

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Национальный исследовательский университет

*А. С. АДАЛЁВ, Н. В. КОРОВКИН,
О. В. ФРОЛОВ, В. С. ЧУДНЫЙ*

СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Учебное пособие

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки магистров
«Техническая физика»*

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета

2011

УДК 621.3.011
ББК 31.21 я 73
А 338

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
Заместитель заведующего отделом проектирования и развития энергосистем
Научно-исследовательского института по передаче электроэнергии
постоянным током высокого напряжения *С. В. Смолвик*
Доктор технических наук, профессор
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета *С. И. Кривошеев*

Свойства и методы решения обратных задач электротехники и электроэнергетики: учеб. пособие / А. С. Адалев [и др.] – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 218 с.

ISBN

В пособии рассмотрены основные постановки обратных задач электротехники и электроэнергетики, их особенности и проблемы, возникающие при их решении. Представлены современные методы, позволяющие получить адекватное решение обратной задачи даже в условиях, когда цепь описывается жесткой системой дифференциальных уравнений (при описании во временной области) или системой алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей (в установившемся режиме).

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки магистров «Техническая физика». Оно может быть также использовано при обучении магистров, проходящих подготовку по программам: «Адаптивные электродинамические системы», «Электромагнитная совместимость и энергосбережение» и «Математические методы анализа задач электромагнитной совместимости в энергетике и электротехнике». Оно может быть также полезно при обучении в системах повышения квалификации, в учреждениях дополнительного профессионального образования и пр.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN

© А. С. Адалёв, Н. В. Коровкин,
О. В. Фролов, В. С. Чудный, 2011
© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	10
1. Общие постановки обратных задач теории электрических цепей	17
1.1. Различные формулировки задач синтеза цепей	17
1.2. Задача построения макромоделей устройств (макромоделирование)	27
1.3. Задачи идентификации параметров электрических цепей	32
2. Методы решения жестких обратных задач	37
2.1. Жесткие обратные задачи	37
2.2. Принципы квазистационарности производных и интегралов	54
2.3. Использование линейных связей для решения жестких обратных задач	72
2.4. Проблема точности решения задач диагностики и идентификации цепей с плохо обусловленными математическими моделями	80
2.4.1. Методы идентификации линейных цепей	83
2.4.2. Погрешность решения задачи идентификации... ..	86
2.5. Метод повышения точности в задачах диагностики и идентификации цепей	94
2.5.1. Применение принципа повторных измерений для решения задачи идентификации электрических цепей	94
2.5.2. Определение линейных связей между параметрами математической модели цепи	96
2.5.3. Алгоритм и результаты решения задачи идентификации электрических цепей с использованием повторных измерений	100
3. Практические обратные задачи и их решение	112
3.1. Синтез схемы замещения длинной линии	112
3.2. Оптимизация формирующих линий	126
3.3. Синтез схем замещения устройств по частотным характеристикам	145
3.4. Оптимизация многожильного трехфазного кабеля	158
3.5. Локализация источника помех в электрической цепи ...	174

3.6. Размещение активно-адаптивных устройств в электроэнергетической системе	186
3.6.1. Определение аналитических зависимостей для активных мощностей, передаваемых между узлами электроэнергетической системы, при регулировании с помощью активно-адаптивных устройств	187
3.6.2. Постановки и решение задач оптимизации режимов электроэнергетических систем.....	200
3.6.3. Оценка погрешности методики при ее использовании для получения аналитических выражений в нелинейных задачах	204
3.6.4. Оптимизация активно-адаптивных устройств электроэнергетических систем применительно к мегаполису Санкт-Петербург, Ленинградская область	207
Заключение	214
Библиографический список	216

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание учебного пособия отражает опыт работы авторов с магистрантами, аспирантами и чтения лекций студентам Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. От известных авторов пособий по учебной дисциплине оно отличается следующими особенностями. Во-первых, в нем систематически изложены вопросы решения жестких задач. Во-вторых, описаны актуальные практические обратные задачи и представлены современные методы их решения.

Учебное пособие отражает коллективный опыт авторов и традиций преподавания школы теоретической электротехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, заложенной академиками А. Ф. Миткевичем, Л. Р. Нейманом и развитой академиком РАН К. С. Демирчяном. Одним из методологических принципов этой школы является первостепенное рассмотрение существа изучаемых явлений и использование формализованного математического описания в качестве дополнения. Развитие этих традиций в современных условиях потребовало создания отдельного учебного пособия по изучению обратных задач электротехники и электроэнергетики.

Современное изложение идей и методов исследования обратных задач электротехники и электроэнергетики предполагает достаточно высокий уровень подготовки студентов по смежным дисциплинам. Изложение материала ведется с учетом того, что использующие учебное пособие студенты обладают достаточным запасом знаний по высшей математике – в области линейной алгебры и теории матриц, теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, преобразований Фурье и Лапласа, по физике – электричеству и магнетизму, по численному анализу – методам решения алгебраических и дифференциальных уравнений, аппроксимации функций, методам оптимизации. Поэтому вопросы, относящиеся к этим дисциплинам,

приводятся в весьма сжатой форме. В целях повышения базового уровня, именно в методах решения обратных задач, коллективом авторов подготовлен курс «Современные подходы к решению обратных задач в электротехнике и электроэнергетике» и соответствующее учебное пособие «Введение в методы решения обратных задач электротехники», изучение которых рекомендуется до изучения настоящего пособия. В целом, объем знаний, необходимый для усвоения данного пособия соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теоретическая электротехника» (Системные методы электротехники), дополнения, связанные с решением практических задач, не нарушают общей логики курса, а лишь дополняют его, что позволяет лучше понять свойства, проблемы обратных задач теории электрических цепей и пути их решения.

Электротехника и электроэнергетика изучают электромагнитные явления в технических системах, предназначенных для производства, передачи и распределения электрической энергии, распространения, преобразования и обработки информации, системах связи, автоматического управления, средствах информационной и вычислительной техники, в электромеханических и электротехнологических устройствах. В основе методологии электротехники и электроэнергетики лежит системный подход, в соответствии с которым взаимодействующие электромагнитные устройства представляются как совокупность элементов, блоков, модулей, в каждом из которых происходят физические процессы преобразования электромагнитной энергии и ее характеристик.

Развитие теории электрических цепей и, соответственно, обратных задач синтеза, макро моделирования и идентификации параметров самым тесным образом связано с развитием электротехники, радиотехники, электроники и схемотехники. В свою очередь, прогресс в этих областях в значительной мере определяется созданием сложных систем и комплексов, изучением закономерностей взаимодействия их частей и разработкой обобщенных методов их описания, анализа и

синтеза, являющихся предметом изучения курса «Свойства и методы решения обратных задач электротехники и электроэнергетики».

Таким образом, основными задачами курса «Свойства и методы решения обратных задач электротехники и электроэнергетики» являются:

- освоение постановки типичных для электротехники и электроэнергетики обратных задач синтеза и идентификации параметров, а также упрощений, применяемых при решении обратных задач отдельных классов;

- знакомство с наиболее распространенными методами их решения;

- определение круга актуальных задач, эффективно решаемых рассмотренными методами.

К настоящему времени учебная дисциплина «Свойства и методы решения обратных задач электротехники и электроэнергетики» сформировалась в техническую дисциплину, дающую основные понятия и аналитический аппарат, необходимый для количественного описания задач синтеза, макромоделирования и идентификации в перечисленных классах устройств. Методы решения обратных задач электротехники и электроэнергетики используются при проектировании, исследовании, эксплуатации не только электротехнических устройств и приборов, средств информационной и вычислительной техники, но и других систем, процессы в которых имеют отличную физическую природу.

Как следует из сказанного, учебная дисциплина «Свойства и методы решения обратных задач электротехники и электроэнергетики» базируется на основных физических понятиях об электрических и магнитных явлениях. В основе её лежат также знания, полученные обучаемыми в различных областях математики – линейной алгебре, теории дифференциальных уравнений, интегральных преобразований Фурье и Лапласа, численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений, методах оптимизации.

Прикладная направленность учебной дисциплины требует наряду с изучением теории и рассмотрением примеров, приводимых в учебном пособии, рассмотрения задач, предлагаемых в виде самостоятельных расчетных или курсовых работ. В противном случае нельзя рассчитывать на активное овладение навыками, прививаемыми при освоении курса. Материал таких заданий в книгу не включен; он рассматривается на практических и (или) лабораторных занятиях, сопровождающий данный курс. Для освоения теории не менее важно проведение лабораторного практикума, целью которого является не только получение основных навыков экспериментальной работы, но и наглядное ознакомление с условиями применимости используемых в теории абстракций, ограничениями методов этой теории. Для успешного освоения курса весь период изучения теоретического материала должен сопровождаться практическими занятиями и лабораторным практикумом.

Необходимо отметить, что объем лекционного материала существенно зависит от «технологии» чтения лекций. Практика показывает, что объем информации, получаемый слушателями при традиционном изложении курса, при котором студенты фиксируют в тетрадях максимум из того, что им сообщается и изображается на доске лектором, невелик. Объем заметно можно увеличить без ущерба для восприятия материала в том случае, если студент будет освобожден от рутинной работы по механической фиксации в своем конспекте изучаемого материала в полном объеме. Этого можно достичь при использовании на лекции слушателями учебного пособия или предварительно подготовленных лектором конспектов. Опыт авторов показывает, что при этом объем материала, излагаемого за одну лекцию, может быть существенно увеличен. Дальнейшие возможности открывает передача для самостоятельного изучения фрагментов и разделов, которые включают описательный материал или не вызывают трудностей при изучении. Часть материала, прежде всего отдельные вопросы лекций, может излагаться выборочно в зависимости от характера спе-

циальности слушателей учебной дисциплины (электро-, схемотехнический или приборостроительный цикл). В учебном пособии не детализируются особенности применения вычислительной техники, не приводятся алгоритмы, блок-схемы и тесты программ. Эта техника органично вошла в нашу практику, и современное преподавание без нее в высшей школе просто немыслимо.

Учебное пособие содержит полный объем материала, выносимого на итоговый экзамен по учебной дисциплине, а также включает описание и решение ряда актуальных практических задач.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе электротехнических устройств их параметры полагаются известными. Так для электрической цепи должна быть задана ее топология, параметры элементов, а также характеристики действующих в ней источников. Искомыми являются токи и напряжения на элементах электрической цепи, а также выражаемые через них величины, такие, например, как активная и реактивная мощность. Искомыми величинами могут быть также частотные или переходные характеристики цепи.

К обратным относят такие задачи электротехники, в которых искомыми являются структура устройств и параметры их элементов. Для электрических цепей это могут быть топология цепи, параметры элементов цепи, законы изменения во времени действующих в цепи источников [1].

В обратных задачах параметры устройств определяются из условий (критериев), содержащихся в формулировке задачи. Эти критерии выражают наши представления об оптимальном поведении и (или) оптимальных параметрах устройства, например:

- потребляемая электрической цепью реактивная мощность должна иметь заданное значение;
- напряжение между узлами электрической цепи в переходном процессе должно быть меньше заданного и т. п.

Пусть переменные обратной задачи (переменные, описывающие функционирование устройства, для которого она решается) связаны операторным соотношением

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}, \quad (\text{B.1})$$

где \mathbf{A} – матрица, дифференциальный оператор или произвольный нелинейный оператор, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ – вектор неизвестных, подлежащих определению (например, вектор оптимизируемых парамет-

ров устройства или вектор \mathbf{v} источников), $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$ – вектор переменных, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ – вектор источников.

Уравнение (В.1) позволяет вычислить переменные \mathbf{w} обратной задачи при произвольном \mathbf{p} . Для записи критериев обратной задачи в большинстве случаев необходимо перейти от переменных \mathbf{w} к некоторым другим переменным \mathbf{y} , позволяющим записать эти критерии в более простом виде. Вектор \mathbf{y} будем называть далее вектором характеристик. Переход к вектору характеристик \mathbf{y} можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{y}(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{p}),$$

где \mathbf{f} – в общем случае нелинейная вектор-функция.

При формулировке и решении обратных задач используют понятие функционала. Под функционалом I понимают скалярную (действительную или комплексную) функцию, определенную на некотором множестве функций. Наряду с термином функционал будем использовать также равносильный в рамках рассматриваемых задач ему термин целевая функция.

Функционалами могут быть, например, определенный интеграл от функции $[\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{w})]^2$, либо ее наибольшее значение на некотором интервале. В электротехнике в качестве функционала часто принимают некоторую норму, характеризующую близость требуемой переменной $\tilde{\mathbf{y}}$ и получаемой \mathbf{y} при решении обратной задачи:

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \|\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}(\mathbf{p}, \mathbf{w})\|.$$

В качестве нормы, характеризующей близость функций $\tilde{\mathbf{y}}$ и \mathbf{y} , можно использовать любую из общеупотребительных норм, например:

$$\|\cdot\|_2 \equiv \left(\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T h^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad \|\cdot\|_q \equiv \left(\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T h^q(t) dt \right)^{1/q} \quad \text{или}$$

$$\|\cdot\|_\infty \equiv \max_{t \in [t_0, T]} |h(t)|,$$

где $h(t)$ – произвольная функция, $q = 2, 4, \dots$. Отметим, что при использовании нормы $\|\cdot\|_\infty$ функционал $I(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ недифференцируем, так как функция «тах» не является в общем случае непрерывной.

Пусть заданный в условиях обратной задачи вектор $\tilde{\mathbf{y}}$ определяет наилучшие, оптимальные с нашей точки зрения характеристики устройства. Тогда критерии обратной задачи можно записать в виде:

$$I(\mathbf{p}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\mathbf{p}} \min.$$

Рассмотрим пример.

В теории линейных электрических цепей постоянного тока вектор переменных \mathbf{w} образован векторами токов \mathbf{I} и напряжений \mathbf{U} ветвей цепи. Вектор источников \mathbf{v} образован векторами источников тока \mathbf{J} и источников напряжения \mathbf{V} ветвей цепи. Уравнения законов Кирхгофа и Ома:

$$\mathbf{D}\mathbf{I} = -\mathbf{D}\mathbf{J}, \quad \mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{V}, \quad \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{U},$$

можно записать в виде:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{R} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}},$$

где \mathbf{C} и \mathbf{D} – матрицы контуров и сечений графа цепи, \mathbf{R} – диагональная матрица сопротивлений ветвей. Пусть оптимизируемыми параметрами являются сопротивления первой и второй ветвей цепи, тогда $\mathbf{p} = [R_1, R_2]^T$. Пусть обратная задача состоит в нахождении такого вектора \mathbf{p} , при котором коэффициент передачи по напряжению $K_U^{(k,i)}(\mathbf{p}) = U_k/U_i$ наиболее близок к заданной величине $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{K}_U^{(k,i)}]$.

Тогда вектор характеристик обратной задачи содержит только один

элемент $y(\mathbf{p}) = [K_U^{(k,i)}(\mathbf{p})]$, то есть является скаляром. Критерии обратной задачи можно записать, например, в виде:

$$\left| \tilde{K}_U^{(k,i)} - K_U^{(k,i)}(\mathbf{p}) \right| \xrightarrow{\mathbf{p}} \min.$$

В теории цепей приходится решать обратные задачи различных типов [1]. Их можно разделить на группы задач синтеза и идентификации. В свою очередь в задачах синтеза выделяют задачи структурного и параметрического синтеза. К группе задач идентификации относят задачи диагностики и макромоделирования.

Задача синтеза электрической цепи, т.е. создания электрической цепи с заданными свойствами, включает в себя два этапа: поиск структуры цепи и поиск параметров ее элементов (вектор \mathbf{p}). Известной задачей такого типа является синтез электрических фильтров, когда структура и параметры фильтра определяются по заданной идеальной амплитудно-частотной $K(\omega)$ характеристике. Так как построить фильтр с идеальной характеристикой $K(\omega)$ невозможно, то разыскивают такие электрические цепи, характеристики которых близки к идеальным по одному или нескольким критериям близости.

Во многих решаемых на практике задачах синтеза электрических цепей известен прототип искомой цепи или электротехнического устройства. В этом случае задача улучшения свойств прототипа, поиска его оптимальных (наилучших) параметров называется задачей оптимизации или задачей оптимального проектирования. Одну и ту же задачу можно рассматривать и как задачу оптимизации, и как задачу синтеза.

В задачах идентификации находят математическую модель электротехнического устройства. Ее приходится обычно строить, располагая набором данных, связывающих входные и выходные характеристики объекта. В большинстве случаев набор таких данных ограничен, и получаемая математическая модель описывает устройство с некоторой погрешностью.

В задачах диагностики электрических цепей, относящихся к задачам идентификации, на основании измеренных токов и напряжений находят вид неисправности, ее место в цепи, а также отклонение параметров элементов от заданных.

В задачах макромоделирования следует построить математическую модель электротехнического устройства по имеющимся наборам сигналов на входе и выходе устройства. При макромоделировании устройство рассматривается как многополюсник. В макромодель входят только «внешние» переменные, тогда как поведение «внутренних» переменных макромоделью не воспроизводится.

Несмотря на разнообразие обратных задач в электротехнике, они характеризуются общими свойствами, некоторые из которых близки к свойствам задач анализа. В то же время обратные задачи обладают рядом присущих только им свойств [2, 3].

К важнейшим из упомянутых свойств можно отнести наличие условий (ограничений), накладываемых на искомое решение. Для обратных задач характерно наличие ограничений технического и геометрического характера. Первые определяются допустимыми значениями параметров и характеристик элементов цепей. Например, сопротивления, индуктивности и емкости элементов могут находиться в определенных пределах.

Обратные задачи могут иметь неединственное решение. Так, коэффициент передачи по напряжению $K(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ могут иметь элек-

трические цепи как с последовательно соединенными участками r, L , так и с последовательно соединенными участками r, C (здесь s – оператор Лапласа, T – постоянная).

Наряду с неединственностью обратные задачи в электротехнике характеризуются, как и многие задачи анализа, плохой устойчивостью решения. Здесь устойчивость понимается в том смысле, что для любого решения уравнения $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}$ существует константа K , такая, что

$$\|\mathbf{p}\| \leq K \|\mathbf{v}\|.$$

Таким образом, если для устойчивого уравнения $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}$ найдено некоторое приближенное (в силу, например, ошибок численного решения) решение $\hat{\mathbf{p}}$ уравнения $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{p}})\mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}}$, то

$$\|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}\| \leq K \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|.$$

Плохой устойчивости соответствует значительное изменение решения при малом изменении входных воздействий, то есть большая в сравнении с $\|\mathbf{v}\|$ константа K .

Понятие плохой устойчивости тесно связано с понятием жесткости задачи (математической модели) [4]. Строгое математическое определение жесткой системы будет дано в настоящем пособии ниже. Здесь необходимо лишь отметить, что проблемы, возникающие при решении как прямых, так и обратных задач в условиях повышенной жесткости, такие, в частности, как неустойчивость решения к погрешности исходных данных, довольно общеизвестны и, в ряде случаев, существенно ограничивают круг разрешимых задач. В частности, при высокой степени жесткости системы может возникнуть явление некорректности поставленной задачи, когда вследствие малых искажений входных данных решение задачи уже не имеет ничего общего с истинным.

Использование специальных методов анализа жестких систем уравнений и прямых некорректных задач [3] во многих случаях не позволяет получить решение обратной задачи с достаточной степенью точности, поскольку данные методы направлены лишь на борьбу с потерей точности при обработке экспериментальных данных. В то же время, в жесткой обратной задаче уже на этапе проведения экспериментов вследствие даже малой погрешности измерительных приборов может быть утеряна почти вся информация об истинном решении.

Решаемые на практике обратные задачи являются, как правило, многокритериальными. Это их свойство характерно при оптимизации устройства в целом, когда принимаются во внимание не только его

электротехнические параметры, но также и такие, как, например, вес, надежность работы, стоимость и другие. В силу противоречивости отдельных критериев невозможно создать устройство, для которого каждый из них принимает экстремальное значение.

Важное свойство обратных задач заключается в том, что искомые параметры элементов электрической цепи, как и искомое распределение среды не описываются непрерывными функциями. Действительно, найденную электрическую цепь можно реализовать, только используя элементы с номинальными значениями их параметров. Поэтому поиск решения при условии дискретности вектора \mathbf{p} параметров требует учета недифференцируемости искомым функций.

При численном решении обратных задач непрерывные операторы заменяют их дискретными аналогами. При таком переходе необходимо учитывать свойства дискретных уравнений, которые могут отличаться от свойств соответствующих им непрерывных уравнений. В некоторых случаях обратная задача, которая описывается непрерывным уравнением $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}$, имеет единственное решение, однако решение соответствующего ему дискретного уравнения может уже быть неединственным. Например, при малом числе измеренных величин дискретное уравнение $\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}$ может иметь несколько решений. В других случаях оно и вовсе может не иметь решения.

Обратные задачи характеризуются большой трудоемкостью решения, которое является итерационным. Каждый шаг итераций включает в себя решение задачи анализа при некотором промежуточном значении вектора \mathbf{p} параметров.

Рассмотренные свойства обратных задач позволяют заключить, что большинство из них принадлежит к классу так называемых «некорректных» задач. Задача решения уравнения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}$ является корректно поставленной, если выполнены условия: а) решение уравнения существует при любой его правой части, б) решение является единственным, в) решение зависит непрерывно от исходных данных, т.е. от правой части \mathbf{v} уравнения [3]. Из изложенного выше следует, что для

рассмотренных выше задач эти условия могут нарушаться. Поэтому для их решения применяют специальные методы.

1. ОБЩИЕ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В теории электрических цепей обратные задачи обычно называют задачами синтеза [5]. Задачи синтеза состоят в создании цепей, обладающих набором заданных свойств. В настоящей главе дадим определения основных типов обратных задач теории электрических цепей, встречающихся на практике, и изучим их особенности. Рассмотрим также задачи макромоделирования и идентификации.

Рассмотрим обратные задачи теории электрических цепей в следующей последовательности:

- структурный синтез,
- параметрический синтез (параметрическая оптимизация),
- макромоделирование,
- идентификация параметров.

1.1. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ

Будем рассматривать электрическую цепь с N_v входами и N_w выходами. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{N_v})^T$ – вектор входных сигналов (воздействий) и $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{N_w})^T$ – выходных сигналов (вектор реакций цепи). Будем полагать, что вектор \mathbf{v} принадлежит множеству s_v допустимых входных сигналов, а вектор \mathbf{w} – множеству s_w выходных сигналов. Преобразование сигнала электрической цепью представим оператором f , осуществляющим отображение множества s_v на множество s_w ($f: s_v \rightarrow s_w$). Пусть, например, входными и выходными сигналами являются синусоидальные величины одной частоты. Тогда их множества представляют собой пространства векторов комплексных амплитуд размерности N_v и N_w , соответственно. Оператор f в этом случае можно характеризовать комплексной матрицей \mathbf{A} , такой, что:

$$\forall_{\mathbf{v} \in s_v, \mathbf{w} \in s_w} \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}. \quad (1.1)$$

Последнее соотношение не накладывает никаких ограничений на то, будет ли матрица \mathbf{A} реализована в классе линейных, нелинейных или пассивных электрических цепей. Оно не ограничивает число и виды элементов, из которых состоит синтезируемая цепь. То есть при синтезе можно использовать двухполюсные, трехполюсные и (или) четырехполюсные (например, трансформатор) элементы и т. п. Аналогично, не ограничиваются амплитуды входных и выходных сигналов.

При постановке задач синтеза множества s_v, s_w и оператор f следует характеризовать детальнее. Так для рассматриваемого примера во множествах s_v и s_w могут быть выделены подмножества S_v и S_w синусоидальных сигналов с амплитудами $V_{min} < V < V_{max}$ и $W_{min} < W < W_{max}$, где $V_{max}, V_{min}, W_{max}, W_{min}$ – заданные величины. В множестве Φ операторов f , осуществляющих преобразование $f: S_v \rightarrow S_w$ может быть выделено, например, подмножество F операторов, реализуемых линейными цепями, содержащими только двухполюсные элементы и не содержащими катушек индуктивности. Сужение s_v, s_w, Φ до S_v, S_w, F сложно формализуемый процесс, представляющий собой «инженерный» этап решения задачи синтеза. На этом этапе можно сформулировать любые, в том числе и противоречивые требования к проектируемой цепи.

В электротехнике принято разделять устройства на группы по функциональному назначению. Примерами таких групп могут служить трансформаторы, генераторы, усилители, выпрямители и инверторы, фильтры и т. п. Принадлежность устройства к той или иной группе позволяет значительно упростить задачу синтеза. Характерные особенности устройств каждой из групп позволяют предложить для них достаточно узкие множества входных и выходных сигналов и сократить элементный базис (описать более детально свойства оператора F). Так, например, при синтезе фильтров множество используемых элементов может состоять только из резисторов, конденсаторов и

управляемых источников тока и напряжения. При синтезе выпрямителей могут рассматриваться только нелинейные элементы с вольт-амперной характеристикой ключевого типа и т. п. Вместе с тем, упрощение оператора F ограничивает круг цепей, которые могут быть получены в результате решения задачи синтеза.

Пусть «инженерный» этап решения задачи синтеза выполнен и множества S_v , S_w и оператор F определены. Тогда задачу синтеза электрической цепи можно сформулировать следующим образом: найти структуру и параметры электрической цепи, реализующей оператор F , который отображает множество S_v на множество S_w ($F: S_v \rightarrow S_w$).

Сформулированная задача синтеза обладает всеми свойствами обратных задач. В частности, оператор F , реализующий требуемое отображение, как правило, не единственный. Рассмотрим постановки обратных задач подробнее.

Структурный синтез электрической цепи

Задача структурного синтеза состоит в нахождении вида операторов F , позволяющих осуществлять требуемое отображение $F: S_v \rightarrow S_w$ множества входных на множество выходных сигналов. Одна из важных и сложных проблем, возникающих при структурном синтезе, состоит в обеспечении реализуемости оператора F в классе устройств, доступных разработчику. Рассмотрим пример. Пусть множества входных и выходных сигналов содержат по одному элементу: $S_v: v(t) = 1(t)$; $S_w: \tilde{w}(t)$, где $\tilde{w}(t)$ – некоторая заданная функция времени. Будем полагать, что $v(t)$ и $\tilde{w}(t) = \tilde{u}_R(t)$ – входное и выходное напряжения цепи. Необходимо в классе линейных RLC цепей (рис. 1.1) синтезировать оператор F , выполняющий преобразование $S_v \rightarrow S_w$. Конкретный вид цепи и ее параметры при постановке задачи не оговариваются.



Рис. 1.1. Линейная RLC цепь

В силу линейности цепи входной $v(t) = 1(t)$ и выходной $w(t, \mathbf{p}) = u_R(t, \mathbf{p})$ сигналы связаны операторным соотношением:

$$\mathbf{A}(\mathbf{p})u_R(t, \mathbf{p}) = q \cdot 1(t),$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{d^{N_p}}{dt^{N_p}} + p_{N_p-1} \frac{d^{N_p-1}}{dt^{N_p-1}} + \dots + p_1 \frac{d}{dt} + p_0, \quad \mathbf{p} = (q, p_0, p_1, \dots, p_{N_p-1})^T \in \Pi, \quad (1.2)$$

$$p_k > 0, \quad k = \overline{0, N_p-1}, \quad p_0 > q,$$

где \mathbf{p} – вектор параметров оператора \mathbf{A} ; Π – пространство векторов с положительными компонентами. Здесь предполагается, что в синтезируемой цепи не будет контуров, проходящих только по конденсаторам и источникам напряжения, а также сечений, проходящих только по катушкам индуктивности и источникам тока.

Выходное напряжение $u_R(t)$ цепи можно представить в виде $u_R(t, \mathbf{p}) = w(t, \mathbf{p}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p}) \cdot q$. Критерий, при котором синтезируемая цепь выполняет преобразование $S_v \rightarrow S_w$ можно записать, например, в виде:

$$\int_0^{\infty} [\tilde{u}_R(t) - u_R(t, \mathbf{p})]^2 dt \xrightarrow{\mathbf{p} \in \Pi} \min. \quad (1.3)$$

Для того чтобы оператор \mathbf{A} можно было реализовать в классе линейных RLC цепей, необходимо также выполнение условий Рауса-Гурвица [6]:

$$p_{N_p-1} > 0, \det \begin{bmatrix} p_{N_p-1} & p_{N_p-3} \\ 1 & p_{N_p-2} \end{bmatrix} > 0, \dots; \det \begin{bmatrix} p_{N_p-1} & p_{N_p-3} & p_{N_p-5} & \dots & 0 \\ 1 & p_{N_p-2} & p_{N_p-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_0 \end{bmatrix} > 0. \quad (1.4)$$

Таким образом, первая часть задачи структурного синтеза решена: найден вид оператора, осуществляющего требуемое преобразование и условия его реализуемости.

На следующем шаге структурного синтеза ищем топологию и типы элементов электрической цепи (цепей), реализующей найденный оператор. Пусть $N_p = 1$, тогда $\mathbf{p} = (q, p_0)^T$. Оператор \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A} = \frac{d}{dt} + p_0. \quad (1.5)$$

Для его реализации можно использовать любую из схем, представленных на рис. 1.2. Ясно, что могут быть предложены и другие схемы. В рассмотренном примере выбор вида оператора достаточно очевиден. Это следствие относительно простой постановки задачи: ее оператор является линейным, на амплитуды входных и выходных сигналов не наложено обычных для практики ограничений, множества сигналов содержат только по одному элементу. Тем не менее, уже в этом простейшем случае решение задачи структурного синтеза неоднозначно. Опыт показывает, что оно неоднозначно в большинстве случаев.

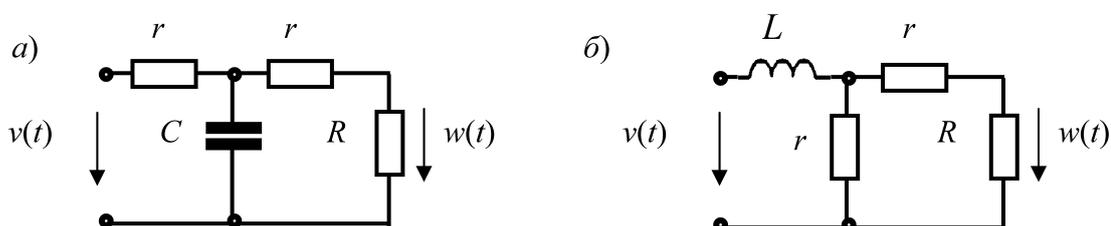


Рис. 1.2. Схемы для реализации оператора \mathbf{A}

Результатом структурного синтеза является множество цепей или операторов, параметры которых неизвестны. Поэтому особенностью задач структурного синтеза является их незавершенность в том смысле, что качество решения становится ясным только после решения задачи параметрического синтеза.

Параметрический синтез электрической цепи (параметрическая оптимизация)

При параметрическом синтезе предполагается, что топология цепи и типы составляющих ее элементов известны. Необходимо на основе критериев обратной задачи определить параметры этих элементов. Как отмечалось выше, эти критерии описывают наилучшие в принятом смысле характеристики синтезируемой цепи, а также уста-

навливают ограничения на диапазон изменения параметров ее элементов.

Параметрический синтез можно выполнять во временной, частотной или операторной области. Решения задач в различных областях обладают специфическими особенностями, однако постановки их достаточно близки.

Рассмотрим задачу параметрического синтеза во временной области. Пусть процессы в цепи описываются системой уравнений состояния

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), & t \in [t_0, T], \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{x}(t)$ - вектор переменных состояния, $\mathbf{p} \in \Pi$ - вектор параметров устройства, подлежащих определению, $\mathbf{y}(t)$ - вектор оптимизируемых характеристик цепи, которые могут быть вычислены по переменным состояния, \mathbf{f} и \mathbf{g} - нелинейные в общем случае вектор-функции. Численное или аналитическое решение системы уравнений (1.6) при некотором векторе параметров \mathbf{p} позволяет определить $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ на всем интервале $[t_0, T]$.

Вектор $\mathbf{y}(t)$ определяет принятые при постановке задачи инженерные характеристики оптимизируемой цепи. Такие, например, как максимальное на всем интервале $[t_0, T]$ напряжение между некоторыми узлами цепи, мощность электромагнитного излучения, создаваемого цепью в окружающем пространстве, сечение проводников, соединяющих элементы цепи, или потери в цепи. В некоторых случаях эти характеристики могут не зависеть от времени. Их всегда можно найти, если известен вектор $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$, $t \in [t_0, T]$.

Пусть вектор $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \left(\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_{N_y}(t) \right)^T$ определяет наилучшие в принятом смысле характеристики оптимизируемой цепи. Зависимости

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p})) = \left(y_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p})), y_2(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p})), \dots, y_{N_y}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p})) \right)^T$$

можно найти из (1.6) на интервале $[t_0, T]$ при произвольном векторе \mathbf{p} (то же сказано в последнем предложении предыдущего абзаца). Задача параметрического синтеза состоит в определении вектора \mathbf{p} из условий:

$$\|\tilde{y}_k(t) - y_k(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{p}))\| \xrightarrow{\mathbf{p} \in \Pi} \min, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1.7)$$

Можно видеть, что задача параметрического синтеза сводится к задаче векторной или многокритериальной оптимизации. Критерии (1.7) могут иметь противоречивый характер. Так, например, при синтезе усилителя величина $\tilde{y}_1(t)$ может определять допустимое значение рассеиваемой мощности, а величина $\tilde{y}_2(t)$ – нижнюю границу выходной мощности усилителя. Оба условия оправданы с инженерной точки зрения, но противоречивы, так как увеличение выходной мощности приводит к росту рассеиваемой мощности.

Постановка задачи параметрического синтеза в частотной области, в целом, близка к постановке во временной области. Параметрический синтез в частотной области предполагает описание свойств цепи с помощью частотных характеристик, поэтому его можно выполнять только для линейных цепей без внутренних источников электромагнитной энергии. Это обстоятельство, с одной стороны, значительно снижает общность подхода но, с другой стороны, упрощает параметрический синтез.

Частотные характеристики линейной электрической цепи определим следующим образом:

$$X_k(j\omega, \mathbf{p}) = \frac{G_{k,r}(j\omega, \mathbf{p})}{H_{k,q}(j\omega, \mathbf{p})}, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad \omega \in [\omega_l, \omega_u],$$

$$\mathbf{X}(j\omega, \mathbf{p}) = \left(X_1(j\omega, \mathbf{p}), X_2(j\omega, \mathbf{p}), \dots, X_{N_y}(j\omega, \mathbf{p}) \right)^T,$$

$$\mathbf{Y}(\omega, \mathbf{p}) = \left(Y_1(\omega, \mathbf{X}(j\omega, \mathbf{p})), Y_2(\omega, \mathbf{X}(j\omega, \mathbf{p})), \dots, Y_{N_y}(\omega, \mathbf{X}(j\omega, \mathbf{p})) \right)^T.$$

Здесь ω – круговая частота, $\mathbf{p} \in \Pi$ – вектор параметров электрической цепи, подлежащих определению, G_k и H_k – полиномы степени r и q от ω , коэффициенты которых зависят от элементов вектора \mathbf{p} ; \mathbf{Y} – вектор оптимизируемых характеристик цепи, которые можно вычислить по $X_k(j\omega, \mathbf{p})$, $k = \overline{1, N_y}$. В вектор \mathbf{Y} входят те характеристики цепи, которые определяются техническими или экономическими требованиями к синтезируемой цепи.

Пусть вектор $\tilde{\mathbf{Y}}(\omega) = (\tilde{Y}_1(\omega), \tilde{Y}_2(\omega), \dots, \tilde{Y}_{N_y}(\omega))^T$ определяет наилучшие в принятом смысле характеристики цепи в диапазоне частот $[\omega_l, \omega_u]$. Задача параметрического синтеза в частотной области состоит в определении вектора \mathbf{p} , из условий:

$$\|\tilde{Y}_k(\omega) - Y_k(\omega, \mathbf{p})\| \xrightarrow{\mathbf{p} \in \Pi} \min, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad \omega \in [\omega_l, \omega_u]. \quad (1.8)$$

Как видно, задача (1.7) параметрического синтеза в частотной области также сводится к задаче векторной или многокритериальной оптимизации.

Элементы $X_k(j\omega, \mathbf{p})$ вектора \mathbf{X} – в общем случае комплексные функции. Элементы векторов \mathbf{Y} и $\tilde{\mathbf{Y}}$ в (1.8) и далее приняты вещественными. Такое допущение не снижает общности рассматриваемой постановки задачи. Действительно, пусть, например, величина $X_1(j\omega, \mathbf{p}) = g(\omega, \mathbf{p}) - jb(\omega, \mathbf{p})$ имеет смысл входной проводимости цепи. Пусть известны также некоторые оптимальные величины $\tilde{y}_1(t) = \tilde{g}(\omega)$ и $\tilde{y}_2(t) = \tilde{b}(\omega)$. Условие оптимальности (1.8) в этом случае можно выразить через вещественные функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\tilde{g}(\omega) - g(\omega, \mathbf{p})\| \xrightarrow{\mathbf{p} \in \Pi} \min \\ \|\tilde{b}(\omega) - b(\omega, \mathbf{p})\| \xrightarrow{\mathbf{p} \in \Pi} \min \end{array} \right., \quad \omega \in [\omega_l, \omega_u].$$

В силу линейности синтезируемой цепи можно получить аналитические зависимости частотных характеристик $X_k(j\omega, \mathbf{p})$, $k = \overline{1, N_y}$ от параметров оптимизации \mathbf{p} и частоты ω . Современные программы сим-

вольного анализа электрических цепей позволяют получать эти выражения быстро и в компактной форме. Эта особенность решения задачи оптимизации в частотной области позволяет значительно ускорить вычисление функционалов в (1.8) и получить для них и их градиентов относительно простые аналитические выражения.

Рассмотрим задачи параметрического синтеза в операторной области. Как известно, формальная замена $s \leftrightarrow j\omega$ позволяет переходить от частотных характеристик к их изображениям и обратно. Аналогично, преобразование Лапласа позволяет переходить от дифференциальных уравнений во временной области к изображениям. Поэтому рассмотренные выше особенности задач синтеза во временной и частотной области справедливы и для задач синтеза в операторной области.

Параметрический синтез в операторной области целесообразно выполнять для получения аналитических решений обратных задач для относительно простых цепей и функций цели. Такая простая T-образная цепь рассматривалась выше (см. рис. 1.1). Пусть $N_p = 1$. Вектор $\mathbf{p} = (q, p_0)^T$ параметров, входящих в оператор \mathbf{A} , можно найти из решения задачи (1.3) при ограничениях (1.4). Пусть решением является вектор $\mathbf{p} = (2, 4)^T$, тогда уравнение $\mathbf{A}(\mathbf{p})u_R(t, \mathbf{p}) = q$ принимает вид:

$$\frac{d}{dt}u_R(t) + 4u_R(t) = 2 .$$

Отсюда получаем:

$$\tilde{U}_R(s) = \frac{2}{s(s+4)} .$$

Схемы электрических цепей, реализующих оператор \mathbf{A} , представлены на рис. 1.2. Определим параметры r, R, C элементов цепи, представленной на рис. 1.2, a , то есть решим для нее задачу параметрического синтеза. Выражение для напряжения на резисторе R имеет вид

$$U_R(s) = \frac{R}{s[sC(r+R) + 2r + R]} .$$

Сопоставляя $\tilde{U}_R(s)$ и $U_R(s)$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} R = 2 \\ C(r + R) = 1, \\ 2r + R = 4 \end{cases}$$

одним из решений которой являются значения $R = 2$, $r = 1$, $C = 1/3$. Возможны и другие решения. Как отмечалось выше, задача параметрического синтеза в большинстве случаев может иметь неединственное решение.

Выше предполагалось, что искомые параметры изменяются непрерывно. Это соблюдается не всегда. Во многих практических задачах они могут принимать только дискретные значения. Это характерно, например, для электронных цепей, когда ряд возможных значений параметров жестко определен.

Задачи параметрического синтеза на дискретном множестве параметров можно вначале решить в предположении, что все параметры непрерывны. Затем полученные значения можно заменить ближайшими из ряда номиналов. Такая замена ухудшит качество решения задачи. Возможно, что при поиске экстремума в области дискретных значений параметров можно было бы найти другое, лучшее решение, чем то, которое получено после замены оптимальных параметров на ближайшие из ряда номиналов.

Другим возможным путем решения задачи параметрического синтеза при дискретных параметрах является использование методов минимизации, не требующих дифференцирования функционала. К таким методам относятся, в частности, методы, основанные на генетическом алгоритме [7], рассматриваемые далее.

1.2. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ МАКРОМОДЕЛЕЙ УСТРОЙСТВ (МАКРОМОДЕЛИРОВАНИЕ)

Макромоделирование или, что тоже, построение укрупненных моделей электротехнических устройств, близко к рассмотренным задачам синтеза, но обладает рядом особенностей. Укрупненные модели (макромодели) являются удобным и распространенным средством описания функционирования сложных устройств и систем. В тех случаях, когда схема замещения цепи или система уравнений, описывающая ее поведение, весьма сложны или неизвестны достаточно точно, решение задачи анализа невозможно. Для анализа систем, включающих такие устройства, используют укрупненные модели, позволяющие приближенно отображать преобразование сигналов в режиме «вход-выход» без детализации внутренних процессов. При этом предполагается, что макромодели будут существенно проще полных моделей устройств, учитывающих процессы, протекающие внутри устройства.

Особенно актуальна задача макромоделирования для объектов, не имеющих полного описания. Это могут быть, например, новые устройства, свойства которых недостаточно изучены. Построение макромоделей таких устройств является иногда единственной возможностью описания их работы.

Пусть электрическая цепь, для которой во временной области строится макромодель, является многополюсником с N_v входами и N_w выходами (рис. 1.3).

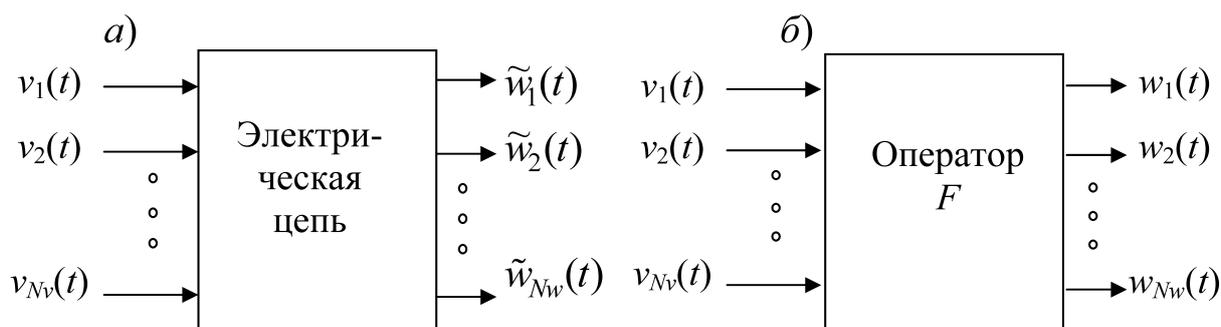


Рис. 1.3. Электрическая цепь для построения макромодели во временной области

Каждый элемент $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N_v}(t))^T$ множества S_v входных сигналов и каждый элемент $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_{N_w}(t))^T$ множества S_w , зависящих от времени t выходных сигналов, представляет собой вектор размерности N_v и N_w , соответственно.

Макромодель цепи может быть в общем случае представлена оператором $F: S_v \rightarrow S_w$, отображающим множество S_v допустимых входных (тестовых) сигналов \mathbf{v} на множество S_w выходных сигналов \mathbf{w} . Подчеркнем еще раз то важное обстоятельство, что многочисленные внутренние переменные исходной цепи не участвуют в синтезе макромодели. Поэтому размерности векторов \mathbf{v} и \mathbf{w} , которые используются при решении задачи макромоделирования, могут быть намного меньше числа переменных, необходимых для полного описания цепи.

Задача построения макромодели состоит в синтезе оператора F и определению параметров \mathbf{p} этого оператора, доставляющих решение системе неравенств:

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_k(t) - w_k(t, \mathbf{p})\| < \delta_k, \quad k = \overline{1, N_w}, \\ \mathbf{w} = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_{N_w}(t)]^T, \quad \mathbf{v} = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N_v}(t)]^T, \quad (1.9) \\ \mathbf{w} = F(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in S_v, \quad \mathbf{w} \in S_w, \quad \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{S}_w. \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}$ и \tilde{S}_w – соответственно выходной сигнал и множество выходных сигналов, генерируемых электрической цепью, для которой строится макромодель. Величины δ_k , $k = \overline{1, N_w}$ определяют погрешность, с которой макромодель воспроизводит свойства реального объекта.

Для выявления свойств объекта макромоделирования на его вход подают тестовые сигналы $\mathbf{v}(t)$. При этом измеряют выходные сигналы $\mathbf{w}(t)$, то есть тестируют объект макромоделирования. Для решения задачи макромоделирования следует:

- задать форму математического описания объекта макромоделирования (определить вид оператора F),
- разработать методику определения параметров оператора F по результатам тестирования,

- найти минимальное множество S_v тестовых сигналов, достаточное для определения параметров оператора с заданной точностью.

Отличие макро моделирования от синтеза состоит в том, что оператор F может быть физически нереализуем. Макромодель должна с приемлемой точностью отображать лишь связь между входными и выходными сигналами. Ее реализация в виде физического устройства не предполагается. Свобода в выборе оператора F позволяет при построении макро модели нелинейной цепи предложить ряд различных общих форм его описания, устанавливающего аналитическую зависимость выходных сигналов от входных. К наиболее изученным относятся способы описания оператора с помощью функциональных рядов Вольтерры, рядов Вольтерры-Пикара [8], многочленов расщепленных сигналов. Соотношение между входными и выходными сигналами разыскивают в форме функциональных рядов. Их можно рассматривать как разложение выходных сигналов по многомерным полиномам.

Пусть для простоты входной $v(t)$ и выходной $w(t)$ сигналы суть скалярные функции времени. Функциональный ряд Вольтерры, дающий однозначную связь (в предположении, что ряд сходится) между входным и выходным сигналами в нелинейных стационарных цепях с нулевыми начальными условиями, имеет вид

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_k h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \prod_{r=1}^k v(t - \tau_r) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \quad (1.10)$$

где $h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ – ядро Вольтерры k -го порядка.

Первое слагаемое ($k = 1$) ряда Вольтерры представляет собой линейный интеграл свертки, соответствующий линейной цепи с ядром (импульсной характеристикой) $h_1(\tau)$. Последующие слагаемые ($k > 1$) представляют собой нелинейные относительно входного сигнала свертки с ядрами $h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$, которые являются многомерными импульсными характеристиками порядка k нелинейной цепи.

