательного просмотра дизъюнктов из ${}^1S$. Все резольвенты множества S_2 дописываются в конец последовательности ${}^1S$. В результате получается последовательность ${}^2S$, и так далее.

Пример 4.11.1. Рассмотрим систему дизъюнктов:

$$S = \begin{cases} D_1 = \neg P \vee \neg R \vee Q \\ D_2 = \neg Q \vee \neg R \\ D_3 = R \\ D_4 = P \vee \neg R \end{cases}.$$

Выпишем последовательно все дизъюнкты из S: D_1, D_2, D_3, D_4. Осуществим просмотр полученной последовательности:

$${}_0S:$$

$$D_1,\ D_2:\ D_{1,2} = \neg P \vee \neg R;$$

$$D_1,\ D_3:\ D_{1,3} = \neg P \vee Q;$$

$$D_1,\ D_4:\ D_{1,4} = \neg R \vee Q;$$

$$D_2,\ D_3:\ D_{2,3} = Q;$$

$$D_3,\ D_4:\ D_{3,4} = P;$$

$S_1 = \{D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4}, D_{2,3}, D_{3,4}\}$, ${}^1S = S \cup S_1$: D_1, D_2, D_3, D_4, $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, $D_{1,4}$, $D_{2,3}$, $D_{3,4}$.

Осуществим последовательный просмотр ${}^1S$ (будем считать, что ${}_0S$ уже выписано):

$$D_1,\ D_{3,4}\colon D_{1,(3,4)} = \neg R \vee Q;$$

$$D_2,\ D_{1,3}\colon D_{2,(1,3)} = \neg P \vee \neg R;$$

$$D_2,\ D_{1,4}\colon D_{2,(1,4)} = \neg R;$$

$$D_2,\ D_{2,3}\colon D_{2,(2,3)} = \neg R;$$

$$D_3,\ D_{1,2}\colon D_{3,(1,2)} = \neg P;$$

$$D_3,\ D_{1,4}\colon D_{3,(1,4)} = Q;$$

$$D_4,\ D_{1,2}\colon D_{4,(1,2)} = \neg R;$$

$$D_4,\ D_{1,3}\colon D_{4,(1,3)} = \neg R \vee Q;$$

$$D_{1,2},\ D_{3,4}\colon D_{(1,2),(3,4)} = \neg R;$$

$$D_{1,3},\ D_{3,4}\colon D_{(1,3),(3,4)} = Q;$$

$S_2 = \{D_{1,(3,4)}, D_{2,(1,3)}, D_{2,(1,4)}, D_{2,(2,3)}, D_{3,(1,2)}, D_{3,(1,4)}, D_{4,(1,2)}, D_{4,(1,3)}, D_{(1,2),(3,4)}, D_{(1,3),(3,4)}\}$, ${}^2S = {}^1S \cup S_2$: D_1, D_2, D_3, D_4, $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, $D_{1,4}$, $D_{2,3}$, $D_{3,4}$, $D_{1,(3,4)}$, $D_{2,(1,3)}$, $D_{2,(1,4)}$, $D_{2,(2,3)}$, $D_{3,(1,2)}$, $D_{3,(1,4)}$, $D_{4,(1,2)}$, $D_{4,(1,3)}$, $D_{(1,2),(3,4)}$, $D_{(1,3),(3,4)}$. И так далее. На следующем этапе будет получен пустой дизъюнкт из дизъюнктов: $D_3 = R$ и $D_{2,(1,4)} = \neg R$.

Из примера видно, что порождается большое число одинаковых резольвент. В самом деле, только небольшая часть всех порожденных резольвент будет действительно нужна для вывода пустого дизъюнкта. Остальные резольвенты останутся не использованными. Резольвенты могут представлять собой и общезначимые формулы (например: $R \vee \neg R$). Общезначимые формулы всегда истины, и, значит, потенциально не могут быть источником неустранимого противоречия. Как правило, порождаемые общезначимые формулы рекомендуется вычёркивать.

От лишних и ненужных резольвент лучше избавляться, чтобы не порождать излишне большое множество ненужных вычислений. Следующая стратегия предлагает один из методов решения данной задачи.