При макро моделировании нелинейных цепей часто используют представление ядер ряда Вольтерры в области Фурье-изображений

$$H_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_k h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_k\tau_k)} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k,$$

где $H_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k)$ – ядро ряда Вольтерры в частотной области.

Связи между входными и выходными переменным можно записать также с помощью многочлена расщепленных сигналов [9]

$$w(t) = \sum_{d_1=0}^{K_1} \sum_{d_2=0}^{K_2} \dots \sum_{d_{N_v}=0}^{K_{N_v}} C_{d_1 d_2 \dots d_{N_v}} [v_1(t)]^{d_1} [v_2(t)]^{d_2} \dots [v_{N_v}(t)]^{d_{N_v}}, \quad (1.11)$$

где $v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N_v}(t)$ – так называемые расщепленные сигналы.

Основным свойством этих сигналов является то, что они не исчезают, не пересекаются, не самопересекаются и не касаются ни в одной точке области их определения. Обычно значения $K_i, i = \overline{1, N_v}$ и N_v не велики и не превосходят 10. С ростом этих параметров размерность модели и сложность задачи аппроксимации быстро растут.

Соотношения (1.10) и (1.11) определяют вид оператора F макро модели. Входящие в них коэффициенты $h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ и $C_{d_1 d_2 \dots d_m}$ являются искомыми параметрами макро модели и образуют вектор \mathbf{p} . Построение макро модели состоит в определении этих параметров на основе результатов измерений (или расчетов) реакций цепи (функций $w_\ell(t) \in S_v, \ell = 1, 2, \dots$) на тестовые сигналы – $v_\ell(t) \in S_w, \ell = 1, 2, \dots$.

Соотношение (1.10) задает более общий вид макро модели в сравнении с (1.11), так при его использовании определение ядер $h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ может выполняться при любых тестовых сигналах в частотной или временной областях. Использование многочлена расщепленных сигналов предполагает, что множество входных сигналов близко к множеству сигналов, на котором работает моделируемое устройство.

Замечательным свойством рассмотренных подходов к построению макромоделей является то, что искомые параметры макромоделей входят в соотношения (1.10) и (1.11) линейно. Действительно, пусть в задаче макромоделирования (1.9) в качестве нормы используется интеграл от квадрата разности выходных сигналов устройства и модели

$$\|\tilde{w}_k(t) - w_k(t)\| = \int_0^{\infty} (\tilde{w}_k(t) - w_k(t))^2 .$$

Тогда, в силу отмеченной выше линейности, этот функционал является квадратичным. Так как квадратичный функционал всюду неотрицателен и имеет единственный минимум, то и задача (1.9) всегда имеет решение и притом единственное.

Изложенный подход к построению макромоделей имеет много общего с построением, так называемых нейронных сетей. Здесь отметим, что аппроксимация нелинейного оператора с помощью нейронной сети нелинейна. При этом процесс решения задачи (1.9) существенно усложняется, поскольку она может иметь (и, как правило, имеет) локальные минимумы.

Макромодель должна с заданной точностью отражать свойства объекта на более широком классе сигналов в сравнении с тем, который использовался для ее тестирования. Это требование обычно трудно выполнимо, так как отсутствует достаточная априорная информация об объекте. Как правило, приходится довольствоваться гипотезой об адекватности выбранной модели. Проверка этой гипотезы осуществляется апостериори. После получения модели ее подвергают действию сигналов, отличных от использованных при ее построении. Такими же сигналами тестируют и исследуемый объект, после чего оценивают степень совпадения реакций объекта и модели. Аналогичный подход используется и в нейронных сетях.

1.3. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Под идентификацией электрической цепи будем понимать процесс определения параметров ее схемы замещения по данным измерений реакций цепи на заданные воздействия. Пусть структура (вид оператора F) цепи известна. Тогда задача идентификации может рассматриваться как задача нахождения множеств входных (тестовых) S_v и выходных (измеряемых) S_w сигналов, которые позволяют однозначно определить параметры идентифицируемой цепи.

Если на множества S_v и S_w не наложены ограничения, то задача идентификации однозначна и разрешима. Действительно, если произвольные тестовые сигналы можно подавать на любые элементы цепи, а также выполнять измерения любых величин, то нахождение параметров электрической цепи представляет собой тривиальную задачу. Чтобы дать формулировку нетривиальной задачи идентификации, рассмотрим вначале ее особенности.

Будем изучать далее свойства и особенности задач идентификации пассивных линейных цепей постоянного тока. Будем полагать также, что структура цепи, то есть граф ее схемы также известен. Для экспериментального определения параметров всех элементов цепи достаточно:

- выбрать в графе схемы дерево;
- подсоединить к цепи в произвольном месте источник напряжения или тока;
- измерить напряжения всех ветвей (подключая вольтметры), соответствующих дереву графа и рассчитать напряжения всех остальных ветвей;
- измерить токи всех ветвей (подключая амперметры), соответствующих связям графа и рассчитать токи всех остальных ветвей;
- определить сопротивление каждой из ветвей как отношение напряжения на ветви к ее току.

На практике такой алгоритм решения задачи идентификации в большинстве случаев неприемлем. Основная причина этого – в использовании амперметров, которые необходимо включать в ветви цепи. Для большинства устройств, например, для печатной платы, включить амперметры сложно или даже невозможно. В большинстве цепей для измерений доступны только узлы. Поэтому и измерять можно только напряжения между узлами цепи. Поэтому для решения задачи идентификации придется несколько раз измерять напряжения и затем по результатам измерений вычислять параметры цепи.

Рассмотрим пример решения задачи идентификации для цепи, представленной на рис. 1.4, *a*. Точками на схеме показаны узлы, доступные для подключения измерительных приборов.

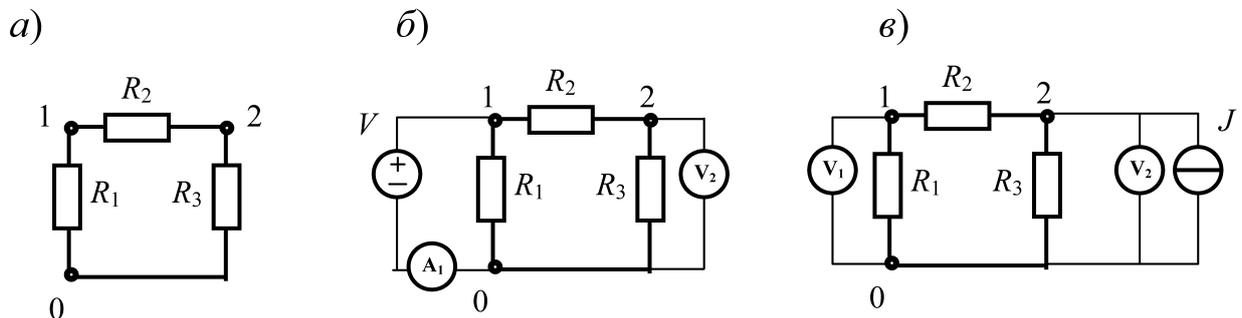


Рис. 1.4. Пример решения задачи идентификации

Выполним следующие эксперименты:

- подключая источник напряжения V к узлу 1 (рис. 1.4, *a*), измеряем ток $I_1^{(1)}$ и напряжение $V_{20}^{(1)}$ (рис. 1.4, *б*). В данном случае проблемы с подключением амперметра не возникает, поскольку его включаем в ветвь, внешнюю по отношению к идентифицируемой цепи;
- подключая источник тока J , величина которого известна, к узлу 2, измеряем напряжения $V_{10}^{(2)}$ and $V_{20}^{(2)}$ (рис. 1.4, *в*).

Для определения величин R_1 и R_3 записываем систему уравнений (предполагаем, что амперметры и вольтметры идеальные):

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{R_1} V + \frac{1}{R_3} V_{20}^{(1)},$$

$$J = \frac{1}{R_1} V_{10}^{(2)} + \frac{1}{R_3} V_{20}^{(2)}.$$

Отсюда можно найти R_1 и R_3 и после этого определить R_2 из соотношения:

$$J = \frac{1}{R_3} V_{20}^{(2)} + \frac{1}{R_2} (V_{20}^{(2)} - V_{10}^{(2)}).$$

Для решения рассмотренной задачи можно использовать и другие, отличные от принятых выше схемы подключения источников и измерительных приборов. Соответственно изменится и алгоритм расчета параметров цепи. Этот пример показывает, что идентификация параметров даже в простейших случаях требует постановки и выполнения серии экспериментов, а также нахождения алгоритма расчета параметров цепи по результатам этих экспериментов.

На практике на выбор источников, измерительных приборов и схем их подключения накладываются различные ограничения. Примерами наиболее общих ограничений являются следующие:

- источники должны быть такими, чтобы при их подключении токи и напряжения не могли повредить цепь;
- алгоритм расчета параметров цепи должен быть численно устойчивым при использовании экспериментальных данных;
- число экспериментов и используемых приборов должно быть по возможности минимальным.

На результаты решения большое влияние оказывают также используемые при измерениях приборы. Поэтому особенностью этих задач является использование также и математических моделей измерительных приборов. Специфические проблемы при идентификации возникают в случаях, когда измерительные приборы неидеальные и их показания противоречивы, что приводит к неоднозначности решения. Дополнительная инженерная информация позволяет зачастую устранить эти неоднозначности решения [9]. Рассмотрим пример.

Пусть в цепи, представленной на рис. 1.5, необходимо определить значения резисторов R_1 и R_2 по известному напряжению V_0 источника и показаниям амперметров I_1 , I_2 и I_3 .

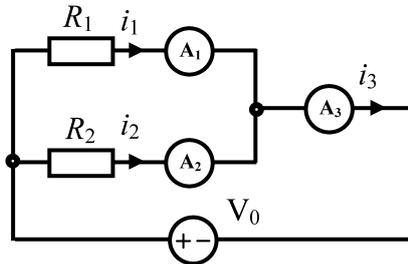


Рис. 1.5. Пример некорректной задачи

Показания амперметров противоречивы: $I_1 + I_2 \neq I_3$. Кроме того имеется априорная информация о том, что амперметр A_3 – высокоточный, а амперметры A_1 и A_2 имеют одинаковый класс точности и их показания менее достоверны.

Учитывая, что амперметр A_3 – высокоточный, запишем для токов i_1 , i_2 цепи:

$$i_1 + i_2 = I_3. \quad (1.12)$$

Дополним (1.12) условием минимума среднего отклонения искомым токам i_1 , i_2 от показаний амперметров I_1 , I_2 :

$$\left(1 - \frac{i_1}{I_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{i_2}{I_2}\right)^2 \xrightarrow{i_1, i_2} \min. \quad (1.13)$$

Совместное решение (1.12), (1.13) позволяет найти токи i_1 , i_2 :

$$i_1 = I_1 \frac{I_2^2 + I_1(I_3 - I_2)}{I_1^2 + I_2^2}, \quad i_2 = I_2 \frac{I_1^2 + I_2(I_3 - I_1)}{I_1^2 + I_2^2}. \quad (1.14)$$

Оценим эффект использования соотношений (1.14). Пусть $\tilde{i}_1 = 5$ А, $\tilde{i}_2 = 1$ А – истинные значения токов. Измеренные амперметрами токи равны $I_1 = 5,3$ А, $I_2 = 1,05$ А, $I_3 = 5,95$ А ($I_1 + I_2 \neq I_3$). Из соотношений (1.14) получаем токи $i_1 = 4,92$ А, $i_2 = 1,03$ А, которые существенно ближе к истинным, чем первоначально измеренные. По найденным токам i_1 , i_2 можно рассчитать значения сопротивлений R_1 и R_2 .

$$R_1 = \frac{V_0 - r_{A_1} i_1 - r_{A_3} (i_1 + i_2)}{i_1}, \quad R_2 = \frac{V_0 - r_{A_2} i_2 - r_{A_3} (i_1 + i_2)}{i_2},$$

где $r_{A_1}, r_{A_2}, r_{A_3}$ – сопротивления амперметров.

Таким образом, использование априорной информации позволило устранить неоднозначное толкование результатов эксперимента и получить решение с большей точностью.

При решении задач подобного типа важен способ учета имеющейся дополнительной информации. Ее корректное использование и удачное математическое описание позволяют получить правильное решение. Примерами такой дополнительной информации могут быть:

- паспортные данные элементов электрической цепи, такие, как допустимые отклонения значений параметров элементов от номинальных, скорость старения элементов, зависимость параметров от температуры и т. п.;
- для периодически выполняемых измерений – результаты предыдущих измерений;
- понимание работы устройства, если, например, имеется априорная информация о том, что устройство суть исправный фильтр, то в полосе задержки можно использовать условие $U_{\text{вх}} \gg U_{\text{вых}}$.

В заключение отметим основные особенности обратных задач в теории электрических цепей. В задачах синтеза электрических цепей можно выделить этапы синтеза структуры цепи и синтеза параметров ее элементов. Этап структурного синтеза сводится к поиску топологии цепи. Его характерной особенностью является неоднозначность решения. Взаимосвязь этапов синтеза проявляется в возможности оценки структурного синтеза лишь после нахождения параметров элементов цепи, т. е. после выполнения этапа параметрического синтеза.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В данной главе рассмотрим так называемые жесткие обратные задачи и методы их решения. Изложение начнем с нескольких примеров жестких задач, которые позволят изучить их основные свойства и дать затем определения задач такого типа. Далее в параграфах 2.2 и 2.3 введем два основополагающих принципа, на которых строится решение жестких задач. Это принцип квазистационарности производных и принцип повторных измерений. В параграфе 2.4 рассмотрим задачи диагностики цепей синусоидального тока, являющиеся типичными обратными задачами теории цепей. В этом же параграфе рассмотрим также условия, при которых такие задачи следует рассматривать как жесткие. В параграфе 2.5 изложим новый эффективный метод решения жестких задач диагностики и приведем численные результаты решения некоторых из них.

2.1. ЖЕСТКИЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Целью решения обширного класса обратных задач является создание математических моделей устройств или процессов и определение параметров этих математических моделей из численных или физических экспериментов. Для создания математической модели, наилучшим образом отражающей моделируемое устройство (процесс), необходимо одновременное рассмотрение всех (большинства) известных факторов, влияющих на его функционирование. На начальных этапах решения обратной задачи обычно невозможно оценить важность для создаваемой математической модели тех или иных «слабых воздействий», «малых параметров» или «незначительных изменений». Необоснованное пренебрежение «малыми величинами» может привести к «выплескиванию вместе с водой из купели и ребенка», то есть созданию неадекватной модели.

Жесткость математических моделей является следствием включения в них факторов, различающихся по степени влияния. Дальней-

шие исследования, дающие более глубокое понимание свойств и процессов, протекающих в моделируемом устройстве, позволяют во многих случаях понизить жесткость модели, обоснованно исключив мало влияющие факторы. Однако для ряда устройств и процессов жесткость является внутренне присущим свойством, отражающим основные закономерности их функционирования. Учитывая некоторую абстрактность приведенных выше рассуждений, поясним их ниже примерами.

Представление о жесткой математической модели и, соответственно, жесткой обратной задаче, можно получить при построении модели устройства, в котором одновременно присутствуют и «быстро», и «медленно» изменяющиеся величины. В качестве примера рассмотрим задачу построения математической модели некоторого устройства по его экспериментально определенной переходной проводимости $y_e(t)$. Пусть имеется априорная информация о том, что физические процессы, протекающие в устройстве, соответствуют процессам, протекающим в электрической цепи, представленной на рис. 2.1, а. Тогда целью решения обратной задачи будет определение величин R , L и C . Обратные задачи такого типа относят к задачам параметрического синтеза электрических цепей. Для простоты будем предполагать, что $y_e(t)$ (рис. 2.1, б) апериодическая функция и начальные условия нулевые. Время полуспада $y_e(t)$ обозначим $t_{1/2}$.

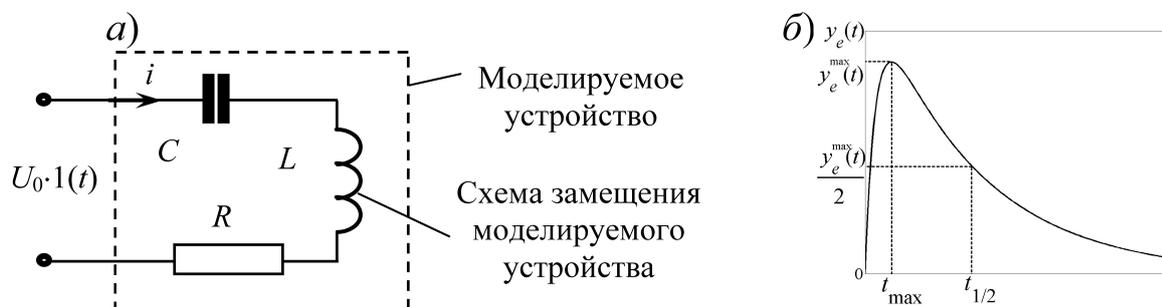


Рис. 2.1. Моделируемое устройство, схема его замещения (а) и переходная характеристика моделируемого устройства (б)

Переходная проводимость $y_m(t)$ последовательного R , L и C контура, рассматриваемого в качестве математической модели, связана с

входным током $i(t)$ соотношением $y_m(t) = i(t)/U_0$. Аналитическое выражение для тока $i(t)$ можно легко получить из решения линейного дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в RLC цепи:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{U_0}{RLC}. \quad (2.1)$$

Запишем решение уравнения (2.1) в виде:

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = U_0 y_m(t).$$

Определим постоянные A_1 и A_2 из начальных условий $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$:

$$\begin{cases} i(0) = A_1 + A_2 = 0, \\ L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = L(A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) = U_0 - u_C(0) = U_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A = \frac{U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ A_2 = -A, \end{cases}$$

$$y_m(t) = \frac{A}{U_0} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Здесь корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 , соответствующего дифференциальному уравнению (2.1), имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Обратную задачу определения параметров R , L и C математической модели устройства можно записать в виде:

$$\int_0^{\infty} \left(y_e(t) - \frac{A}{U_0} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \right)^2 dt \xrightarrow{R,L,C} \min. \quad (2.2)$$

Результатом решения (2.2) будут величины R , L и C , используя которые можно вычислить корни характеристического уравнения λ_1 , λ_2 и константу A .

Рис. 2.2 иллюстрирует это решение.

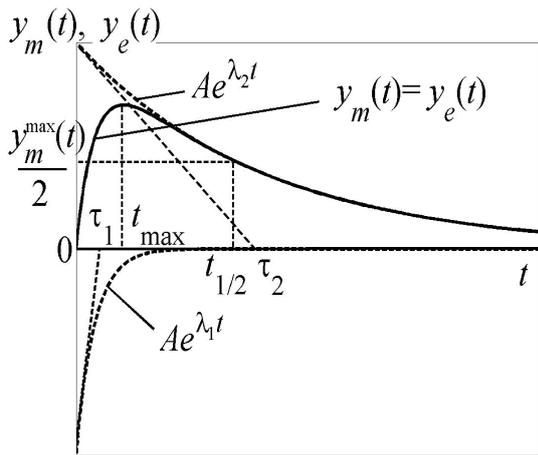


Рис. 2.2. Переходная характеристика моделируемого устройства

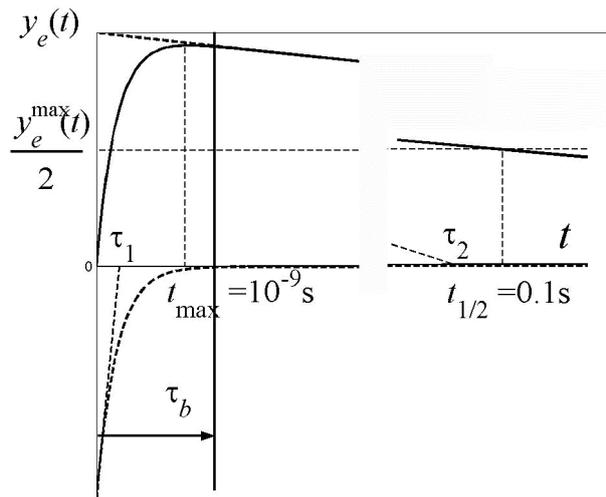


Рис 2.3. Переходная характеристика моделируемого устройства на различных интервалах времени

В дальнейшем, нам понадобятся следующие свойства решения: время t_{\max} нарастания $y_e(t)$ до максимального значения близко к постоянной времени $\tau_1 = |1/\lambda_1|$ экспоненты с максимальным по модулю показателем, а время $t_{1/2}$ полуспада $y_e(t)$ близко к постоянной времени $\tau_2 = |1/\lambda_2|$.

Для решения задач, подобных (2.2), можно использовать один из методов оптимизации [2]. В настоящем разделе интерес будет представлять случай, при котором переходная характеристика $y_e(t)$ моделируемого устройства содержит «быстрые» и «медленные» компоненты. Рассмотрим далее именно такой случай.

Пусть переходная характеристика $y_e(t)$, показанная на рис. 2.3, выполненном для наглядности с искажением масштаба по времени, достигает своего максимального значения y_e^{\max} при $t_{\max} = 10^{-9}$ с. Время $t_{1/2}$ полуспада $y_e(t)$ составляет 0,1 с. В нашем случае $t_{\max} \ll t_{1/2}$, поэтому $\tau_1 \ll \tau_2$ или, что то же, $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$. Здесь использованы соотношения между величинами t_{\max} , $t_{1/2}$ и постоянными времени τ_1 и τ_2 , полученные ранее. Далее, по теореме Виета для корней характеристического уравнения (2.1) имеем:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -R/L, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1/LC.$$

Следуя [9], из первого соотношения при $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$ получаем $\lambda_1 \cong -R/L$, подставляя которое во второе соотношение, находим $\lambda_2 \cong -1/RC$. Аналогично получаем для константы $A = -U_0/R$, тогда решение уравнения (2.1) примет вид:

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (2.3)$$

Рассмотрим поведение решения (2.3) на двух последовательных интервалах времени $T_1 = [0, \tau_b]$ и $T_2 = [\tau_b, T_0]$. Здесь $\tau_b \ll T_0$ – длительность пограничного слоя – важная в теории жестких систем величина. Длительность τ_b пограничного слоя выбираем таким образом, чтобы решение уравнения (2.1) внутри пограничного слоя, то есть на интервале T_1 , характеризовалось быстрым изменением тока. Продолжительность интервала T_1 для данной задачи может быть принята равной $\tau_b = (3-5) \cdot \tau_1 \approx 10^{-9}$ с (см. рис. 2.3). Интервал T_2 , расположенный за пограничным слоем, характеризуется медленным изменением тока и заканчивается вместе с окончанием переходного процесса.

В рассматриваемом случае на интервале T_1 внутри пограничного слоя с высокой степенью точности можно принять $e^{\lambda_2 t} = e^{-t/RC} = 1$, а вне пограничного слоя на интервале T_2 $e^{\lambda_1 t} = e^{-tR/L} = 0$. Тогда:

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = \begin{cases} t \leq \tau_b, & i_1(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \\ t > \tau_b, & i_2(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.4) показывают, что для жестких задач возможно разделение быстрого и медленного процессов, которое значительно упрощает решение. Действительно, аналитическое решение рассматриваемой жесткой обратной задачи можно в данном случае получить, если известны только характерные точки экспериментальной зависимости $y_e(t)$. Пусть

$$t_{\max} = 10^{-9} \text{ с}, \quad t_{1/2} = 0,1 \text{ с}, \quad y_e(t_{\max}) = y_e^{\max} = 0,1 \text{ См}, \quad y_e(t_{1/2}) = y_e^{\max} / 2 = 0,05 \text{ См}.$$

Тогда

$$R = \frac{1}{y_e^{\max}} = 10 \text{ кОм}, \quad C = y_e^{\max} \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = 1,44 \text{ мкФ}, \quad L = \frac{1}{y_e^{\max}} \frac{t_{\max}}{20} = 50 \text{ мкГн}.$$

Отметим также, что вид выражений для токов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ в (2.4) позволяет дать следующую простую физическую интерпретацию решения жесткой обратной задачи. На интервале T_1 внутри пограничного слоя свойства исходной цепи совпадают со свойствами более простой цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора R и катушки индуктивности L . На интервале T_2 вне пограничного слоя свойства исходной цепи совпадают со свойствами RC цепи, также более простой, чем исходная. Таким образом, в ходе решения обратной задачи была выполнена коррекция принятой в начале исследования математической модели. Эта коррекция стала возможной вследствие того, что исходная задача является жесткой.

Расщепление жестких задач на две или несколько более простых и нежестких задач является одним из эффективных путей их решения. Рассмотрим далее этот способ решения.

Дадим, следуя [6], строгое определение жесткой системы. Пусть имеется система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y), \quad t \in [0, T_0], \quad y(0) = y_0; \quad (2.5)$$

$$y(t) = [y_1(t) \dots y_m(t)]^T, \quad f(t, y) = [f_1(t, y) \dots f_m(t, y)]^T.$$

Для жесткой системы дифференциальных уравнений значения нормы производных решения вне пограничного слоя $\tau_b \ll T_0$ значительно меньше чем внутри его:

$$\left\| \frac{dy(t)}{dt} \right\|_{t \geq \tau_b} \ll \left\| \frac{dy(t)}{dt} \right\|_{t < \tau_b} \Leftrightarrow \exists_{N \gg 1} : \left\| \frac{dy(t)}{dt} \right\|_{t \geq \tau_b} \approx \left\| \frac{1}{N} \frac{dy(t)}{dt} \right\|_{t < \tau_b}, N \gg 1.$$

Линеаризуем правую часть уравнения (2.5) в окрестности начальной точки:

$$f(t,y) = f(t,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \dots \quad .$$

Производные компонент вектора $y(t)$ при $t \in [0, \tau_b]$ могут достигать значений $W \cdot \max |x_k(t)|$, где W – число, удовлетворяющее неравенству $0 < W \leq \|\partial f / \partial y\|$, и $\partial f / \partial y$ – матрица Якоби.

Систему дифференциальных уравнений (2.5) называют жесткой, если при любом векторе начальных условий y_0 найдутся такие числа $\tau_b \ll T_0$ и $0 < W \leq |\partial f / \partial y|$, $N \gg 1$, для которых справедливы неравенства:

$$\left| \frac{dy_k}{dt} \right|_{t \geq \tau_b} \leq \frac{W}{N} \max_{t \in [0, T_0]} |y_k(t)|, \quad k = \overline{1, m} \quad . \quad (2.6)$$

Важным является то обстоятельство, что понятие жесткости системы дифференциальных уравнений связано с интервалом $t \in [0, T_0]$, на котором ищется ее решение. Система уравнений, жесткая на интервале $t \in [0, T_0]$, не является жесткой на подинтервале $t \in [0, \tau_b]$. Применяя рассматриваемое определение к системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A \cdot y, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T_0],$$

получим следующие условия для собственных значений матрицы A жесткой системы:

$$|\lambda_k(A)| e^{\operatorname{Re} \lambda_k(A) \tau_b} \leq \frac{L}{N}, \quad L = \max_k |\lambda_k(A)|, \quad N \gg 1, \quad \tau_b \ll T_0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.7)$$

Оценим жесткость уравнений состояния схемы, представленной на рис. 2.1. Собственные значения матрицы состояния $\lambda_1 = -10^9 \text{ с}^{-1}$; $\lambda_2 = -10^6 \text{ с}^{-1}$. Интервал поиска решения $t \in [0, 10 \text{ мкс}]$. Константу W примем равной модулю максимального собственного значения $W = |\lambda_1| = 10^9 \text{ с}^{-1}$. Для пограничного слоя имеем: $\tau_b = 5\tau_{\min} = 5|1/\lambda_1| = 5 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. Выберем $N = 100$, тогда видно, что данная система жесткая, поскольку для нее выполняются неравенства

$$|\lambda_1| e^{\lambda_1 \tau_b} = 10^9 \cdot e^{-5} \cong 6,7 \cdot 10^6 \leq \frac{W}{N} = \frac{10^9}{100} = 10^7;$$

$$|\lambda_2| e^{\lambda_2 \tau_b} = 10^6 \cdot e^{-5 \cdot 10^{-3}} \cong 10^6 \leq \frac{W}{N} = 10^7.$$

Рассмотренная задача относится к классу так называемых сингулярно возмущенных задач. Действительно, из выражений $|\lambda_1| \gg |\lambda_2|$, $\lambda_1 \cong -R/L$ и $\lambda_2 \cong -1/RC$ следует $RC \gg LC = \mu$, поэтому уравнение (2.1) можно переписать в виде:

$$\mu \frac{di}{dt} + RC \frac{di}{dt} + i = \frac{U}{R},$$

где μ – малый параметр. Наличие малого параметра в уравнении или в системе уравнений – характерная особенность сингулярно возмущенных задач. Эта особенность позволяет достаточно просто расщеплять линейные задачи на несколько более простых, как это было сделано выше. В большинстве случаев сингулярно возмущенные задачи являются жесткими, однако ими далеко не исчерпывается множество жестких задач. Система уравнений может быть жесткой и в том случае, когда малый параметр выделить не удастся. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример.

Поставим вновь задачу параметрического синтеза для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.4.

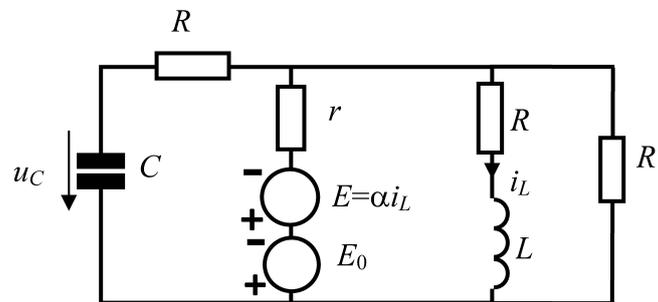


Рис. 2.4. Электрическая цепь, для которой решается задача параметрического синтеза

Будем полагать, что известны величины $R = 470$ Ом, $r = 270$ Ом, $C = 4$ пФ, и $E_0 = 1$ В. Пусть необходимо определить параметры α , L , R_1 по измеренным переменным состояниям $i_L(t)$ и $u_C(t)$. Допустим, что

известно точное решение: $\alpha^* = 0,866$ кОм, $L^* = 1,0$ мкГн, $R_1^* = 1$ кОм. Система уравнений состояния, описывающая переходный процесс, имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{R(\alpha R_1 - 2R_1 r - rR - R_1 R)}{L} & \frac{rR_1}{L} \\ \frac{R_1(\alpha - r)}{C} & -\frac{r + R_1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{E_0 R_1 R}{L} \\ \frac{E_0 R_1}{C} \end{bmatrix}, \quad \rho = rR_1 + RR_1 + rR$$

или

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} + \mathbf{b}, \quad (2.8)$$

где \mathbf{A} – матрица уравнений состояния, а \mathbf{b} – вектор источников.

Зависимости $i_L(t)$ и $u_C(t)$ при начальных условиях $i_L(0) = 100$ мА, $u_C(0) = 100$ В приведены на рис. 2.5, а для интервала времени $T_1 = [0, 50$ нс] и на рис. 2.5, б для интервала $T_2 = [0, 20$ мкс].

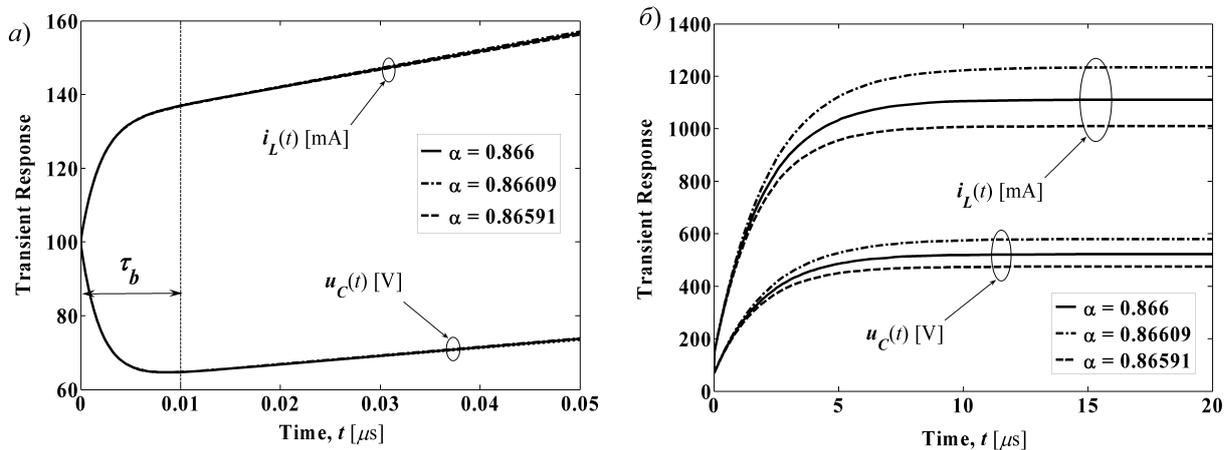


Рис. 2.5. Зависимости $i_L(t)$ и $u_C(t)$ вблизи пограничного слоя (а) и вне пограничного слоя (б) для различных значений коэффициента α

Анализ этих зависимостей позволяет приблизительно определить длительность пограничного слоя $\tau_b \approx 10$ нс, разделяющего переход-

ный процесс на два участка:

- участок пограничного слоя $t < \tau_b$, на котором переменные состояния $i_L(t)$, $u_C(t)$ изменяются быстро и производные $|i'_L(t)|$ и $|u'_C(t)|$ имеют большие значения;
- участок вне пограничного слоя $t > \tau_b$, на котором переменные состояния $i_L(t)$, $u_C(t)$ изменяются медленно.

Это свойство задачи позволяет сделать вывод о том, что она является жесткой. Можно утверждать, что матрица A является плохо обусловленной, то есть $|\lambda_{\max}(A)| \gg |\lambda_{\min}(A)|$. Действительно, нетрудно определить, что матрица A вырождена (имеет нулевое собственное значение), если

$$\alpha_0 = R + r + rR/R_1. \quad (2.9)$$

Заданное в условиях задачи значение $\alpha = \alpha^* = 0,866$ кОм близко к критическому $\alpha_0|_{r=270, R=470, R_1=R_1^*1000} = 0,8669$ кОм. Поэтому матрица A близка к вырожденной, и одно из ее собственных значений близко к нулю. Действительно, собственные значения матрицы A равны: $\lambda_1 \approx -512$ мкс⁻¹ и $\lambda_2 \approx -0,5$ мкс⁻¹.

Однако для данной задачи найденное свойство жесткости не позволяет сделать упрощающие предположения для получения соотношений между искомыми параметрами или для ее расщепления на более простые и менее жесткие задачи. Не удастся также выделить малый параметр. Здесь мы не утверждаем, что расщепление исходной задачи в принципе невозможно. Мы лишь обращаем внимание на характерную для практики ситуацию, когда для упрощения исходной задачи необходимо применение специальных методов. Такие методы будут рассмотрены в следующих параграфах настоящей главы. Здесь же мы продолжим решение с той целью, чтобы дать представление о трудностях, возникающие при решении жестких задач.

Перейдем к решению обратной задачи. Пусть $i_L^{\text{exp}}(t)$ и $u_C^{\text{exp}}(t)$ получены экспериментально в точках $t = t_m$, $m = 1, 2, \dots, M$. Параметры

α, L, R_1 будем искать из условия минимума функционала:

$$F(\alpha, L, R_1) = \max(\delta_u, \delta_i) \xrightarrow{\{\alpha, L, R_1\}} \min, \quad (2.10)$$

где

$$\delta_u = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M \left(\frac{u_C(t_m) - u_C^{\text{exp}}(t_m)}{u_C^{\text{exp}}(t_m)} \right)^2}, \quad \delta_i = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M \left(\frac{i_L(t_m) - i_L^{\text{exp}}(t_m)}{i_L^{\text{exp}}(t_m)} \right)^2},$$

$i_L(t_m) = i_L(t, \alpha, L, R_1)|_{t=t_m}$ и $u_C(t_m) = u_C(t, \alpha, L, R_1)|_{t=t_m}$. Эти величины

получены из решения уравнений (2.8) при некоторых текущих значениях искомых параметров α, L, R_1 и при начальных условиях

$i_L^{\text{exp}}(t)|_{t=0} = i_L(0), u_C^{\text{exp}}(t)|_{t=0} = u_C(0)$. Такой подход к решению задач

параметрического синтеза в различных его модификациях является одним из основных и часто используется на практике. Оценим возможность его применения к решению жестких задач.

На практике решение жесткой системы уравнений (2.8) выполняют численно. Для вычисления функционала $F(\alpha, L, R_1)$ используем аналитическое решение этой системы уравнений. Такой подход позволит устранить влияние погрешности численного интегрирования уравнений (2.8) на решение задачи параметрического синтеза. Решение имеет вид:

$$\begin{cases} i_L(t) = i_L(\infty) + A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t} \\ u_C(t) = u_C(\infty) + A_2 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases} \quad (2.11)$$

где λ_1 и λ_2 – собственные числа матрицы \mathbf{A} , $(i_L(\infty), u_C(\infty))^T = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ – вектор установившихся значений переменных состояния. Постоянные равны

$$A_1 = \frac{(a_{11} - \lambda_2)\Delta i_L + a_{12}\Delta u_C}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad B_1 = -\frac{(a_{11} - \lambda_1)\Delta i_L + a_{12}\Delta u_C}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$A_2 = \frac{(a_{22} - \lambda_2)\Delta u_C + a_{21}\Delta i_L}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (2.12)$$

$$B_2 = -\frac{(a_{22} - \lambda_1)\Delta u_C + a_{21}\Delta i_L}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \text{где } \Delta i_L = i_L(0) - i_L(\infty), \Delta u_C = u_C(0) - u_C(\infty).$$

Минимизация (2.10) выполнялась симплексным методом Нелдера-Мида для 50 различных начальных приближений $(\alpha^{(0)}, L^{(0)}, R_1^{(0)})$. Начальные приближения выбирались случайным образом из заданных интервалов поиска параметров: $\alpha^{(0)} \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $L^{(0)} \in [L_{\min}, L_{\max}]$ и $R_1^{(0)} \in [R_{\min}, R_{\max}]$. При их выборе было наложено условие $\alpha^{(0)} < \alpha_0(R_1^{(0)})$. Последнее позволяет оставаться в области отрицательных собственных значений матрицы \mathbf{A} и использовать формулы (2.11) – (2.12) для расчета реакции цепи. В каждом случае решение считалось найденным, если для двух последующих итераций приращение параметров в соответствующих единицах не превышало 10^{-10} .

На рис. 2.6 представлены результаты численного эксперимента.

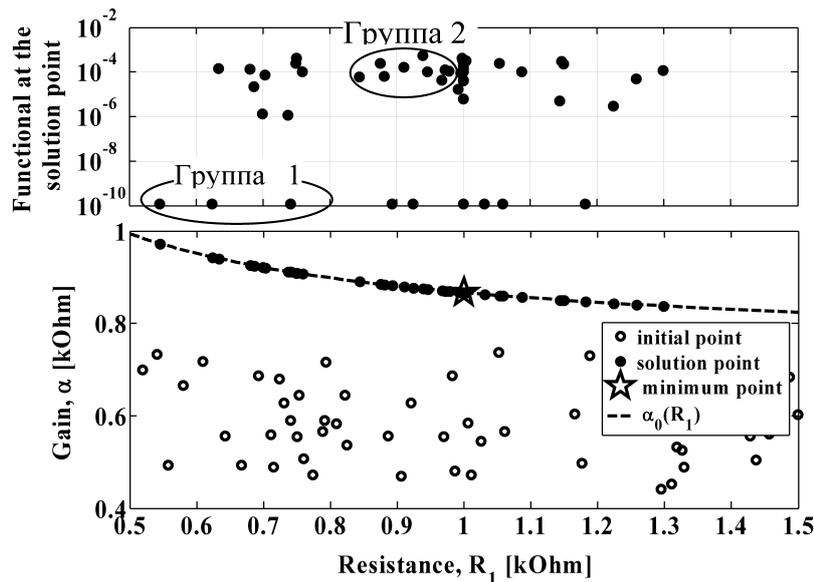


Рис. 2.6. Результаты численного решения задачи (2.10) с различными начальными условиями для коэффициента α

Рассмотрим их подробнее. На рис. 2.6 приближенные решения, объединенные в Группу 1, соответствуют большому значению минимизируемого функционала F , но расположены вблизи решения (2.10).

Приближенные решения, объединенные в Группу 2, характеризуются малым значением F , но расположены далеко от решения (2.10). Символом \star показано точное решение задачи (2.10), дающее глобальный минимум функционала F . В нижней части рисунка на плоскости α, R_1 показаны начальные приближения (символ \circ) при некотором значении $L \in [L_{\min}, L_{\max}]$ и соответствующие им решения (символ \bullet) задачи (2.10). Эта часть рисунка показывает, что все найденные решения расположены на кривой $\alpha_0(R_1)$ и что большинство из них далеки от правильного решения задачи.

Значения минимума функционала F для каждого из найденных решений показаны в верхней части рис. 2.6. Можно видеть, что значение функционала в точках, удаленных от глобального минимума (например, группа точек 1), зачастую значительно ниже, чем в точках, расположенных в его окрестности (например, группа точек 2). На практике столь подробное изучение поверхности уровня функционала производится редко. Обычно ограничиваются нахождением первого же минимума с приемлемо малым значением ($\sim 10^{-10}$ в рассматриваемом случае). Это решение может оказаться весьма далеким от истинного.

Отметим, что минимизация функционала F выполнялась в идеализированных условиях использования известного аналитического решения. Кроме того, была выбрана относительно простая задача параметрического синтеза. Степень жесткости задачи, которую можно характеризовать отношением $|\lambda_{\max}(\mathbf{A})|/|\lambda_{\min}(\mathbf{A})| \approx 10^3$, не чрезмерно высока. При минимизации использовались начальные условия, близкие к решению. Тем не менее, изложенное показывает, что решение данной задачи параметрического синтеза в принятой, как отмечалось наиболее часто используемой постановке, вызывает значительные трудности.

Проблемы, возникающие при решении, связаны с тем, что в пространстве переменных α, R поверхности уровня функционала F

имеют форму оврага. Для наглядной иллюстрации этого поверхность уровня функционала F на рис. 2.7 представлена для значений $\alpha^* = 0,86$ кОм и $L^* = 1$ мкГн.

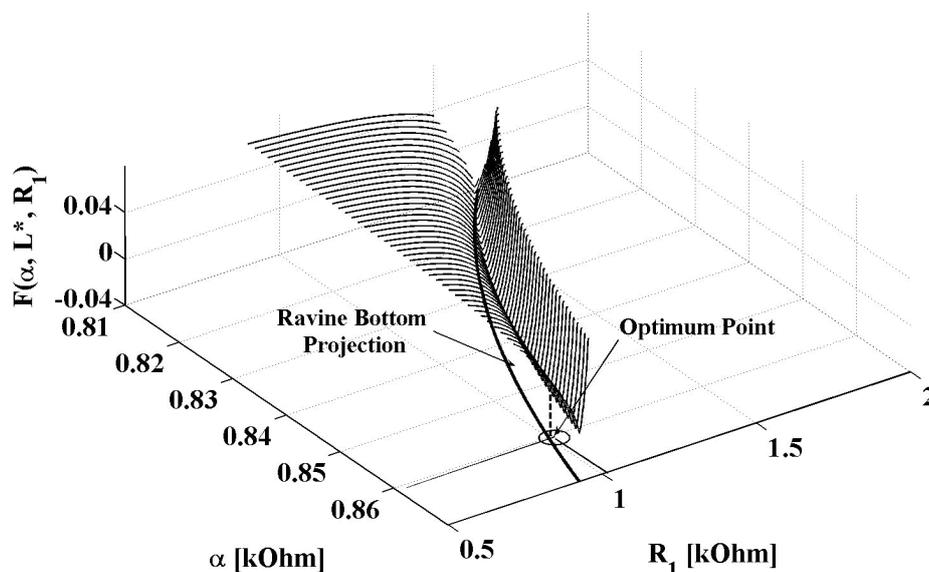


Рис. 2.7. Рельеф минимизируемого функционала F в координатах α , R_1 при $L = L^*$ и проекция дна оврага на плоскость α , R_1

Исходная задача при $\alpha^* = 0,866$ кОм характеризуется более «глубоким» оврагом, что достаточно сложно представить наглядно. Точка минимума находится на дне оврага с очень крутыми стенами. При этом изменение функционала вдоль дна оврага незначительно даже при значительном изменении параметров. Именно поэтому некоторые из решений, полученных выше, расположены достаточно близко от точки истинного минимума, но дают большие значения функционала. Они находятся на крутой стенке оврага. Заметим, что проекция дна оврага суть кривая линия.

Важно, что и в пространстве переменных α , L функционал F также имеет овражную структуру с оврагом, направленным вдоль координатной оси L . Таким образом, функционал рассматриваемой обратной задачи является овражным, а сама задача является жесткой.

Рассмотренный пример приводит к важному общему выводу: в тех случаях, когда объект (в данном случае электрическая цепь) пара-

метрического синтеза, диагностики или математического моделирования обладает свойством жесткости, то и соответствующая обратная задача обладает этим свойством.

Введем, определение овражного функционала. *Гладкий функционал $F(x)$ $x \in \mathbf{R}^m$ (m -мерное евклидово пространство) называется овражным, если существует область $G \in \mathbf{R}^m$, где собственные числа матрицы Гессе $F''(x)$, упорядоченные в любой точке $x \in G$ по убыванию абсолютных значений, удовлетворяют неравенствам:*

$$\lambda_1(x) \gg \left| \min_i \lambda_i(x) \right|. \quad (2.13)$$

Если матрица Гессе $F''(x)$ функционала положительно определена (все ее собственные значения больше нуля), то неравенство (2.13) эквивалентно условию плохой обусловленности гессиана:

$$\Theta = \frac{\lambda_{\max}(F'')}{\lambda_{\min}(F'')} \gg 1,$$

где Θ – спектральное число матрицы Гессе. Для дальнейшего будет удобно дать еще одно эквивалентное определение овражного функционала, использующего его траекторию наискорейшего спуска. Траектория наискорейшего спуска функционала $F(x)$ описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\xi} = -F'(\xi), \quad x(0) = x_0. \quad (2.14)$$

Гладкий функционал $F(x)$ овражный, если система дифференциальных уравнений (2.14) жесткая.

Методам минимизации овражных функционалов посвящено много работ, обсуждение которых выходит за рамки данной книги. Подчеркнем лишь, что широко используемые на сегодняшний момент методы минимизации неэффективны при оврагах произвольной формы. Например, метод покоординатного спуска позволяет решать задачи с линейным оврагом, расположенным вдоль одной из координатных осей. Модифицированный метод конфигураций Хука-Дживса и метод вращения осей Розенброка можно использовать при нелиней-

ных, но одномерных оврагах. Симплексный метод, выбранный нами для решения настоящей задачи, эффективнее других для решения задачи с многомерным нелинейным оврагом (при небольшом числе переменных). Он не использует градиент функционала, а, следовательно, его эффективность не зависит от соотношения производных вдоль и поперек дна оврага. Однако, как было видно, и этот метод дает плохой результат ввиду слабой сходимости в зоне оврага. И это несмотря на то, что использовалось аналитическое решение для отклика цепи, областью поиска параметров была малая окрестность решения задачи, и начальные приближения были близкими к решению.

Необходимо также отметить и другие проблемы, возникающие при решении жестких обратных задач. Обычно (например, уже для цепи, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка) не удастся записать аналитическое выражение для функционала, как это было сделано выше. Тогда значения функционала приходится рассчитывать численно. Так, например, для расчета функционала (2.10) потребовалось бы численно решить систему дифференциальных уравнений (2.8). Поскольку она жесткая, то для ее интегрирования приходится применять специальные методы, которые требуют повышенных вычислительных затрат. Таким образом, уже простейший пример показывает актуальность разработки новых методов, позволяющих строить эффективные вычислительные процедуры, учитывающие особенности жестких задач. Именно такие методы рассматриваются ниже в настоящей главе.

В заключение рассмотрим еще одно важное свойство жестких обратных задач. Будем далее считать, как это и имеет место в практических задачах, что значения переменных $i_L^{\text{exp}}(t_m)$ и $u_C^{\text{exp}}(t_m)$ измерены с некоторой относительной погрешностью $\rho \cdot \Delta_{\text{max}}$, где $\rho \in [-1, 1]$ – случайная величина и Δ_{max} – относительная погрешность измерения, характеризующая класс точности приборов.

Пусть, выполнив измерения $i_L^{\text{exp}}(t_m)$ и $u_C^{\text{exp}}(t_m)$ с погрешностью $\Delta_{\text{max}} = 0,01 \%$, удалось решить задачу (2.10) с помощью некоторого метода минимизации. При этом значение коэффициента зависимого источника составило $\alpha_{\text{exp}} = 0,8660000$. Естественно полагать, что α_{exp} определено с относительной погрешностью, не превышающей Δ_{max} . Таким образом, решение обратной задачи будет записано в виде $\alpha_{\text{exp}} = 0,86600 \pm 0,00009$, что на первый взгляд представляется как хороший результат. Посмотрим, как меняется отклик цепи, изображенной на рис. 2.4 при изменении α в этом диапазоне. Вид переходного процесса при найденных значениях параметров представлен на рис. 2.5, б пунктирной и штрихпунктирной линиями.

Получен неожиданный результат, характерный, однако, для жестких задач. Погрешность воспроизведения математической моделью моделируемого процесса вне пограничного слоя составляет $\sim 10 \%$ и в сотни раз превышает погрешность $\Delta_{\text{max}} = 0,01 \%$, с которой были получены экспериментальные данные $i_L^{\text{exp}}(t)$, $u_C^{\text{exp}}(t)$. Следовательно, построенная в результате решения обратной задачи математическая модель не адекватна реальному объекту, и полученное решение неприемлемо.

Причина плохой адекватности модели в этом случае заключается в сильном искажении малого собственного числа λ_2 матрицы \mathbf{A} при задании ее элементов с некоторой малой погрешностью. Это, в свою очередь, является следствием того, что в плохо обусловленной матрице \mathbf{A} информация о малом собственном значении содержится в младших числовых разрядах ее элементов. И именно эти разряды искажаются при задании элементов матрицы. Так при точном значении $\alpha = 0,86600$ кОм, собственные значения равны:

$$\lambda_1 = -512,6128415 \text{ мкс}^{-1}, \lambda_2 = -0,5063187795 \text{ мкс}^{-1},$$

а при $\alpha = 0,86609$ кОм они равны:

$$\lambda_1 = -512,6146800 \text{ мкс}^{-1}, \lambda_2 = -0,4556853442 \text{ мкс}^{-1}.$$

Таким образом, при ошибке в параметре α на 0,01 %, ошибка в большом собственном числе составляет $\sim 0,00036$ %, а в малом – 10 %. Именно поэтому максимальная погрешность порядка 10 % наблюдается и в воспроизведении процесса моделью.

Максимальную погрешность модели можно оценить следующим образом. Число обусловленности матрицы \mathbf{A} составляет $\Theta(\mathbf{A}) = |\lambda_1|/|\lambda_2| \approx 1500$. Всегда можно выбрать такой масштаб (такую систему единиц измерения), при котором модуль большего собственного числа λ_1 равен единице. Тогда $\|\mathbf{A}\|$ также будет порядка единицы, а модуль малого собственного значения составит $|\lambda_2| = 1/1500 = 6,7 \cdot 10^{-4}$. Пусть относительное изменение значений элементов матрицы равно $\delta_a = 10^{-4}$. Тогда абсолютное изменение значений элементов составляет $\Delta a_{i,j} = \|\mathbf{A}\| \cdot \delta_a \approx \delta_a = 10^{-4}$. Учитывая то, что информация о малом собственном числе λ_2 находится в младших разрядах элементов матрицы $a_{i,j}$, относительная погрешность λ_2 равна $\delta_\lambda = \Delta a_{i,j}/|\lambda_2| = \Delta a_{i,j} \cdot \Theta(\mathbf{A}) \approx 15$ %. Это хорошо совпадает с результатами численного эксперимента.

2.2. ПРИНЦИПЫ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛОВ

В настоящем параграфе рассмотрим один из основных принципов эффективного решения жестких обратных задач – принцип квазистационарности производных [4]. Изложим его применительно к жестким системам линейных дифференциальных уравнений. В конце параграфа будет показано, как его можно использовать при поиске решения плохо обусловленных систем алгебраических уравнений, к которым сводятся обратные задачи.

Рассмотрим неоднородную жесткую систему линейных дифференциальных уравнений, матрица Якоби которой отрицательно определена, то есть имеет только вещественные отрицательные собственные значения:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathbf{A}y + \mathbf{b}, \quad t \in [0, T], y(0) = y_0, \quad y(t) = [y_1(t) \dots y_m(t)]^T, \quad \mathbf{b} = \text{const}. \quad (2.15)$$

В этом наиболее простом случае из жесткости системы уравнений (2.15) следует, что матрица \mathbf{A} плохо обусловлена. Упорядочим собственные числа $\lambda(\mathbf{A})$ матрицы \mathbf{A} по убыванию абсолютных значений. Будем предполагать, что их можно разделить по значениям на две группы $\lambda_i \quad i = \overline{1, k}$ и $\lambda_i \quad i = \overline{k+1, m}$ в соответствии с неравенствами

$$|\lambda_{\max}| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_k| \gg |\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_{k+2}| \geq \dots \geq |\lambda_m| = |\lambda_{\min}|, \quad (2.16)$$

где λ_{\max} и λ_{\min} – соответственно максимальное и минимальное по абсолютному значению собственные числа.

Согласно определению жесткой системы, рассмотренному в предыдущем параграфе, на интервале решения $t \in [0, T]$ существует пограничный слой длительностью τ_b . Он разделяет интервалы быстрого и медленного изменения переменных $y(t)$.

На рис. 2.8 представлена типичная зависимость компоненты $y_p(t)$ вектора $y(t)$ в линейном (с искажением масштаба по времени – рис. 2.8, а) и логарифмическом (рис. 2.8, б) масштабах.

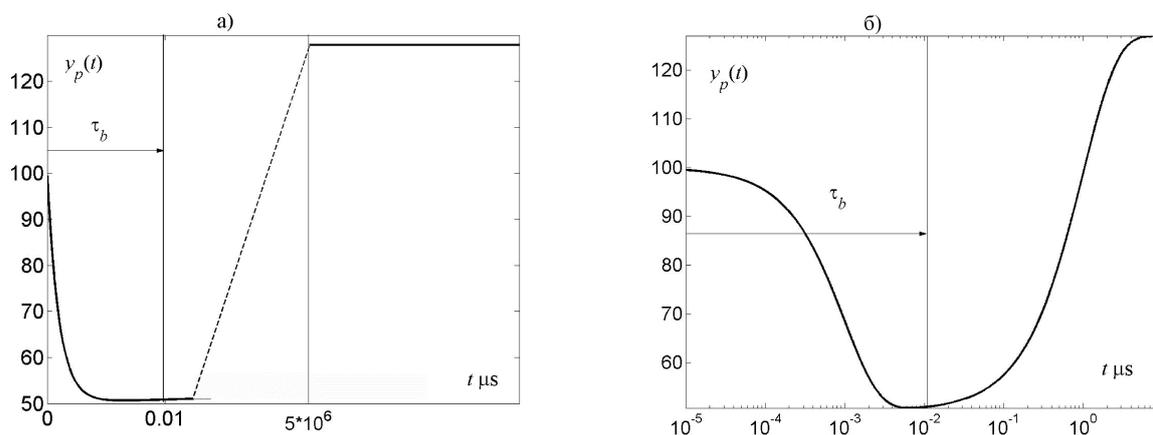


Рис. 2.8. Типичная зависимость от времени для одной из переменных жесткой системы дифференциальных уравнений в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах

Можно видеть большие различия в поведении решения внутри и вне пограничного слоя. Производная $y_1'(t)$ вне пограничного слоя

имеет значительно меньшее по модулю значение, чем внутри его. Аналогично, для всех компонент вектора $y(t)$ выполняются неравенства:

$$\left\| \frac{dy_i(t)}{dt} \right\|_{t \geq \tau_b} \ll \left\| \frac{dy_i(t)}{dt} \right\|_{t < \tau_b}, i = \overline{1, m}.$$

Это характерное для жестких задач свойство решения лежит в основе принципа квазистационарности производных. Согласно этому принципу решение жесткой системы дифференциальных уравнений (2.15) m -го порядка вне пограничного слоя можно с высокой точностью описать решением менее жесткой системы дифференциальных уравнений порядка $m - k$ и системой линейных алгебраических связей k -го порядка.

Линейные связи определяются из условия квазистационарности $(n - 1)$ -ой производной решения вне пограничного слоя. При этом квазистационарность, или, что то же самое, постоянство $(n - 1)$ -ой производной решения означает, что его n -ая производная равна нулю. В действительности $(n - 1)$ -ая производная вне пограничного слоя изменяется очень медленно в сравнении с ее изменением внутри пограничного слоя. Она «почти» постоянна или квазистационарна, что и определило соответствующее название принципа.

Принцип квазистационарности производных, является конструктивным в том смысле, что он не только постулирует упрощение описания поведения решения жесткой системы вне пограничного слоя, но и показывает, как это может быть сделано. Продифференцируем по t систему уравнений (2.15) n раз:

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{y} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \quad \dots \quad \frac{d^n \mathbf{y}}{dt^n} = \mathbf{A}^{n-1} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{y} + \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{b}.$$

В соответствии с принципом квазистационарности производных приравняем к нулю n -ую производную. При этом $(n - 1)$ -ая производная вне пограничного слоя предполагается квазистационарной (постоянной):

$$\left. \frac{d^n \mathbf{y}(t)}{dt^n} \right|_{t > \tau_b} = \mathbf{A}^n \mathbf{y}(t) + \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} = 0.$$

Линейные соотношения $\mathbf{A}^n \mathbf{y} = -\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}$ позволяют определить « k » любых компонент вектора $\mathbf{y}(t)$ через остальные $m - k$ компоненты. Пусть для определенности это будут « k » первых компонент $\mathbf{y}_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, составляющие вектор $\mathbf{y}_1 = [y_1, y_2, \dots, y_k]^T$. Оставшиеся компоненты $\mathbf{y}(t)$ образуют вектор $\mathbf{y}_2 = [y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_m]^T$, и тогда линейные связи между компонентами вектора $\mathbf{y}(t)$ можно записать в виде:

$$\mathbf{A}^n \mathbf{y} = -\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}, \text{ или } \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,1}^{(n)} & \mathbf{Q}_{1,2}^{(n)} \\ \mathbf{Q}_{2,1}^{(n)} & \mathbf{Q}_{2,2}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,1}^{(n-1)} & \mathbf{Q}_{1,2}^{(n-1)} \\ \mathbf{Q}_{2,1}^{(n-1)} & \mathbf{Q}_{2,2}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{1,1}^{(n)} \mathbf{y}_1 + \mathbf{Q}_{1,2}^{(n)} \mathbf{y}_2 = -\mathbf{Q}_{1,1}^{(n-1)} \mathbf{b}_1 - \mathbf{Q}_{1,2}^{(n-1)} \mathbf{b}_2, \text{ откуда} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}_1 = -\left(\mathbf{Q}_{1,1}^{(n)}\right)^{-1} \left(\mathbf{Q}_{1,2}^{(n)} \mathbf{y}_2 + \mathbf{Q}_{1,1}^{(n-1)} \mathbf{b}_1 + \mathbf{Q}_{1,2}^{(n-1)} \mathbf{b}_2\right) = \mathbf{L}^{(n)} \mathbf{y}_2 + \mathbf{l}^{(n)}.$$

Матрица $\mathbf{L}^{(n)}$ и вектор $\mathbf{l}^{(n)}$ определяются из соотношений

$$\mathbf{L}^{(n)} = -\left(\mathbf{Q}_{1,1}^{(n)}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{1,2}^{(n)}, \quad \mathbf{l}^{(n)} = -\left(\mathbf{Q}_{1,1}^{(n)}\right)^{-1} \left(\mathbf{Q}_{1,1}^{(n-1)} \mathbf{b}_1 + \mathbf{Q}_{1,2}^{(n-1)} \mathbf{b}_2\right). \quad (2.18)$$

В (2.18) $\mathbf{Q}^{(0)} = 1$. Как будет показано далее, значение $n = 2 \div 4$ является достаточным для качественного определения линейных связей.

При подстановке вектора \mathbf{y}_1 в систему уравнений (2.15) ее порядок понижается до $m - k$:

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, \text{ или } \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\frac{d\mathbf{y}_2(t)}{dt} = a_{2,1} \mathbf{y}_1 + a_{2,2} \mathbf{y}_2 + \mathbf{b}_2 = a_{2,1} \left(\mathbf{L}^{(n)} \mathbf{y}_2 + \mathbf{l}^{(n)}\right) + a_{2,2} \mathbf{y}_2 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{y}_2 + \mathbf{d}^{(n)},$$

Матрица $\mathbf{D}^{(n)}$ и вектор $\mathbf{d}^{(n)}$ определяются из соотношений:

$$\mathbf{D}^{(n)} = a_{2,1} \mathbf{L}^{(n)} + a_{2,2}, \quad \mathbf{d}^{(n)} = a_{2,1} \mathbf{l}^{(n)} + \mathbf{b}_2.$$

Уравнения линейных связей (2.17) совместно с редуцированной системой дифференциальных уравнений (2.19) описывают решения жесткой системы (2.15) вне пограничного слоя.

В предыдущем параграфе было показано, что система дифференциальных уравнений, описывающая переходный процесс в электрической цепи, представленной на рис. 2.4, является жесткой. Получим редуцированную систему уравнений и линейные связи вне пограничного слоя. После подстановки в систему уравнений (2.8) значений параметров $R = 0,47$ кОм, $r = 0,27$ кОм, $\alpha = 0,866$ кОм, $C = 4$ пкФ, $L = 1$ мкГн, $E_0 = 1$ В получим (здесь ток измеряется в миллиамперах и напряжение в вольтах):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -146,8716 & 311,45461 \\ 171,8768 & -366,2475 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 542,1617 \\ 288,3839 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \mathbf{y}_0.$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A} $\mathbf{L}^{(n)}$, $\mathbf{D}^{(n)}$ равны $\lambda_1 \approx -512$ мкс⁻¹ и $\lambda_2 \approx -0,5$ мкс⁻¹. Матрицы $\mathbf{Q}_{k,p}^{(n)}$, $k, p = 1, 2$, $\mathbf{L}^{(n)}$, $\mathbf{D}^{(n)}$ и векторы $\mathbf{l}^{(n)}$, $\mathbf{d}^{(n)}$, входящие в (2.16)-(2.19), являются в этой задаче скалярными величинами. Поэтому будем далее обозначать их как $Q_{k,p}^{(n)}$, $k, p = 1, 2$, $L^{(n)}$, $D^{(n)}$, $\ell^{(n)}$, $d^{(n)}$.

Определим линейные связи между переменными $i_L(t)$ и $u_C(t)$ при различных n .

Пусть $n = 1$, что соответствует предположению о квазистационарности вектора переменных вне пограничного слоя. Тогда линейная связь (2.17)-(2.18) определяется из первого уравнения системы уравнений:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0, \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{b}.$$

Подставляя в (2.20) численные значения, получаем:

$$a_{1,1}i_L + a_{1,2}u_C = -b_1, \quad \text{откуда} \quad i_L = \underbrace{\left(-a_{1,2}/a_{1,1}\right)}_{L^{(1)}} u_C + \underbrace{\left(-b_1/a_{1,1}\right)}_{\ell^{(1)}} =$$

$$= \frac{-311,4546}{-146,8768}u_C + \frac{-542,1617}{-146,8768} = 2,1206u_C + 3,6914.$$

Значение $n = 2$ соответствует предположению о квазистационарности вне пограничного первой производной вектора переменных. Линейная связь определяется из первого уравнения системы уравнений

$$\frac{d^2 \mathbf{y}(t)}{dt^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{y} = -\mathbf{A} \mathbf{b},$$

тогда:

$$i_L = \underbrace{\left(-\left(Q_{1,1}^{(2)}\right)^{-1} Q_{1,2}^{(2)}\right)}_{L^{(2)}} u_C + \underbrace{\left(-\left(Q_{1,1}^{(2)}\right)^{-1} (a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2)\right)}_{\ell^{(2)}} =$$

$$= 2,1279u_C - 0,1357$$

Примем $n = 3$, что соответствует предположению о квазистационарности вне пограничного второй производной вектора переменных. Линейная связь определяется из первого уравнения системы уравнений

$$\frac{d^3 \mathbf{y}(t)}{dt^3} = 0, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{b},$$

тогда:

$$i_L = \underbrace{\left(-\left(Q_{1,1}^{(3)}\right)^{-1} Q_{1,2}^{(3)}\right)}_{L^{(3)}} u_C + \underbrace{\left(-\left(Q_{1,1}^{(3)}\right)^{-1} (Q_{1,1}^{(2)}b_1 + Q_{1,2}^{(2)}b_2)\right)}_{\ell^{(3)}} =$$

$$= 2,1279u_C - 0,1395.$$

Сопоставляя выражения для коэффициентов линейных связей, полученных при $n = 2$ и при $n = 3$, можем отметить, что они очень близки. В данной задаче можно определять коэффициенты линейной связи и из второго уравнения, и результат, конечно, получится тем же.

Воспользуемся найденными линейными связями для уменьшения размерности системы уравнений (2.20). В результате получим системы алгебро-дифференциальных уравнений, дающих приближенное описание процесса за пограничным слоем:

$$\begin{aligned}
 n = 1, \quad \frac{du_C}{dt} &= -1,7672u_C + 922,8497, \quad i_L = 2,1206u_C + 3,6914, \\
 n = 2, \quad \frac{du_C}{dt} &= -0,5076u_C + 265,0629, \quad i_L = 2,1279u_C - 0,1357, \quad (2.21) \\
 n = 3, \quad \frac{du_C}{dt} &= -0,5063u_C + 264,4116, \quad i_L = 2,1279u_C - 0,1395.
 \end{aligned}$$

На рис. 2.9, а и б показаны в логарифмическом масштабе точное и приближенные решения системы уравнений (2.20).

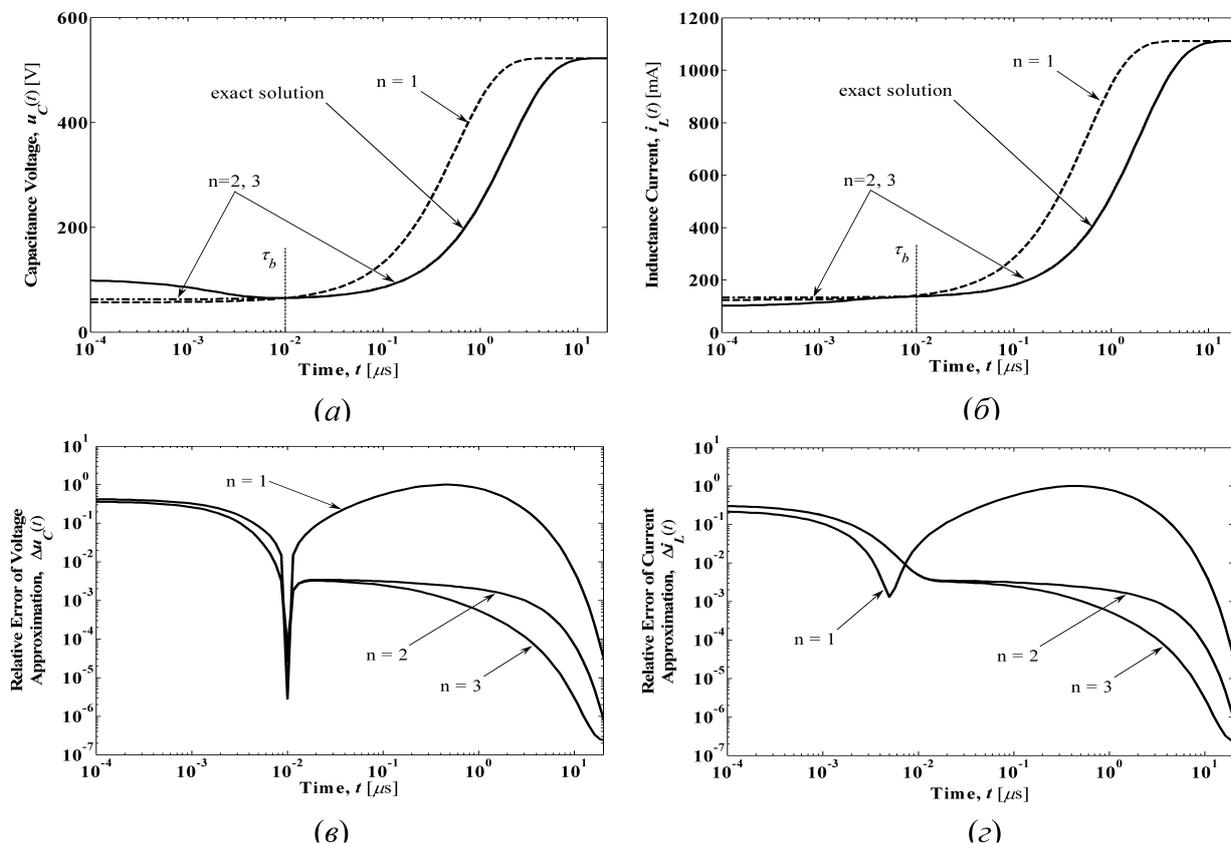


Рис. 2.9. Зависимости $u_C(t)$ – (а) и $i_L(t)$ – (б) и аппроксимирующие их выражения, полученные с помощью линейных связей, при различных n для $t > \tau_b$, погрешности аппроксимации $\Delta u_C(t)$ – (в) и $\Delta i_L(t)$ – (г)

Вне пограничного слоя составляющие решения, содержащие множитель $e^{\lambda_1 t}$, затухли, следовательно, решение содержит только составляющие с множителем $e^{\lambda_2 t}$. Поэтому качество полученных результатов характеризуется близостью коэффициента при u_C в дифференциальном уравнении к значению $\lambda_2 \approx -0,5063$. Из выражений (2.21) видно, что при $n = 2$ и $n = 3$ данное условие достаточно хорошо выполняется. Это свидетельствует о корректности допущения о квазистационарности вне пограничного слоя вектора первых ($n = 2$) и вторых ($n = 3$) производных.

Постоянная интегрирования в решении приближенных дифференциальных уравнений (2.21) определялась с использованием точного значения переменной $u_C(t)$ при $t = \tau_b$. На рис. 2.9, в и г приведены зависимости $\Delta i_L(t)$ и $\Delta u_C(t)$ относительных погрешностей приближенных решений системы уравнений (2.20). Как видно, уже при $n = 2$ точное и приближенное решения хорошо совпадают.

Рассмотрим далее решение системы уравнений (2.15) внутри пограничного слоя. Произвольную компоненту $y_p(t)$ решения $\mathbf{y}(t)$ системы уравнений (2.15) представим в виде

$$y_p(t) = y_p(\infty) + \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_{i,p} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=k+1}^{i=m} \alpha_{i,p} e^{\lambda_i t}, p = \overline{1, m},$$

где $\alpha_{i,p}$ – константы, определяемые начальными условиями. Считаем, что для собственных чисел матрицы \mathbf{A} выполняются неравенства (2.16). На интервале пограничного слоя вторая сумма в (2.21) изменяется незначительно. Поэтому ее можно аппроксимировать линейной функцией. В то же время первая сумма экспоненциально убывает до нуля (до весьма малого значения).

Применим принцип квазистационарности производных «в обратном направлении» и вычислим не производную, а интеграл от вектора переменных. Для этого введем новую переменную $\tau = t/T$, где $T = 5/|\lambda_{k+1}|$, и проинтегрируем обе части уравнения (2.15) от 0 до τ :

$$\frac{1}{T} \int_0^\tau \frac{dy}{d\tau} d\tau = \int_0^\tau (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}) d\tau = \mathbf{A} \int_0^\tau \mathbf{y} d\tau + \mathbf{b}\tau, \quad \text{откуда} \quad \int_0^\tau \mathbf{y} d\tau = \frac{\mathbf{A}^{-1}}{T} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \mathbf{y}_\infty \tau.$$

Здесь $\mathbf{y}_\infty = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ – вектор установившихся значений переменных.

Вычислим второй интеграл от вектора переменных:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^\tau \mathbf{y} d\tau d\tau &= \frac{\mathbf{A}^{-1}}{T} \int_0^\tau \mathbf{y} d\tau - \frac{\mathbf{A}^{-1}}{T} \mathbf{y}_0 \tau + \frac{1}{2} \mathbf{y}_\infty \tau^2 = \mathbf{A}^{-2} T^{-2} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) - \\ &- \mathbf{A}^{-1} T^{-1} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\infty) \tau + \frac{1}{2} \mathbf{y}_\infty \tau^2. \end{aligned}$$

Аналогично n -й интеграл от вектора переменных получим в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^\tau \dots \int_0^\tau \mathbf{y} (d\tau)^n &= \mathbf{A}^{-n} T^{-n} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) - \\ &- \left(\mathbf{A}^{-n+1} T^{-n+1} \tau - \frac{1}{2} \mathbf{A}^{-n+2} T^{-n+2} \tau^2 - \frac{1}{(n-1)!} \mathbf{A}^{-1} T^{-1} \tau^{n-1} \right) \times \\ &\times (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\infty) + \frac{\mathbf{y}_\infty}{n!} \cdot \tau^n. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Внутри пограничного слоя имеем $\tau \ll 1$, так как $\tau T \leq \tau_b \approx 5/|\lambda_k| \ll T$. Поэтому в выражении (2.22) можем пренебречь всеми членами за исключением линейных. Считая $(n+1)$ -ый интеграл решения квазистационарным, приравниваем n -ый интеграл решения к нулю. Умножая обе части полученного равенства на T^n , получим соотношение для линейных связей внутри пограничного слоя:

$$\mathbf{A}^{-n} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) - \mathbf{A}^{-n+1} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\infty) t = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Допущение о равенстве нулю интеграла (2.22), принятое для получения линейной связи (2.23), является достаточно обоснованным, что можно увидеть на примере системы (2.15) при $m=2$. Одно из решений системы внутри пограничного слоя при условии (2.16), как уже упоминалось, можно представить в виде:

$$y_1(\tau) \approx y_1(\infty) + ae^{\lambda_{\max} T \tau} + bT\tau + c,$$

где a , b и c – некоторые числа, $T = 5/|\lambda_{\min}|$ – приблизительное время переходного процесса. Проинтегрировав решение n раз

$$\int_0^\tau \int_0^\tau \dots \int_0^\tau y_1(dt)^n = \frac{a}{\lambda_{\max}^n T^n} (e^{\lambda_{\max} t} - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a}{\lambda_{\max}^{n-k} T^{n-k} k!} \cdot \tau^k +$$

$$+ \frac{y_1(\infty) + c}{n!} \cdot \tau^n + \frac{bT}{(n+1)!} \cdot \tau^{n+1}$$

можно убедиться, что при $|\lambda_-| \gg |\lambda_+|$ и $\tau \leq \tau_+ = 5/|\lambda_-|$ первые два члена близки к нулю, так как $|\lambda_{\max}^n T^n| = 5 \left(|\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \right)^n \gg 1$. Остальные члены малы, поскольку $\tau \ll 1$, т.е. n -кратный интеграл квазистационарен.

Используем (2.23) для определения линейной связи между переменными $i_L(t)$ и $u_C(t)$ уравнений (2.20) для различных n . Искомая линейная связь между переменными внутри пограничного слоя имеет вид

$$i_L(t) = \alpha u_C(t) + \beta + \gamma t, \quad t \leq \tau_b.$$

Коэффициенты этой зависимости, полученные из соотношений (2.23) при различных n приведены в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

Коэффициенты линейной связи между переменными $i_L(t)$ и $u_C(t)$ внутри пограничного слоя

n	α		β		γ	
	значение	относительная погрешность (%)	значение	относительная погрешность (%)	значение	относительная погрешность (%)
1	-0,850394	0,1	185,0394	0,1	716,5354	3,2
2	-0,851570	10^{-4}	185,1570	10^{-4}	693,9369	10^{-4}
3	-0,8515709	10^{-8}	185,15709	10^{-8}	693,9926	10^{-5}

Как показывают приведенные в табл. 2.1 данные, точность определения линейных связей быстро возрастает с ростом n . Поэтому на практике достаточно принимать $n = 2 \div 4$. При этом можно заметить, что коэффициент β можно вычислить по известным начальным условиям как $\beta = i_L(0) - \alpha u_C(0)$, или в общем виде

$$\beta = y_1(0) - \sum_{i=2}^k \alpha_i y_i(0) .$$

Построим далее упрощенную модель системы на интервале пограничного слоя. Для этого подставим линейную связь, полученную для $n = 3$, в исходную систему уравнений (2.20). В результате получим

$$\begin{aligned} n = 3, \quad \frac{du_C}{dt} &= -512,6128u_C + 3,2112 \cdot 10^4 + 1,1969 \cdot 10^5 t, \\ i_L &= -0,8515709u_C + 185,15709 + 693,9926t. \end{aligned} \quad (2.24)$$

На интервале пограничного слоя составляющие решения с множителем $e^{\lambda_2 t}$ малы, следовательно, решение содержит только составляющие с множителем $e^{\lambda_1 t}$. Поэтому качество полученных результатов характеризуется близостью коэффициента в дифференциальном уравнении для u_C к $\lambda_1 = -512,6128415 \text{ мкс}^{-1}$. Видно, что аппроксимация (2.24) при $n = 3$ хорошо описывает процесс в исходной цепи.

Очевидно, что аналогичным образом можно исключить из исходной системы дифференциальных уравнений $u_C(t)$ вместо $i_L(t)$. Для этого необходимо записать полученные линейные связи в виде

$$u_C(t) = \begin{cases} a_1 i_L(t) + b_1 + c_1 t = -1,17430 i_L(t) + 217,430 + 815,005 t, & t \leq \tau_b \\ a_2 i_L(t) + b_2 = 0,469941 i_L(t) + 0,065546, & t > \tau_b. \end{cases} \quad (2.25)$$

Тогда для тока $i_L(t)$ получим следующие аппроксимации

$$\frac{di_L}{dt} = \begin{cases} -512,6128 i_L(t) + 68261,75 + 253837 t, & t \leq \tau_b \\ -0,506319 i_L(t) + 562,5764, & t > \tau_b. \end{cases}$$

На рис. 2.10 изображена точная кривая напряжения на конденсаторе (сплошная линия) и его аппроксимации (пунктирная и штрихпунктирная линии), полученные согласно линейным связям (2.25). Видно, что линейные связи (2.25) с высокой точностью описывают точное решение на всем временном интервале.

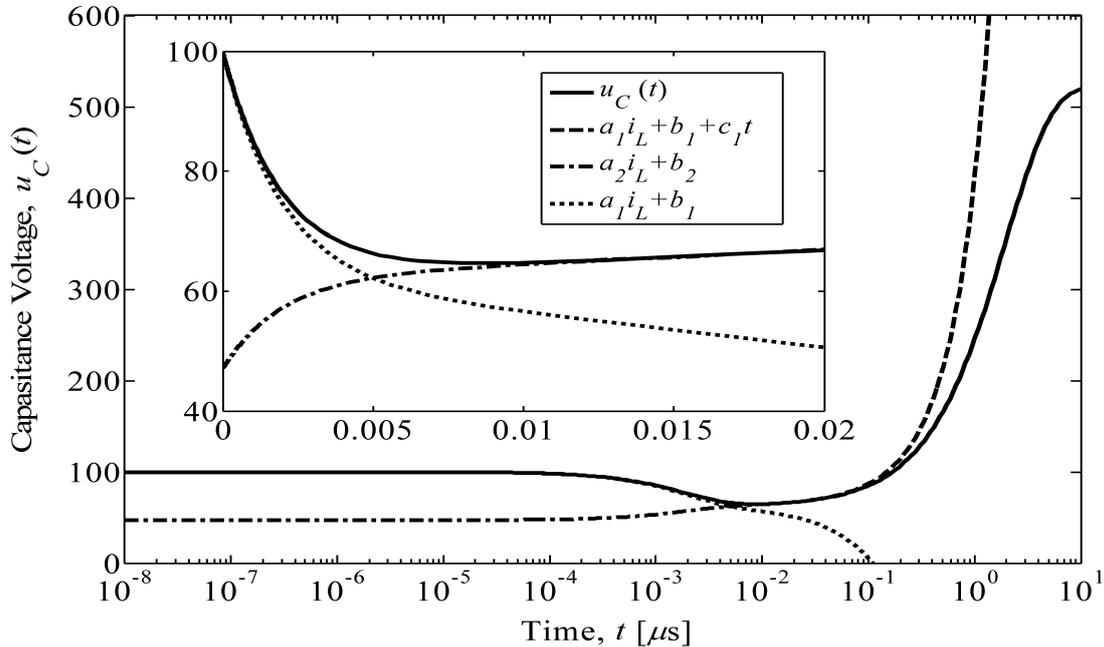


Рис. 2.10. Зависимость $u_C(t)$ и аппроксимирующие ее выражения внутри и вне пограничного слоя

На рис. 2.10 (пунктирная линия) также представлена аппроксимация решения внутри пограничного слоя, полученная при пренебрежении в (2.25) членом $c_1 t$. В этом случае в окрестности τ_b погрешность аппроксимации значительна.

Принцип квазистационарности производных позволил с высокой точностью описать поведение решения жесткой задачи (2.20) как вне, так и внутри пограничного слоя. Были созданы также упрощенные модели, описывающие поведение жесткой задачи внутри пограничного слоя (2.24) и вне него (2.21). Для определения линейных связей использовались «точные» значения коэффициентов матрицы системы дифференциальных уравнений. На практике при решении обратных задачах, в частности задач диагностики, идентификации и параметрического синтеза, параметры диагностируемых (идентифици-

руемых) устройств находят на основе экспериментальных данных. Поэтому значительный интерес представляет рассматриваемый далее вопрос о влиянии погрешности экспериментальных данных на точность определения линейных связей.

Выше линейные связи определялись с помощью уравнений (2.17) и (2.23), в которых используется матрица \mathbf{A} системы уравнений (2.15). Пусть элементы этой матрицы найдены экспериментально с погрешностью Δ_{\max} . На рис. 2.11 представлены зависимости погрешности коэффициентов линейных связей (2.17) и (2.23) от Δ_{\max} , полученные для схемы, изображенной на рис. 2.4. При выводе этих зависимостей предполагалось, что начальные условия \mathbf{y}_0 и вектор источников \mathbf{b} заданы точно. Кривые на рис. 2.11 получены усреднением по результатам 100 расчетов. Видно, что коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 и b_2 определены с погрешностью не выше Δ_{\max} . В то же время коэффициент c_1 определяется с погрешностью, превышающей Δ_{\max} на порядок.

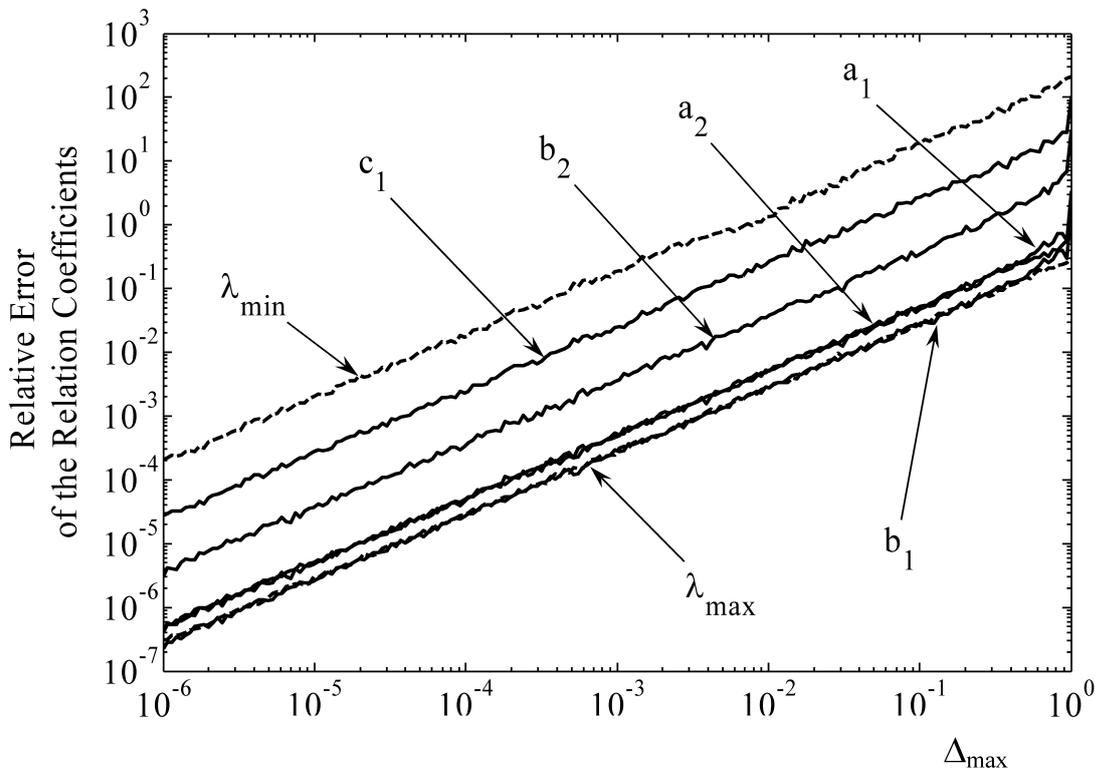


Рис. 2.11. Относительная погрешность коэффициентов линейных связей между $u_C(t)$ и $i_L(t)$ внутри и вне пограничного слоя, собственных значений матрицы \mathbf{A} в зависимости от погрешности Δ_{\max} измерений

Таким образом, даже этот простейший пример показывает, что имеются значительные различия в устойчивости коэффициентов линейных связей к погрешности элементов матрицы \mathbf{A} . Для выяснения свойств устойчивости в общем случае представим матрицу \mathbf{A} системы (2.15) в виде $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$, где \mathbf{P} и \mathbf{Q} – соответственно, матрицы правых и левых собственных векторов $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, i = \overline{1, m}$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ – матрица собственных значений. Общий вид линейной связи вне пограничного слоя $\mathbf{A}^n \mathbf{y} = -\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}$, тогда

$$\lambda_1^n \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{q}_i^T \right) \mathbf{y} = -\lambda_1^{n-1} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{n-1} \mathbf{q}_i^T \right) \mathbf{b}.$$

Согласно условию (2.16) при показателе $n = 3 \div 5$ можно положить $(\lambda_i / \lambda_1)^n \approx 0, i > k$. Тогда для линейной связи имеем

$$\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{p}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \mathbf{q}_i^T \right) \mathbf{y} = -\frac{1}{\lambda_1} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{p}_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{n-1} \mathbf{q}_i^T \right) \mathbf{b}. \quad (2.26)$$

Любое из уравнений (2.26) представляет собой линейную связь вида

$$y_1 = \sum_{i=2}^m a_{2i} y_i + b_2.$$

Далее необходимо оценить чувствительность коэффициентов $a_{2i}, i = \overline{2, m}$ и b_2 к погрешности Δ_{\max} задания элементов матрицы \mathbf{A} . Пусть $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{F}$ есть возмущенная матрица, где \mathbf{F} – матрица абсолютных ошибок, причем $\mathbf{F} \|\mathbf{F}\| \leq \Delta_{\max} \|\mathbf{A}\|$. Согласно теории возмущений оценка искажения собственных значений матрицы может быть сделана на основе теоремы Бауэра-Файка:

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leq \theta(\mathbf{P}) \cdot \|\mathbf{F}\|_2 \leq \theta(\mathbf{P}) \cdot \Delta_{\max} \cdot \|\mathbf{A}\|_2, \quad (2.27)$$

где $\tilde{\lambda}_i$ – собственное значение матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\theta(\mathbf{P}) = \mu_{\max} / \mu_{\min}$ – спектральное число обусловленности матрицы правых собственных векторов, μ_i – сингулярное число матрицы, $\|\cdot\|_2 = \mu_{\max}$ – спектральная

норма матрицы. Величина θ в билогарифмическом масштабе пропорциональна параметру $N_a = \sqrt{\|\mathbf{A}\|_F^2 - \sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2}$, характеризующему несимметричность матрицы (здесь $\|\cdot\|$ – Евклидова (Фробениуса) норма матрицы).

Из оценки (2.27) следует, что для матриц с малым параметром N_a относительное изменение доминирующих собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ составляет величину порядка Δ_{\max} . В то же время малые собственные значения $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_m$ искажаются в большей степени, поскольку $|\lambda_{k+1}| \ll |\lambda_{\max}| \leq \mu_{\max}$.

Правые и левые собственные вектора определяются как решения систем уравнений

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^T \mathbf{q}_i = \mathbf{0},$$

матрицы которых плохо обусловлены. Поэтому небольшое отличие элементов матрицы $(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}_i \mathbf{I})$ от элементов точной матрицы $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ приводит к значительной ошибке в решении этих систем уравнений. Однако, вектор ошибки практически параллелен искомому собственному вектору матрицы \mathbf{A} и не влияет на направление последнего. Поэтому собственные векторы, соответствующие доминирующим собственным значениям, устойчивы к погрешности задания элементов матрицы \mathbf{A} системы. Из (2.26) следует, что коэффициенты линейной связи зависят только от доминирующих собственных векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}, i = \overline{1, k}$. Поэтому коэффициенты связи, соответствующие $t > \tau_b$, устойчивы к погрешности элементов матрицы \mathbf{A} .

Аналогично, переписав выражение (2.23) для линейной связи внутри пограничного слоя в виде

$$\mathbf{A}^{-n} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \mathbf{b}t) = \mathbf{A}^{1-n} \cdot \mathbf{y}_0 t,$$

получим

$$\left(\sum_{i=k+1}^m \mathbf{p}_i \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_i} \right)^n \mathbf{q}_i^T \right) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \mathbf{b}t) = \lambda_m \left(\sum_{i=k+1}^m \mathbf{p}_i \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_i} \right)^{n-1} \mathbf{q}_i^T \right) \mathbf{y}_0 t. \quad (2.28)$$

Каждое из уравнений (2.28) представляет собой линейную связь вида

$$y_1 = \sum_{i=2}^m a_{1i} y_i + b_1 + c_1 t. \quad (2.29)$$

Как видно из выражения (2.28), коэффициенты $a_{1i}, i = \overline{2, m}, b_1$ и c_1 связи (2.29) определяются малыми по модулю собственными значениями матрицы \mathbf{A} и соответствующими им собственными векторами. Согласно (2.27) и последующим рассуждениям, касающимся собственных векторов, следует заключить, что в общем случае все коэффициенты связи *внутри пограничного слоя неустойчивы к погрешности элементов матрицы \mathbf{A} .*

Это, однако, верно не всегда. В ряде важных для практики случаев некоторые из коэффициентов линейной связи (2.29) устойчивы к погрешности элементов матрицы. Эти случаи соответствуют системам с *сильно разделенным спектром собственных значений.* Для таких систем $(\lambda_m/\lambda_i)^n = 1$ при $i = m$ и $(\lambda_m/\lambda_i)^n \approx 0, i = \overline{k+1, m-1}$. Поэтому точность коэффициентов $a_{1i}, i = \overline{2, m}$ и b_1 связи (2.29) определяется только вариацией собственных векторов, входящих в выражение (2.28). Вариацию собственных векторов при искажении элементов матрицы \mathbf{A} можно оценить следующим образом. Пусть λ_r и $\tilde{\lambda}_r$ – собственные числа матриц \mathbf{A} и $\tilde{\mathbf{A}}$, \mathbf{p}_r и $\tilde{\mathbf{p}}_r$ – соответствующие им собственные вектора, а $\gamma = \min_{i \neq r} |\lambda_i - \tilde{\lambda}_r|$ – минимальное расстояние между $\tilde{\lambda}_r$ и остальной частью спектра матрицы \mathbf{A} . Тогда

$$|\sin \angle(\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r)| \leq \|\mathbf{F}\|_2 / \gamma.$$

Обычно искажение матрицы \mathbf{A} сохраняет разделенность ее спектра, так что $\|\mathbf{A}\|_2 / \gamma \leq 1$, тогда $|\sin \angle(\mathbf{p}_r, \tilde{\mathbf{p}}_r)| \leq \Delta_{\max}$. Так, последнее

условие выполняется для любой жесткой системы второго порядка, и, в частности, в рассмотренной в настоящем параграфе. В этом примере коэффициенты a_1 и b_1 связи (2.29) устойчивы к погрешности элементов матрицы \mathbf{A} , как это следует из рис. 2.11. В общем случае, даже если малые собственные значения не образуют достаточно компактной группы, коэффициенты $a_{1i}, i = \overline{2, m}$ и b_1 связи (2.29) также оказываются устойчивыми к погрешности элементов \mathbf{A} .