Стратегия вычёркивания. Стратегия вычёркивания базируется на стратегии насыщения уровня и требует ввода понятий наддизъюнкта.

Определение 4.11.1. Поддизъюнктом ${}^{p}D$ дизъюнкта D, называется дизъюнкт ${}^{p}D$, являющейся частью дизъюнкта D.

Определение 4.11.2. Наддизъюнктом ${}^{n}D$ дизъюнкта D называется дизъюнкт ${}^{n}D$, частью которого является дизъюнкт D.

Стратегия вычёркивания реализуется с помощью следующей последовательности шагов:

- упорядочим произвольным образом дизъюнкты из S и выпишем упорядоченную последовательность дизъюнктов;
- будем поочерёдно слева на право просматривать дизъюнкты из последовательности; каждый взятый дизъюнкт D_i будем сравнивать поочерёдно с каждым дизъюнктом D_k, стоящим правее;
- если дизъюнкты D_i и D_k образуют контрарную пару, то вычисляется резольвента;
- для вычисленной резольвенты проверяется: является ли она тавтологией или наддизъюнктом какого-либо дизъюнкта из уже построенной последовательности; если резольвента не является ни тем, ни тем, то она сразу же дописывается в конец упорядоченной последовательности S', в противном случае резольвента в последовательность не добавляется.

Семантическая резолюция. Будем придерживаться следующего правила: выберем H-интерпретацию I' и разделим все дизъюнкты на те, которые выполнимы в I' и невыполнимы в I':

$$S_1 = \{D_i : D_i \in S, I' \mid\neq D_i\},$$

$$S_2 = \{D_j : D_j \in S, I' \models D_j\}.$$

Будем выбирать контрарную пару так, что бы дизъюнкты, участвующие в построении резольвенты принадлежали различным множествам S_1 и S_2: $D_1 = \overline{D_1} \vee L_1$, $D_1 \in S_1$, $D_2 = \overline{D_2} \vee \neg L_2$, $D_2 \in S_2$, $\theta = НОУ(L_1, L_2)$:

$$\frac{\overline{D_1} \vee L_1, \overline{D_2} \vee \neg L_2}{\underbrace{(\overline{D_1} \vee \overline{D_2})\theta}_{D_0}}.$$

Определение 4.11.3. Правило резолюции, описанное выше, называется правилом l-резолюции.

Пример 4.11.2. Пусть $I \mid\neq P$, $I \mid\neq R$, $I \mid\neq Q$. Дана система дизъюнктов:

$$S = \begin{cases} D_1 = \neg P \vee \neg R \vee Q \\ D_2 = \neg Q \vee \neg R \\ D_3 = R \\ D_4 = P \vee \neg R \end{cases}.$$

Тогда:

$$S_1 \colon D_3 = R$$

$$S_2 \colon D_1 = \neg P \vee \neg R \vee Q,\ D_2 = \neg Q \vee \neg R,\ D_4 = P \vee \neg R.$$

Тогда в результате l-резолюции получим:

$$S_1' \colon D_4 + D_3 = P,$$

$$S_2' \colon D_2 + D_3 = \neg Q,\ D_1 + D_3 = \neg P \vee Q.$$

Продолжая вывод:

$$S_1'': (D_4 + D_3) + (D_1 + D_3) = Q$$

Результат:

$$(D_2 + D_3) + (D_4 + D_3) + (D_1 + D_3) = \square.$$

Вывели l-резолютивно пустой дизъюнкт.

Использование правила l-резолюции не влияет на выводимость пустого дизъюнкта: если пустой дизъюнкт выводим из системы S, то он будет выведен и в том случае, если используется l-резолюция.

Входной резолютивный вывод и хорновские дизъюнкты. Резолютивный вывод из системы дизъюнктов S можно построить, используя следующее правило. Пусть выбран и зафиксирован дизъюнкт D_0. В качестве контрарной пары возьмем другой дизъюнкт из системы дизъюнктов S. Для построения D_{i+1} резольвенты будем выбирать резольвенту, полученную на последнем шаге: D_i и некоторый дизъюнкт из системы S.