Рассмотрим устойчивость к погрешности элементов матрицы \mathbf{A} коэффициента c_1 . Как видно из (2.28), в выражение для c_1 входит слагаемое, пропорциональное λ_m , которое сильно меняется при слабой вариации элементов \mathbf{A} . Вклад этого слагаемого в величину коэффициента c_1 зависит от соотношения $\lambda_m \cdot \|\mathbf{y}_0\| / \|\mathbf{b}\|$. Оно, например, для электрической цепи, представленной на рис. 2.4, составляет около 0,1. Поэтому суммарная погрешность c_1 приблизительно на порядок ниже погрешности определения λ_{\min} (рис. 2.11).

Несмотря на то, что коэффициент c_1 связи (2.23) определяется с повышенной погрешностью, его влияние на поведение решения сказывается лишь в окрестности τ_b (см. рис. 2.10). Так, например, в рассмотренной задаче при 10%-ой погрешности определения коэффициента c_1 , наибольшая погрешность в воспроизведении кривой переходного процесса достигается при $t = \tau_b$ и составляет 1 %.

В заключение параграфа применим принцип квазистационарности производных к решению обратных задач, сводящихся к решению систем линейных алгебраических уравнений. В обратных задачах такого типа коэффициенты системы уравнений определяются, например, по измеренным токам и напряжениям в электрической цепи при различных режимах ее работы. Параметры цепи, подлежащие определению, образуют вектор неизвестных. Подобные задачи будут подробно рассмотрены в параграфах 2.4, 2.5.

Пусть в результате серии экспериментов определены коэффициенты $g \in \mathbf{G}, f \in \mathbf{f}, k, p = \overline{1, m}$ матриц системы уравнений:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (2.30)$$

вектор решения \mathbf{x} которой дает решение некоторой обратной задачи. Будем предполагать, что матрица \mathbf{G} плохо обусловлена. Тогда решение обратной задачи «прямым методом», то есть путем решения системы уравнений (2.30) (например, методом Гаусса или с помощью обращения матрицы \mathbf{G}) будет получено с погрешностью, значительно превосходящей погрешность исходных данных [10]. Для грубой оценки относительной погрешности Δ_X решения жесткой обратной задачи (2.30) с помощью решения системы уравнений можно использовать соотношение

$$\Delta_X \leq \Delta_{\max} \frac{\|\mathbf{G}\|_F \cdot \|\mathbf{G}^{-1}\|_F}{m}, \quad \|\mathbf{G}\|_F = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T)}.$$

Здесь Δ_{\max} – относительная погрешность экспериментального определения коэффициентов матрицы \mathbf{G} , m – размерность, trace – функция следа матрицы. Пусть, для примера, $\Delta_{\max} = 0,01$. Матрицу \mathbf{G} примем совпадающей с матрицей \mathbf{A} из (2.20). Тогда $m = 2$ и

$$\Delta_X \leq \Delta_{\max} \frac{\|\mathbf{A}\|_F \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_F}{m} = 0,01 \cdot 541,9 \approx 6, \quad \text{или} \quad \Delta_X \leq 600\%.$$

Как показывает эта оценка, для решения жестких обратных задач «прямым методом» необходимо получить экспериментальные данные с очень высокой точностью. Здесь следует отметить некоторый общеприкладной философский аспект проблемы. Решение системы уравнений (2.30) в силу плохой обусловленности матрицы \mathbf{G} определяется ее малыми собственными числами. Однако из-за экспериментального, а значит и не слишком точного определения элементов матрицы \mathbf{G} , она не содержит достоверной информации о своих малых собственных числах. Это парадоксальное утверждение нужно понимать следующим образом. При изменении параметров одного или нескольких элементов \mathbf{G} на величину, не превышающую погрешность измерений, малые собственные числа \mathbf{G} , а с ними и решение (2.30) изменятся значительно.

Вернемся к принципу квазистационарности производных и тому полезному, что он может дать для решения жестких обратных задач. Рассмотрим вместо задачи (2.30) более общую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = -\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.31)$$

решение которой при $t \rightarrow \infty$ совпадает с решением (2.30) (предполагаем, что матрица \mathbf{G} положительно определена). Система уравнений (2.31) удовлетворяет определению жесткой системы дифференциальных уравнений и поэтому можно использовать принцип квазистационарности производных. Выражение для линейных связей между компонентами вектора \mathbf{x} после пограничного слоя имеет вид:

$$\mathbf{G}^n \mathbf{x} = \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{f} \quad (2.32)$$

Линейные связи можно легко найти по экспериментально определенным матрицам \mathbf{G} и \mathbf{f} для любых n . Как показано ранее, эти *линейные связи определяются с той же точностью, с которой были получены экспериментальные данные*. Поэтому соотношения (2.32) содержат важную информацию о жесткой обратной задаче. Используя эту информацию, можно повторить измерения в несколько модифицированном виде и на основании вновь полученной экспериментальной информации решить обратную задачу. Идея такого подхода, сформулированная авторами [4] в виде «принципа повторных измерений», рассматривается в параграфе 2.5.

2.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В предыдущем параграфе было показано, что данные, полученные в результате экспериментов ("первичные" данные) можно использовать для нахождения линейных связей между переменными задачи. Причем, независимо от степени жесткости задачи, эти связи можно найти с той же точностью, с которой выполняются измерения.

Продолжим начатое в п. 2.1 изучение задачи синтеза схемы замещения цепи, изображенной на рис. 2.4. Задача состоит в определе-

нии параметров α , L и R_1 по получаемым в результате измерений на интервале $[0, T]$ зависимостям $i_L(t)$ и $u_C(t)$. Было показано, что с помощью традиционных методов ее решить не удастся. Использование линейных связей (2.18) и (2.23) дает новые возможности в решении обратных задач, рассматриваемые ниже.

Будем действовать в следующей последовательности. Вначале определим коэффициенты линейных связей и затем с их помощью решим поставленную обратную задачу. В соответствии с (2.25) запишем линейные связи для $i_L(t)$ и $u_C(t)$:

$$u_C(t) = \begin{cases} a_1 i_L(t) + b_1 + c_1 t, & t \leq \tau_b \\ a_2 i_L(t) + b_2, & t > \tau_b \end{cases}.$$

Задачу нахождения коэффициентов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 можно сформулировать следующим образом:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \left(u_C^{\text{ex}}(t_m) - u_C(t_m) \right)^2 \xrightarrow{\mathbf{x}} \min, \quad (2.33)$$

где $\mathbf{x} = [a_1, b_1, c_1, a_2, b_2]$ – вектор неизвестных коэффициентов линейных связей и

$$u_C(t_m) = u_C(t, \mathbf{x})|_{t=t_m} = \begin{cases} a_1 i_L^{\text{ex}}(t_m) + b_1 + c_1 t_m, & t_m \leq \tau_b \\ a_2 i_L^{\text{ex}}(t_m) + b_2, & t_m > \tau_b. \end{cases}$$

Задача (2.33) не требует решения жесткой системы дифференциальных уравнений. Для ее решения применим метод наименьших квадратов. Будем искать решение (2.33) для интервалов времени внутри и вне пограничного слоя.

Пусть $t_m \in [0, \tau_b]$ для $m \leq K$ и $t_m \in [\tau_b, T]$ для $m = \overline{K+1, M}$ то есть первые K точек экспериментальных кривых лежат внутри пограничного слоя, а остальные точки вне него. Сформируем следующие матрицы

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} i_L(t_1) & 1 & t_1 \\ i_L(t_2) & 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i_L(t_K) & 1 & t_K \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_C(t_1) \\ u_C(t_2) \\ \vdots \\ u_C(t_K) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} i(t) & 1 \\ i(t) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ i(t) & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_C(t_{K+1}) \\ u_C(t_{K+2}) \\ \vdots \\ u_C(t_M) \end{bmatrix}.$$

При $K \geq 3$ и $M - K \geq 2$ матрицы $\mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i$, $i = 1, 2$ невырождены. Задача (2.33) имеет единственное решение, которое согласно методу наименьших квадратов имеет вид

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{W}_i^T \cdot \mathbf{W}_i)^{-1} \cdot \mathbf{W}_i^T \cdot \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x}_1 = [a_1, b_1, c_1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [a_2, b_2]^T. \quad (2.34)$$

Зависимости погрешности коэффициентов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 от погрешности измерений, найденных из (2.34), представлены на рис. 2.12.

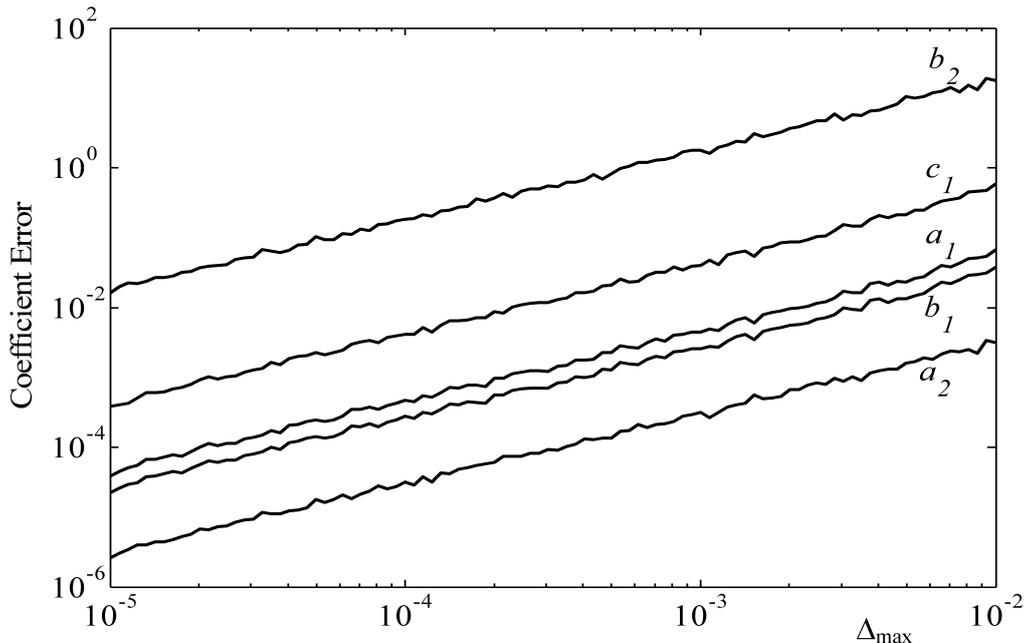


Рис. 2.12. Относительная погрешность коэффициентов линейных связей между $u_C(t)$ и $i_L(t)$ внутри и вне пограничного слоя в зависимости от погрешности Δ_{\max} измерений

Эти зависимости получены усреднением по 100 расчетам. В дальнейшем все зависимости, полученные для случайной экспериментальной погрешности Δ_{\max} , будем приводить также усредненными по 100 расчетам.

Из рис. 2.12 видно, что погрешность коэффициента b_2 значительно превышает погрешность эксперимента. Потеря точности (относительно экспериментальной погрешности) составляет три порядка. Причины этого обсуждались в предыдущем параграфе. Они связаны с малостью величины b_2 в сравнении с a_2 , что в свою очередь, является проявлением свойств жестких задач.

Для определения параметров α , L и R_1 достаточно иметь только три коэффициента линейных связей. Пусть это будут a_1 , a_2 и c_1 . Полученные из (2.34) коэффициенты обозначим a_1^{exp} , a_2^{exp} , c_1^{exp} , подчеркивая этим, что они найдены из эксперимента. Выражения, связывающие коэффициенты a_1^{exp} , a_2^{exp} , c_1^{exp} с искомыми параметрами α , L , R_1 , можно получить из (2.18) и (2.23) с использованием уравнений состояния (2.8). При этом значение n в формулах примем равным двум. Большие значения n могут потребоваться только для полного устранения влияния малых собственных значений, то есть для обеспечения условия $(\lambda_i/\lambda_1)^{n-1} \approx 0$, в формулах (2.26), (2.28). Для рассматриваемой задачи приемлемое решение может быть получено уже при $n = 2$. Аналитические выражения для коэффициентов связей имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_1(\mathbf{x}) &= -D^{-1}L(925,93LR_1^2 + 67,50L + 500LR_1 + R_1^2(\alpha - 0,27)), \\
 a_2(\mathbf{x}) &= 10^{-3}D^{-1}[(3,27\alpha^2 - 6,61\alpha + 33,38)R_1^2 + \\
 &\quad + (1 - \alpha)R_1 + (\alpha - 270)LR_1^2 + 0,05] \\
 c_1(\mathbf{x}) &= D^{-1}\left[L(925,93\alpha R_1^2 - 685,19R_1^2 - 31,73 - 302,50R_1)i_L(0) + (2.35) \right. \\
 &\quad \left. + R_1(\alpha R_1 - 0,13 - 0,74R_1)u_C(0) + (925,93L + 0,47)R_1^2 + 250,00(\alpha + 1)LR_1 \right],
 \end{aligned}$$

$$D = 10^{-3} R_1 (1,90R_1 - 1,88\alpha R_1 + 0,24 + 270L + LR_1), \quad \mathbf{x} = [\alpha, L, R_1]^T.$$

Здесь $i_L(0)$ и $u_C(0)$ также определяются по экспериментальным зависимостям.

Таким образом, новая задача для определения искомым параметров α, L, R_1 принимает вид:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \|a_1(\mathbf{x}) - a_1^{\text{exp}}\| \\ \|a_2(\mathbf{x}) - a_2^{\text{exp}}\| \\ \|c_1(\mathbf{x}) - c_1^{\text{exp}}\| \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Подчеркнем важные достоинства задачи (2.36):

- точность определенных по экспериментальным данным коэффициентов $a_1^{\text{exp}}, a_2^{\text{exp}}, c_1^{\text{exp}}$ мало зависит от жесткости уравнений (2.8), она определяется только точностью измерительного оборудования;
- решение (2.36) не требует многократного интегрирования жесткой системы уравнений состояния (2.8), что было необходимо при решении (2.10).

Несмотря на полученные существенные упрощения, задача (2.36) все же является достаточно сложной в силу плохой обусловленности матрицы Гессе функционала \mathbf{F} . Рассмотрим ее дальнейшие упрощения, использующие свойство жесткости обратной задачи.

Причина жесткости исходной обратной задачи состоит в различном влиянии искомым параметров на переходный процесс в цепи. Рассматривая два характерных участка времени: внутри и вне пограничного слоя, можно оценить влияние того или иного параметра на ход процесса на этих участках. Для этого достаточно оценить чувствительность собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы \mathbf{A} системы (2.8) к изменению параметров α, L, R_1 .

Введем нормированные переменные $\xi_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})\xi_1 + \alpha_{\min}, \\ L &= (L_{\max} - L_{\min})\xi_2 + L_{\min}, \\ R_1 &= (R_{\max} - R_{\min})\xi_3 + R_{\min}.\end{aligned}$$

Здесь величины с индексами «min» и «max» ограничивают область определения α , L , R .

Для оценки чувствительности λ_1 и λ_2 используем среднее значение их производной по нормированным переменным во всей области их определения. Усредненные таким образом элементы матрицы \mathbf{J} рассчитываем следующим образом:

$$J_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \lambda_j d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \in \mathbf{J}, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = 1, 2.$$

В рассматриваемой задаче матрица \mathbf{J} имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & 1 \\ 1 & 0,7 \\ 0,05 & 0,25 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \end{matrix}.$$

Здесь элементы каждого из столбцов отнесены к максимальному элементу этого столбца.

Видно, что максимальное собственное значение λ_1 мало зависит от ξ_3 . Следовательно, изменение ξ_3 мало влияет на переходный процесс внутри пограничного слоя. Поэтому задачу (2.10) можно было бы разделить на две: для интервала внутри пограничного слоя и вне него. Далее из первой задачи можно было бы получить приближение для L , выбрав остальные параметры из соответствующих диапазонов произвольным образом. Затем, зная величину L , решить задачу вне пограничного слоя и определить α и R_1 . По найденным значениям α и R_1 можно уточнить L и найти новые значения α и R_1 и т. д. Такой алгоритм, как показывают расчеты, хорошо сходится к решению. Однако на практике он абсолютно неприменим. Аналитические выражения для собственных значений, необходимые для его работы, можно по-

лучить лишь в редких случаях и только для простейших задач. Численное исследование устойчивости λ_1 и λ_2 сталкивается с проблемой жесткости и не может быть корректно выполнено.

Предлагаемый здесь подход использует чувствительность не собственных значений λ_1 и λ_2 , а *коэффициентов линейных связей* a_1 , a_2 и c_1 . Аналитические выражения для этих коэффициентов можно получить для систем высокого порядка (в том числе нелинейных), поскольку это требует только операций умножения матриц. В рассматриваемой задаче элементы матрицы \mathbf{J} для коэффициентов связей имеют следующие значения

$$\mathbf{J} = \begin{matrix} & a_1 & c_1 & a_2 \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 1 \\ 1 & 0,01 & 1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,25 \end{bmatrix} & \xi_1 \\ & & & \xi_2 \\ & & & \xi_3 \end{matrix}.$$

Как видно, коэффициент c_1 мало зависит от переменной ξ_2 (нормированной индуктивности L). Поэтому решение (2.36) можно разделить на два этапа:

- на первом найдем L из любого из уравнений (2.35) при произвольных α и R_1 из области их определения;
- на втором, используя данные о процессе вне пограничного слоя, найдем α и R_1 .

Далее, с помощью найденных значений α и R_1 уточняем величину L и находим новые значения α и R_1 и т. д. Этот процесс хорошо сходится, но требует (при выполнении второго этапа) интегрирования системы жестких дифференциальных уравнений на каждой итерации. Поэтому воспользуемся для определения α , L , R_1 только линейными связями (2.35). Для этого можно использовать следующий итерационный процесс:

- находим индуктивность L из (2.35) для a_1 : $a_1(\alpha^{(k)}, L, R_1^{(k)}) \rightarrow L^{(k+1)}$;

- находим коэффициент α из выражения для a_2 :

$$a_2(\alpha, L^{(k+1)}, R_1^{(k)}) \rightarrow \alpha^{(k+1)};$$
- находим сопротивление R_1 из выражения для c_1 :

$$c_1(\alpha^{(k+1)}, L^{(k+1)}, R_1) \rightarrow R_1^{(k+1)}.$$

Как показывают наши исследования, этот процесс хорошо сходится при любых начальных значениях $\alpha^{(0)}$ и $R_1^{(0)}$ из области их определения. На рис. 2.13 представлена относительная погрешность расчета параметров в функции от погрешности Δ_{\max} экспериментальных данных.

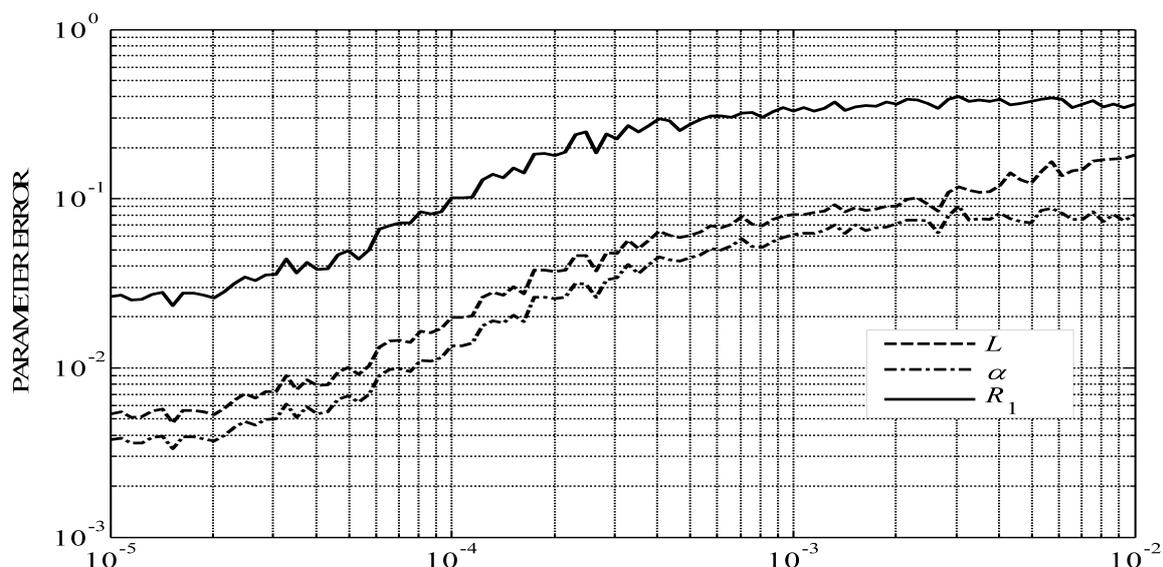


Рис. 2.13. Зависимость погрешности определения параметров α , L , R_1 от погрешности Δ_{\max} измерений

Для оценки качества полученных результатов напомним, что погрешность определения α , L , R_1 традиционным методом (2.10) при $\Delta_{\max}=10^{-4}$ составляла сотни процентов.

Подводя итог этому разделу книги, отметим, что свойство жесткости обратной задачи может быть использовано для упрощения ее решения. Рассмотренное нами использование линейных связей между переменными задачи является одним из эффективных путей упрощения ее решения.

2.4. ПРОБЛЕМА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИАГНОСТИКИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ЦЕПЕЙ С ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

В настоящем параграфе мы продолжим рассмотрение проблем, возникающих при решении обратных задач теории цепей и связанных с жесткостью уравнений исследуемых цепей.

Как отмечалось в параграфе 1.3, задача диагностики электрической цепи состоит в определении параметров ее элементов по измеренным реакциям цепи на известные воздействия. В задаче диагностики можно выделить два этапа. Это экспериментальный, на котором измеряют характеристики физического устройства, и расчетный этап, на котором параметры устройства рассчитывают по измеренным характеристикам. Как правило, при решении задачи диагностики имеется полная информация о топологии цепи и номинальных значениях параметров ее элементов. Цель диагностики в том, чтобы выявить отклонения параметров устройства от их номинальных значений в ходе его эксплуатации или изготовления.

Более общей обратной задачей теории цепей является задача идентификации, целью которой является построение модели цепи на основе экспериментальных данных. Наиболее сложным объектом идентификации является так называемый "черный ящик" – объект, о внутреннем устройстве которого ничего не известно. Неполнота информации об идентифицируемом устройстве и одновременное желание создать его адекватную модель могут приводить к излишнему усложнению модели. Порой приходится рассматривать наиболее полную модель, осознанно или неосознанно вводя в рассмотрение слабые несущественные связи между отдельными элементами устройства. При этом в модель включаются элементы с сильно различающимися параметрами. Именно это и является причиной жесткости уравнений модели. Будем рассматривать далее задачу идентификации, как более общую обратную задачу теории цепей.

При решении задачи с неизвестной топологией (задачи третьего типа) цепь можно представить в виде полного эквивалентного многополюсника. Число его узлов равно числу внешних узлов цепи. Значения параметров элементов многополюсника находятся с помощью экспериментов. При этом общее число узлов реальной цепи неизвестно.

Будем говорить, что цепь наблюдаема по току (напряжению), если экспериментальные данные достаточны для определения токов (напряжений) всех ее ветвей. Для полной наблюдаемости цепи достаточно знать \mathbf{I}_c токи связей или \mathbf{U}_c напряжения ветвей дерева графа цепи. Токи и напряжения остальных ветвей могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\mathbf{I}_t = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{I}_c, \quad \mathbf{U}_c = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_t,$$

где \mathbf{F} – матрица, ассоциированная с деревом графа, так что $\mathbf{D} = [\mathbf{1}, -\mathbf{F}^T]$, $\mathbf{C} = [\mathbf{F}, \mathbf{1}]$, \mathbf{D} – матрица сечений, \mathbf{C} – матрица контуров, \mathbf{I}_t и \mathbf{U}_t – векторы токов и напряжений ветвей дерева, \mathbf{I}_c и \mathbf{U}_c – векторы токов и напряжений связей графа, $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

В зависимости от того наблюдаема ли цепь по току или по напряжению для ее идентификации используют разные топологические базисы. Если доступны узлы цепи, то целесообразно использовать базис сечений, поскольку в данном случае существует возможность измерения напряжений ветвей дерева. Удобно использовать так называемое фундаментальное дерево, ветви которого связывают каждый из узлов цепи с базисным узлом. При отсутствии в цепи ветви между некоторым узлом и базисным между ними вводится фиктивная ветвь с нулевой проводимостью. Таким образом, осуществляется переход от базиса сечений к узловому базису, использование которого упрощает идентификацию цепей с неизвестной структурой. Если для измерений доступны ветви цепи, то задачу целесообразно решать в контурном базисе. При этом достаточным является измерение токов связей.

Выбор того или иного топологического базиса позволяет предложить два метода идентификации цепи: метод, основанный на узловом базисе, так называемый метод узловых сопротивлений (МУС) [9], и метод, основанный на контурном базисе, – метод контурных проводимостей (МКП).

2.4.1. Методы идентификации линейных цепей

Рассмотрим постановку задачи идентификации с помощью МУС.

Пусть все $N + 1$ узлов пассивной электрической цепи неизвестной структуры доступны для проведения экспериментов. Определим проводимости схемы замещения цепи, представленной как полный многополюсник. Задачу идентификации будем считать решенной, если найдена матрица узловых проводимостей цепи $\mathbf{Y}_0 = (y_{i,j})_{N \times N}$. Действительно, в этом случае проводимость $g_{i,j}$ между узлами i и j

$$g_{i,j} = \begin{cases} |y_{i,j}|, & i, j \neq 0; \\ \sum_{k=1}^N y_{i,k}, & i \neq j = 0 \end{cases}.$$

Согласно МУС \mathbf{Y}_0 определяется как матрица, обратная матрице узловых сопротивлений \mathbf{Z}_0 . Элементы матрицы $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Y}_0^{-1}$ определяются по результатам экспериментов, представленных на рис. 2.15 и составляющих экспериментальный этап решения задачи. Подключим источник тока равный 1 А (в общем случае одной относительной единице тока) между узлами 0 и 1. Напряжения узлов цепи удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{Y}_0^{-1} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{Z}_0 \cdot \mathbf{J},$$

где \mathbf{U}_0 – столбец измеряемых узловых напряжений, \mathbf{J} – столбец источников тока. Обозначив проведенный эксперимент как первый в серии, получим

$$\mathbf{U}_0^{(1)} = \mathbf{Z}_0 \cdot [1, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{Y}_0^{-1} \cdot \mathbf{e}_1^T.$$

Таким образом, столбец $\mathbf{U}_0^{(1)}$ узловых напряжений представляет собой, первый столбец матрицы \mathbf{Y}_0^{-1} .

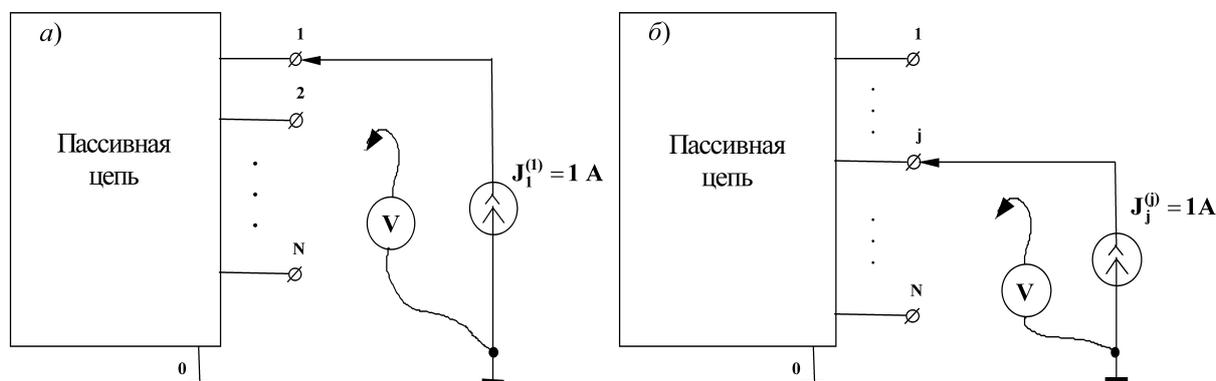


Рис. 2.15. Схема проведения экспериментов по МУС

Аналогично для получения j -го столбца $\mathbf{U}_0^{(j)}$ матрицы \mathbf{Z}_0 , необходимо подключить источник тока между узлами 0 и j многополюсника (рис. 2.15, б) и измерить узловые напряжения $\mathbf{U}_0^{(j)}$

$$\mathbf{U}_0^{(j)} = \mathbf{Y}_0^{-1} \cdot [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]^T = \mathbf{Y}_0^{-1} \cdot \mathbf{e}_j^T.$$

Подключая источник тока поочередно к каждому узлу, и измеряя узловые напряжения, получим $\mathbf{Z}_0 = [\mathbf{U}_0^{(1)}, \mathbf{U}_0^{(2)}, \dots, \mathbf{U}_0^{(N)}]$. Если измерения выполнялись достаточно точно, то решение поставленной задачи идентификации электрической цепи имеет вид $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1}$. Следовательно, расчетный этап МУС состоит в выполнении обращения матрицы \mathbf{Z}_0 . Важным достоинством МУС является то, что выполняемые эксперименты просты и могут быть легко автоматизированы. Расчетный этап метода также не вызывает затруднений. Однако этот метод не позволяет определить проводимости параллельных соединенных ветвей, что является его недостатком.

Если в диагностируемой цепи имеются параллельные ветви, параметры которых необходимо определить, может быть использован МКП, который основан на методе контурных токов (МКТ). Рас-

смотрим задачу идентификации первого типа. В соответствии с МКП задача идентификации решена, если найдена матрица контурных сопротивлений цепи $\mathbf{Z}_c = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C}^T$, где N – число связей графа цепи, \mathbf{C} – матрица контуров, \mathbf{Z} – диагональная матрица сопротивлений ветвей.

Матрица контурных сопротивлений определяется как матрица, обратная матрице контурных проводимостей \mathbf{Y}_c , сформированной по результатам экспериментов. Для идентификации цепи необходимо поочередно включать в связи схемы источник ЭДС с напряжением 1 В и измерять в каждом эксперименте токи всех связей.

Один из таких опытов для цепи с четырьмя связями показан на рис. 2.16, *а*, где ветви дерева схемы цепи отмечены утолщенными линиями.

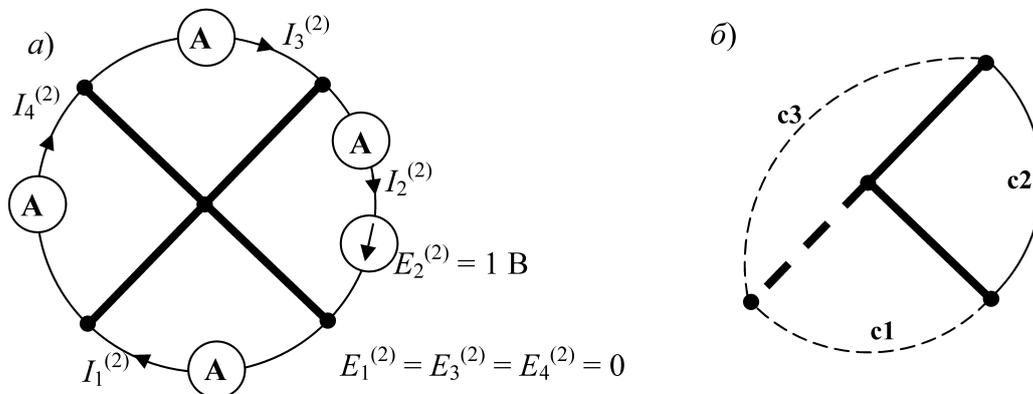


Рис. 2.16. Схема проведения экспериментов методом контурных проводимостей для цепи с четырьмя независимыми контурами при решении задач первого (*а*) и второго (*б*) типов

Токи связей $\mathbf{I}_c^{(j)}$, измеренные в j -ом эксперименте, удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathbf{I}_c^{(j)} = \mathbf{Z}_c^{-1} [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]^T = \mathbf{Y}_c \cdot \mathbf{e}_j^T,$$

следовательно, $\mathbf{I}_c^{(j)}$ суть – j -ый столбец матрицы \mathbf{Z}_c . Составим из измеренных столбцов $\mathbf{I}_c^{(j)}$ матрицу $\mathbf{Y}_c = [\mathbf{I}_c^{(1)}, \mathbf{I}_c^{(2)}, \dots, \mathbf{I}_c^{(N)}]$. Тогда при проведении экспериментов с достаточной точностью решение

поставленной задачи идентификации электрической цепи имеет вид $\mathbf{Z}_c = \mathbf{Y}_c^{-1}$. Таким образом, расчетный этап МКП также как и МУС состоит в выполнении обращения матрицы, коэффициенты которой были получены путем измерений.

При неполной наблюдаемости цепи (задача второго типа) можно найти параметры ветвей только тех контуров, которые не имеют общих ветвей с контуром, соответствующим недоступной связи. Например, если в цепи, представленной на рис. 2.16, а, связь 4 недоступна для измерений, то можно определить только параметры эквивалентной схемы, граф которой представлен на рис. 2.16, б. При этом параметры ветвей, выделенных сплошными линиями, соответствуют реальным, а параметры остальных ветвей представляют собой некоторую комбинацию реальных параметров.

2.4.2. Погрешность решения задачи идентификации

Для исследования погрешности решения задачи идентификации нам будет необходима некоторая модель измерительных устройств, используемых на экспериментальном этапе. Будем полагать, что измерительные устройства позволяют выполнять измерения с максимальной относительной погрешностью Δ_{\max} . При этом погрешность каждого конкретного измерения является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-\Delta_{\max}, \Delta_{\max}]$.

Как было показано, решение задачи идентификации, как методом МКП, так и МУС, требует обращения матрицы (далее матрица \mathbf{A}), коэффициенты которой были получены путем измерений. Характеристикой численной устойчивости процедуры обращения матрицы является число ее обусловленности (число Тодда)

$$\Theta(\mathbf{A}) = \frac{\max |\lambda(\mathbf{A})|}{\min |\lambda(\mathbf{A})|} = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})}.$$

С увеличением числа Θ численная устойчивость процедуры обра-

щения матрицы ухудшается. При идентификации цепи причинами плохой обусловленности матрицы \mathbf{A} являются:

- неверные представления о структуре диагностируемой цепи, приводящие к появлению в схеме замещения элементов с сильно различающимися параметрами;
- топологические вырождения цепи, такие как особые разрезы (сечения) – разрезы, проходящие только по ветвям с малой проводимостью, и особые контура – контура, проходящие только по ветвям с малым сопротивлением.

Уточним понятия «малая проводимость» и «малое сопротивление». Очевидно, что понятие малости должно быть связано с погрешностью измерений Δ_{\max} . Пусть g_{\max} и g_{\min} – соответственно максимальное и минимальное значения проводимостей ветвей цепи. Будем говорить, что некоторая проводимость g_k мала, если выполняется неравенство $g_k / \sqrt{g_{\min} \cdot g_{\max}} < \Delta_{\max}$. И наоборот, назовем проводимость g_k большой, если $g_k / \sqrt{g_{\min} \cdot g_{\max}} < \Delta_{\max}^{-1}$. Соответственно параметры ветвей сильно различаются, если один из них мал по сравнению к другим.

При идентификации цепи с неизвестной структурой в узловом базисе (МУС) могут появиться фиктивные узлы, что приводит к избыточности модели, и, как следствие, к ее жесткости. Покажем это на примере цепи, представленной на рис. 2.17, а. Здесь узел 2' расщеплен на два узла – 2 и 3, один из которых фиктивный. Мы, однако, используем при проведении опытов узлы 2 и 3, так как не имеем информации о том, что внутри устройства эти узлы соединены между собой. Использование МУС приводит к схеме замещения, представленной на рис. 2.17, б. Эта схема соответствует схеме реальной цепи при $G \rightarrow \infty$. Схема замещения (рис. 2.17, б) обладает плохо обусловленной матрицей узловых проводимостей \mathbf{Y}_0 . Эта матрица имеет два собственных значения, близких по величине к g_k , $k = \overline{1, 3}$, а третье близкое к $G \rightarrow \infty$. Дуальная ситуация может

возникнуть при идентификации цепей методом контурных проводимостей. Эти случаи плохой обусловленности модели связаны с отсутствием информации о структуре идентифицируемой цепи.

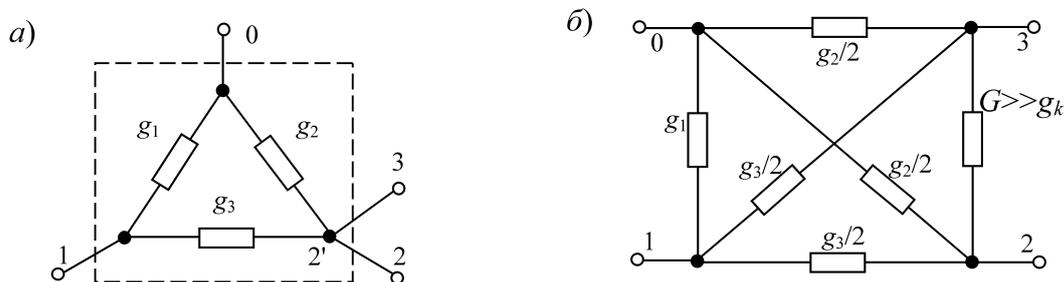


Рис. 2.17. Фиктивный узел при идентификации методом узловых сопротивлений

Рассмотрим топологические вырождения. Сечение будем считать особым, если величина суммы проводимостей ветвей, пересекаемых сечением, является малой в указанном выше смысле. Соответственно контур будем считать особым, если сумма сопротивлений входящих в него ветвей является малой. Идентификация цепей с особыми сечениями представляет сложности для метода МУС. При идентификации цепей с использованием контурного базиса (метод МКП) трудности возникают при наличии в цепи особых контуров.

Особые разрезы и особые контура разбивают цепь на слабо связанные между собой подцепи. Так в цепи, изображенной на рис. 2.18, показаны три слабосвязанные подцепи N_1 , N_2 и N_3 , разделенные особым сечением s и особым контуром l .

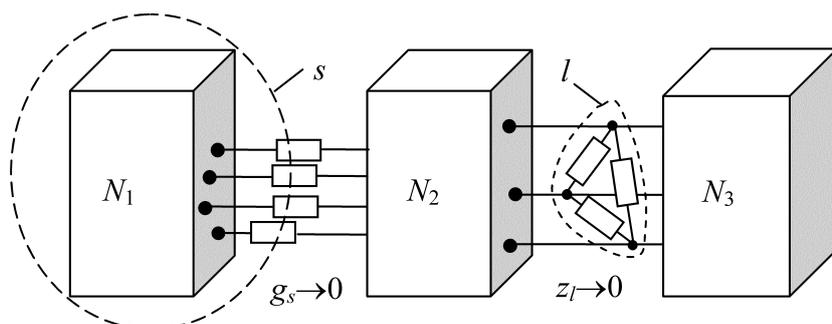


Рис. 2.18. Цепь с топологическими вырождениями

В случае особого сечения токи ветвей, соединяющих N_1 , и N_2 , малы в силу того, что проводимости ветвей сечения малы. В случае особого контура напряжения на его ветвях малы и подцепы N_2 и N_3 также слабо связаны.

Каждое особое сечение вносит в спектр матрицы узловых проводимостей Y малое по модулю собственное значение. Действительно, в предельном случае, когда проводимость ветвей сечения равна нулю, цепь распадается на две подцепы, не связанные между собой. Следовательно, при анализе цепи можно было бы рассматривать каждую подцепь отдельно и в каждой из них выбрать свой нулевой узел. Поэтому в матрице Y_0 всей цепи будет присутствовать одна линейно зависящая строка (и, соответственно, столбец) и одно ее собственное значение будет равно нулю. Если проводимость особого сечения мала, то, в силу непрерывной зависимости собственных чисел от элементов матрицы, матрица Y_0 всей цепи будет иметь малое собственное значение. Соответственно $\Theta(Y_0)$ будет велико и матрица Y_0 будет плохо обусловленной. Аналогично можно объяснить влияние особого контура на собственные значения матрицы контурных сопротивлений $Z_c = CZC^T$.

Топологические вырождения могут быть «вложенными». Пусть в идентифицируемой цепи имеется особое сечение s , внутри которого находится подцепь N_1 . Если в N_1 также имеется особое сечение s_1 , и сечения s и s_1 не пересекаются, то сечение s_1 вложено в сечение s . Аналогично можно ввести и понятие «вложенных» особых контуров. Как будет показано далее, сложность идентификации значительно возрастает при наличии в цепи вложенных особых сечений.

Далее мы будем рассматривать метод МУС и основное внимание уделим цепям с особыми сечениями. В силу принципа дуальности полученные результаты будут справедливы и для метода МКП.

Рассмотрим особенности цепей с особыми сечениями на примере цепи, представленной на рис. 2.19, *a* (проводимости элементов

указаны на схеме). При $\varepsilon \ll 1$ в цепи имеется два особых сечения – s_1 и s_2 . Можно показать, что для данной задачи $\lambda_{\min}(\mathbf{Y}_0) \approx \varepsilon$, $\lambda_{\max}(\mathbf{Y}_0) \approx 2$ и, следовательно, число Тодда $\Theta = 2 / \varepsilon \gg 1$.

Пусть $\varepsilon = 10^{-3}$ и измерения выполняются с погрешностью $\Delta_{\max} = 5 \cdot 10^{-2}$. Тогда при идентификации методом МУС в результате измерений будет получена матрица \mathbf{Z}_0 , представленная на рис. 2.19, б. Не сложно проверить, что матрица \mathbf{Z}_0 особенная, и ее собственные значения равны соответственно (0, 0, 1, 1000, 1000). Поэтому расчетный этап метода МУС, состоящий в вычислении $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1}$, не может быть выполнен.

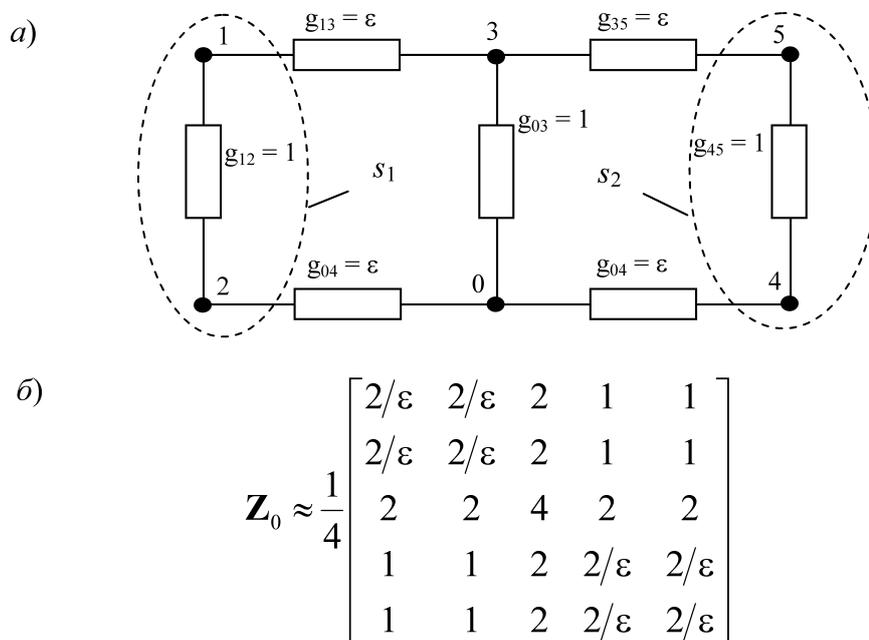


Рис. 2.19. Пример цепи с двумя независимыми особыми сечениями

Причина нашей неудачи при решении задачи идентификации цепи с особыми разрезами состоит в недостаточной точности измерений. Если бы элементы матрицы \mathbf{Z}_0 были определены точно, то ее собственные числа были бы равны (0,5, 0,5, 1, 1000, 1000). Таким образом, погрешность измерений привела к искажению малых собственных значений \mathbf{Z}_0 .

На практике, при выполнении измерений, получение нулевых собственных значений, как это было в рассмотренном примере, маловероятно. Однако можно утверждать, что для плохо обусловленных матриц малые погрешности в вычислении их элементов порождают большие погрешности в малых собственных значениях. Элементы матрицы $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1}$, необходимые для идентификации, зависят именно от малых собственных значений \mathbf{Z}_0 , так как собственные значения этих матриц связаны соотношением $\lambda_{\mathbf{Y}} = \lambda_{\mathbf{Z}}^{-1}$. Поэтому погрешность идентификации для цепи с особым разрезом всегда будет высокой.

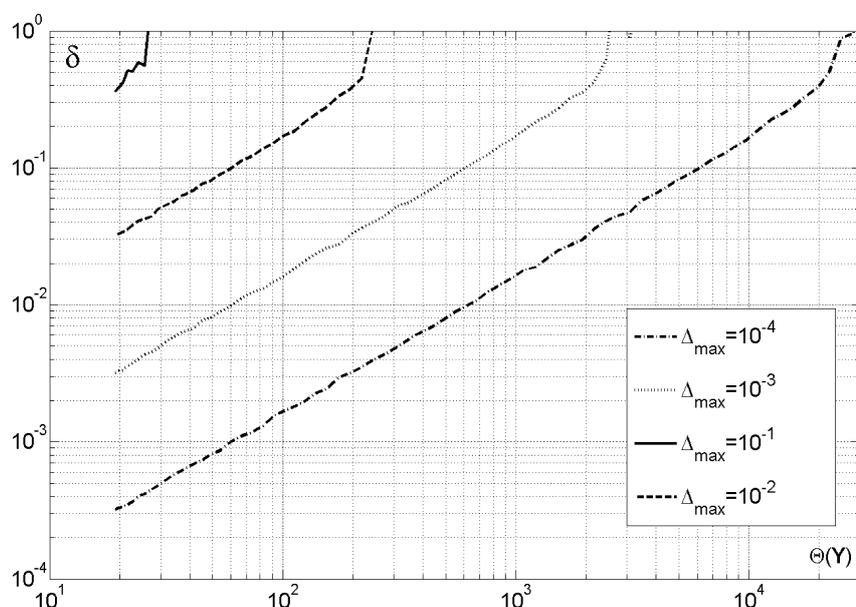


Рис. 2.20. Зависимость погрешности δ идентификации от обусловленности Θ матрицы узловых проводимостей для цепи с одним особым разрезом

Зависимость погрешности δ идентификации от обусловленности Θ матрицы узловых проводимостей для цепи с одним особым разрезом представлена на рис. 2.20.

В качестве погрешности решения рассматривается средне-квадратичная погрешность определения элементов матрицы, рассчитываемая по следующему соотношению

$$\delta = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{|y_{i,j} - \tilde{y}_{i,j}|}{|y_{i,j}|} \right)^2}, \quad (2.37)$$

где $\tilde{y}_{i,j}$ – элемент матрицы, определенной с некоторой погрешностью, $y_{i,j}$ – элемент точной матрицы. Для получения гладких зависимостей, расчеты для каждой пары Δ_{\max} и Θ выполнялись 500 раз и затем усреднялись. Как можно видеть на рис. 2.20, погрешность δ идентификации линейно растет с увеличением Θ для всех Δ_{\max} . К примеру, если в качестве приемлемой точности δ принять $\delta = 10^{-2}$ и выполнять измерения с погрешностью $\Delta_{\max} = 10^{-3}$, то решение задачи идентификации можно получить только, когда обусловленность матрицы Y_0 цепи не превысит ~ 100 . То есть метод МУС позволяет выполнять идентификацию только для цепей с хорошо обусловленными математическими моделями.

На рис. 2.21 представлены зависимости погрешности δ идентификации от ε^{-1} (здесь, как и ранее, ε – проводимость ветвей, по которым проходит особое сечение) для электрических цепей со следующим расположением особых сечений:

- цепь с одним особым сечением (пиктограмма ) ,
- цепь с двумя независимыми особыми сечениями (пиктограмма ) ,
- цепь двумя вложенными одно в другое особыми сечениями (пиктограмма ) .

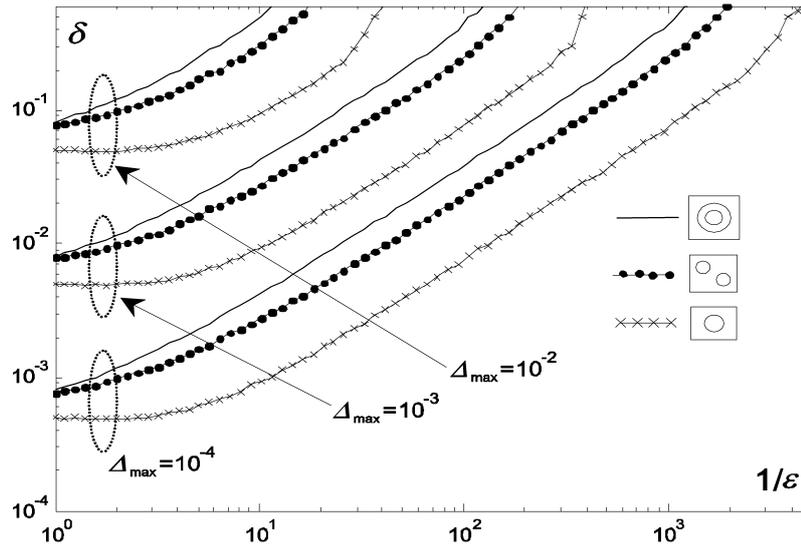


Рис. 2.21. Сопоставление погрешности δ идентификации для различных вариантов расположения особых сечений

Как можно видеть, погрешность идентификации параметров схемы с вложенными сечениями значительно превышает погрешность идентификации параметров схем с другим расположением особых сечений. Так при $\Delta_{\max} = 10^{-3}$ и $\epsilon = 10^2$ погрешность δ идентификации $\sim 10\%$. В электрических цепях, используемых на практике, проводимости ветвей могут отличаться значительно более чем в 10^2 раз. Поэтому идентификация параметров реальных цепей часто может быть выполнена только со значительной погрешностью.

Все изложенное выше справедливо и для цепей синусоидального тока. Более того, в этом случае появляются дополнительные особые разрезы, обусловленные резонансными явлениями (рис. 2.22, а). На рис. 2.22, б представлена зависимость $\Theta = \Theta(f)$ числа Голда матрицы Y_0 цепи от частоты. При $f = 1$ кГц (при $C_{32} = C_{50} = 25,33$ мкФ, $L_{32} = L_{50} = 1$ мГн, $R_{32} = R_{50} = 1$ мОм) минимальное собственное значение $\lambda_{\min}(Y_0) \approx 0$. Поэтому на этой частоте возникает особый разрез s . Особые разрезы в рассматриваемой цепи могут возникнуть и на других, более высоких частотах.

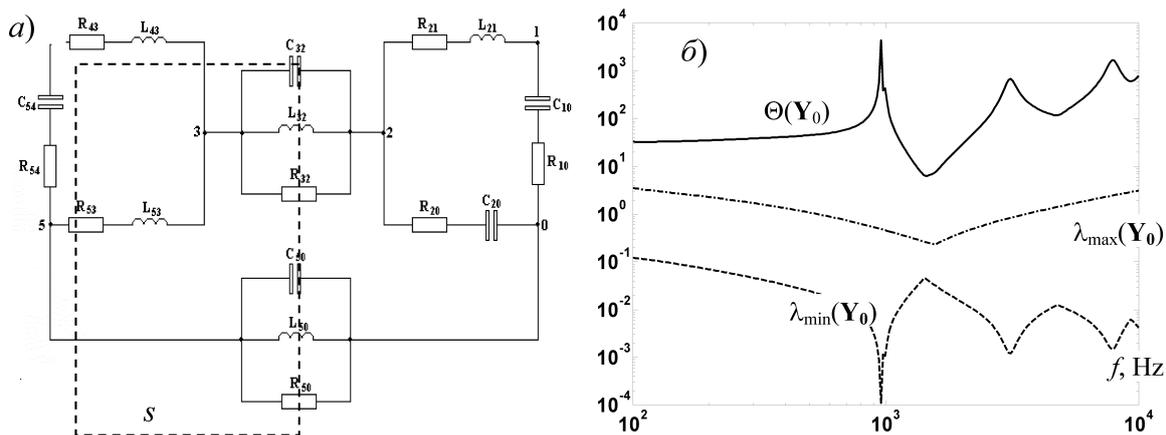


Рис. 2.22. Особое сечение в цепи переменного тока

Поэтому, при идентификации цепи переменного тока необходимо выбирать частоту эксперимента таким образом, чтобы обусловленность матрицы узловых напряжений была достаточно мала. Описанное явление имеет место для большинства цепей переменного тока. Особенно отчетливо оно проявляется при высоких частотах, когда возможно образование высокочастотных резонансных контуров.

Мы показали, что погрешность идентификации быстро возрастает с ухудшением обусловленности математической модели цепи. Это справедливо для цепей постоянного и переменного тока. Далее мы рассмотрим новый метод идентификации, основанный на принципе квазистационарности производных. Погрешность идентификации этого метода не будет зависеть от обусловленности математической модели цепи.

2.5. МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ ЦЕПЕЙ

2.5.1. Применение принципа повторных измерений для решения задачи идентификации электрических цепей

В предыдущем параграфе показано, что погрешность идентификации цепей с топологическими вырождениями (особыми сечениями

и (или) особыми контурами) зависит от численных значений параметров вырождений (проводимостей ветвей, пересекаемых особым сечением и т. п.). Характеристикой свойств задачи является число Тодда Θ (число обусловленности) матрицы коэффициентов системы уравнений (математической модели) цепи. Чем больше число обусловленности, тем менее точным является решение задачи идентификации.

Решение задачи идентификации содержит экспериментальный и расчетный этапы. Совершенствование только одного из них не приводит к существенному улучшению точности идентификации параметров цепи. В настоящем параграфе покажем, как использование дополнительной экспериментальной информации совместно с модификацией расчетного алгоритма позволяет повысить точность решения.

Идея модификации диагностируемой цепи и выполнения в модифицированной цепи дополнительных экспериментов основана на достаточно общем принципе повторных измерений (ППИ), предложенном в [4]. Рассмотрим этот принцип подробнее.

Пусть матрица коэффициентов \mathbf{A} системы уравнений плохо обусловлена, что соответствует некоторому топологическому вырождению в цепи. Будем также полагать, что элементы матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{b} правых частей измерены с некоторой погрешностью δ в результате некоторого «первого» эксперимента. Решать систему уравнений $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ при $\Theta(\mathbf{A}) \gg 1$ не имеет смысла, так как погрешность решения будет значительно превышать δ . Действительно, ее решение $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ существенно зависит от малых собственных чисел матрицы \mathbf{A} . Однако информация о малых собственных числах \mathbf{A} при приближенном задании ее элементов недостоверна.

Ранее, в параграфе 2.3 было показано, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{b} , элементы которых определены с погрешностью δ , содержат информацию о линейных связях между элементами вектора решения \mathbf{x}^* :

$$\left(\xi, \mathbf{x}^* \right) = \xi_0, \quad (2.38)$$

где вектор ξ и число ξ_0 – коэффициенты линейной связи. Причем погрешность определения линейных связей близка к δ . Поэтому используем матрицу \mathbf{A} и вектор \mathbf{b} , полученные в «первом» эксперименте, для нахождения линейных связей между компонентами вектора \mathbf{x}^* . Затем с помощью линейной связи (2.38) уменьшим размерность задачи. Можно показать [4], что обусловленность матрицы задачи с уменьшенной размерностью (редуцированной задачи) не превышает обусловленности исходной задачи. После этого выполним *повторный эксперимент* для определения параметров редуцированной задачи.

Описанный алгоритм может применяться рекурсивно. То есть по результаты повторного эксперимента определяем новые линейные связи. Затем производим дальнейшее редуцирование модели и выполняем следующий повторный эксперимент. Далее мы покажем, как провести редукцию задачи таким образом, чтобы повторные эксперименты выполнялись для значительно менее жесткой модели.

Идентификацию электрической цепи будем выполнять методом МУС, подробно рассмотренном в предыдущем параграфе. Полученные результаты при переходе к контурному базису будут справедливы и при применении метода МКП.

При использовании ППИ для идентификации цепей с топологическими вырождениями необходимо:

- найти линейные связи (2.38) между переменными задачи идентификации по данным первичных экспериментов;
- предложить вид повторных экспериментов, которые следует выполнить для менее жесткой задачи.

Решение именно этих задач рассматривается далее.

2.5.2. Определение линейных связей между параметрами математической модели цепи

Получим уравнение линейной связи между элементами столбцов матрицы \mathbf{Y}_0 при идентификации цепи методом МУС. Представим матричное уравнение $\mathbf{U} \cdot \mathbf{Y}_0 = \mathbf{1}$ в виде N систем уравнений

$\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}_k = \mathbf{e}_k$, $k = \overline{1, N}$ (N – число узлов цепи), где \mathbf{y}_k есть k -ый столбец матрицы узловых проводимостей \mathbf{Y}_0 .

Пусть в цепи имеется особое сечение. Тогда плохая обусловленность матрицы \mathbf{U} вызвана наличием в ее спектре большого по модулю собственного числа λ_1 :

$$\lambda_1(\mathbf{U}) \gg \lambda_2(\mathbf{U}) \geq \dots \geq \lambda_N(\mathbf{U}).$$

Рассмотрим систему уравнений $\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}_1 = \mathbf{e}_1$. Умножив ее правую и левую части на матрицу \mathbf{U} слева $s - 1$ раз, получим

$$\mathbf{U}^s \cdot \mathbf{y}_1 = \mathbf{U}^{s-1} \cdot \mathbf{e}_1. \quad (2.39)$$

Представим матрицу \mathbf{U} в виде $\mathbf{U} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1}$. Тогда $\mathbf{U}^s = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda}^s \cdot \mathbf{P}^{-1}$, где \mathbf{P} – матрица собственных векторов матрицы \mathbf{U} ; $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ – матрица собственных значений матрицы \mathbf{U} . При $s \rightarrow \infty$ матрица $\mathbf{\Lambda}^s$ вырождается:

$$\mathbf{\Lambda}^s = \lambda_1^s \cdot \text{diag} \left(1, \frac{\lambda_2^s}{\lambda_1^s}, \dots, \frac{\lambda_N^s}{\lambda_1^s} \right) \Bigg|_{s \rightarrow \infty} = \lambda_1^s \cdot \text{diag}(1, 0, \dots, 0).$$

Следовательно, все строки матрицы \mathbf{U}^s попарно линейно зависимы, и любое из уравнений (2.39) представляет собой искомую линейную связь (2.38) между компонентами вектора \mathbf{y}_1 . Поскольку $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N) \equiv \mathbf{1}$, то совокупность линейных связей для всех столбцов матрицы \mathbf{U} можно записать следующим образом

$$\mathbf{U}^s \cdot \mathbf{Y}_0 = \mathbf{U}^{s-1} \cdot \mathbf{1}. \quad (2.40)$$

Если коэффициенты матрицы \mathbf{U} получены в результате эксперимента с некоторой погрешностью, то линейная связь находится с погрешностью того же порядка, что и погрешность измерения. Действительно, она определяется только максимальным по модулю собственным значением, искажение которого близко к погрешности коэффициентов матрицы \mathbf{U} .

Пусть коэффициенты матрицы \mathbf{U} определяются методом МУС с погрешностью Δ_{\max} . Оценим погрешность δ_ξ определения линейных связей в зависимости от числа Θ обусловленности матрицы \mathbf{Y}_0 для

цепи, изображенной на рис. 2.23. Данная цепь имеет особый разрез S . В качестве δ_ξ примем величину

$$\delta_\xi = \max_k |(\xi, y_k) - \xi_{0,k}|,$$

ξ – вектор коэффициентов линейной связи (2.38), одинаковый для всех столбцов матрицы Y_0 , $\xi_{0,k}$ – свободный член линейной связи для k -го столбца. На рис. 2.24 представлены зависимости δ_ξ от числа обусловленности матрицы Y_0 для различных уровней погрешности измерения напряжений Δ_{\max} . Для получения гладких кривых эти зависимости усреднялись по большому числу расчетов. Как можно видеть, погрешность определения линейных связей не зависит от числа обусловленности матрицы Y_0 и близка к Δ_{\max} .

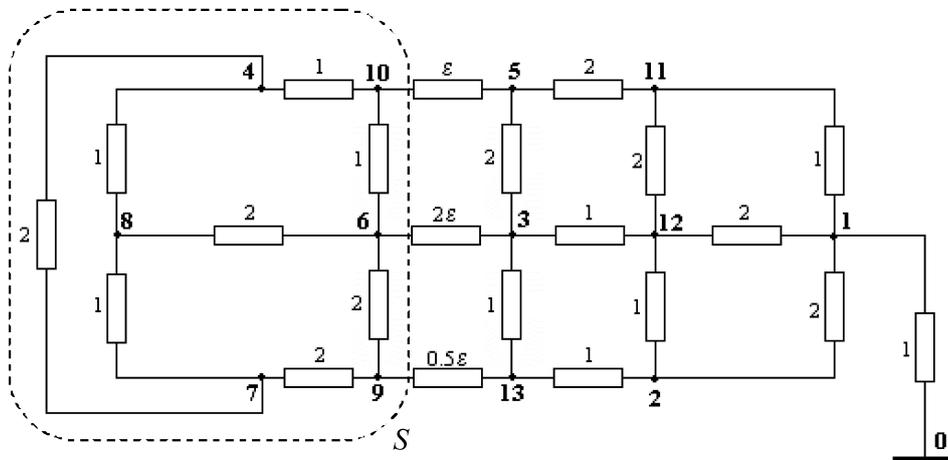


Рис. 2.23. Электрическая цепь с особым разрезом s для исследования точности решения задачи идентификации

Зависимости, представленные на рис. 2.24, получены при $s = 5$. Увеличение показателя степени s приводит к уменьшению влияния сильно искаженных малых собственных значений матрицы U на коэффициенты линейных связей. Поэтому представляет интерес исследование зависимости погрешности определения линейных связей от величины s . Зависимость $\delta_\xi = \delta_\xi(s)$ представлена на рис. 2.25 для различных Θ . Можно видеть, что увеличение значения s сверх $4 \div 5$ нецелесообразно.

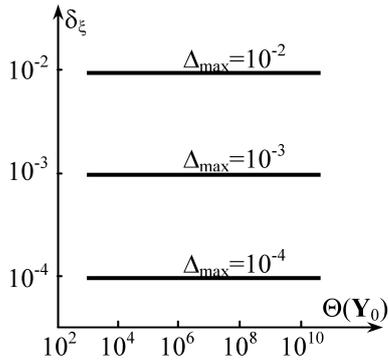


Рис. 2.24. Усредненные зависимости погрешности δ_ξ определения линейных связей от числа обусловленности матрицы Y_0 при различных погрешностях измерения Δ_{\max}

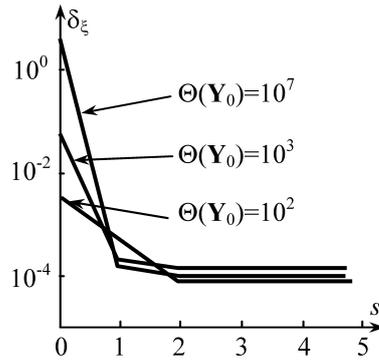


Рис. 2.25. Влияние показателя степени s на погрешность δ_ξ определения линейных связей для различных чисел обусловленности $\Theta(Y_0)$

В заключение отметим, что при идентификации невзаимных цепей (цепей с управляемыми источниками и др.) матрица Y_0 не является симметричной. Поэтому линейные связи между элементами столбцов матриц в общем случае не совпадают с линейными связями между элементами строк матриц. Однако, замечая, что $Y_0 \cdot U = U \cdot Y_0 = \mathbf{1}$, получим следующее выражение для линейных связей между элементами строк

$$Y_0 U^s = U^{s-1}. \quad (2.41)$$

Очевидно, что рассмотренные выше свойства линейных связей между элементами столбцов справедливы и для связей между элементами строк. В дальнейшем будем полагать, что при необходимости определяются обе группы связей: связи между элементами столбцов по выражению (2.29) и связи между элементами строк по выражению (2.41). Заметим, что при идентификации электрической цепи типа «черного ящика» всегда следует определять обе группы связей.

2.5.3. Алгоритм и результаты решения задачи идентификации электрических цепей с использованием повторных измерений

Ранее было показано, что при K топологических вырождениях в спектре матрицы \mathbf{U} имеется группа $\Lambda_{\max} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ больших собственных значений, таких что

$$\lambda_1(\mathbf{U}) \geq \dots \geq \lambda_K(\mathbf{U}) \gg \lambda_{K+1}(\mathbf{U}) \geq \dots \geq \lambda_N(\mathbf{U}).$$

Таким образом, из уравнений (2.40) можно найти K независимых линейных связей (2.38), каждая из которых соответствует некоторому собственному числу из группы Λ_{\max} . Для численного получения всех независимых связей необходимо значение показателя степени s в (2.40), при котором информация обо всех малых собственных числах в матрице \mathbf{U}^s исчезает, а информация о Λ_{\max} сохраняется. Согласно стандартам арифметики с представлением чисел в формате с плавающей точкой погрешность представления мантииссы числа в ЭВМ составляет 10^{-16} (при вычислениях с двойной точностью). Поэтому, для обеспечения вышеуказанного условия необходимо, чтобы $(\lambda_{k+1}/\lambda_k)^s \leq 10^{-16}$. Отсюда найдем оптимальный показатель степени

$$s = -\text{ceil}\left(16 / \log_{10} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right),$$

где $\text{ceil}(x)$ – функция округления величины x до целого в большую сторону.

При проведении измерений с относительной погрешностью Δ_{\max} именно она является основной величиной, определяющей s , поэтому

$$s = \text{ceil}\left(\log_{10}(\Delta_{\max}) / \log_{10} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right). \quad (2.42)$$

Соотношение (2.42) показывает, что при $\Theta(\mathbf{U}) \gg 1/\Delta_{\max}$ достаточно принять $s = 1 \div 2$ и $s = 2 \div 5$ при меньшей жесткости задачи. В дальнейшем, если это не оговорено особо, будем принимать $s = 4$.

Таким образом, мы рассмотрели способ получения линейных связей между элементами строк и (или) столбцов матрицы \mathbf{U} . Эти линейные связи можно получить по результатам первичного эксперимента. Точность их определения не зависит от жесткости математической модели и определяется лишь погрешностью измерений. Рассмотрим далее способ редуцирования задачи для проведения повторных экспериментов.

Новая редуцированная задача идентификации должна удовлетворять следующим требованиям:

- из решения редуцированной задачи должны определяться параметры всех элементов модели, за исключением тех, которые затем можно восстановить с помощью линейных связей.
- число обусловленности матрицы коэффициентов новой модели должно быть меньше, чем число обусловленности матрицы исходной модели.

Очевидно, что для обеспечения второго требования необходимо удалять из модели одно за другим топологические вырождения. На первом этапе редуцирования — это топологическое вырождение, соответствующее максимальному собственному числу $\lambda_1(\mathbf{U})$. На следующем этапе — соответствующее максимальному из оставшихся, то есть $\lambda_2(\mathbf{U})$ и т. д.

Топологические вырождения разбивают цепь на подцепи, слабо связанные между собой. Чтобы удалить топологическое вырождение, достаточно соединить с нулевым узлом изолированные им подцепи дополнительной ветвью с некоторой большой проводимостью G . Если имеется особый контур, то необходимо в ветвь связи, входящую в этот контур, ввести дополнительное большое сопротивление R .

На практике удобнее соединять накоротко ($G \rightarrow \infty$) один из узлов изолированной подцепи с нулевым, шунтируя тем самым особое сечение, а также разрывать ($R \rightarrow \infty$) особый контур. При этом матрица коэффициентов редуцированной модели является подматрицей матрицы исходной модели. Цель повторных экспериментов состоит в оп-

ределении элементов этой подматрицы. Далее с помощью линейных связей можно восстановить недостающие элементы исходной матрицы.

Выполним, используя описанный метод, идентификацию цепи, изображенной на рис. 2.26. Рассматриваемая цепь содержит одно особое сечение S .

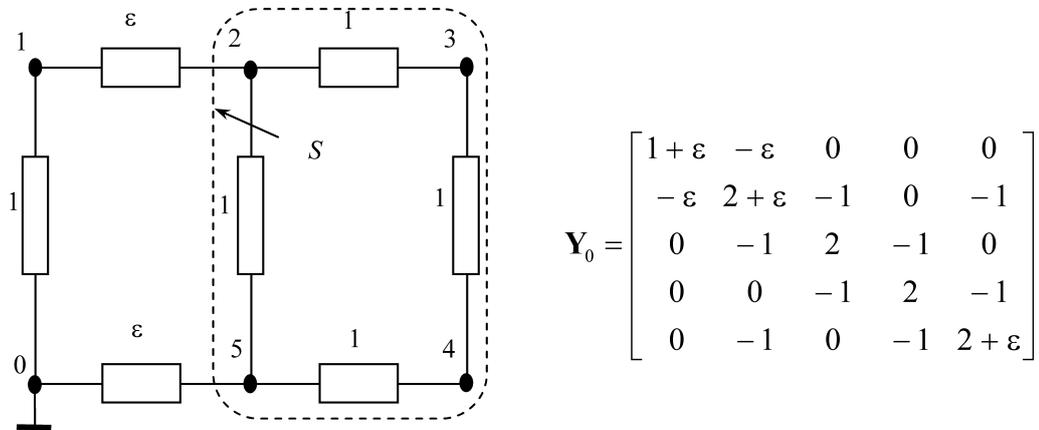


Рис. 2.26. Резистивная цепь с одним особым сечением

Примем для определенности $\varepsilon = 10^{-3}$ См. Имеем $\Theta(Y_0) \approx 10^3$, следовательно, матрицы Y_0 и $Z_0 = Y_0^{-1}$ цепи являются плохо обусловленными. Проведем эксперименты согласно МУС, используя описанную ранее модель погрешности измерений при $\Delta_{\max} = 0,01 = 1\%$. Результаты первой серии экспериментов имеют вид

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 1,004 & 0,5005 & 0,4979 & 0,4943 & 0,4989 \\ 0,5005 & 50,86 & 50,31 & 50,38 & 50,11 \\ 0,4979 & 50,31 & 50,57 & 50,39 & 50,24 \\ 0,4943 & 50,38 & 50,56 & 50,94 & 50,31 \\ 0,4989 & 50,06 & 50,19 & 50,31 & 50,43 \end{bmatrix}.$$

Рассматриваемая цепь взаимная. Поэтому экспериментальная матрица напряжений была симметрирована. При записи результата здесь и далее показаны только значащие цифры, количество которых определяется величиной Δ_{\max} .

Как и ожидалось, напряжения узлов изолированной подцепи доминируют по величине. Наименьшее собственное значение матри-

цы напряжений равно $\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{U}}) = 0,162$, что отличается от его точного значения $\lambda_{\min}(\mathbf{U}) = 0,250$ на 35%. То есть погрешность определения малого собственного значения значительно больше погрешности измерений. При этом погрешность максимального собственного числа составляет – 0,1%, то есть, не превышает погрешности измерений. Следуя МУС, получим решение задачи идентификации в виде

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0 = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,001 & -5,808 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ -5,808 \cdot 10^{-3} & 1,359 & -0,7252 & 0 & -0,3917 \\ 0 & -0,7252 & 3,569 & -0,2732 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2732 & 1,099 & -0,5888 \\ 0 & -0,3917 & 0 & -0,5888 & 3,572 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее, полагая структуру цепи известной, элементы матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}_0$, соответствующие реально несуществующим проводимостям, заменяем нулями. Малые собственные значения матрицы $\tilde{\mathbf{U}}$ искажены погрешностью измерения. Поэтому относительная погрешность $\delta \mathbf{Y}_0$ определения элементов матрицы \mathbf{Y}_0 существенно превышает $\Delta_{\max} = 1\%$

$$|\delta \mathbf{Y}_0| = \begin{bmatrix} 6 \cdot 10^{-4} & 480 & - & - & - \\ 480 & 32,1 & 27,5 & - & 60,8 \\ - & 27,5 & 78,4 & 72,7 & - \\ - & - & 72,7 & 45,0 & 41,1 \\ - & 60,8 & - & 41,1 & 78,5 \end{bmatrix} \%.$$

Таким образом, МУС не позволяет идентифицировать рассматриваемую цепь. Применим для идентификации цепи принцип повторных измерений (ППИ). Найдем по результатам первого эксперимента линейные связи (2.40) между элементами матрицы \mathbf{Y}_0 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 9,8438 \cdot 10^{-3} & 0,99592 & 0,99461 & 1,000 & 0,98757 \\ 9,8435 \cdot 10^{-3} & 0,99592 & 0,99461 & 1,000 & 0,98757 \\ 9,8435 \cdot 10^{-3} & 0,99592 & 0,99461 & 1,000 & 0,98757 \\ 9,8435 \cdot 10^{-3} & 0,99592 & 0,99461 & 1,000 & 0,98757 \\ 9,8435 \cdot 10^{-3} & 0,99592 & 0,99461 & 1,000 & 0,98757 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^s} \times \mathbf{Y}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 4,9071 \cdot 10^{-2} & 4,9403 & 4,9338 & 4,9606 & 4,8989 \\ 4,9030 \cdot 10^{-2} & 4,9403 & 4,9338 & 4,9606 & 4,8989 \\ 4,9030 \cdot 10^{-2} & 4,9403 & 4,9338 & 4,9606 & 4,8989 \\ 4,9030 \cdot 10^{-2} & 4,9403 & 4,9338 & 4,9606 & 4,8989 \\ 4,9030 \cdot 10^{-2} & 4,9403 & 4,9338 & 4,9606 & 4,8989 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^{s-1}} \times 10^{-3}. \quad (2.43)$$

Линейные связи (2.43) нормированы: каждая строка в (2.43) разделена на максимальный в строке элемент матрицы \mathbf{U}^s . Видно, что все строки в (2.43) одинаковы с погрешностью, не превышающей Δ_{\max} . Как отмечалось выше, это следствие того, что в рассматриваемой цепи имеется только одно особое сечение. Поэтому в качестве линейной связи может быть взята любая строка из (2.43), например, первая. Тогда для столбцов \mathbf{y}_i , $i = \overline{1, 5}$ матрицы \mathbf{Y}_0 имеем пять эквивалентных линейных связей, каждая из которых может быть использована в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \xi \cdot \mathbf{y}_1 = \xi_{0,1} = 4,9071 \cdot 10^{-5}, \quad \xi \cdot \mathbf{y}_2 = \xi_{0,2} = 4,9403 \cdot 10^{-3}, \quad \xi \cdot \mathbf{y}_3 = \xi_{0,3} = 4,9338 \cdot 10^{-3}, \\ \xi \cdot \mathbf{y}_4 = \xi_{0,4} = 4,9606 \cdot 10^{-3}, \quad \xi \cdot \mathbf{y}_5 = \xi_{0,5} = 4,8989 \cdot 10^{-3}, \end{aligned}$$

где $\xi = (9,8438 \cdot 10^{-3}, 0,99592, 0,99461, 1,000, 0,98757)$.

Далее модифицируем цепь таким образом, чтобы удалить особое сечение. Для этого соединим один из узлов изолированной подцепи, например, четвертый узел, с нулевым. Матрица $\mathbf{Y}_0^{(-1)}$ узловых проводимостей новой редуцированной цепи имеет вид

$$\mathbf{Y}_0^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 2 + \varepsilon & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 + \varepsilon \end{bmatrix},$$

где верхний индекс (-1) показывает, что размер матрицы уменьшился на единицу. Матрица $\mathbf{Y}_0^{(-1)}$ получена удалением четвертой строки и четвертого столбца из исходной матрицы \mathbf{Y}_0 .

Проведем согласно МУС повторную серию экспериментов для редуцированной цепи. Матрица измеренных узловых напряжений имеет вид

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(-1)} = \begin{bmatrix} 1,004 & 9,935 \cdot 10^{-4} & 4,974 \cdot 10^{-4} & 5,009 \cdot 10^{-4} \\ 9,935 \cdot 10^{-4} & 1,001 & 0,4963 & 0,4965 \\ 4,974 \cdot 10^{-4} & 0,4963 & 0,7524 & 0,2486 \\ 5,009 \cdot 10^{-4} & 0,4965 & 0,2486 & 0,7472 \end{bmatrix}.$$

Поскольку из редуцированной цепи особое сечение было удалено, то матрица $\tilde{\mathbf{U}}^{(-1)}$ хорошо обусловлена и $\Theta(\tilde{\mathbf{U}}^{(-1)}) \approx 6$. Поэтому и решение редуцированной задачи идентификации можно получить с погрешностью порядка Δ_{\max} . Действительно,

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0^{(-1)} = \begin{bmatrix} 0,9961 & -9,762 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ -9,762 \cdot 10^{-4} & 1,971 & -0,9745 & -0,9854 \\ 0 & -0,9745 & 1,975 & 0 \\ 0 & -0,9854 & 0 & 1,996 \end{bmatrix}$$

$$\text{и } |\delta \mathbf{Y}_0^{(-1)}| = \begin{bmatrix} 0,5 & 2,3 & - & - \\ 2,3 & 1,5 & 2,5 & 1,5 \\ - & 2,5 & 1,3 & - \\ - & 1,5 & - & 0,2 \end{bmatrix} \%.$$

Далее необходимо решить исходную задачу, используя линейные связи и решение редуцированной задачи. То есть необходимо найти все элементы матрицы \mathbf{Y}_0 . Для этого восстанавливаем по линейным связям вначале четвертый столбец, а затем четвертую строку.

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0 = \begin{bmatrix} 0,9961 & -9,762 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 (-8,784 \cdot 10^{-3}) & 0 \\ -9,762 \cdot 10^{-4} & 1,971 & -0,9745 & 0 (-1,560 \cdot 10^{-2}) & -0,9854 \\ 0 & -0,9745 & 1,975 & -0,9889 & 0 \\ 0 (-8,784 \cdot 10^{-3}) & 0 (-1,560 \cdot 10^{-2}) & -0,9889 & 1,977 & -0,9849 \\ 0 & -0,9854 & 0 & -0,9849 & 1,996 \end{bmatrix}$$

Здесь в скобках указаны расчетные величины, которые в точной матрице равны нулю. Видно, что все они имеют такой же порядок погрешности, что и порядок погрешности измерений. Таким образом, относительная погрешность решения исходной задачи идентификации составляет величину порядка Δ_{\max}

$$|\delta \tilde{\mathbf{Y}}_0| = \begin{bmatrix} 0,5 & 2,3 & - & - & - \\ 2,3 & 1,5 & 2,5 & - & 1,5 \\ - & 2,5 & 1,3 & 1,1 & - \\ - & - & 1,1 & 1,2 & 1,5 \\ - & 1,5 & - & 1,5 & 0,2 \end{bmatrix} \%.$$

В рассмотренном примере особое сечение было исключено соединением четвертого узла с нулевым. Выясним, как определить номер узла p_{opt} , соединение которого с нулевым приводит к наибольшему снижению числа обусловленности редуцированной задачи. Одним из очевидных, но весьма трудоемких способов решения этой задачи является перебор всех узлов. При этом для каждой редуцированной задачи нужно выполнить экспериментальное определение \mathbf{U} и оценку величины $\Theta(\mathbf{U})$.

Перебор узлов может быть проведен и виртуально, то есть без выполнения многочисленных экспериментов с редуцированными задачами. Для этого необходима только матрица \mathbf{U} , полученная в результате первой серии экспериментов.

Опишем k -ый ($k = \overline{1, N}$, где N – число узлов цепи) шаг алгоритма поиска номера узла:

1. k -ую строку и k -ый столбец матрицы \mathbf{U} переставляем на первое место;
2. Выполняем один шаг прямого хода метода Гаусса, в результате которого получаем матрицу $\mathbf{U}^{(-1)}$, размером на единицу меньше \mathbf{U} ;
3. Вычисляем $\Theta(\mathbf{U}^{(-1)})$, $\Theta(\mathbf{U}^{(-1)}) \leq \Theta(\mathbf{U})$;
4. Записываем величину $\Theta(\mathbf{U}^{(-1)})$ в $\theta(k)$.

После выполнения N шагов данного алгоритма величина p_{opt} определяется следующим образом: $p_{opt} : \theta(p_{opt}) = \min_k \theta(k)$.

Задача поиска p_{opt} может иметь неединственное решение. Так, в рассмотренном примере узлы 2, 3, 4 и 5 практически равноправны при выборе их в качестве узла p_{opt} , то есть $\theta(2) \approx \theta(3) \approx \theta(4) \approx \theta(5)$. Действительно, удаление из спектра большого собственного значения происходит при выборе в качестве p_{opt} любого из перечисленных узлов. В этом случае в качестве p_{opt} можно взять любой их них.

Рассмотрим применение ППИ к идентификации цепи с несколькими топологическими вырождениями. Каждому топологическому вырождению соответствует одно собственное значение из группы Λ_{max} и номер p_{opt} наилучшего элемента для редуцирования задачи (для устранения этого топологического вырождения). Совокупность таких номеров обозначим $\Pi = \{p_{1,opt}, \dots, p_{K,opt}\}$.

Для идентификации цепи с несколькими топологическими вырождениями найдем по экспериментальной матрице \mathbf{U} все элементы Π , используя описанный выше алгоритм. Далее, применив (2.41), найдем k независимых линейных связей. После этого исключим одновременно все топологические вырождения и выполним повторные эксперименты. И, наконец, по независимым линейным связям и результатам повторного эксперимента идентифицируем параметры цепи. Данный способ удобен для практики, поскольку требует проведения всего двух серий экспериментов. Однако его использование обеспечивает требуемую точность решения задачи только в тех случаях, когда особые сечения не охватывают друг в друга.

В общем случае, когда особые сечения могут быть и вложенными, идентификацию цепи следует выполнять, используя следующий алгоритм:

1. Проводим первую серию экспериментов согласно МУС, в результате которой определяем матрицу напряжений \mathbf{U} ;
2. По матрице \mathbf{U} определяем первую линейную связь, соответствующую максимальному собственному значению матрицы \mathbf{U} ;
3. Анализируя матрицу \mathbf{U} , определяем номер $p_{1,opt}$ узла и выполняем редуцирование задачи, для чего узел с номером $p_{1,opt}$ соединяем с нулевым узлом;
4. Проводим серию повторных экспериментов в редуцированной цепи, в результате которой определяем новую экспериментальную матрицу $\mathbf{U}^{(-1)}$;
5. Если число обусловленности $\Theta(\mathbf{U}^{(-1)}) > 1/\Delta_{max}$, то определяем вторую линейную связь, повторяем пункты 3÷5 алгоритма и определяем $p_{2,opt}$, матрицу $\mathbf{U}^{(-2)}$ и т. д. Если число обусловленности приемлемо при заданном уровне погрешности измерений Δ_{max} , то обращаем матрицу $\mathbf{U}^{(-k)}$ и определяем параметры ветвей редуцированной цепи. Оставшиеся параметры исходной цепи определяем из k независимых линейных связей.

Результаты применения описанного алгоритма к идентификации цепи с одним особым разрезом показаны на рис. 2.27. По оси ординат на рис. 2.27 отложена погрешность решения задачи идентификации, вычисляемая по формуле (2.37).

Сопоставление зависимостей $\delta = \delta(\Theta)$, представленных на рис. 2.20 и рис. 2.27, полученных для одной и той же цепи, позволяет сделать следующие важные выводы:

- использование ППИ позволило снизить погрешность определения элементов матрицы \mathbf{Y}_0 до уровня погрешности измерений;
- погрешность идентификации при использовании ППИ не зависит обусловленности математической модели цепи.

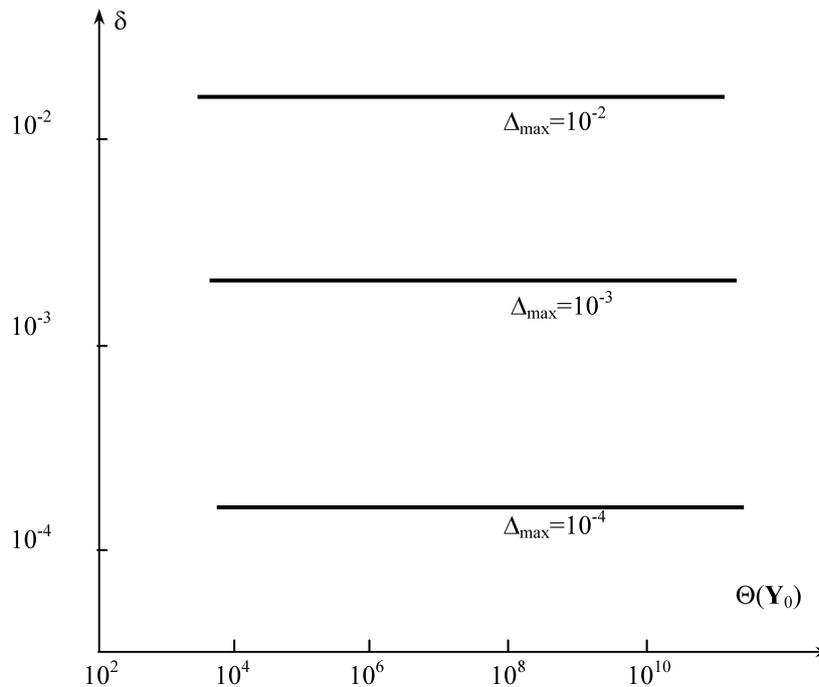


Рис. 2.27. Усредненная среднеквадратичная погрешность определения элементов матрицы Y_0 цепи с одним особым разрезом при использовании ППИ

В настоящем разделе рассматривалась идентификация резистивных цепей с помощью МУС. Однако полученные результаты справедливы также для метода МКП и для идентификаций цепей переменного тока. Особые сечения в этом случае могут возникать на частотах, близких к резонансным. Альтернативой применения ППИ в данном случае является выполнение экспериментов при различных частотах. Однако в сложных устройствах выбор частот для проведения диагностических экспериментов затруднен наличием большого числа индуктивно-емкостных связей. Кроме того, свойства математических моделей устройств могут значительно изменяться при изменении частоты, особенно для высокочастотных устройств. Поэтому на практике произвольный выбор частоты выполнения экспериментов, как правило, невозможен.

Рассмотрим пример идентификации цепи переменного тока, схема которой изображена на рис. 2.28, *а*. Эта цепь имеет два вложенных особых контура l_1 и l_2 на частоте, близкой к 1 кГц. Поэтому для

идентификации цепь необходимо редуцировать дважды. В п. 2.4 было показано, что идентификация параметров цепей с вложенными выражениями представляет особую сложность.

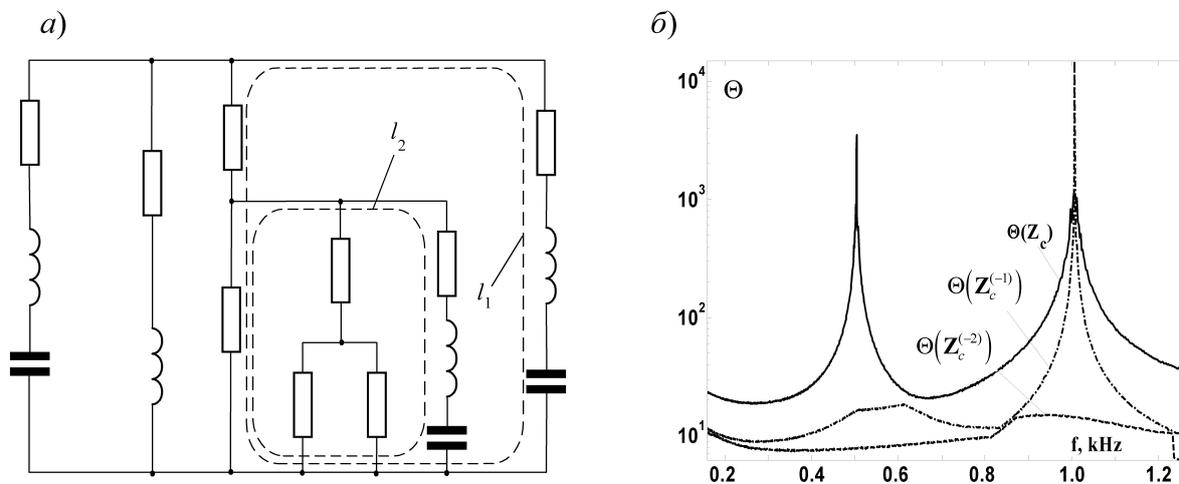


Рис. 2.28. Цепь переменного тока (а) с двумя особыми контурами и (б) – зависимости числа обусловленности для исходной цепи – $\Theta(\mathbf{Z}_c)$, для цепи после первой редукции – $\Theta(\mathbf{Z}_c^{(-1)})$, для цепи после второй редукции – $\Theta(\mathbf{Z}_c^{(-2)})$ от частоты

На рис. 2.28, б представлены зависимости от частоты числа обусловленности $\Theta(\mathbf{Z}_c)$ для исходной цепи, $\Theta(\mathbf{Z}_c^{(-1)})$ для цепи после первой редукции и $\Theta(\mathbf{Z}_c^{(-2)})$ для цепи после второй редукции. Можно видеть, что первая редукция задачи уменьшила число ее обусловленности практически во всем диапазоне частот. Однако, этого недостаточно для частот, близких к 1 кГц. Вторая редукция позволяет получить приемлемую обусловленность во всем диапазоне частот, включая частоту 1 кГц. Поэтому идентификация параметров цепи после второй редукции на любой частоте не представляет трудностей.

Как показали расчеты, погрешность построения линейных связей на каждой итерации составляла величину порядка погрешности измерений для любой частоты. В рассматриваемой задаче она состав-

ляла – $\Delta_{\max} = 1\%$, поэтому определение по линейным связям параметров исходной цепи также не вызвало затруднений.

Представляет интерес сопоставление погрешностей идентификации цепей после первой и после второй редукции, выполненное на рис. 2.29.

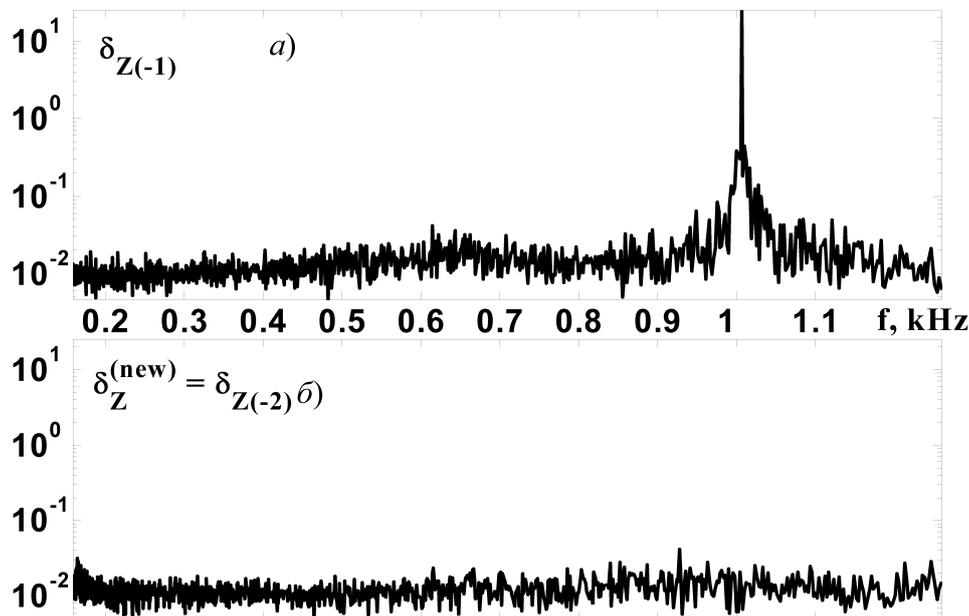


Рис. 2.29. Результаты идентификации с помощью ППИ цепи переменного тока с вложенными особыми контурами. Погрешность идентификации после первой редукции цепи (а) и после второй редукции цепи (б)

Можно видеть, что идентификация цепи после первой редукции успешно выполнена для всех частот, исключая частоты близкие к 1 кГц. Это хорошо согласуется с зависимостью от частоты $\Theta(\mathbf{Z}_c^{(-1)})$, представленной на рис. 2.28. Погрешность идентификаций цепи после второй редукции (рис. 2.29, б) не зависит от частоты и близка к погрешности измерений $\Delta_{\max} = 1\%$.

Таким образом, применение ППИ позволяет существенно повысить точность решения задач идентификации цепей постоянного и переменного тока при использовании как МУС, так и МКП.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ

3.1. СИНТЕЗ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ ДЛИННОЙ ЛИНИИ

В настоящем параграфе рассмотрим задачи синтеза схемы замещения длинной линии. Как уже неоднократно отмечалось, синтез схемы замещения – типичная обратная задача теории цепей.