Определение 4.11.4. Описанный выше способ построения резолютивного вывода называется входным резолютивным выводом.

Пример 4.11.3. Дана система дизъюнктов:

$$S = \begin{cases} D_1 = \neg P \vee \neg R \vee Q \\ D_2 = \neg Q \vee \neg R \\ D_3 = R \\ D_4 = P \vee \neg R \end{cases}.$$

Выберем в качестве D_0 дизъюнкт $D_3 = R$. Тогда:

$$D_3 + D_2 = \neg Q,$$

$$(D_3 + D_2) + D_1 = \neg P \vee \neg R,$$

$$((D_3 + D_2) + D_1) + D_4 = \neg R,$$

$$(((D_3 + D_2) + D_1) + D_4) + D_3 = \square.$$

Но нужно помнить, что входной резолютивный вывод не всегда можно построить, даже если исходная система дизъюнктов S противоречива. Так для рассматриваемого далее примера, входной резолютивный вывод построить нельзя. Однако можно применить любую из выше рассмотренных стратегий и вывести пустой дизъюнкт.

Пример 4.11.4. Рассмотрим выражение: «если Лена не задержится сегодня на работе, то мы пойдём вечером к ней в гости, если Лене придётся задержаться, то вечером мы пойдём в гости ко мне». Данное выражение можно записать в виде формул:

$$\psi : \neg P^0 \to R^1(\text{Лена}),\ \phi : P^0 \to R^1(\text{Я}),$$

где P^0 читается: «Лена задержалась на работе», а $R^1(x)$: «пойдём вечером в гости к x». Зададим такой вопрос: «пойдём ли мы вечером в гости?». Нам необходимо проверить утверждение, что $\psi,\phi \models \exists x R(x)$, или иначе: $\models \psi \wedge \phi \to \exists x R(x)$. Для этого нужно показать противоречивость формулы $\varphi = \neg(\psi \wedge \phi \to \exists x R(x))$. Построив систему дизъюнктов S для этой формулы несложно из S резолютивно вывести пустой дизъюнкт (сделайте самостоятельно).Значит, ответ положителен: мы вечером пойдём к кому-то в гости.

Построенный резолютивный вывод, однако, не даст ответа: «к кому именно в гости мы пойдём?». Построение такого вывода считается не конструктивным: никакого конкретного ответа в виде значения x вывод не даёт. Такая ситуация имеет место, так как для построения двух разных резольвент P и $\neg P$, а они строятся параллельно (выполните построение самостоятельное и убедитесь), вместо переменной x при унификации в R^1 параллельно были подставлены значения «Лена», «Я». Поэтому, в результате построения был получен ответ, что вечером мы пойдём к x, но про сам x мы знаем только то, что $x = \{\text{Лена}, \text{Я}\}$. Очевидно, что если бы мы строили входной резолютивный вывод, то полученное значение x было бы однозначно определено. Связано это с тем, что при построении входного резолютивного вывода, никакие две резольвенты не строятся параллельно, а строго друг за другом, и как следствие всегда строго и однозначно определено, что именно подставляется и вместо чего.

Пример 4.11.5. Изобразим схематично два резолютивных вывода (рис 4.17). В одном выводе резольвенты считаются одновременно или, иначе, параллельно (первое дерево) в другом выводе резольвенты считаются друг за другом (второе дерево).

Утверждение 4.11.1. Входной резолютивный вывод является конструктивным.

Что бы использовать резолютивный вывод как средство вычисления (например, нужно вычислить, куда именно мы пойдём этим вечером) нам нужно выделить такой класс дизъюнктов, для которого можно построить резолютивный вывод, не требующий параллельного вычисления резольвент (как в случае вывода, изображённого на рис. 4.17.). К классу таких дизъюнктов относятся хорновские дизъюнкты.