Задача синтеза состоит из двух подзадач: синтеза структуры схемы замещения и синтеза ее параметров. Синтез структуры схемы замещения линии достаточно хорошо известен. Поэтому классические результаты будут рассмотрены весьма кратко, а основное внимание уделим новым схемам замещения. В этом параграфе будем рассматривать синтез во временной области. Цель синтеза схем замещения (их оптимизации) заключается в определении таких параметров схем замещения, при которых их переходные характеристики наилучшим образом аппроксимируют переходные характеристики длинной линии.

Процессы, протекающие в длинных линиях, описываются системой телеграфных уравнений. Для операторных изображений векторов токов $I(p,x)$ и напряжений $U(p,x)$ при нулевых начальных условиях они имеют вид [11]

$$\begin{aligned} -\frac{dU(p,x)}{dx} &= Z(p)I(p,x) \\ -\frac{dI(p,x)}{dx} &= Y(p)U(p,x) \end{aligned}, \quad (3.1)$$

где $Z(p)$ и $Y(p)$ – матрицы параметров. К уравнениям типа телеграфных можно свести задачи о распространении электромагнитной волны в системе горизонтальных проводов, в коаксиальных линиях, в обмотках трансформаторов, в цилиндрических экранах.

Классические цепочечные многозвенные схемы замещения длинных линий получаются при переходе в уравнениях (3.1) от частных производных к конечным разностям:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}} \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\Delta x}.$$

Система разностных уравнений в совокупности с граничными условиями образуют разностную схему. На рис. 3.1 графически изображены разностные схемы, соответствующие Т- или П-образной n -звенной схеме замещения.

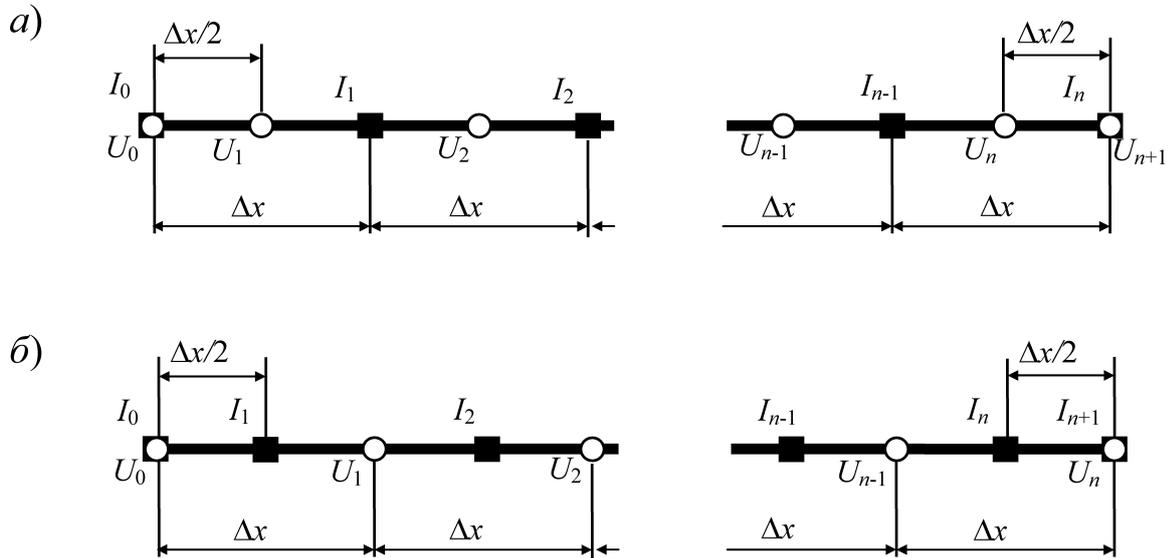


Рис. 3.1. Шаблоны для получения n -звенных Т-образных (a) и П-образных (б) схем замещения

Рассмотрим подробнее процесс построения схемы замещения с использованием шаблона, изображенного на рис. 3.1, a. Разобьем линию длиной l на n равных участков длиной Δx каждый и заменим частные производные в (3.1) конечными разностями

$$\left\{ \begin{array}{l} I_k(p) - I_{k-1}(p) = -\Delta x Y(p) U_k(p), \quad k = \overline{1, n}, \\ U_{v+1}(p) - U_v(p) = -\Delta x Z(p) I_v(p), \quad v = \overline{1, n-1}, \\ U_1(p) - U_0(p) = -\frac{\Delta x}{2} Z(p) I_0(p), \\ U_{n+1}(p) - U_n(p) = -\frac{\Delta x}{2} Z(p) I_n(p). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Систему (3.2) дополним граничными условиями $U_0 = U(0, p)$ и $U_{n+1} = U(l, p)$. При этом система (3.2) соответствует n -звенной схеме замещения, составленной из Т-образных звеньев. Каждое звено этой схемы замещения имеет вид, изображенный на рис. 3.2, а. Такую схему замещения линии будем далее называть Т-образной. Аналогичным образом можно применить для конечно-разностной аппроксимации производных в (3.1) шаблон, изображенный на рис. 3.1, б. Система уравнений, аналогичная (3.2), будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} U_k(p) - U_{k-1}(p) = -\Delta x Z(p) I_k(p), & k = \overline{1, n}, \\ I_{v+1}(p) - I_v(p) = -\Delta x Y(p) U_v(p), & v = \overline{1, n-1}, \\ I_1(p) - I_0(p) = -\frac{\Delta x}{2} Y(p) U_0(p), \\ I_{n+1}(p) - I_n(p) = -\frac{\Delta x}{2} Y(p) U_n(p). \end{cases} \quad (3.3)$$

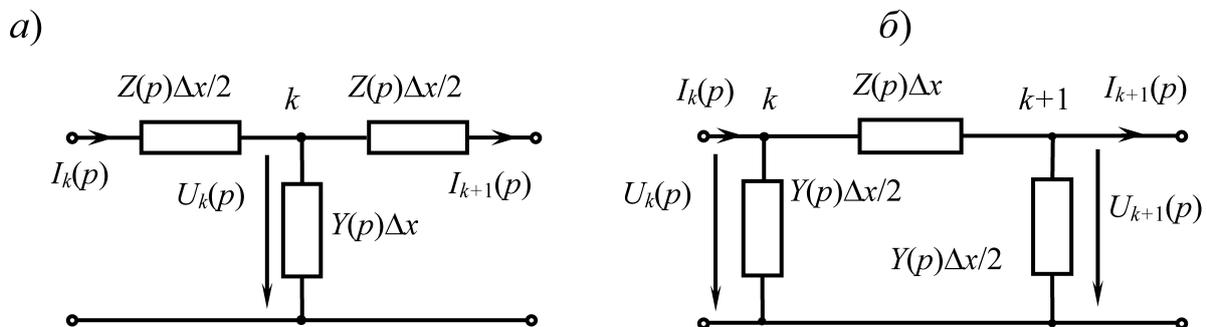


Рис. 3.2. Звено Т-образной (а) и П-образной (б) схем замещения линии

Систему (3.3) дополним граничными условиями $I_0 = I(0, p)$ и $I_{n+1} = I(l, p)$. Тогда система уравнений (3.3) будет соответствовать n -звенной схеме замещения, составленной из П-образных звеньев. Каждое звено этой схемы замещения имеет вид, изображенный на рис. 3.2, б. Такую схему замещения линии будем далее называть П-образной.

Сопоставим процессы в линии и в ее цепочечной схеме замещения. Для этого рассмотрим переходный процесс при включении Т-

образной m -звенной схемы замещения линии под постоянное напряжение U_0 . Схема замещения моделирует процессы в линии без потерь длиной ℓ с погонными параметрами L' и C' , нагруженной на волновое сопротивление $z_w = \sqrt{L'/C'}$.

В этом случае имеем $Z(p) = pL'$, $Y(p) = pC'$. Задача имеет аналитическое решение. Выражение для тока нагрузки m -звенной Т-образной схемы замещения имеет вид:

$$i_m(t) = \frac{U_0 \omega_0}{z_w} \int_0^{\omega_0 t} J_{2m}(\omega_0 t) dt ,$$

где $\omega_0 = 2/\sqrt{L_s C_s}$ – частота среза звена, $L_s = L'\Delta\ell/2$ и $C_s = C'\Delta\ell$ – соответственно индуктивность и емкость звена, J_{2m} – функция Бесселя первого рода порядка $2m$.

Выражение для тока позволяет записать передаточную характеристику по напряжению $k_U(t)$ схемы замещения линии:

$$k_U(t) = \frac{z_w i_m(t)}{U_0} = \omega_0 \int_0^{\omega_0 t} J_{2m}(\omega_0 t) dt .$$

Ступенчатая линия 1 на рис. 3.3 представляет собой зависимость $k_U(t)$ длинной линии без потерь. Коэффициент передачи по напряжению равен нулю до момента времени $t_0 = \frac{\ell}{v} = \ell\sqrt{L'C'}$, равного времени пробега волны по линии (v – скорость распространения волны по линии).

На рис. 3.3 представлены зависимости $k_U(t)$ схемы замещения линий, содержащих три (кривая 2) и восемь (кривая 3) Т-образных звеньев.

Сопоставление кривых на рис. 3.3 показывает, что схемы замещения воспроизводят реальные процессы в длинной линии с большой погрешностью. При моделировании процесса в линии с помощью схемы замещения появляются слабозатухающие колебания, которых нет в реальном переходном процессе. Можно показать, что увеличе-

ние числа звеньев схемы замещения не приводит к уменьшению размаха этих колебаний, а увеличивает только их частоту. Первый максимум колебаний составляет $\sim 27\%$ от установившегося значения. Такая погрешность моделирования недопустима в большинстве электротехнических расчетов.

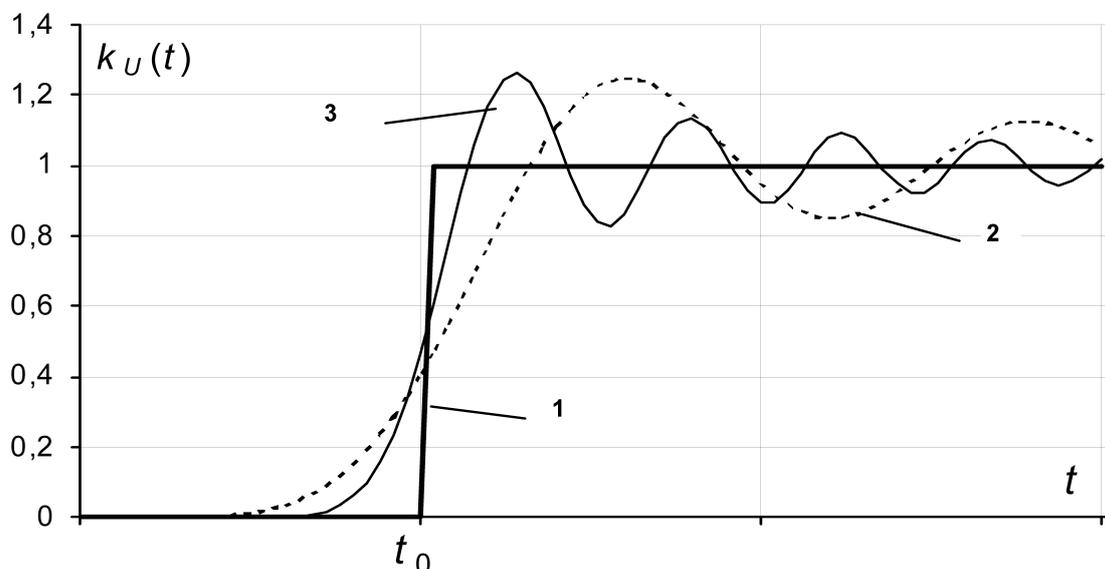


Рис. 3.3. Переходные характеристики линии (1), ее трехзвенной (2) и 8-звенной (3) схем замещения

При рассмотрении более близких к практике неискажающих линий, а также линий, погонные параметры которых зависят от частоты, колебания, вносимые схемой замещения, демпфируются. Поэтому погрешность воспроизведения схемой замещения реального переходного процесса не будет столь велика. Тем не менее, представляет принципиальный интерес задача синтеза схемы замещения, наилучшим образом воспроизводящей свойства линии без потерь. Схемы замещения, полученные при решении именно этой задачи, будут соответствовать ее решению для наихудшего случая. Поэтому они позволят с большей точностью моделировать процессы и в линиях с потерями.

Рассмотрим подход к оптимизации схем замещения длинных линий, основанный на улучшении конечно-разностной аппроксимации уравнений (3.1). Можно показать [12], что погрешность аппроксимации производных в (3.1) различна для внутренних и крайних то-

чек шаблона. Для внутренних точек обоих шаблонов, изображенных на рис. 3.1, главный член погрешности имеет вид $\frac{\Delta x^2}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$. Для крайних точек шаблонов главный член погрешности по переменной I для шаблона рис. 3.1, *а* равен $\frac{\Delta x}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ и для шаблона рис. 3.1, *б* равен $\frac{\Delta x}{4} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ по переменной U . Это несовершенство классической аппроксимации производных по x в (3.1) можно преодолеть при использовании для крайних точек шаблонов трехточечной аппроксимации.

Покажем путь получения разностного уравнения для крайней левой точки шаблона, показанного на рис. 3.1, *а*. Будем искать выражение для производной в виде

$$\left. \frac{dU(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\alpha_0 U_0(p) + \alpha_1 U_1(p) + \alpha_2 U_2(p)}{\Delta x}. \quad (3.4)$$

Воспользуемся для представления функций $U_1(p)$ и $U_2(p)$ в точке $x = 0$ формулой Маклорена

$$\begin{aligned} U_1(p) &= U_0(p) + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{dU(x, p)}{dx} \right|_{x=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \left. \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} \right|_{x=0} + \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 \left. \frac{d^3 U(x, p)}{dx^3} \right|_{x=0} + O(\Delta x^4) \\ U_2(p) &= U_0(p) + \frac{3\Delta x}{2} \left. \frac{dU(x, p)}{dx} \right|_{x=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^2 \left. \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} \right|_{x=0} + \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{3\Delta x}{2} \right)^3 \left. \frac{d^3 U(x, p)}{dx^3} \right|_{x=0} + O(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Подставляя выражения для $U_1(p)$ и $U_2(p)$ в (3.4), получим следующую систему уравнений для определения α_0 , α_1 и α_2

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + 9\alpha_2 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} \alpha_0 = -8/3 \\ \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1/3 \end{cases}$$

Подставим выражения для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ в (3.4) и после ряда преобразований получим

$$\left. \frac{dU(x, p)}{dx} \right|_{x=0} = \frac{8(U_1(p) - U_0(p)) - (U_2(p) - U_1(p))}{3\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.5)$$

Главный член погрешности $\frac{\Delta x^2}{8} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$ имеет порядок малости $O(\Delta x^2)$.

Это означает, что соотношение (3.5) обеспечивает в крайней точке шаблона ту же точность аппроксимации, что и во внутренних точках.

Аналогичным образом аппроксимацию производной можно выполнить и для крайней правой точки шаблона. Используя полученные выражения для производных в крайних точках шаблона, вместо (3.2) получаем

$$\begin{cases} I_k(p) - I_{k-1}(p) = -\Delta x Y(p) U_k(p), & k = \overline{1, n}, \\ U_{v+1}(p) - U_v(p) = -\Delta x Z(p) I_v(p), & v = \overline{1, n-1}, \\ \frac{8}{3}(U_1(p) - U_0(p)) - \frac{1}{3}(U_2(p) - U_1(p)) = -\Delta x Z(p) I_0(p), \\ \frac{8}{3}(U_{n+1}(p) - U_n(p)) + \frac{1}{3}(U_n(p) - U_{n-1}(p)) = -\Delta x Z(p) I_n(p). \end{cases} \quad (3.6)$$

Системы уравнений (3.2) и (3.6) различаются только видом двух последних уравнений. Следовательно, изменения в схемах замещения будут только в крайних звеньях. На рис. 3.4 показан вид крайнего левого звена при использовании (3.6).

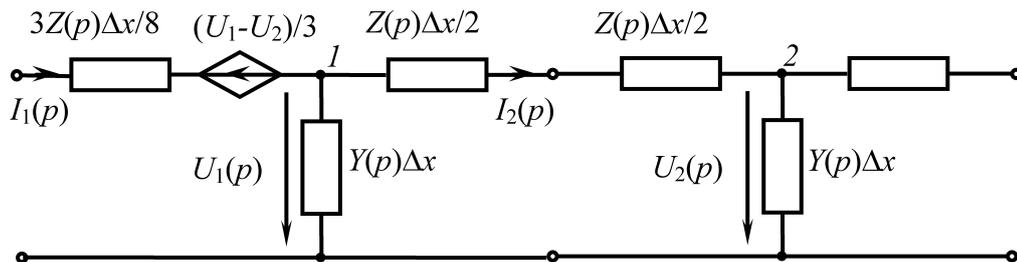


Рис. 3.4. Крайнее левое звено при использовании (3.6)

Систему уравнений, аналогичную (3.2) и (3.6), можно получить и для шаблона, изображенного на рис. 3.1, б. Соответствующая схема замещения состоит из П-образных звеньев, крайние из которых также содержат управляемые источники (в данном случае – источники тока). На рис. 3.5 показана переходная характеристика $k_U(t)$ длинной линии без потерь, нагруженной на ее волновое сопротивление.

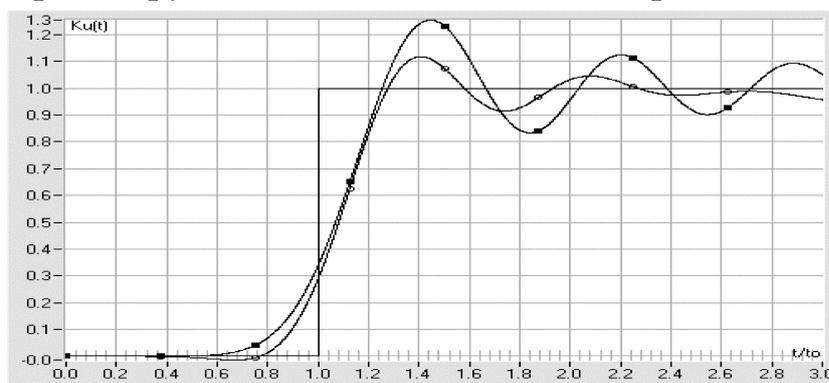


Рис. 3.5. Зависимость $k_U(t)$ для: длинной линии —, схемы замещения, соответствующей уравнениям (3.2) ■, схемы замещения, соответствующей уравнениям (3.6) °

Эту переходную характеристику сравниваем с переходными характеристиками двух пятизвенных Т-образных схем замещения. Одна из схем замещения – традиционная, соответствующая уравнениям (3.2). Другая (улучшенная схема с управляемыми источниками в крайних звеньях) соответствует уравнениям (3.6).

Как видно из рис. 3.5, переходная характеристика схемы замещения с управляемыми источниками лучше воспроизводит переходную характеристику линии в сравнении с традиционной схемой. Уменьшились величины экстремумов колебаний, увеличилось затухание колебаний, стал круче фронт импульса. Изменения коснулись только крайних звеньев схемы замещения. Поэтому схемы замещения с управляемыми источниками можно использовать для любого числа звеньев. Следует также отметить, что коэффициенты $3/8$ у крайних сопротивлений $Z(p)\Delta x$ и $1/3$ у управляемых источников в крайних звеньях могут быть подвергнуты дальнейшей оптимизации.

Далее рассмотрим иную идею синтеза схемы замещения линии. Пусть моделируемая линия разбита на неравные участки, каждый из которых моделируется одним Т-образным звеном. Длины участков линии λ_k , $k = \overline{1, m}$, моделируемые одним звеном, рассматриваем как параметры оптимизации. При этом предполагаем, что выполняются следующие условия:

- сумма длин всех участков равна длине линии –
$$\sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k = \lambda;$$

- участки, симметрично расположенные относительно середины линии, имеют одинаковую длину, что необходимо для симметричности схемы замещения

$$\lambda_k = \lambda_{m-k+1}, \quad k = \overline{1, n} \quad m = 2n + 1, \text{ или } m = 2n;$$

- Т-образные звенья схемы замещения симметричны.

Полученные ниже результаты можно будет использовать и для линий, моделируемых схемами замещения, состоящими из П-образных звеньев.

Индуктивность $L_k = K_1 L' \lambda_k / 2\ell$ и емкость $C_k = K_2 C' \lambda_k / \ell$ каждого звена схемы замещения пропорциональны длине λ_k моделируемого участка линии. Здесь K_1 и K_2 константы, зависящие от геометрии линии. Не умаляя общности дальнейших результатов, можем принять константы $K_1 L$ и $K_2 C$ равными 1, что будет соответствовать линии с погонной индуктивностью $L = 1/K_1$ Гн/м и погонной емкостью $C = 1/K_2$ Ф/м. Пусть длина $\ell = 1$ м, тогда индуктивность L и емкость C линии также равны 1. При этом время пробега волны по линии $t_0 = 1/v = 1$ с, где $v = 1/\sqrt{L'C'} = 1$ м/с – скорость распространения волны по линии.

Перейдем к безразмерным переменным. Введем безразмерные длины звеньев $\ell_k = \frac{\lambda_k}{1/m}$, $k = \overline{1, n}$. Для безразмерных величин равенство $\ell_k = 1$ означает, что длина k -го звена равна длине звена при разбивке линии на равные участки. После нормирования вектор пара-

метров оптимизации будет иметь вид $\mathbf{l} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)^T$. Вследствие симметрии схемы замещения $n = \text{entier}((m-1)/2)$.

В качестве минимизируемого функционала F будем рассматривать модуль разности характеристики $k_U(t) = 1(t - 1/v)$ линии без потерь и переходной характеристикой $k_{UC}(t)$ схемы замещения:

$$F(\mathbf{l}) = \frac{1}{T} \int_0^T |k_{UC}(t, \mathbf{l}) - 1(t - 1/v)| dt \xrightarrow{\mathbf{l}} \min. \quad (3.7)$$

Верхний предел интегрирования T достаточно выбрать равным $3t_0/v = 3$, что соответствует приходу в конец линии первой отраженной волны.

Выбор именно такой постановки задачи обусловлен тем, что сопоставление линии без потерь и ее схемы замещения наиболее ярко демонстрирует несоответствие процессов, протекающих в длинной линии и в схеме замещения. Безразмерные значения длины и погонных параметров линии могут быть пересчитаны к реальным параметрам умножением на соответствующие коэффициенты. Входное воздействие $1(t)$, а также единичные параметры линии обеспечивают простоту вычисления и наглядность результатов. Отметим также, что задачи включения длинной линии, замкнутой на волновое сопротивление z_w (или близкое к нему), характерны для линий электропередач и линий связи.

Для каждого вычисления значения функционала F необходимо решить систему уравнений состояния

$$\begin{cases} \frac{di_k}{dt} = \frac{u_k - u_{k+1}}{L_{k+1} + L_k}, & k = \overline{0, m} & u_0 = U_0, \quad L_0 = 0, \quad L_{m+1} = 0, \\ \frac{du_p}{dt} = \frac{i_{p-1} - i_p}{C_p}, & p = \overline{1, m} & k_{UC}(t) = i_m(t)z_w / U_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

для схемы замещения, представленной на рис. 3.6, при нулевых начальных условиях. Параметры $L_1 \dots L_m$ и $C_1 \dots C_m$ схемы замещения определяются по элементам вектора \mathbf{l} . Решение (3.8) можно выполнить

любым численно-аналитическим или численным методом, например, методом Рунге-Кутты. Интеграл в (3.7) можно вычислить, например, методом трапеций.

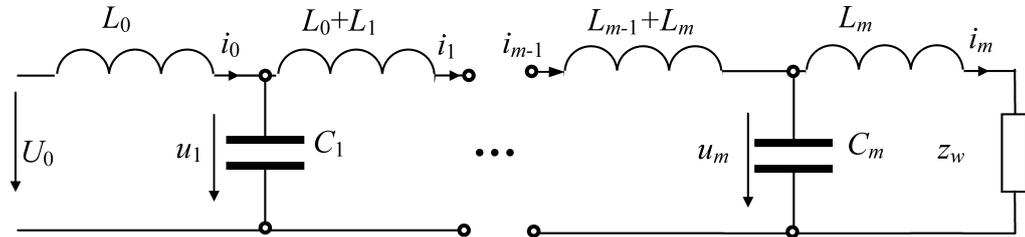


Рис. 3.6. Схема замещения линии

Для минимизации функционала F при относительно небольшом числе переменных ($n < 5$) применялся метод Пауэлла, использующий для продвижения к минимуму информацию о градиенте F . Для сужения области поиска минимума в целях предотвращения сходимости процесса к локальным минимумам функционала, которые соответствуют оптимальным схемам замещения с меньшим числом звеньев, на переменные оптимизации были наложены ограничения вида $0,5 \leq \ell_k \leq 1,5$, $k = \overline{1, n}$. Эти ограничения обеспечивались добавлением к функционалу штрафных функций вида

$$\varphi_k(\ell_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0,5 \leq \ell_k \leq 1,5, \\ A_k \cdot (\ell_k - 1,5)^2, & \text{при } \ell_k > 1,5, \\ A_k \cdot (\ell_k - 0,5)^2, & \text{при } \ell_k < 0,5. \end{cases} \quad k = \overline{1, n}$$

Весовые коэффициенты A_i положительны и подбирались эмпирически из опыта расчетов. С учетом этого при использовании градиентного метода минимизируемый функционал принимает вид:

$$F(\mathbf{l}) = \frac{1}{T} \int_0^T |k_{UC}(t, \mathbf{l}) - 1(t - 1/v)| dt + \sum_{k=1}^n \varphi_k(\ell_k) \xrightarrow{\mathbf{l}} \min \quad (3.9)$$

Результаты решения задачи (3.9) приведены в табл. 3.1. В ней показаны оптимальные разбиения линии на T-образные звенья для $m = 3 \div 8$. Эффективность полученных решений иллюстрирует табл. 3.2. Данные этой таблицы показывают, что схемы замещения,

полученные из решения задачи (3.9), лучше традиционных воспроизводят процессы в линии. Так, относительное уменьшение первого максимума составило $18 \div 33$ %, а последующие экстремумы практически отсутствуют.

Т а б л и ц а 3.1

Относительное уменьшение экстремумов, полученное в результате решения (3.9) для $m = 3 \div 8$

m	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
3	0,852	1,296	0,852	-	-	-	-	-
4	0,830	1,70	1,170	0,870	-	-	-	-
5	0,787	1,215	0,996	1,125	0,787	-	-	-
6	0,795	1,246	0,959	0,959	1,246	0,795	-	-
7	0,814	1,291	0,957	0,876	0,957	1,291	0,814	-
8	0,811	1,333	0,974	0,882	0,882	0,974	1,333	0,811

При увеличении числа n переменных использование градиентных методов в задачах синтеза быстро становится малоэффективным. Поэтому при $n > 5$ целесообразно использовать генетический алгоритм. Были сохранены ограничения на параметры оптимизации ($0,5 \leq \ell_k \leq 1,5$, $k = \overline{1, n}$). Размер популяции был принят равным $150n$, а число родителей $20n$.

Т а б л и ц а 3.2

Относительное уменьшение экстремумов (см. рис. 3.7)

m	Относительное уменьшение экстремумов, % (см. рис. 3.7)		
	Первого $(b_1 - a_1) / b_1$	Второго $(b_2 - a_2) / b_2$	Третьего $(b_3 - a_3) / b_3$
3	33,7	95,4	63,8
4	23,1	59,6	72,1
5	22,4	61,4	96,0
6	21,5	60,4	97,6
7	17,9	60,6	98,5
8	18,5	59,3	99,2

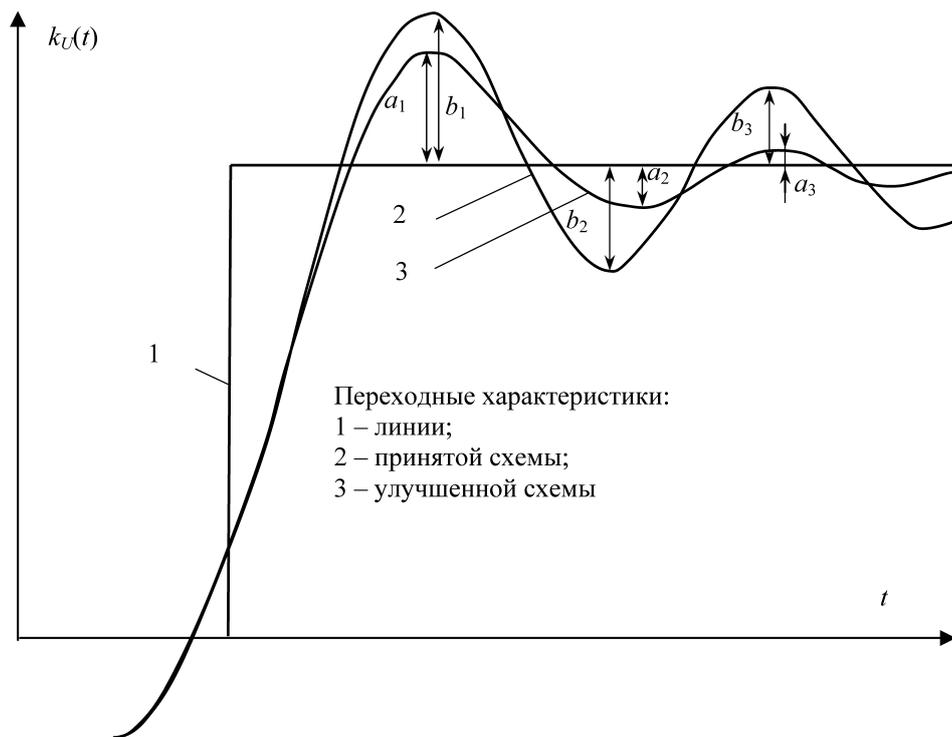


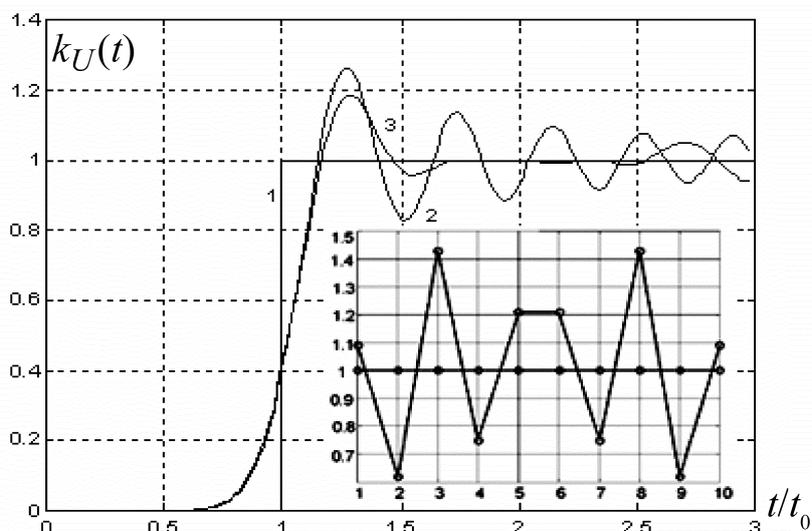
Рис. 3.7. Переходные характеристики линии, принятой схемы и улучшенной схемы

На рис. 3.8 сопоставлены переходные характеристики длинной линии (кривая 1) и Т-образных схем замещения для $n = 10$ (рис. 3.8, а) и для $n = 15$ (рис. 3.8, б). Кривая 2 определяет переходную характеристику традиционной схемы замещения (равномерное разбиение линии на участки), кривая 3 переходную характеристику схемы замещения, полученную при минимизации (3.9) с помощью генетического алгоритма.

На рис. 3.8, а, б изображены также относительные длины звеньев ℓ_k , $k = \overline{1, n}$, являющиеся решением задачи (3.9). Обратим внимание на то, что наименьшее значение функционала достигается при осциллирующем относительно среднего распределении длин звеньев. Подобрать начальные условия для градиентного метода, приводящего к такому решению, не имея априорной информации о подобном характере распределения, практически невозможно. Поэтому для $n > 5$ наилучшие решения, получаемые градиентным методом, были всегда существенно хуже решений, полученных с помощью генетического

алгоритма. При этом и время, затраченное на решение задачи градиентным методом, многократно превосходило время решения с использованием эволюционного метода.

а)



б)

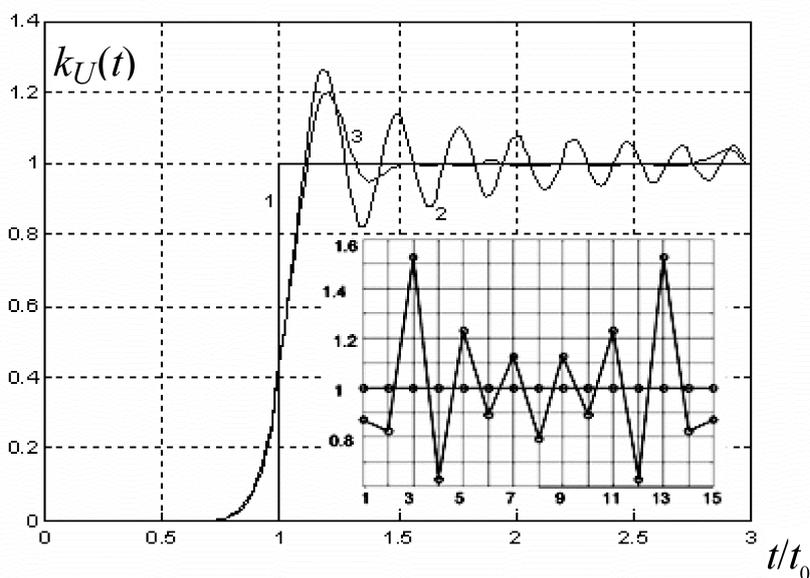


Рис. 3.8. Относительные длины звеньев

Отметим также, что хотя расчеты производились для линии без потерь и при $U_0 = \text{const}$, полученные оптимальные разбиения линии на участки также останутся оптимальными для неискажающей линии с потерями. Они будут близки к оптимальным для линий с монотонной зависимостью параметров от частоты, а также справедливы при произвольном напряжений источника.

3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМИРУЮЩИХ ЛИНИЙ

В настоящем параграфе рассмотрим параметрический синтез оптимальной искусственной формирующей линии. Для формирования на электрофизических нагрузках импульсов напряжения или тока заданной формы на практике часто применяются формирующие цепи (рис. 3.9, *a*). Они запасают электромагнитную энергию в конденсаторах и катушках индуктивности при заряде накопителя и отдают ее нагрузке при разряде. Во время заряда энергия медленно поступает в накопитель (ключ в положении 1), а при разряде запасенная энергия передается в нагрузку R_L (ключ в положении 2). При этом форма импульсов тока и напряжения в нагрузке не зависят от мощности и стабильности источника U_0 . Она определяется только параметрами формирующей цепи. Это позволяет получать в нагрузке мощные импульсы с высокой стабильностью формы и длительности.

В качестве формирующей цепи можно использовать линию длиной ℓ с волновым сопротивлением z_w , равным сопротивлению нагрузки. В этом случае при разряде в нагрузке формируется прямоугольный импульс (рис. 3.9, *b*, кривая 1) с амплитудой $U_L = U_0/2$ и длительностью $\tau_{imp} = 2 \frac{\ell}{v} = 2 \ell \sqrt{L'C'}$, равной двойному времени пробега волны вдоль линии. Длинная линия является идеальным с точки зрения формы импульса формирующим устройством. Однако на практике при создании источников мощных импульсов использование линий приводит к дорогостоящим конструкциям больших габаритов. Поэтому для генерации мощных импульсов из реактивных элементов создают накопители, моделирующие свойства линии (рис. 3.9, *b*), – искусственные формирующие линии. На практике эти линии создают из высоковольтных импульсных конденсаторов, а роль индуктивностей играют соединительные шины.

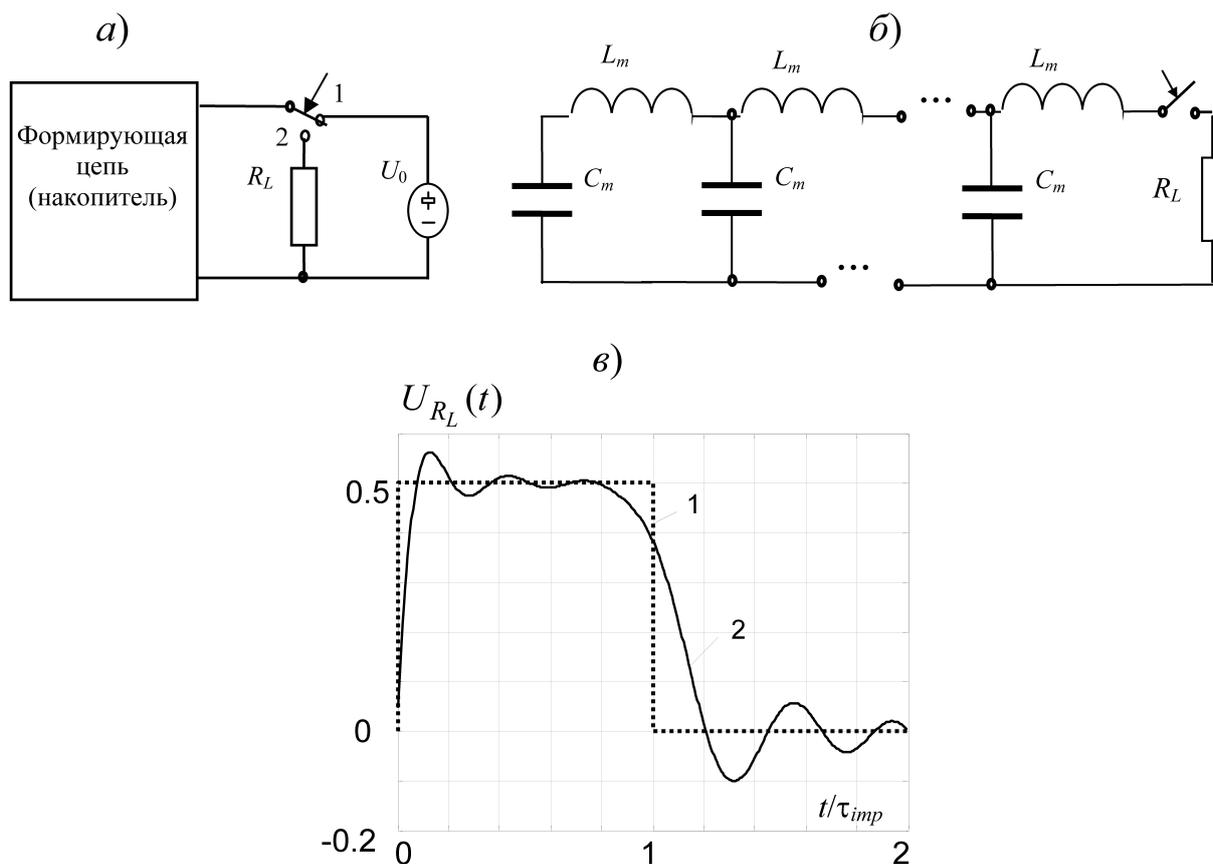


Рис. 3.9. Формирующая цепь (а), упрощенная схема формирующей цепи (б), импульс напряжения, формируемый на нагрузке пятизвенной искусственной формирующей линией, состоящей из одинаковых звеньев (в)

Искусственные формирующие линии широко используют в качестве импульсных источников питания лазеров и в других электрофизических установках. При этом оптимальная форма импульса напряжения или тока на нагрузке известна исследователю. Будем далее полагать, если это не оговаривается особо, что оптимальным является импульс напряжения прямоугольной формы. Полученные нами результаты будут справедливы и для иной формы импульсов. Задачу параметрического синтеза именно таких накопителей и будем рассматривать далее.

Пусть искусственная формирующая линия (рис. 3.9, б) состоит из m одинаковых звеньев. При заданных сопротивлении R_L нагрузки и

длительности τ_{imp} импульса емкость и индуктивность звена можно найти из следующих соотношений:

$$C_0 = \frac{\tau_{imp}}{2mR_{\Pi}}, \quad L_0 = \frac{\tau_{imp}R_L}{2m}.$$

Импульс $U_{R_L}(t)$, формируемый пятизвенной схемой (пятизвенной искусственной формирующей линией) в нагрузке $R_L=z_w$ при $U_0=1$, показан на рис. 3.9, в. Можно видеть, что пятизвенная линия генерирует импульс значительно отличающийся от прямоугольного. Поэтому искусственные линии, состоящие из одинаковых звеньев, редко используются при создании мощных формирующих линий. Для улучшения формы импульса параметры звеньев оптимизируют. Прежде чем перейти к задаче оптимизации, рассмотрим более детально схему замещения линии. Это позволит нам значительно приблизить к практике результаты оптимизации.

Эскиз искусственной формирующей линии представлен на рис. 3.10, а. Схема, представленная на рис. 3.9, б, недостаточно точно отражает свойства высоковольтных импульсных конденсаторов, которые моделируются на ней конденсаторами C_1, \dots, C_m . Как показали исследования, при моделировании импульсных конденсаторов необходимо учесть их индуктивность, а также потери. С учетом сказанного, схема искусственной линии примет вид, изображенный на рис. 3.10, б.

Поперечная индуктивность ячеек (вертикальных пакетов секций) $L_{C,1} \dots L_{C,m}$, соединенных последовательно, зависит от размеров, конструкции и формы секций, выводов секций, способов соединения секций в пакете. Можно показать [13], что индуктивность соединительных шин и поперечные индуктивности конденсаторов связаны соотношением:

$$k_p = \frac{L_n}{L_{C,n}} = \text{const}(n), \quad (3.10)$$

где коэффициент $k_p \in [0,25, 1]$. Активное сопротивление R_n n -ой секции может быть вычислено через емкость ячейки:

$$R_n = \frac{\rho C_n d}{3\varepsilon d_f} \left(\frac{n_c}{b} \right)^2. \quad (3.11)$$

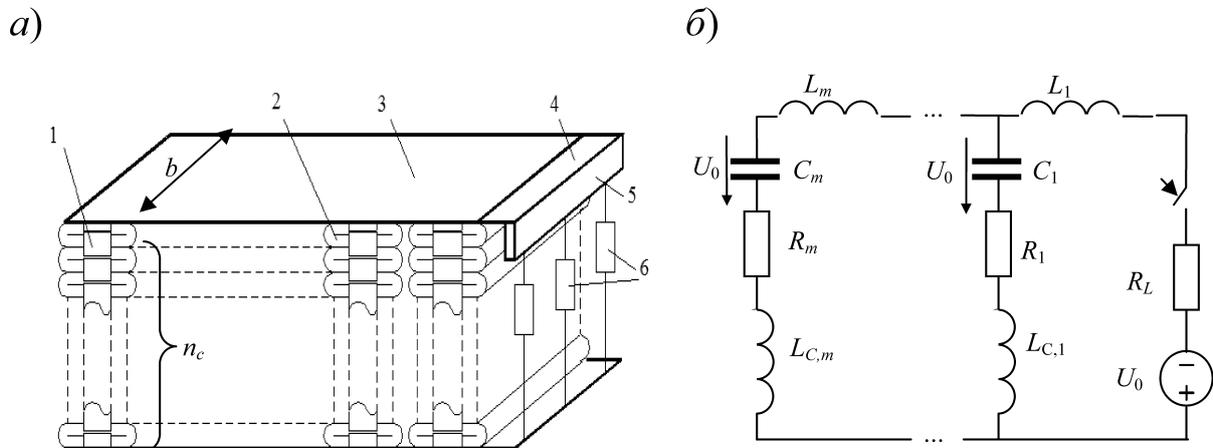


Рис. 3.10. Эскиз искусственной формирующей линии

Эскиз искусственной формирующей линии.

Схема искусственной формирующей линии.

- 1 – соединение секций конденсаторов в одной ячейке;
- 2 – ячейка конденсаторов;
- 3 – соединительные шины;
- 4 - выводы линии;
- 5 - полупроводниковый переключатель;
- 6 – нагрузка, n_c – число секций в ячейке.

- R_L – сопротивление нагрузки;
- C_1, \dots, C_m – емкости конденсаторов;
- L_1, \dots, L_m – индуктивности соединительных шин;
- $L_{C,1}, \dots, L_{C,m}$ – поперечные индуктивности конденсаторов;
- R_1, \dots, R_m – резисторы, учитывающие потери в конденсаторах.

Здесь ρ – удельное сопротивление материала фольги, ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика между листами фольги, d_f и d – толщина фольги и диэлектрика. Исходя из реальных размеров и материалов, используемых при создании формирующих линий, коэффициент расчета активного сопротивления был принят $R_n [\text{Ом}] = PC_n [\text{мкФ}]$ ($P = 55 [\text{Ом/мкФ}]$).

В момент коммутации на нагрузку (см. рис. 3.10, а) конденсаторы искусственной формирующей линии заряжены до рабочего напряжения U_0 . Однако расчет переходного процесса удобнее начинать с нулевых начальных условий. Поэтому при расчете процесс разряда линии на сопротивление нагрузки R_L был заменен эквивалентным процессом подключения линии к источнику U_0 с внутренним сопротивлением R_L .

При оптимизации m -звенной искусственной линии, с учетом соотношений (3.10), (3.11), общее число переменных оптимизации составляет $2m$. Будем выполнять оптимизацию по переменным L_k и C_k , $k = \overline{1, m}$. Постановка задачи оптимизации имеет вид

$$F(\mathbf{L}, \mathbf{C}) = \frac{1}{T} \int_0^T \left| u(t, \mathbf{L}, \mathbf{C}) - 1(t) + 1(t - \tau_{imp}) \right| dt \xrightarrow{\{\mathbf{L}, \mathbf{C}\}_m \in G} \min, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m)^T$, $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_m)^T$ – вектора переменных оптимизации и τ_{imp} – заданная длительность импульса. Верхний предел интегрирования в (3.12) принят равным $T = 2t_u$. Решение (3.12) выполним градиентным методом, а затем с помощью генетического алгоритма.

При использовании градиентного метода необходимо установить ограничения на область G поиска минимума и применить специальный алгоритм выбора начальных условий. Область G задаем неравенствами:

- $L_k > 0$ и $C_k > 0$ $k = \overline{1, m}$; $L_k \geq L_{k-1}$, $C_k \geq C_{k-1}$, $k = \overline{2, m}$, что исключает большое число локальных минимумов, соответствующих схемам с числом звеньев, меньшим m ;

- $\frac{1}{q} < \frac{C_k^{(j)}}{C_k^{(0)}} < q$, $\frac{1}{q} < \frac{L_k^{(j)}}{L_k^{(0)}} < q$, $k = \overline{1, m}$, что задает ограничение на изменение параметров звеньев по отношению к их начальным приближениям.

Здесь где $L_k^{(0)}$, $C_k^{(0)}$ – начальные приближения параметров k -го звена, $L_k^{(j)}$, $C_k^{(j)}$ – значения параметров k -го звена на j -й итерации ре-

шения, p и q – априорно задаваемые величины допустимых отклонений. Опыт решения (3.12) показал, что $p, q \in [5, 20]$.

Несмотря на достаточно жесткие ограничения на область поиска минимума, решение (3.12) градиентным методом требует специального алгоритма определения начального приближения. Без этого алгоритма [13] из (3.12) определяются только локальные, далекие от глобального минимума функционала F . Как показали наши расчеты, эффективное применение градиентного метода оказалось возможным только при $m < 9$.

В табл. 3.3 и 3.4 приведены значения параметров звеньев для линий с числом звеньев от 3 до 8, полученные в результате решения задачи (3.12) градиентным методом. В обеих таблицах C_0 и L_0 – соответственно емкость и индуктивность формирующей линии с одинаковыми параметрами звеньев, коэффициент $k_p = 0$.

Т а б л и ц а 3.3

Значения C_k/C_0 для оптимальных формирующих линий

k	C_k/C_0	C_k/C_0	C_k/C_0	C_k/C_0	C_k/C_0	C_k/C_0
1	0,242	0,177	0,139	0,114	0,097	0,085
2	0,253	0,177	0,139	0,114	0,097	0,085
3	0,462	0,214	0,151	0,118	0,098	0,085
4		0,402	0,191	0,135	0,107	0,090
5			0,359	0,172	0,124	0,099
6				0,328	0,158	0,114
7					0,304	0,147
8						0,283
C_Σ/C_0	0,957	0,969	0,978	0,982	0,984	0,987

На рис. 3.11 показан импульс напряжения в нагрузке, сформированный 5-звенной однородной (кривая 1) и оптимизированной (кривая 2) линиями. Как видно, оптимизация параметров линии привела к значительному улучшению формы импульса.

Значения L_k/L_0 для оптимальных формирующих линий

k	L_k/L_0	L_k/L_0	L_k/L_0	L_k/L_0	L_k/L_0	L_k/L_0
1	0,232	0,172	0,137	0,113	0,097	0,084
2	0,234	0,173	0,137	0,114	0,097	0,084
3	0,306	0,188	0,141	0,114	0,097	0,084
4		0,264	0,166	0,125	0,102	0,087
5			0,235	0,149	0,114	0,094
6				0,214	0,137	0,105
7					0,197	0,127
8						0,184
L_Σ/L_0	0,772	0,796	0,816	0,828	0,841	0,848

Анализ таблиц показывает, что значения емкостей и индуктивностей ячеек возрастают с ростом номера ячейки, причем резкое увеличение значений C_k и L_k происходит на последних ячейках линии. Градиентный метод не позволяет найти удовлетворительные решения (3.12), для которых не выполняются неравенства $L_k \geq L_{k-1}$, $C_k \geq C_{k-1}$, $k = \overline{2, m}$. Их можно найти с помощью генетического алгоритма, примененного для рассматриваемых ниже задач.

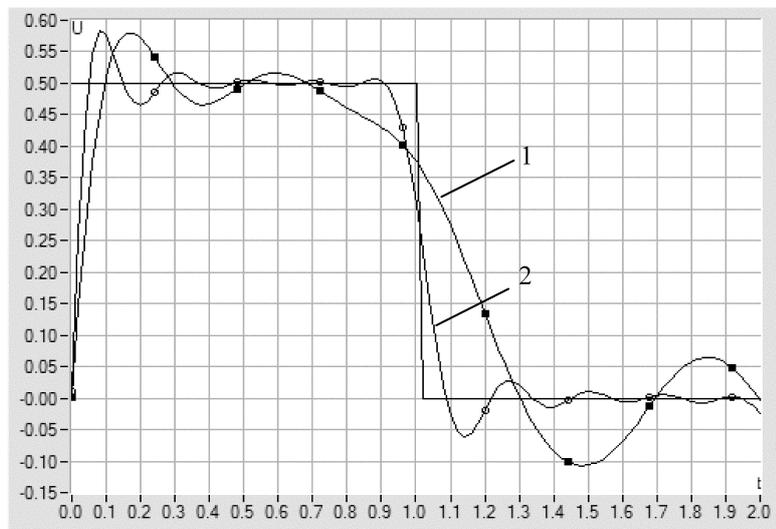


Рис. 3.11. Импульс напряжения на нагрузке, формируемый однородной (1) и оптимизированной (2) линиями при $m = 5$

Также можно заметить, что для схем с числом ячеек $m > 5$ параметры нескольких первых ячеек практически не отличаются друг от друга. Следовательно, форму импульса улучшают (по сравнению с формой импульса в однородной линии) только последние 3÷4 ячейки. Поэтому ближайшая к нагрузке часть неоднородной линии может быть выполнена из одинаковых ячеек. В дальнейшем большинство расчетов проведем для пятизвенной линии, которая чаще всего используется на практике.

Как отмечалось выше, в зависимости от конструкции линии коэффициент k_p принимает то или иное значение в промежутке $[0,25, 1]$. В табл. 3.5 и 3.6 показано, как изменяются параметры ячеек пятизвенной формирующей линии в зависимости от k_p . Можно видеть, что различным значениям коэффициента k_p соответствуют значительно различающиеся емкости и индуктивности секций. Это весьма важно при проектировании и изготовлении формирующих линий

Т а б л и ц а 3.5

Значения C_k для оптимальных формирующих линий при различных k_p

k_p	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
0	0,693	0,694	0,754	0,954	1,794
1/4	0,506	0,507	0,624	0,895	2,381
1/3	0,476	0,477	0,598	0,878	2,495
1/2	0,421	0,435	0,555	0,849	2,665
1	0,323	0,367	0,480	0,788	2,980

Т а б л и ц а 3.6

Значения L_k для оптимальных формирующих линий при различных k_p

k_p	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
0	0,683	0,686	0,704	0,830	1,177
1/4	0,488	0,489	0,547	0,705	1,132
1/3	0,450	0,451	0,519	0,678	1,131
1/2	0,397	0,397	0,477	0,627	1,027
1	0,310	0,310	0,394	0,523	0,848

В рассмотренной задаче нагрузка формирующих линий принималась линейной, активной и не изменяющейся во времени. Однако характеристики реальных нагрузок мощных формирующих линий (например, характеристики объемного разряда при накачке газового лазера) могут быть значительно сложнее. Реальная нагрузка может быть нелинейной или переменной во времени, проявлять индуктивные или емкостные свойства. Кроме свойств нагрузки на форму импульса могут влиять также характеристики коммутатора. Все эти особенности можно приближенно учесть при оптимизации в функционале (3.12). При этом описанный выше подход к оптимизации линии не изменится.

В ряде задач требуемой является форма импульса, отличная от прямоугольной. Изложенный выше подход к оптимизации параметров неоднородной формирующей линии при этом остается неизменным. Пусть требуемая форма импульса задается соотношением:

$$U_{imp}(t) = \begin{cases} U_0(\alpha + \beta t), & \text{при } t \leq \tau_{imp} \\ 0, & \text{при } t > \tau_{imp} \end{cases}. \quad (3.13)$$

Поскольку число m звеньев оптимизируемых линий равно 10, аналогичный (3.12) функционал минимизировался генетическим методом. На рис. 3.12 показаны импульсы, полученные в результате оптимизации формирующей линии при линейно нарастающем ($\alpha = 0,4$, $\beta = 0,2/\tau_{imp}$) и линейно спадающем ($\alpha = 0,6$, $\beta = -0,2/\tau_{imp}$) идеальном импульсе.

В некоторых областях мощной импульсной техники требуется формировать импульсы с максимально крутыми фронтами. Это делает актуальной следующую задачу оптимизации параметров неоднородных формирующих линий: получить на нагрузке неоднородной линии импульс с возможно более крутым фронтом за счет некоторого ухудшения формы импульса на вершине импульса и спаде. Эту задачу можно решить, вводя под знак интеграла в выражении (3.12) весовой множитель, зависящий от времени и имеющий вид

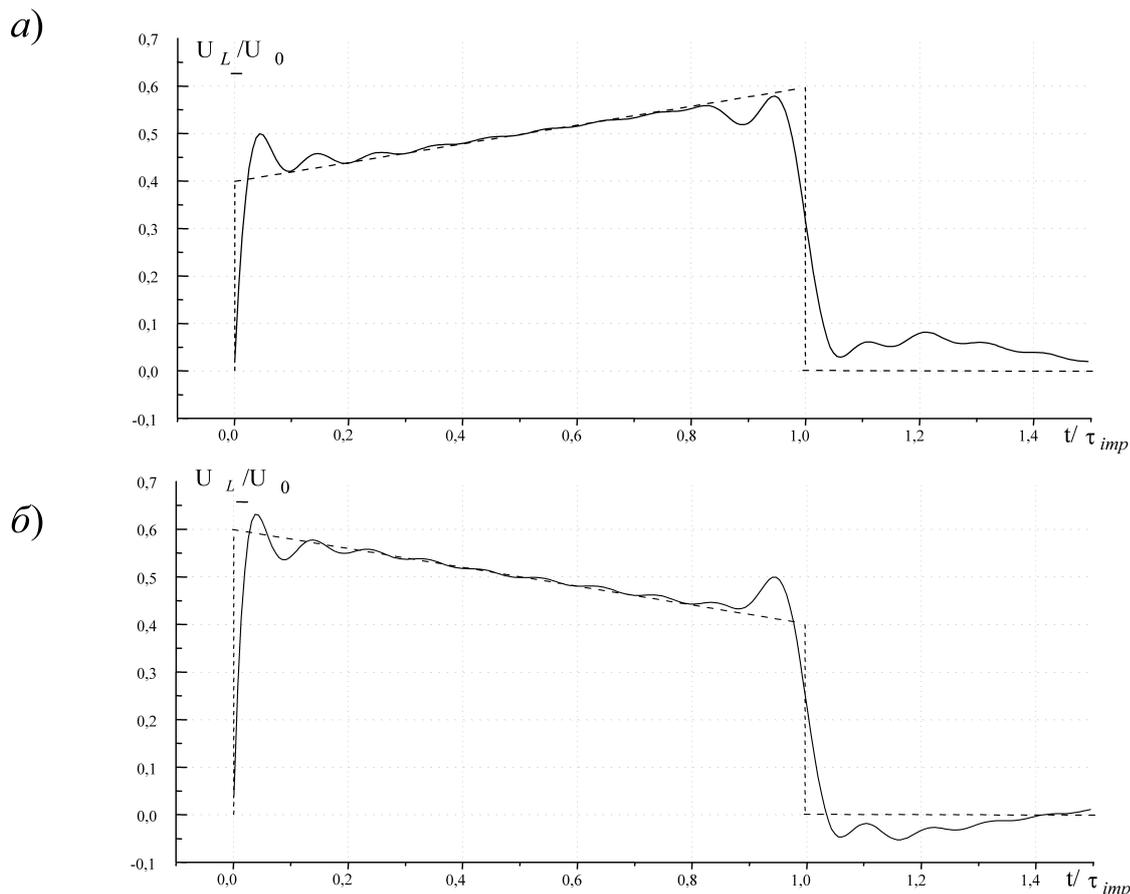


Рис. 3.12. Импульс напряжения 10-звенной формирующей линии, при оптимальном импульсе, задаваемым выражением (3.13) при $\beta > 0$ (а), $\beta < 0$ (б)

$$K(t) = \frac{1}{1 + A \cdot (t/\tau_{imp})^2}.$$

Здесь коэффициент A определяет степень влияния первых моментов времени на формирование импульса на нагрузке. Коэффициент A был принят равным 30. Ограничения на положительность параметров учитывались введением в функционал штрафных функций. Постановка задачи оптимизации имеет вид

$$F(\mathbf{L}, \mathbf{C}) = \frac{1}{T} \int_0^T K(t) \cdot |U_L(t, \mathbf{L}, \mathbf{C}) - U_{imp}(t)| dt + \sum_{i=1}^n \varphi_i \xrightarrow{\mathbf{L}, \mathbf{C}} \min.$$

Расчеты показали, что увеличения крутизны фронта удается добиться лишь для схем с малым числом ячеек. Для $m > 4$ крутизна

фронта практически не изменилась при ухудшении воспроизведения горизонтального участка и спада импульса. Таким образом, можно сделать вывод о том, что добиться большей крутизны фронта можно только путем увеличения числа ячеек в линии.

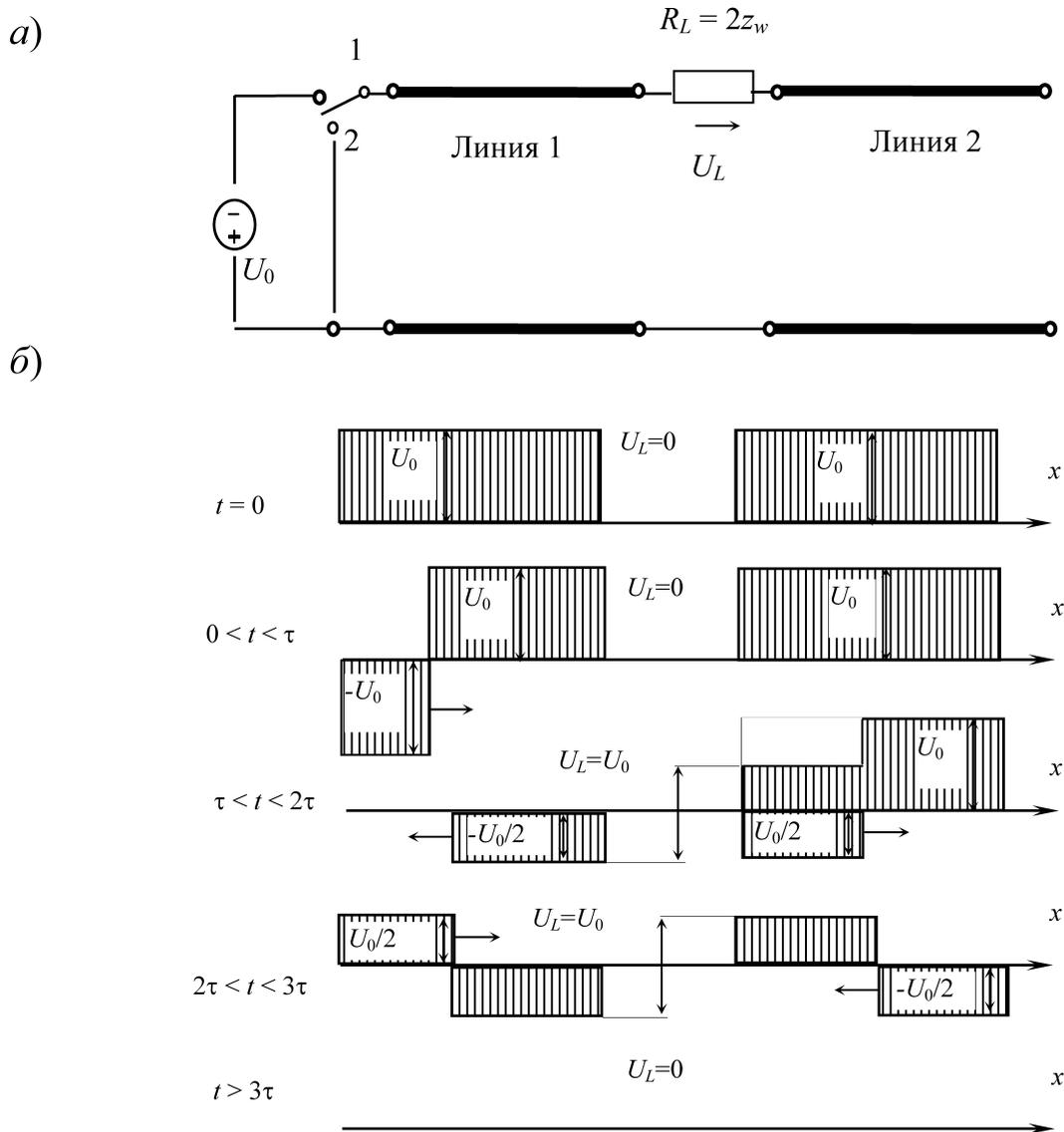


Рис. 3.13. Двойная формирующая линия (a) и распределение напряжения вдоль линий в различные моменты времени (б)

На практике находят применение так называемые двойные формирующие линии. Схема двойной формирующей линии, состоящей из двух одинаковых линий, показана на рис. 3.13, a. Обе линии заряжаются до напряжения U_0 (ключ в положении 1). При переводе ключа в положение 2 в активной нагрузке, равной удвоенному волновому

сопротивлению линий, формируется прямоугольный импульс. Его длительность равна 2τ , где τ – время пробега волной одной линии. Эпюры распределения напряжения вдоль линий в различные моменты времени показаны на рис. 3.13, б. Двойные формирующие линии позволяют создавать на нагрузке импульс с амплитудой U_0 , то есть с амплитудой равной зарядному напряжению конденсаторов. Это является их важным достоинством.

Двойные линии также создаются на основе искусственных линий. В этом случае каждая из линий в конструкции двойной линии заменяется многозвенной схемой замещения. Такая замена приводит, однако, к значительному ухудшению формы импульса, формируемого линией, что является основным недостатком искусственных двойных формирующих линий. На рис. 3.14 показан импульс напряжения, формируемый на нагрузке двойной линией, построенной на двух 5-звенных схемах с одинаковыми звеньями. Можно видеть, что форма импульса весьма далека от идеальной. Тем не менее, возможность получить импульс вдвое большей амплитуды является определяющим фактором на практике. Поэтому оптимизация параметров искусственных двойных формирующих линий актуальна.

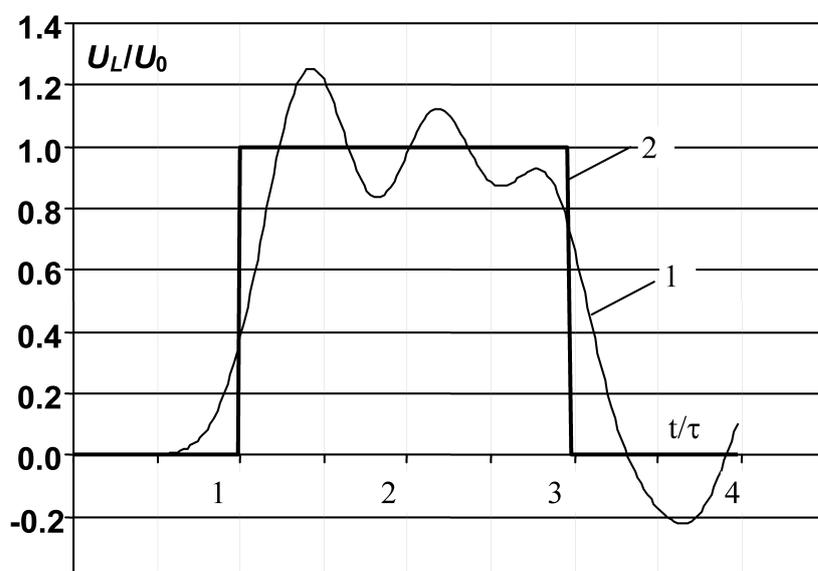


Рис. 3.14. Импульс напряжения, формируемый двойной искусственной линией 2×5 звеньев (кривая 1), идеальный импульс (кривая 2)

Цель оптимизации параметров двойной линии заключается в создании импульса на нагрузке, наименее отличающегося от прямоугольного. Задачу будем рассматривать в постановке, изложенной выше, когда линии разбиваются на неравные участки, и каждый из них моделируется одним звеном. Длины участков линии λ_k , $k = \overline{1, n}$, моделируемые одним звеном, рассматриваем как параметры оптимизации. Число звеньев в линиях принимаем одинаковым. Пусть также замыкаемая накоротко (левая на рис. 3.13, а) линия составлена из Т-образных звеньев, а разомкнутая (правая на рис. 3.13, а) линия из П-образных. Примем длину каждой из линий $\ell = 1$, погонные параметры $L' = 1$, $C' = 1$. Тогда $\tau = 1$, $z_w = 1$ и $R_L = 2z_w = 2$.

Далее удобно перейти к безразмерному вектору оптимизируемых переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, где $x_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$, $\lambda_0 = \frac{1}{m}$, $k = \overline{1, n}$ и λ_0 – длина одного звена при разбиении линий на равные участки. Элементы x_k вектора \mathbf{x} с 1-го по $(m - 1)$ -ый соответствуют длинам участков Линии 1, и m -го до n -го – Линии 2 (рис. 3.13, а).

Постановка задачи оптимизации имеет вид

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^{5\tau} |u(t, \mathbf{x}) - 1(t - \tau) + 1(t - 3\tau)| dt \xrightarrow{\mathbf{x}} \min, \quad (3.14)$$

где $u(t, \mathbf{x})$ – создаваемое искусственной линией напряжение на нагрузке, τ – время пробега волной линии, $1(t - \tau) + 1(t - 3\tau)$ – задает импульс идеальной формы (см. рис. 3.14). Параметры эквивалентной схемы (рис. 3.15) вычисляются через x_k : $L_k = x_k/m$ и $C_k = x_k/m$.

Минимизация (3.14) выполнялась с помощью генетического алгоритма. Как и для задач, рассмотренных выше, при оптимизации двойной линии генетический алгоритм позволил найти решения, неизвестные ранее. Эти решения характерны тем, что величины x_k изменяются при изменении k немонотонно. Оптимизация двойной линии градиентным методом не позволила получить осциллирующее реше-

ние. При этом решения, в которых параметры линий изменялись монотонно, дают большие значения функционала.

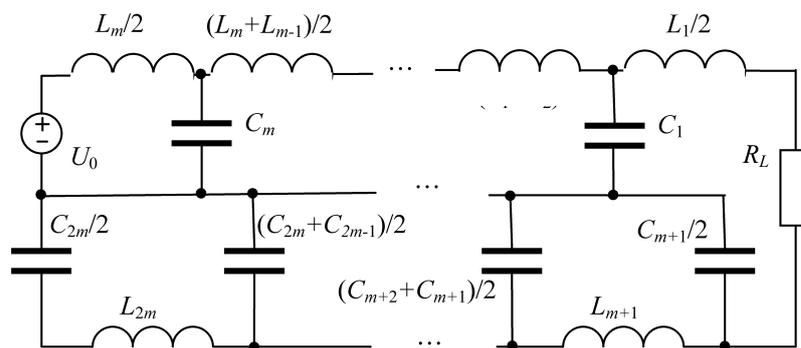


Рис. 3.15. Искусственная двойная формирующая линия с Т- и П-образными звеньями

Рассмотренная задача параметрического синтеза имеет большое число локальных экстремумов. Однако ее решение генетическим алгоритмом не требует задания специальных начальных условий и (или) ограничения области поиска минимума. Важное достоинство генетического алгоритма (преодолевать локальные экстремумы) позволяет получать решение при первом же запуске программы оптимизации.

В результате оптимизации были получены оптимальные разбиения линий на участки для числа участков m от 3 до 10. В табл. 3.7 приведены значения оптимальных длин участков для двойных формирующих линий при различных m . Для обеих линий отсчет участков начинается от сопротивления нагрузки к закороченному (для первой линии) или к свободному (для второй линии) концу.

На рис. 3.16 показана форма импульса, формируемого на нагрузке, оптимальной двойной 5-звенной линией. Там же представлен импульс, формируемый искусственной линией с одинаковыми по длине звеньями. Можно видеть, что импульс, создаваемый оптимизированной линией, значительно ближе к прямоугольному. Уменьшились фронт импульса, а также амплитуда колебаний на его вершине. Однако форма импульса оказалась все же далекой от идеальной.

Т а б л и ц а 3.7

Оптимальное разбиение двойных формирующих линий на участки

Линия 1										
m	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
3	-	-	-	-	-	-	-	1,119	1,153	0,728
4	-	-	-	-	-	-	1,130	1,043	1,348	0,479
5	-	-	-	-	-	0,981	0,855	1,030	1,596	0,538
6	-	-	-	-	1,200	0,961	0,776	1,271	1,328	0,464
7	-	-	-	1,143	0,816	0,903	0,709	1,406	1,538	0,485
8	-	-	1,332	0,942	0,673	1,201	1,528	0,499	1,262	0,563
9	-	1,244	0,862	0,855	0,861	0,943	0,720	1,461	1,582	0,472
10	1,330	0,689	0,836	0,696	0,788	1,264	0,776	1,355	1,711	0,556
Линия 2										
m	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
3	1,379	0,657	0,964	-	-	-	-	-	-	-
4	1,072	1,613	0,744	0,571	-	-	-	-	-	-
5	1,250	1,853	0,438	0,516	0,963	-	-	-	-	-
6	1,185	0,489	0,755	1,925	1,156	0,490	-	-	-	-
7	1,000	1,172	0,449	2,014	0,661	1,260	0,444	-	-	-
8	1,464	0,668	1,220	2,332	0,618	0,458	0,710	0,530	-	-
9	1,407	0,918	0,560	1,525	2,248	0,582	0,627	0,688	0,445	-
10	1,421	0,756	1,032	1,685	0,498	1,993	0,629	0,615	0,767	0,601

Рассмотрим, как влияет на форму импульса переход от Т- и П-образных звеньев к Г-образным (рис. 3.17). При этом оптимизируем и индуктивность L_k , и емкость C_k каждого звена каждой линии. Общее число переменных оптимизации в этом случае возрастет до $4m$. Оптимизация проводилась с помощью генетического метода. Минимизируемый функционал по-прежнему имел вид (3.14).

Результаты решения приведены в табл. 3.8 и 3.9 для 3...10 - звенных двойных формирующих линий. Нумерация звеньев начинается от нагрузки R_L . Необходимо отметить также, что индуктивности первых ячеек линий (L_1 и L_{m+1}) соединены последовательно и образуют одну варьируемую индуктивность.

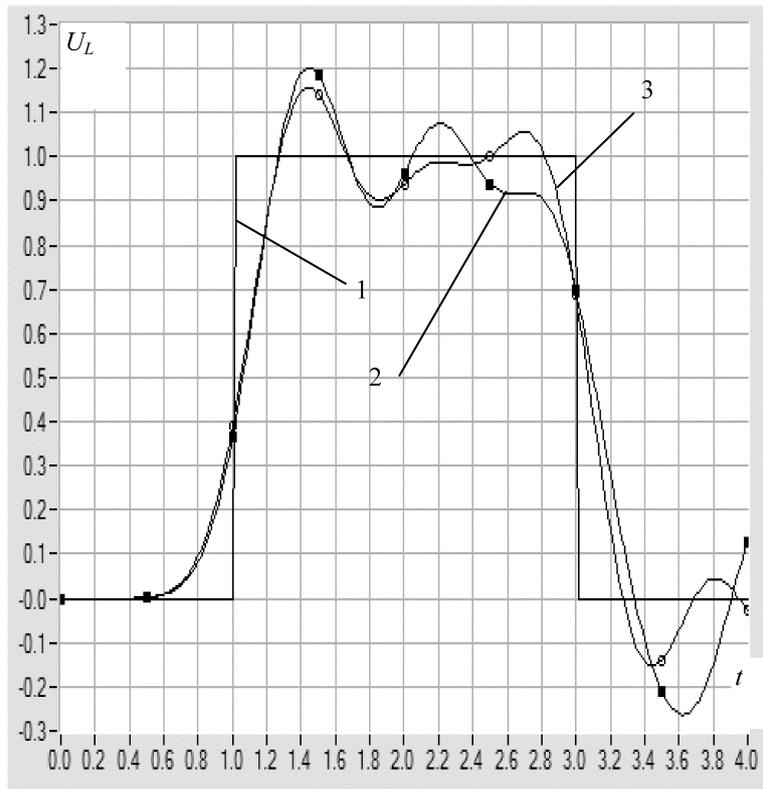


Рис. 3.16. Импульс напряжения на нагрузке, формируемый двойными линиями. 1 – идеальный импульс, 2 – импульс, формируемый искусственной линией с одинаковыми по длине звеньями ($m = 5$), 3 – импульс, формируемый искусственной линией с оптимальной разбивкой на звенья ($m = 5$)

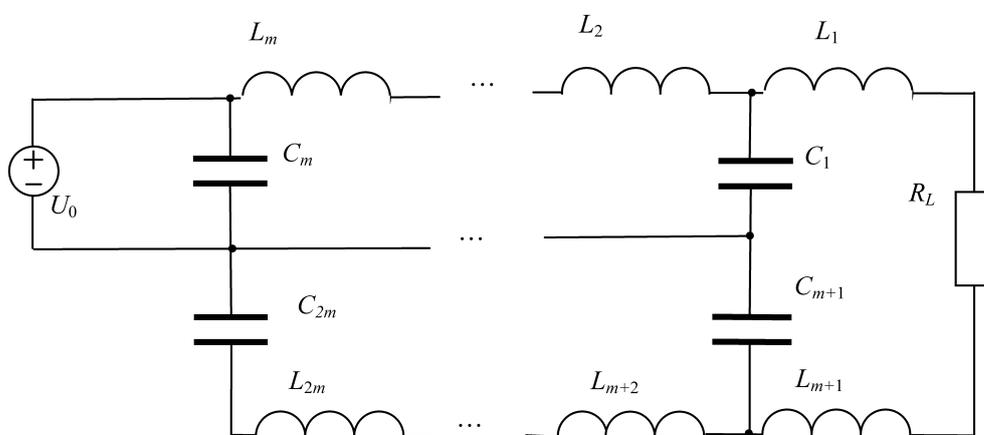


Рис. 3.17. Искусственная двойная формирующая линия с Г-образными звеньями

Т а б л и ц а 3.8

**Значения C_k для оптимальных двойных формирующих линий
с Г-образными звеньями**

Линия 1										
m	C_{10}	C_9	C_8	C_7	C_6	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1
3	-	-	-	-	-	-	-	2,879	0,963	1,428
4	-	-	-	-	-	-	2,530	0,810	0,897	1,439
5	-	-	-	-	-	1,685	0,864	1,129	1,065	1,283
6	-	-	-	-	1,839	0,992	0,836	1,161	1,059	1,240
7	-	-	-	1,908	0,884	1,120	1,305	0,902	0,931	1,278
8	-	-	1,277	0,909	0,954	1,024	0,923	1,015	0,955	1,388
9	-	1,579	0,704	0,921	0,927	1,018	0,978	1,045	0,708	1,723
10	1,923	0,698	0,941	0,916	0,975	1,024	0,898	1,071	0,996	1,587
Линия 2										
M	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
3	0,850	1,250	1,257	-	-	-	-	-	-	-
4	0,616	1,240	1,471	1,285	-	-	-	-	-	-
5	0,881	1,115	0,840	1,200	0,929	-	-	-	-	-
6	0,819	1,103	1,113	0,800	1,330	1,048	-	-	-	-
7	0,976	0,977	0,990	1,048	0,586	1,382	0,961	-	-	-
8	0,800	1,154	1,283	0,900	1,096	0,529	1,292	1,146	-	-
9	0,973	1,097	1,178	1,064	0,907	0,990	0,832	1,149	1,008	-
10	0,923	1,030	1,035	0,981	1,061	0,865	1,195	0,495	1,276	1,315

На рис. 3.18 показаны импульсы напряжения, формируемые на нагрузке оптимальной 2×5-звенной двойной линией и линией с одинаковыми по длине звеньями. Анализируя кривые на рис. 3.18, можно сделать следующие выводы:

- импульс, формируемый оптимальной двойной линией, существенно ближе к прямоугольному по сравнению с импульсом, формируемым однородной линией. Уменьшились длительности фронта и спада импульса и колебания на его вершине. Отметим также, что при $m > 5$ максимальная амплитуда колебания на вершине импульса составляют не более 3÷5 % амплитуды импульса.

- сравнивая кривую 3 на рис. 3.18 с аналогичной кривой, полученной при оптимизации длин участков (рис. 3.16), можно видеть, что оптимизация L_k и C_k (при вдвое большем числе варьируемых параметров) дает заметно лучшие результаты. Полученные при оптимизации L_k и C_k распределения емкостей и индуктивностей от значения k невозможно получить, оптимизируя длины участков линий. Таким образом, оптимизация L_k и C_k , несмотря на значительно больший объем вычислений, дает принципиально лучшие результаты.

Т а б л и ц а 3.9

Значения L_k для оптимальных двойных формирующих линий с Г-образными звеньями

Линия 1										
m	L_{10}	L_9	L_8	L_7	L_6	L_5	L_4	L_3	L_2	L_1
3	-	-	-	-	-	-	-	0,709	1,255	0,698
4	-	-	-	-	-	-	0,800	0,953	1,151	0,412
5	-	-	-	-	-	0,962	1,082	1,313	0,750	0,685
6	-	-	-	-	1,046	1,043	0,897	1,285	0,558	0,552
7	-	-	-	1,000	1,117	1,204	1,925	1,063	0,482	0,718
8	-	-	1,200	0,936	1,070	1,006	0,881	1,116	0,623	0,714
9	-	1,246	0,916	0,873	0,976	0,988	0,990	0,943	0,980	0,512
10	1,225	0,721	1,021	0,981	1,028	0,940	0,958	1,119	0,682	0,821
Линия 2										
m	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
3	0,774	1,488	0,384	-	-	-	-	-	-	-
4	0,802	1,190	1,471	0,351	-	-	-	-	-	-
5	0,858	0,916	0,853	1,182	0,346	-	-	-	-	-
6	0,656	0,974	1,059	0,799	1,535	0,410	-	-	-	-
7	0,856	0,860	0,983	0,939	1,075	1,107	0,485	-	-	-
8	0,526	0,963	1,093	1,070	0,787	1,223	1,000	0,410	-	-
9	0,559	0,678	1,300	1,113	1,031	0,869	1,040	0,873	0,280	-
10	0,659	0,914	0,910	0,906	0,955	1,006	0,876	1,112	1,283	0,475

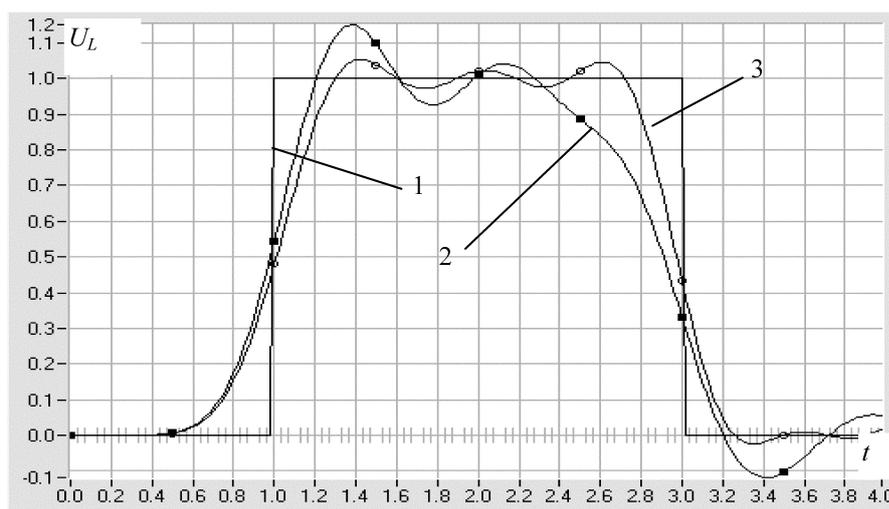


Рис. 3.18. Импульс напряжения на нагрузке, формируемый двойными линиями двойных формирующих линий с $m = 5$: 1 – идеальный импульс, 2 – импульс, формируемый искусственной линией с одинаковыми по длине звеньями ($m = 5$), 3 – импульс, формируемый искусственной линией с оптимальной разбивкой на звенья ($m = 5$)

Т а б л и ц а 3.10

Полные емкости C_{Σ} , индуктивности L_{Σ} и волновые сопротивления z_w оптимальных двойных формирующих линий

m	C_{Σ}		L_{Σ}		$z_w = \sqrt{L/C}$	
	Линия 1	Линия 2	Линия 1	Линия 2	Линия 1	Линия 2
3	1,40	1,12	0,87	0,87	0,79	0,88
4	1,42	1,15	0,83	0,95	0,77	0,91
5	1,21	1,00	0,96	0,83	0,89	0,91
6	1,19	1,04	0,90	0,91	0,87	0,93
7	1,19	1,00	0,93	0,88	0,88	0,94
8	1,06	1,03	0,94	0,88	0,94	0,93
9	1,07	1,02	0,94	0,86	0,94	0,92
10	1,10	1,02	0,95	0,91	0,93	0,94

Интересно проследить, как зависят полная емкость и полная индуктивность оптимальных линий от числа звеньев линии. Результаты представлены в табл. 3.10. Из таблицы видно, что для схем с любым

числом m ячеек полные емкости C_{Σ} оптимальных линий больше полной емкости $C_0 = 1$ однородной линии в среднем на 10 %. Полная индуктивность L_{Σ} на $\sim 10\%$ меньше полной индуктивности $L_0 = 1$ однородной линии. Соответственно, волновые сопротивления z_w и Линии 1, и Линии 2 составляют $\sim 0,9$ от волнового сопротивления однородной линии.

3.3. СИНТЕЗ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ УСТРОЙСТВ ПО ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи расчета параметров схем замещения устройств по их частотным характеристикам, или задачи параметрического синтеза в частотной области. При параметрическом синтезе в частотной области минимизируемый функционал строится на основе частотных характеристик цепи. Получение частотных характеристик цепей в целом проще получения их переходных характеристик.

Рассмотрение начнем с относительно простой задачи определения схемы замещения, моделирующей внутреннее сопротивление круглого цилиндрического провода. В параграфах 3.1, 3.2 изложено решение задачи синтеза замещения длинных линий во временной области. В настоящем параграфе приведено решение аналогичной задачи в частотной области. Помимо того, что рассмотренные задачи имеют самостоятельное значение, представляет интерес и сопоставление методов синтеза в различных областях.

Определим параметры схемы замещения для расчета внутреннего сопротивления круглого цилиндрического провода, частотная характеристика которого имеет вид:

$$Z(\omega) = r(\omega) + jx(\omega) = \frac{\ell}{2\pi\gamma a^2} \cdot \frac{a\sqrt{j\omega\mu\gamma} \cdot I_0(a\sqrt{j\omega\mu\gamma})}{I_1(a\sqrt{j\omega\mu\gamma})},$$

где a , ℓ – соответственно радиус и длина провода, $I_0(x)$ и $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

Для аппроксимации частотной характеристики $Z(\omega)$ можно использовать различные схемы замещения. Рассмотрим лестничную схему, показанную на рис. 3.19, параметры $r_1, \dots, r_m, L_1, \dots, L_m$ которой являются параметрами оптимизации.

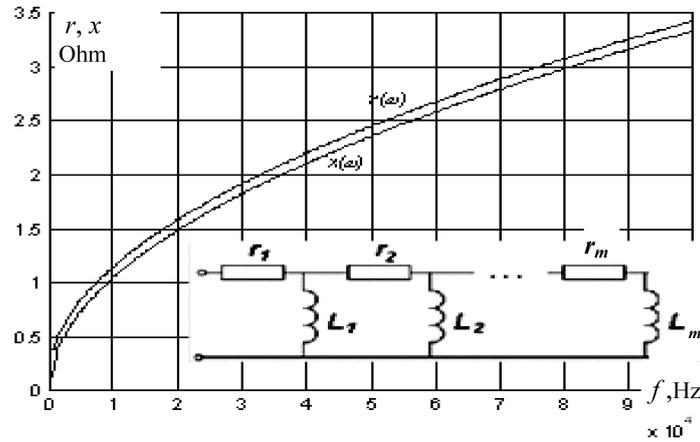


Рис. 3.19. Схема замещения и частотные характеристики $x(\omega)$ и $r(\omega)$ круглого цилиндрического провода

На рис. 3.19 представлена также частотная характеристика внутреннего сопротивления алюминиевого провода длиной 1 км и радиусом 5 мм, для которого далее будем определять параметры схемы замещения.

Если полагать, что число звеньев m лестничной схемы может быть бесконечным, то значения ее параметров имеют вид:

$$r_n = (2n - 1) \cdot r_0, \quad L_n = \frac{L_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $r_0 = \frac{\ell}{\gamma \pi a^2}$, $L_0 = \frac{\mu \ell}{8\pi}$ – сопротивление и внутренняя индуктивность

провода при равномерном распределении тока по сечению (на постоянном токе). Цепь на рис. 3.19 определяет вид (структуру) схемы замещения. Для использования схем замещения на практике желательно при заданной погрешности аппроксимации частотной характеристики иметь небольшое число звеньев в схеме замещения. Поэтому будем рассматривать задачу для числа звеньев $m = 4$ и $m = 6$.

Параметры первого звена принимаем равными их значениям при постоянном токе ($r_1 = r_0, L_1 = L_0$). Поэтому при числе звеньев m

число варьируемых переменных составляет $n = 2(m - 1)$. Задача формулируется в виде:

$$F(\mathbf{p}) = \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} (r(\omega) - r_c(\omega, \mathbf{p}))^2 + (x(\omega) - x_c(\omega, \mathbf{p}))^2 \frac{d\omega}{\omega_2 - \omega_1} \right]^{1/2} \xrightarrow{\mathbf{p}} \min, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{p} = (r_2, \dots, r_m, L_2, \dots, L_m)^T$ – вектор параметров оптимизации, $r_c(\omega, \mathbf{p})$, $x_c(\omega, \mathbf{p})$ – эквивалентные активное и реактивное сопротивления лестничной схемы. Пределы интегрирования соответствуют частотному интервалу $(0, 1 \cdot 10^2)$ кГц. Для решения применен генетический метод.

В табл. 3.11 приведены полученные в результате минимизации (3.15) параметры схем замещения с четырьмя и шестью звеньями. Частотные характеристики в обоих случаях практически совпадают с характеристиками провода.

Т а б л и ц а 3.11

Параметры лестничных схем замещения при $m = 4$ и $m = 6$

Номер звена	1	2	3	4	5	6
r , Ом	0,354	1,225	3,737	0,048	-	-
L , мкГн	50	25,44	14,40	7,19	-	-
r , Ом	0,354	0,250	2,409	0,960	10,70	0,0015
L , мкГн	50	98,32	14,43	18,89	15,32	7,66

Выбор пределов интегрирования (частотного диапазона) определяется видом частотной характеристики $Z(\omega)$. При монотонной зависимости $Z(\omega)$ верхний предел интеграла можно определить, выполняя повторно оптимизацию при нескольких его значениях. Однако при немонотонных зависимостях частотной характеристики такой подход должен иметь дополнительные обоснования.

Рассмотренная задача показывает, что для частотных характеристик простого вида, не имеющих экстремумов, рассчитать параметры схемы замещения не представляет больших сложностей. На практике, однако, нередко устройство имеет немонотонные характеристики с

многочисленными экстремумами. Такие задачи значительно труднее рассмотренных выше. Решим одну из таких задач и отметим основные свойства задач синтеза в частотной области.

Синтез схемы замещения длинной линии выполним, как и раньше, на основе задачи включения под постоянное напряжение $U_0 = 1(t)$ линии без потерь, замкнутой на собственное волновое сопротивление. Вид схемы замещения представлен на рис. 3.6. Коэффициент передачи по напряжению такой линии в частотной области имеет вид:

$$\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = e^{-j\omega\ell\sqrt{L'C'}},$$

где \underline{U}_1 и \underline{U}_2 – напряжения в начале и в конце линии, соответственно, ℓ – ее длина, L' и C' – погонные индуктивность и емкость.

Модуль коэффициента передачи по напряжению линии равен 1 и не зависит от частоты. Напротив, модуль коэффициента передачи по напряжению $K_{U,Cir}(\omega) = |K_{U,Cir}(\omega)|$ многозвенной схемы замещения резко изменяющаяся функция частоты. Эта функция для схем замещения линии, состоящей из m одинаковых Т-образных звеньев, показана на рис. 3.20 при $m = 3 \div 6$. Можно видеть значительное различие частотных характеристик линии и ее схемы замещения. Во временной области, рассмотренной ранее, аналогично различаются переходные характеристики линии и ее схемы замещения.

Причины указанных различий могут быть пояснены следующим образом. Процессы в длинной линии описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных, спектр собственных значений которой бесконечен. Частотные (и переходные для временной области) характеристики линии получены из этих уравнений. Аналогичные характеристики схемы замещения получены из системы уравнений Кирхгофа. Следовательно, спектр собственных значений схемы замещения конечен и лишь приближенно воспроизводит (аппроксимирует) начало спектра собственных значений длинной линии.

Соответственно, и частотные, и переходные характеристики линии и схемы замещения не могут совпадать во всем диапазоне частот (во всем диапазоне времени) ни при каком числе звеньев схемы замещения.

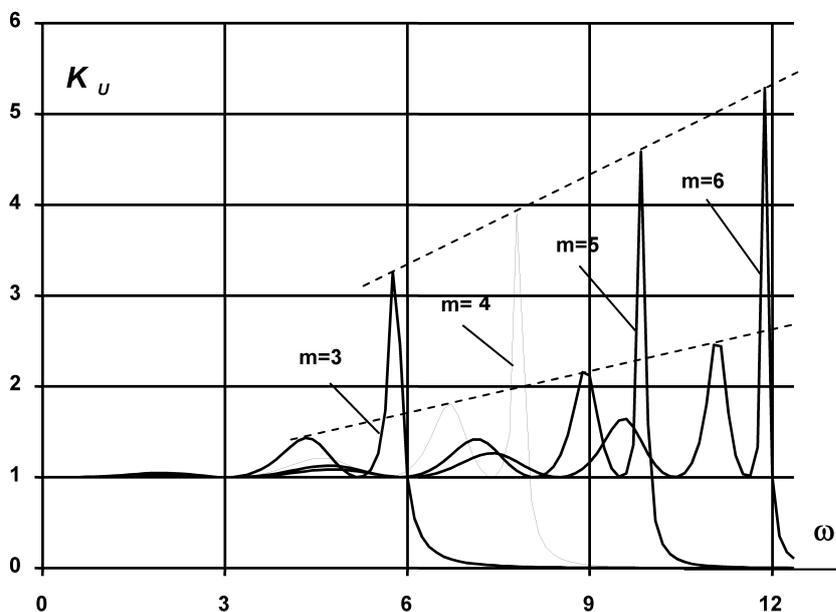


Рис. 3.20. Частотные характеристики линии и ее схемы замещения для различных m

Пусть каждое звено схемы замещения моделирует участок линии $\Delta\ell$. Схему замещения линии можно рассматривать как фильтр нижних частот с частотой среза $\omega_c = 2/\sqrt{L_{ch}C_{ch}}$, где $L_{ch} = L' \cdot \Delta\ell$ и $C_{ch} = C' \cdot \Delta\ell$ — соответственно индуктивность и емкость звена схемы замещения. Так как $K_{U,Cir}(\omega) \xrightarrow{\omega > \omega_c} 0$, то на выходе схемы замещения гармоники с частотами, превышающими частоту среза, практически отсутствуют, что не соответствует частотной характеристике линии. Кроме того, при $\omega < \omega_c$ характеристика $K_{U,Cir}(\omega)$ имеет максимумы, величины которых $\sim \omega$ (см. пунктирные линии на рис. 3.20). Гармоники входного воздействия, соответствующие максимумам $K_{U,Cir}(\omega)$, усиливаются на выходе. Амплитудный спектр рассматриваемого здесь входного воздействия $U_0 = 1(t) \sim 1/\omega$. Поэтому частоты,

соответствующие максимумам, при любом m будут присутствовать на выходе схемы замещения, что также отличает ее от длинной линии. Таким образом, имеется значительное различие между частотными характеристиками линии и ее схемы замещения.