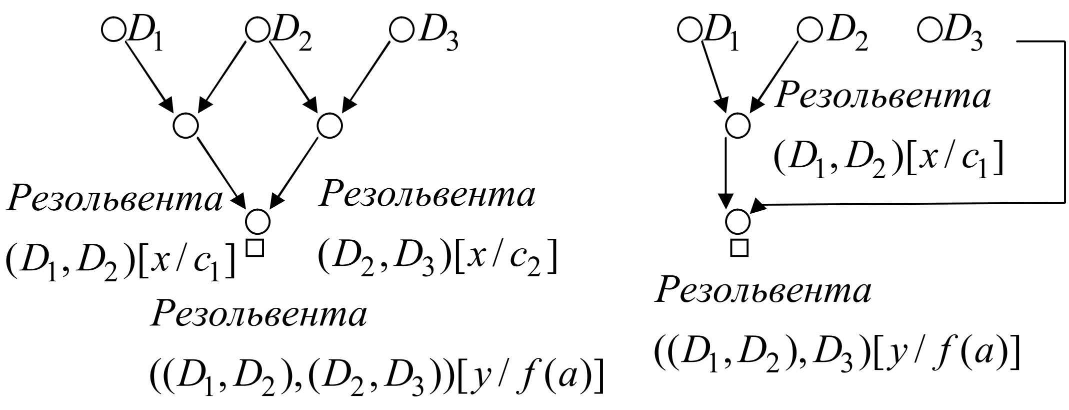


Рис. 4.17. Параллельный и линейный резолютивные выводы

Определение 4.11.5. Дизъюнкт $D = L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n$ называется хорновским дизъюнктом, если среди литер $L_1, L_2, ..., L_n$ находится не более одной положительной литеры.

Напомним, что литера положительна, если представляет собой атомарную формулу, и отрицательна, если представляет собой отрицание атомарной формулы.

Определение 4.11.6. Хорновский дизъюнкт называется точным, если он содержит одну позитивную литеру.

Определение 4.11.7. Хорновский дизъюнкт называется негативным, если он не содержит позитивных литер.

С помощью хорновских дизъюнктов можно описывать различные предметные области, поскольку они представляю собой удачную форму представления знаний. Рассмотри, например, такой дизъюнкт: $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \vee B$. Преобразуем его следующим образом:

$$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee B,$$

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \to B,$$

$$A_1, A_2, A_3 \models B.$$

Такая форма записи, соответствует выражению «если…, то…». Если в дизъюнкте содержится позитивная литера и негативные литеры, то позитивная литера играет роль заключения, следствия, негативные литеры представляют собой гипотез. Унитарный позитивный дизъюнкт есть некоторое утверждение независящее от гипотез.

Рассмотрим резолютивный вывод для хорновских дизъюнктов. Пусть в системе хорновских дизъюнктов S, не содержащей в себе тавтологий, есть унитарный позитивный дизъюнкт (дизъюнкт, состоящий из одной позитивной литеры).

Возьмём унитарный позитивный дизъюнкт $D_u = L_u$ и выберем из системы дизъюнктов S дизъюнкт D, содержащий в себе негативную литеру: $\neg L_u$ (очевидно, что если дизъюнкт, содержащий такую литеру, обнаружить в системе S не удастся, то система S не будет являться противоречивой; покажите это самостоятельно). Вычислим резольвенту D_u и D. Вычисленную резольвенту подставим вместо дизъюнкта D. Повторим всё сначала. Продолжаем построение до тех пор, пока либо не будет выведен пустой дизъюнкт, либо в системе не найдётся требуемого дизъюнкта D. Вся процедура рано или поздно завершится, так как на каждом шаге в системе хорновских дизъюнктов S становится на одну негативную литеру меньше. Резолютивный вывод для хорновских дизъюнктов ничего нам не говорит о том, по какому принципу нужно выбирать позитивный унитарный дизъюнкт для вычисления резольвенты, таких дизъюнктов несколько. Так же метод не указывает, по какому принципу подбирать контрарную пару к позитивному унитарному дизъюнкту, если есть несколько вариантов выбора.

Вывести пустой дизъюнкт из противоречивой системы хорновских дизъюнктов можно различными способами. Вспомним, что системы хорновских дизъюнктов могут использоваться для проведения вычислений. Решений может быть получено несколько и каждое решение будет получено с помощью некоторой последовательности выбора контрарных пар. Предположим, нас интересует: выводимо ли некоторое утверждение как следствие из множества хорновских дизъюнктов. Построив успешный резолютивный вывод, мы вместе с тем определяем те значения переменных, при которых запрос, перефразированный в утверждение, становится следствием из множества фактов, представленных в виде хорновских дизъюнктов. Например: «у Андрея Петровича есть сын (x)?», «да есть, x = Валентин Андреевич». Ответов может быть несколько, например, у Андрея Петровича может быть два сына и пусть это отражено во множестве фактов. В случае одной последовательности успешного резолютивного вывода мы получим, что вместо x должно быть подставлено значение Валентин Андреевич, а в случае построения резолютивного вывода с другой последовательностью выбора контрарных пар, x = Марк Андреевич. Поэтому что бы получить все возможные ответы на запрос может потребоваться построить все различные успешные резолютивные выводы из полученной в ходе решения системы дизъюнктов.

Построение резолютивного вывода в системе хорновских дизъюнктов позволяет не только отвечать на вопрос общезначимости формулы, но и благодаря построению входного резолютивного вывода указывать значения, при которых формула выполнима в любой интерпретации. Так становится возможным представлять вычислительные задачи в виде логических программ. Можно найти достаточно много материала, посвящённого вопросам логического программирования, а так же стратегиям резолютивного вывода, реализованным в системах логического программирования. Читателю предлагается самостоятельно ознакомиться с данными материалами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Верещагин Н. К. Языки и исчисления: учеб. пособие / Н. К. Верещагин, А. Шень. — М.: Изд-во МЦНМО, 2008. — 288 с.

2. Галлиев Ш. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие / Ш. И. Галлиев. — Казань: Изд-во КГТУ им. А. М. Туполева 2002. — 207 с.

3. Замятин А. П. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие / А. П. Замятин. — Екатеринбург: Изд-во УрГУ, , 2008. — 273 с.

4. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие / В. И. Игошин. — М.: Изд-во Академия, 2008. — 449 с.

5. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: сбор. задач / В. И. Игошин. — М.: Изд-во Академия, 2007. — 302 с.

6. Клини С. К. Математическая логика: учеб. пособие / С. К. Клини. — М.: Мир, 1973. — 480 с.

7. Лихтарников Л. М . Математическая логика: учебник / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачёва. — СПб.: Изд-во Лань, 1999. — 288 с.

8. Новиков П. С. Элементы математической логики: учеб. пособие / П. С. Новиков. — М.: Изд-во Наука, 1973. — 400 с.

9. Судоплатов С. В. Математическая логика и теория алгоритмов: учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчиникова. — М.: Изд-во ИНФПА-М: Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. — 223 с.

10. Успенский В. А. Вводный курс математической логики: учеб. пособие / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско. — М.: Изд-во МЦНМО, 2007. — 125 с.

11. Мендельсон Э. Введение в математическую логику: учебник / Э. Мендельсон. — М.: Изд-во Наука, 1971. — 320 с.

12. Математическая логика: метод. указания/сост. Т. В. Асеева. — Тверь: Изд-во Тверского государственного технического ун– та , 2003.— 46 с.

Электронные источники

1. Электронные слайды по курсам математическая логика и логическое программирование, математическая логика и теория алгоритмов, ссылки на курсы расположены на странице автора Захарова В. А.: http://mathcyb.cs.msu.su/staff/zakharov.html

2. Битюцкий В. П. Математическая логика. Исчисления высказыва-

ний и предикатов: электронное учебное текстовое издание / В. П. Битюцкий, Н. В. Папуловская. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ−УПИ, 2005, 44 с.

Попова Светлана Владимировна, Ходырев Иван Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Лицензия ЛР №   от   .   .

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать   .   .2010. Формат 60×84/16 Печать цифровая
Усл. печ. л.   ,   . Уч.-изд. л. 8,75. Тираж   . Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором
в цифровом типографском центре Издательства Политехнического
университета:
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел. (812) 540-40-14
Тел./факс: (812) 927-57-76