Рассмотрим далее оптимизацию схем замещения линии по частотным характеристикам, которая позволит улучшить аппроксимацию частотных характеристик линии.

Примем в качестве параметров оптимизации длины λ_k $k = \overline{1, m}$ участков, моделируемых одним звеном схемы замещения. Постановка задачи оптимизации имеет вид

$$F(\mathbf{I}) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \left| K_{U,Cir}(\omega, \mathbf{I}) - e^{-j\omega\ell\sqrt{L'C'}} \right| d\omega \xrightarrow{\mathbf{I}} \min, \quad (3.16)$$

где $\mathbf{I} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ – вектор варьируемых переменных. Величина Ω определяет частотный диапазон, в котором производится минимизация функционала F .

Получим выражение для $K_{U,Cir}(\omega)$. Для этого представим схему замещения как четырехполюсник и запишем его уравнения в A -параметрах

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{i=m} \mathbf{A}_i(\omega) \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \aleph \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \text{ где } \aleph = \prod_{i=1}^{i=m} \mathbf{A}_i(\omega)$$

Здесь $\mathbf{A}_i(\omega)$ – матрица A -параметров i -ого звена цепочечной схемы замещения линии, которая для Т-образного имеет вид

$$\mathbf{A}_i(\omega) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L_{i,ch} C_{i,ch}, & j\omega L_{i,ch} - j\frac{1}{4} \omega^3 L_{i,ch}^2 C_{i,ch} \\ j\omega C_{i,ch}, & 1 - \frac{1}{2} \omega^2 L_{i,ch} C_{i,ch} \end{bmatrix}.$$

На выходе схемы замещения включено сопротивление, равное волновому сопротивлению z_w эквивалентируемой длинной линии. Примем $L = 1$, $C = 1$, $\ell = 1$, тогда $z_w = 1$ и

$$\underline{K}_{U,Cir}(\omega) = \frac{1}{A+B}.$$

Перейдем к безразмерным параметрам оптимизации. Параметры i -ого звена схемы замещения $L_{i,ch}$ и $C_{i,ch}$ численно равны относительной длине $x_i = \Delta\ell_i / \ell$ участка $\Delta\ell_i$ линии, который соответствует данному звену, т. е. $L_{i,ch} = C_{i,ch} = x_i$. Будем полагать также, что схема замещения линии симметрична, то есть $x_i = x_{m-i+1}$, ($i = \overline{1, m}$). Легко

убедиться также, что $\sum_{i=1}^{i=m} x_i = 1$. Для снижения погрешности вычисле-

ний перейдем от относительных длин участков x_k к относительным отклонениям $\delta_k = mx_k$ длин. Так при $x_k = 1/3$ и $m = 3$ (равномерное разбиение линии на три участка) имеем $\delta_k = mx_k = 1$.

Основной вклад в значение функционала F в соответствии с видом подынтегральной функции (рис. 3.20) дают сигналы частот, располагающихся вблизи частоты среза ω_c . Поэтому в данной задаче целесообразно перейти от частоты ω к безразмерной частоте ϖ с помощью соотношения

$$\varpi = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\omega\ell\sqrt{LC}}{2m} = \frac{\omega}{2m}.$$

В безразмерных переменных матрица A -параметров T -образного звена примет вид

$$\mathbf{A}_i(\varpi, d_k) = \begin{bmatrix} 1 - 2d_k^2 & j2d - j2d_k^3 \\ j2d_k & 1 - 2d_k^2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } d_k = \varpi\delta_k.$$

Для получения матрицы \aleph необходимо перемножить матрицы A -параметров всех звеньев схемы. С целью снижения погрешности эти перемножения выполним аналитически. Элементы $\pi_{i,j}$ $i, j = 1, 2$ матрицы \aleph имеют вид полиномов с целочисленными коэффициентами P_{ij} :

$$\pi_{i,j} = P_{i,j} \cdot \varpi^q \cdot \prod_{k=1}^n d_k^{s_k}. \quad (3.17)$$

Выражения для элементов матрицы \aleph трехзвенной T-образной схемы (в этом случае имеется только одна оптимизируемая переменная d_1) приведены в табл. 3.12. Напомним, что $\pi_{1,1}\pi_{2,2} - \pi_{2,1}\pi_{1,2} = 1$. Число членов в полиномах $\pi_{i,j}(\varpi, d_k)$ $i, j = 1, 2$ быстро растет с увеличением m . Так при $m = 10$ число слагаемых в $\pi_{1,2}(\varpi, d_k) \sim 10^4$. Поэтому для их получения мы использовали программу, работающую с аналитическими выражениями.

Т а б л и ц а 3.12

Выражения для коэффициентов матрицы \aleph для $m = 3$ в форме (3.17)

$\pi_{1,1}$			$\pi_{1,2}$			$\pi_{2,1}$		
$P_{1,1}$	q	s_1	$P_{1,2}$	q	s_1	$P_{2,1}$	q	s_1
1	0	0	$6j$	1	0	$6j$	1	0
-18	2	0	$-54j$	3	0	$-72j$	3	1
108	4	1	$36j$	3	1	$48j$	3	2
-72	4	2	$-24j$	3	2	$-8j$	3	3
12	4	3	$4j$	3	3	$216j$	5	2
-216	6	3	$216j$	5	2	$-288j$	5	3
288	6	4	$-216j$	5	3	$120j$	5	4
-120	6	5	$72j$	5	4	$-16j$	5	5
16	6	6	$-8j$	5	5			
			$-216j$	7	4			
			$288j$	7	5			
			$-120j$	7	6			
			$16j$	7	7			

В безразмерных переменных задача оптимизации (3.16) примет вид:

$$F(\mathbf{d}) = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} f(\varpi, \mathbf{d}) d\varpi \xrightarrow{\mathbf{d}} \min,$$

$$\text{где } f(\varpi, \mathbf{d}) = \sqrt{\left(\frac{\pi_{1,1}}{\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2} - \cos\varpi \right)^2 + \left(\frac{\pi_{1,2}}{\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2} - \sin\varpi \right)^2}, \quad (3.18)$$

где $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T$ – вектор безразмерных переменных оптимизации, а $\Theta = \Omega/\omega_c$.

Исследования показали, что подынтегральная функция в (3.18) значительно изменяется при малых изменениях δ_k и имеет высокие и узкие пики, которые перемещаются вдоль оси частот при изменении вектора параметров (см. рис. 3.21). Можно показать, что рассматриваемая задача параметрического синтеза является жесткой.

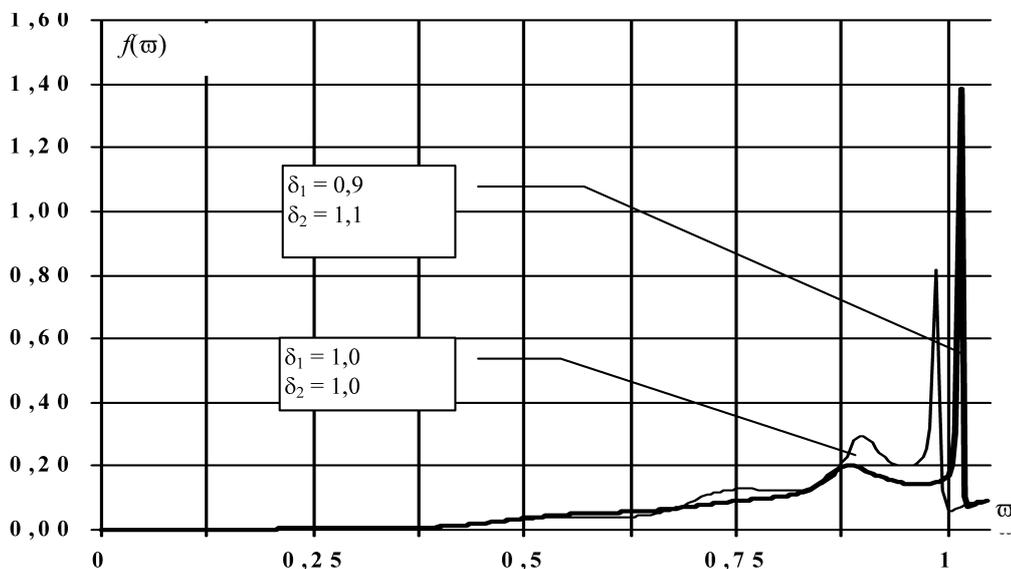


Рис. 3.21. Типичные зависимости подынтегральной функции $f(\varpi, \mathbf{d})$ от относительной частоты ϖ в (3.18) при различных δ_1 и δ_2

При численном интегрировании (3.18) возникает ряд проблем, характерных для синтеза в частотной области в целом. Рассмотрим их подробнее.

Численное вычисление интеграла в (3.18) с помощью, например, метода трапеций требует чрезвычайно малого шага интегрирования и,

соответственно, значительного времени расчета. Это связано с тем, что подынтегральная функция имеет вблизи ω_c острые пики, дающие существенный вклад в величину интеграла. Положение этих пиков неизвестно заранее. Более того, для получающихся в процессе минимизации (3.18) различных \mathbf{d} расположение этих пиков различно. Это свойство подынтегральной функции характерно для синтеза по частотным характеристикам, оно сильно проявляется при синтезе высокочастотных цепей. Поэтому вычисление функционала часто приходится выполнять специальными методами, учитывающими свойства конкретных задач.

Другая характерная особенность синтеза в частотной области проявляется в том, что результат оптимизации существенно зависит от выбора верхнего предела интегрирования Θ . Если принять $\Theta < \omega_c$, то через несколько шагов процесса минимизации наиболее высокие пики подынтегральной функции сместятся в область $\Theta > 1$. То есть они не будут учитываться при минимизации F . Если же, напротив, выбрать Θ «с запасом» (например $\Theta = 2$), то основной вклад в функционал будет получен на частотах, больших ω_c . Эта, «неинтересная» часть кривой $K_{U,Cir}(\omega, \mathbf{d})$ и будет оптимизироваться, а ее «интересная» часть, а именно от нуля до частоты среза будет слабо влиять на значение функционала. В обоих случаях минимуму функционала при этом будет соответствовать ненаилучшая частотная характеристика коэффициента передачи по напряжению. Выбор изменяющейся по ходу минимизации величины Θ является альтернативой двум рассмотренным выше возможностям. Однако проблем не удастся избежать и в этом случае. При минимизации придется сравнивать функционалы, вычисленные при различных Θ .

Покажем далее, как свойства задачи можно использовать для преодоления отмеченных выше затруднений. Будем перед каждым вычислением интеграла в (3.18) предварительно анализировать свойства подынтегральной функции $f(\omega, \mathbf{d})$. При этом основное внимание

обратим на свойства ее знаменателя $\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2$, что позволит локализовать положение максимумов подынтегральной функции. Типичный вид зависимости $\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2$ от частоты приведен на рис. 3.22. Вблизи точек минимума этой кривой располагаются максимумы $f(\varpi, \mathbf{d})$.

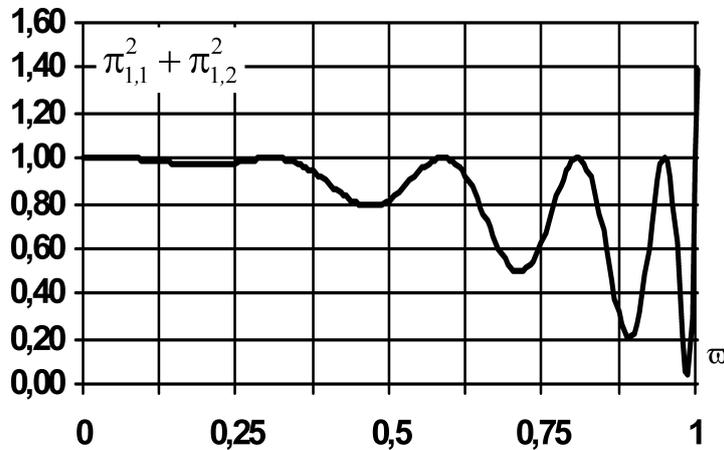


Рис. 3.22. Типичная зависимость функции $\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2$ от относительной частоты ϖ

Для определения промежутков интегрирования по частоте, на которых подынтегральная функция имеет высокие пики, найдем корни уравнения $\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2 = \varepsilon \ll 1$. Они позволяют выделить на оси частот промежутки, на которых подынтегральная функция имеет пики $f(\varpi) > 1/\varepsilon$. Алгоритм численного расчета интеграла в (3.18) использует это свойство функций $f(\varpi, \mathbf{d})$ и $\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2$ для адаптивного изменения шага интегрирования. Это позволяет в десятки раз уменьшить время вычисления функционала F .

Значение верхнего предела интегрирования Θ можно найти как максимальный вещественный корень уравнения $\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2 = 1$. Как показали исследования, принятый таким способом верхний предел интегрирования обеспечивает плавное изменение функционала при изменении параметров и существенно снижает жесткость задачи.

В качестве метода оптимизации использован градиентный метод (метод секущих). Для обеспечения лучшей сходимости к глобальному

минимуму на переменные оптимизации были наложены ограничения, выполнение которых обеспечивались с помощью штрафных функций φ_i :

$$\varphi_i(\delta_i) = \begin{cases} 0, & \text{когда } 0,5 \leq \delta_i \leq 1,5 \\ A_i(\delta_i - 1,5)^2, & \text{когда } \delta_i > 1,5 \\ A_i(\delta_i - 0,5)^2, & \text{когда } \delta_i < 0,5 \end{cases}, \quad i = \overline{1, n},$$

где весовые коэффициенты A_i подбирались в ходе вычислений.

С учетом выше изложенного, задача (3.18) принимает вид

$$F(\mathbf{d}) = \int_{\varpi_n}^{\Theta} \sqrt{\left(\frac{\pi_{1,1}}{\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2} - \cos\varpi\right)^2 + \left(\frac{\pi_{1,2}}{\pi_{1,1}^2 + \pi_{1,2}^2} - \sin\varpi\right)^2} \frac{d\varpi}{\varpi} + \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{d}) \xrightarrow{\mathbf{d}} \min. \quad (3.19)$$

В подынтегральную функцию в (3.19) введен множитель $1/\omega$, усиливающий влияние низких частот на значение функционала. Нижний предел интегрирования ϖ_n принят равным 0,1, чтобы исключить деление на нуль и уменьшить время вычисления F .

Результаты решения (3.19) представлены в табл. 3.13.

Т а б л и ц а 3.13

Относительные параметры схем замещения длинной линии, полученные из (3.19) при различных m

m	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}
3	0,918	1,164	0,918	-	-	-	-	-	-	-
4	0,894	1,106	1,106	0,894	-	-	-	-	-	-
5	0,875	1,118	1,014	1,118	0,875	-	-	-	-	-
6	0,866	1,116	1,018	1,018	1,116	0,866	-	-	-	-
7	0,868	1,114	1,013	1,010	1,013	1,114	0,868	-	-	-
8	0,875	1,110	1,016	0,999	0,999	1,016	1,110	0,875	-	-
9	0,862	1,145	1,034	0,986	0,946	0,986	1,034	1,145	0,862	-
10	0,879	1,101	1,027	1,038	0,955	0,955	1,038	1,027	1,101	0,879

На рис. 3.23 приведены переходные характеристики длинной линии (кривая 1), а также 8-звенной Т-образной традиционной (кривая 2) и оптимизированной схемы замещения (кривая 3).

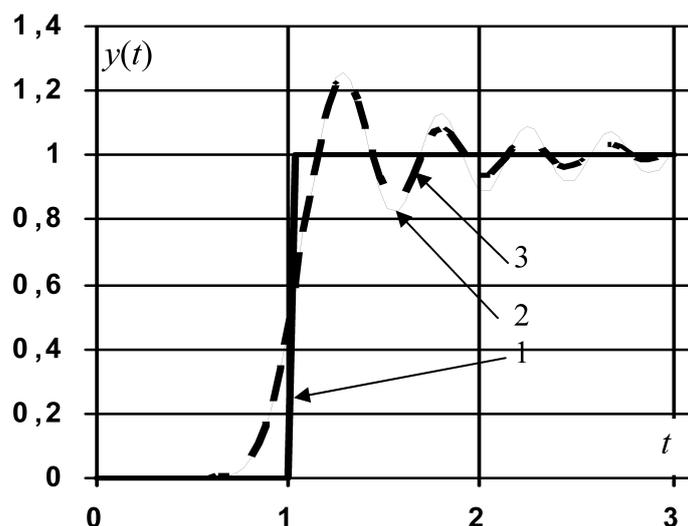


Рис. 3.23. Переходные характеристики линии (1), схемы замещения со звеньями одинаковой длины (2) при $m = 8$ и оптимизированной схемы замещения (3) при $m = 8$

Как видно, переходная характеристика оптимизированной схемы замещения лучше отражает реальные свойства длинной линии, чем переходная характеристика схемы с равномерным разбиением на участки. Улучшение, однако, несущественно. Вычисление минимизируемого функционала в частотной области также сложнее, чем во временной. Выше мы рассмотрели решение аналогичных задач во временной области, решение которых также встретило ряд трудностей, однако и достигнутые улучшения свойств схем замещения линии были более значительны. В целом, данную задачу оптимизации проще решать во временной области.

Синтез параметров схем замещения в частотной области для относительно простых задач не представляет значительных трудностей. К «простым» здесь следует отнести задачи синтеза двухполосниками с монотонными частотными характеристиками и небольшим числом варьируемых параметров в схеме замещения. При этом, как показано в первой из рассмотренных выше задач, синтезированная схема замещения воспроизводит частотную характеристику устройства с малой погрешностью и в широком частотном диапазоне. При этом число варьируемых параметров составило $3 \div 6$.

Для более сложных задач, таких как синтез четырехполосника, обладающего сложными частотными характеристиками, параметрический синтез в частотной области представляет достаточно сложную для решения задачу. Для снижения сложности ее решения следует учитывать свойства этой задачи. Таким образом, каждая конкретная задача (класс задач – например, класс рассмотренных нами задач синтеза схемы замещения длинной линии) требует, в общем случае, своего подхода к решению.

3.4. ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОЖИЛЬНОГО ТРЕХФАЗНОГО КАБЕЛЯ

В настоящем параграфе будет рассмотрено решение дискретных обратных задач, то есть задач, в которых переменные оптимизации могут принимать лишь дискретные значения. Такие задачи часто называют также комбинаторными. Здесь мы рассмотрим оптимизацию многожильного трехфазного кабеля на основе различных критериев оптимальности. Особенностью этих задач является невозможность использования для их решения градиентных методов. Поэтому все задачи, рассматриваемые в данном параграфе, решались с помощью генетического алгоритма [14].

Рассмотрим трехфазный многожильный кабель, поперечное сечение которого показано на рис. 3.24. Жилы кабеля, подключенные к различным фазам, отмечены белым, серым и черным цветом. Жилы каждой фазы имеют круглое сечение и собственное изоляционное покрытие. Они расположены в кабеле по концентрическим слоям. Если n_c – число слоев, то при таком расположении общее число жил в каждой фазе равно $n_{ph} = n_c(n_c - 1)$. Радиус жилы при этом будет равен $r = R/(2n_c + 1)$, где R радиус оболочки кабеля.

Положение жил в кабеле неизменно и предметом оптимизации является то, к какой из фаз (a , b или c) подключена каждая из жил. Областью ограничения возможных решений будет условие симметрии кабеля в электромагнитном отношении. Это соответствует сим-

метричному размещению жил по каждой трети кабеля, т.е. характер распределения фаз по жилам одной трети кабеля полностью определяет внутреннюю структуру всего кабеля. Кроме того, одну из жил можно произвольно соединить с определенной фазой (например, a), что уменьшит число переменных оптимизации на единицу. Таким образом, общее число переменных оптимизации равно $n_{ph} - 1$.

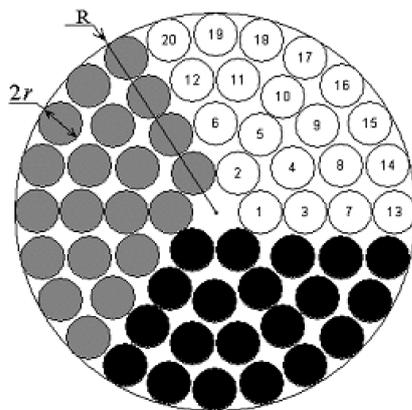


Рис. 3.24. Конструкция трехфазного кабеля

Рассмотрим в качестве критерия оптимизации минимальность внешнего магнитного поля, создаваемого током кабеля. Такой кабель будет создавать при протекании по нему трехфазного тока наименьшие помехи. Исходя из принципа взаимности, такой кабель будет наиболее защищен от создания в нем помехи полем трехфазного тока.

Минимизируемый функционал определяется интегралом по окружности радиуса R_0 от модуля напряженности магнитного поля

$$F(\mathbf{p}) = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^T |\vec{H}(R_0, \varphi, \mathbf{p}, t)| dt d\varphi, \quad (3.20)$$

где напряженность магнитного поля \vec{H} вычисляется как векторная сумма полей, созданных токами всех жил кабеля, а элементы p_k вектора \mathbf{p} оптимизируемых переменных принимают целочисленные значения 1, 2, 3. Примем $p_k = 1$, если жила подключена к фазе a , $p_k = 2$, если жила подключена к фазе b и $p_k = 3$, если жила подключена к фазе c .

Вследствие симметричности структуры кабеля распределение модуля магнитного поля симметрично по каждой трети окружности, поэтому интегрирование по φ выполним в секторе $[0, 2\pi/3]$. Радиус R_0 , на котором рассчитывалось поле, может быть любым, и был принят $R_0 = 1,5R$. Это позволяет пренебречь размерами жил, считая ток каждой жилы сосредоточенным в ее центре. Считая, что токи фаз и напряженность магнитного поля являются гармоническими функциями, запишем их в комплексной форме.

Напряженность магнитного поля в точке (x,y) от тока \underline{I}_k , $k = \overline{1, 3n}$, находящегося в точке (x_k, y_k) (рис. 3.25), определяется выражениями

$$\underline{H}_k = \frac{\underline{I}_k}{2\pi r_k}, \quad \underline{H}_{x,k} = \underline{H}_k \cos \alpha, \quad \underline{H}_{y,k} = \underline{H}_k \sin \alpha.$$

Суммарные составляющие вектора напряженности определяются как суммы $\underline{H}_{x,k}$ и $\underline{H}_{y,k}$, соответственно, для всех токов кабеля:

$$\underline{H}_x = \sum_{k=1}^{3n} \underline{H}_{x,k}, \quad \underline{H}_y = \sum_{k=1}^{3n} \underline{H}_{y,k}.$$

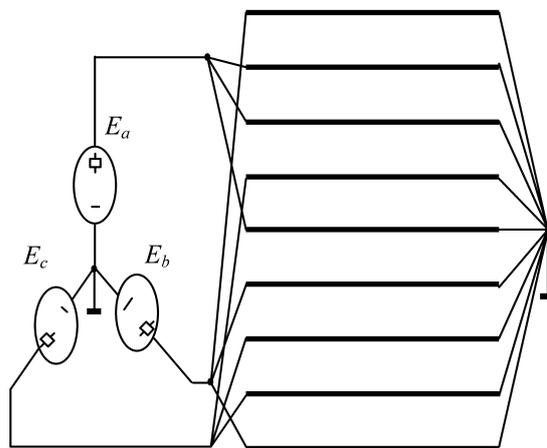
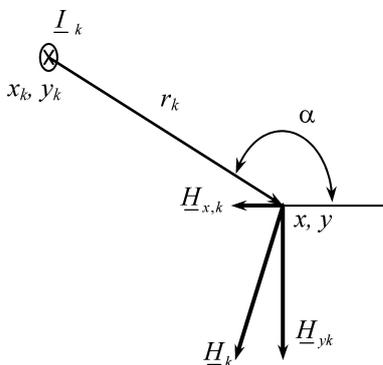


Рис. 3.25. Напряженность \underline{H}_k магнитного поля в точке (x,y) , создаваемого током, расположенным в точке (x_k, y_k)

Рис. 3.26. Схема для расчета токов жил кабеля

Переходя к оригиналам и выполняя интегрирование, для H получим

$$H_x(t) = H_{mx} \sin(\omega t + \varphi_x), \quad H_y(t) = H_{my} \sin(\omega t + \varphi_y).$$

$$H_x(t) = H_{mx} \sin(\omega t + \varphi_x), \quad H_y(t) = H_{my} \sin(\omega t + \varphi_y), \quad H(t) = \sqrt{H_x^2(t) + H_y^2(t)},$$

$$H = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T H^2(t) dt} = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}.$$

Далее необходимо найти токи жил кабеля. Будем предполагать, что кабель питается от симметричной трехфазной системы ЭДС $E_a = 1$, $E_b = e^{-j2\pi/3}$, $E_c = e^{j2\pi/3}$. При симметрии кабеля и нагрузки распределение тока в каждой из фаз не зависит от величины нагрузки. Поэтому для расчета токов может использоваться схема, представленная на рис. 3.26, где сопротивления нагрузок нулевые. Для простоты изображения принято, что каждая из фаз кабеля содержит три жилы. Токи схемы найдем из решения системы уравнений:

$$(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{M}) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E}, \quad (3.21)$$

где $\mathbf{R} = \text{diag}(R_{k,k})$ – диагональная матрица активных сопротивлений жил, \mathbf{M} – матрица собственных и взаимных индуктивностей жил, \mathbf{I} – вектор токов жил, \mathbf{E} – вектор источников ЭДС, подключенных к каждой жиле, ω – круговая частота.

Все жилы кабеля одинаковы, и их активное сопротивление равно

$$R_{k,k} = \frac{l}{\gamma \pi r^2}, \quad k = \overline{1, 3n_{ph}}, \quad (3.22)$$

где l – длина кабеля, r – радиус жилы, γ – удельная электрическая проводимость материала жилы.

Диагональные элементы матрицы \mathbf{M} равны собственным индуктивностям проводов жил, а внедиагональные элементы – взаимным индуктивностям двух параллельных проводов:

$$M_{k,k} = \frac{\mu_0 l}{2} \left[\ln\left(\frac{2l}{r}\right) - 1 \right] + \frac{\mu l}{8\pi}, \quad M_{k,m} = \frac{\mu_0 l}{2} \left[\ln\left(\frac{2l}{d}\right) - 1 \right], \quad k, m = \overline{1, n_{ph}}. \quad (3.23)$$

Здесь μ – магнитная проницаемость материала жилы, d – расстояние между центрами проводов k и m .

Значения сопротивлений и индуктивностей не зависят от того, к какой фазе подключена та или иная жила, поэтому при расчете матрицы \mathbf{M} следует обратить только один раз в начале расчета. При каждом расчете функционала (3.20) достаточно произвести умножение матрицы \mathbf{M}^{-1} на вектор. Учитывая симметричность задачи, достаточно найти токи одной фазы кабеля. Найденные токи нормируем, разделив их на полный ток фазы.

Примем следующие геометрические и физические параметры: длина кабеля $l = 100$ м, радиус кабеля $R = 1$ см, материал жил алюминий ($\gamma = 3,57 \cdot 10^7$ См/м, $\mu = \mu_0$), $\omega = 500$ 1/с. Круговая частота $\omega = 500$ 1/с соответствует глубине проникновения

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}, \quad (3.24)$$

приблизительно равной радиусу R кабеля.

Результаты оптимизации трехфазного многожильного кабеля с числом жил n , равным 12, 20, 30 и 42, по критерию (3.20) приведены в табл. 3.14 и на рис. 3.27.

Т а б л и ц а 3.14

Значения функционала (3.20) при минимизации внешнего поля кабеля

Число жил	12	20	30	42
Исходное значение функционала F_{ref} , соответствующее расположению жил, представленному на рис. 3.24	5,545	4,618	4,184	3,958
Минимальное значение функционала F_{opt}	0,910	0,562	0,237	0,282
$(1 - F_{opt} / F_{ref}) \cdot 100\%$	83,6	87,8	94,3	92,9

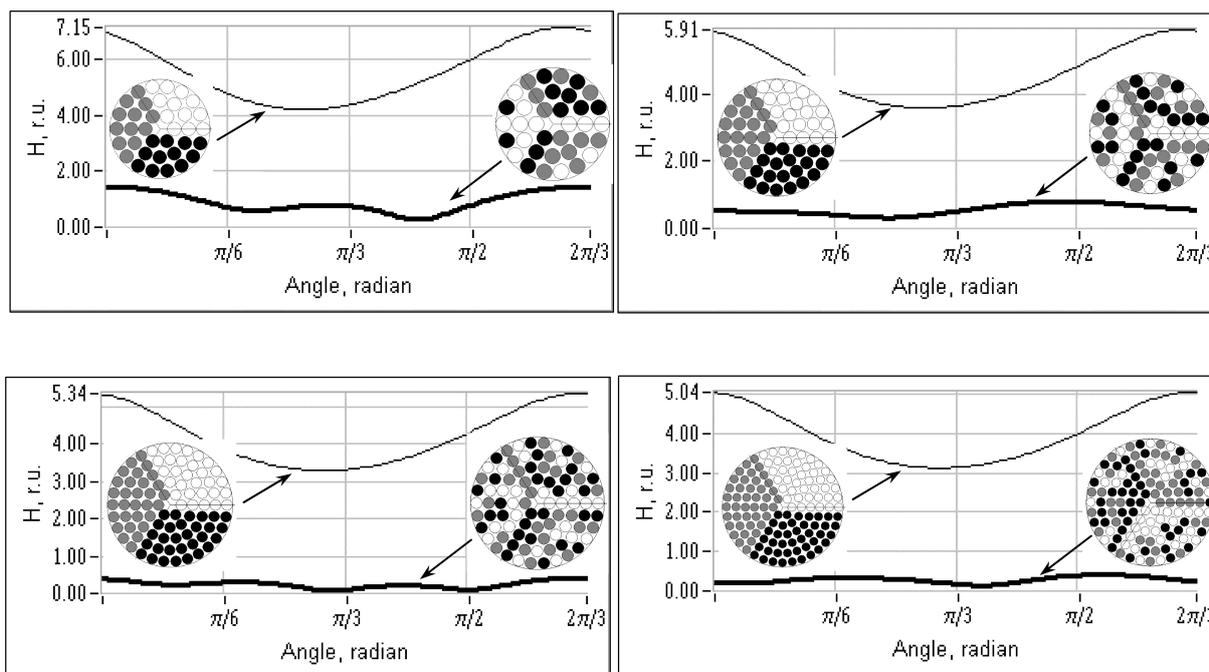


Рис. 3.27. Оптимальное по критерию минимума внешнего поля расположение жил в фазах кабеля для $n = 12, 20, 30, 42$ и распределение H вдоль дуги $[0, 2\pi/3]$ для оптимального и традиционного расположения жил

В табл. 3.14 показаны значения минимизируемого функционала (3.20) для традиционной F_{ref} (каждая фаза занимает полностью третью часть сечения кабеля, см. рис. 3.24) и для оптимальной конфигурации фаз. Можно видеть, что в процессе минимизации произошло значительное уменьшение значения функционала. На рис. 3.27 представлены оптимальные конфигурации фаз при различном числе жил n . Там же показаны распределения H вдоль дуги $[0, 2\pi/3]$ на радиусе R_0 для традиционного (рис. 3.24) и оптимального распределения жил по фазам кабеля.

Табл. 3.14 и графики на рис. 3.27 показывают, что относительное уменьшение минимизируемого функционала составило в среднем 90%, что соответствует уменьшению внешнего поля в результате проведенной минимизации в среднем в 10 раз. Можно говорить о том, что при полученном оптимальном подключении жил кабеля к трехфазной системе его помехозащищенность увеличится в 10 раз. При

наличии вблизи кабеля проводящих конструкций или экранов величина токов, наводимых в них, уменьшится также в 10 раз. Это связано с радиусом кабеля, так как радиусы жил постоянны для всех рисунков.

Представляет практический интерес анализ чувствительности функционала к несимметрии трехфазной системы. Рассмотрим два случая:

- несимметрия токов, возникающая из-за обрыва одной жилы в кабеле;
- несимметрия токов, возникающая вследствие несимметрии напряжения трехфазного источника ЭДС.

В табл. 3.15 приведены значения минимизируемого функционала (3.5) для указанных случаев несимметрии для 20-ти и 30-ти жильного кабеля. Для случая обрыва одной жилы в таблице приведены минимальное и максимальное значения функционала. Можно видеть, что обрыв жилы во внешнем слое в наибольшей степени ухудшает функционал (в среднем в 1,5...5,5 раза), тогда как для жилы из внутренних слоев функционал увеличивается в среднем в 1,1...4 раза. Это следствие поверхностного эффекта – ток в жилах внешних слоев значительно превышает их ток во внутренних слоях. Поэтому разрыв жилы во внешнем слое оказывает на внешнее поле более сильное влияние. Тем не менее, даже при обрыве одной из жил оптимальное распределение фаз дает выигрыш в 2,5...4 раза в сравнении с традиционным. Для случая несимметричности источника ЭДС увеличение внешнего поля составило в среднем ~ 10 %.

Структуру трехфазного многожильного кабеля можно оптимизировать, основываясь и на других критериях оптимальности. Рассмотрим оптимизацию кабеля по критерию минимума активных потерь в жилах кабеля. При заданном полном токе фазы минимум активных потерь достигается при равномерном распределении тока по жилам. Поэтому при оптимизации необходимо минимизировать не сами токи, а отклонение их от среднего.

Т а б л и ц а 3.15

Значения функционала (3.20) при анализе его чувствительности к несимметрии системы и оптимизации кабеля по критерию минимума внешнего поля

Число жил n фазы кабеля	Минимальное значение функционала (3.20)	
	20	30
Симметричная система	0,562	0,237
Обрыв одной жилы (внешний слой)	0,871...1,750	0,683...1,351
Обрыв одной жилы (внутренние слои)	0,642...0,838	0,525...1,020
Источник ЭДС $E_a + 10\%$	0,570	0,290
Источник ЭДС $E_a - 10\%$	0,619	0,259

Т а б л и ц а 3.16

Значения минимизируемого функционала при минимизации потерь в жилах кабеля

Число жил	12	20	30	42
Исходное значение функционала F_{ref} , соответствующее расположению жил, представленному на рис. 3.24	0,3247	0,3294	0,3270	0,3227
Оптимизированный функционал F_{opt}	0,0620	0,0627	0,0572	0,0593
$(1 - F_{opt}/F_{ref}) \cdot 100\%$	80,9	81,0	82,5	81,6

Структура многожильного кабеля принималась такой же, что и в рассмотренной выше задаче. Токи в жилах рассчитывались также из (3.21). Перейдем к безразмерным токам жил

$$\tilde{I}_k = \frac{I_k}{\max(I_k)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

На рис. 3.28 показаны оптимальные конфигурации кабеля из условия минимума потерь и диаграммы распределения токов по жилам.

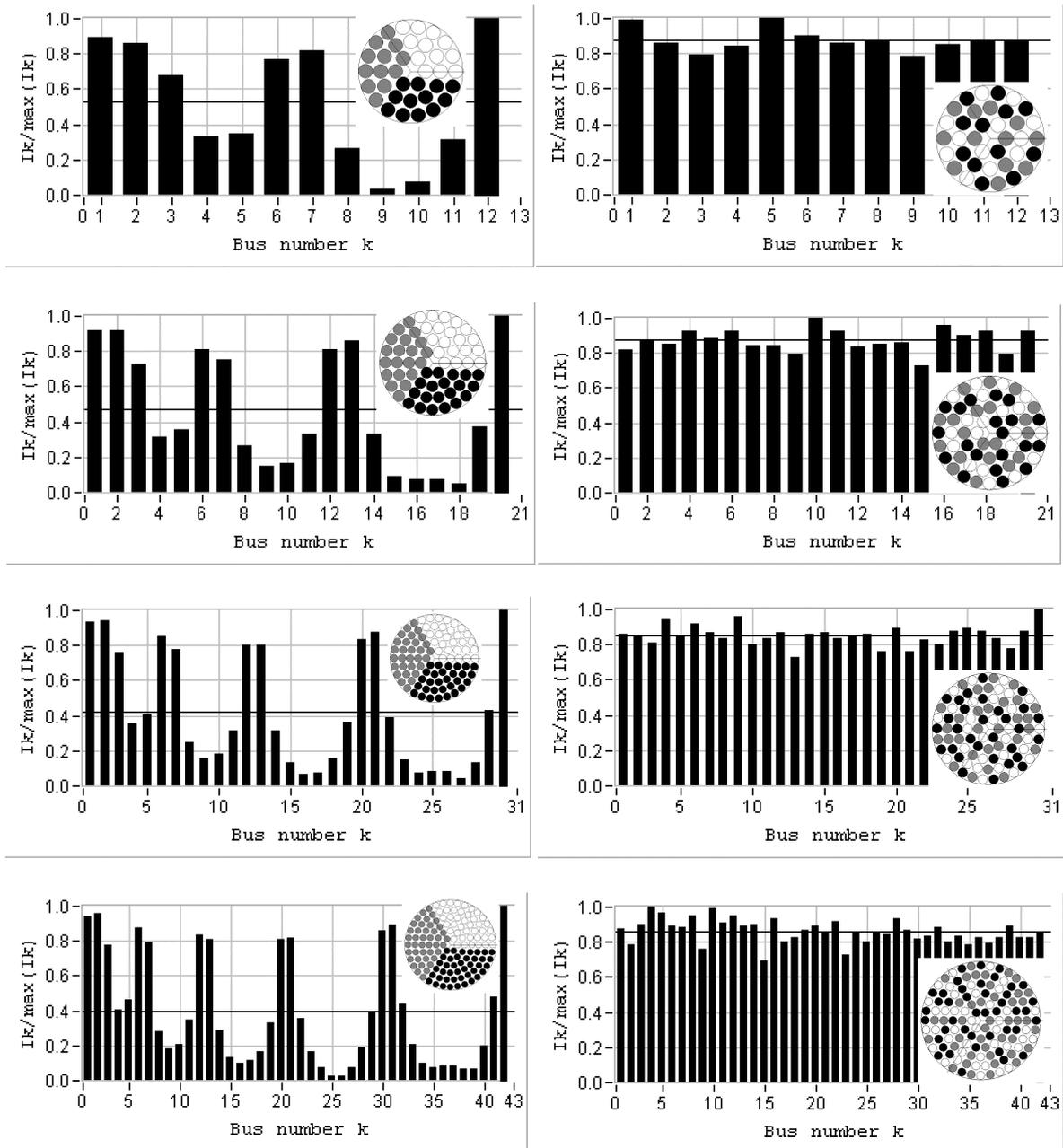


Рис. 3.28. Распределения жил по сечению кабеля ($n = 12, 20, 30, 42$) и соответствующие им распределения токов по жилам одной трети кабеля при оптимизации по (3.25)

Задача минимизации потерь в кабеле решалась в следующей постановке:

$$F(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\tilde{I}_k - \tilde{I}_{ave})^2} \xrightarrow{\mathbf{p}} \min, \quad (3.25)$$

где \tilde{I}_{ave} – средний ток жилы кабеля:

$$\tilde{I}_{ave} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{I}_k.$$

В табл. 3.16 показаны значения минимума функционала (3.25) в сравнении с его значением для конфигурации кабеля, представленной на рис. 3.24. Можно видеть, что для всех значений n функционал существенно уменьшился.

Как видно из графиков распределения токов в жилах фазы оптимизация привела к заметному выравниванию значений токов, функционал уменьшился приблизительно в 5 раз для всех значений n . Для оценки уменьшения потерь примем суммарный ток фазы равным 1 и рассчитаем мощность как сумму квадратов токов, умноженную на сопротивление жилы. В табл. 3.17 приведены значения отношения потерь в оптимизированном кабеле к потерям в традиционном кабеле для различного числа жил в фазе. Из этой таблицы видно, что уменьшение потерь в жилах соответствует степени уменьшения минимизируемого функционала.

Т а б л и ц а 3.17

Относительное уменьшение потерь в жилах кабеля при минимизации функционала (3.25)

Число жил	12	20	30	42
$\Delta_p = \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{I}_{k,opt}^2}{\sum_{k=1}^n \tilde{I}_k^2} \cdot 100\%$	85,0	83,0	83,4	81,2

По аналогии с первой задачей рассмотрим влияние несимметрии кабеля (обрыв одной жилы) и несимметрии источника ЭДС на полу-

ченные результаты. В табл. 3.18 приведены значения минимизируемого функционала (3.25) при анализе его чувствительности для 20-ти и 30-ти жильного кабеля.

Т а б л и ц а 3.18

Значения функционала (3.25) при анализе его чувствительности к несимметрии системы

Число жил n фазы кабеля	20	30
Симметричная система	0,0627	0,0572
Обрыв одной жилы	0,185...0,202	0,166...0,172
Источник ЭДС $E_a + 10\%$	0,0643	0,0602
Источник ЭДС $E_a - 10\%$	0,0662	0,0616

Как видно, обрыв одной жилы увеличивает функционал в среднем в 3 раза. Такой же результат был получен для кабеля, оптимизированного по минимуму внешнего поля. Несимметричность источника ЭДС практически не сказывается на качестве полученных результатов оптимизации (при 10 %-й несимметричности источника функционал увеличивается на $2 \div 7$ %).

Рассмотренную выше задачу получения трехфазного многожильного кабеля с минимальными потерями можно привести к задаче нахождения оптимальной формы жилы трехфазного кабеля при заданном коэффициенте заполнения. В этом случае поперечное сечение кабеля разбивается на участки по тому же принципу, по которому размещались отдельные жилы в предыдущих задачах. Каждый участок заполняется либо материалом жилы, либо диэлектриком, при этом количество участков, занятых жилой к общему количеству участков должно быть равно заданному коэффициенту заполнения k_i . Количество участков, на которое разбивается поперечное сечение кабеля и равное числу жил $3n_{ph}$ кабеля из предыдущей задачи играет в данном случае роль степени дискретизации при определении формы жилы. Такой подход приводит к задаче топологической оптимизации, методы решения которой интенсивно разрабатываются.

На каждую жилу кабеля накладывалось следующее условие: жила должна целиком располагаться в своей трети кабеля. Это условие упростило постановку задачи и ускорило вычисление функционала. На участки, занятые жилой, не накладывалось обязательное условие связности, то есть каждый участок мог заполняться жилой или диэлектриком независимо от состояния соседних участков. Как и в предыдущих задачах, кабель должен быть симметричным в электромагнитном отношении, поэтому жилы каждой фазы должны иметь одинаковую форму, а общее количество переменных оптимизации равно количеству участков, на которые разбивается одна треть кабеля, то есть равно числу жил фазы в предыдущей задаче: $n=n_{ph}$.

Минимум потерь в кабеле достигается, когда ток распределен наиболее равномерно по участкам, занятыми жилами. Вычисление токов в данной задаче более трудоемко, чем в предыдущих. Элементы матриц \mathbf{R} и \mathbf{M} вычисляются по формулам (3.22) (3.23). Далее при каждом вычислении функционала необходимо получить новые матрицы \mathbf{R}_{new} и \mathbf{M}_{new} , составленные из тех строк и столбцов матриц \mathbf{R} и \mathbf{M} , которые соответствуют участкам кабеля, занятым на данном шаге решения током. В соответствии с (3.21) составляется система уравнений размерностью $m = 6k;n_{ph}$. Вектор правых частей \mathbf{E} заполняется последовательно значениями E_a , E_b , и E_c . Вектор переменных оптимизации \mathbf{p} , определяющий форму жилы, определяет не вектор правых частей, а матрицу коэффициентов, которую следует обращать при каждом вычислении токов.

Минимизируемый функционал определялся как среднеквадратичное отклонение от среднего значения тока в жиле кабеля по (3.25).

Оптимальная форма жил кабеля зависит от значения круговой частоты ω в связи со степенью проявления поверхностного эффекта. Рассмотрим три случая:

- $\omega = 300$ 1/с, поверхностный эффект выражен слабо, эквивалентная глубина проникновения тока (3.9) больше радиуса кабеля R ;

- $\omega = 5000$ 1/с, поверхностный эффект выражен резко, эквивалентная глубина проникновения тока приблизительно равна размеру элемента дискретизации сечения кабеля;

- $\omega = 1500$ 1/с, средняя степень проявления поверхностного эффекта, эквивалентная глубина проникновения тока равна $0,3R$.

Формы жил кабеля оптимизировались для двух значений коэффициента заполнения k_i : 0,5 и 0,7.

На рис. 3.29, 3.30 и 3.31 показаны результаты оптимизации формы сечения трехфазного кабеля при трех значениях частоты. Результаты представлены для двух различных дискретизаций сечения кабеля: $n = 20$ и $n = 42$. Там же показаны соответствующие этим конструкциям жил распределения тока по сечению жилы и значение функционала (3.25).

При слабом проявлении поверхностного эффекта оптимальное расположение и форма жил кабеля представляют собой «трилистник». При резком поверхностном эффекте каждая жила имеет подковообразную форму, тогда как промежуточный вариант соответствует некоторой переходной форме.

Полученные результаты показывают, что генетический метод позволяет эффективно решать электротехнические задачи оптимизации комбинаторного типа. Приведенная задача может формулироваться как задача поиска оптимальной формы или как задача топологической оптимизации, когда форма сечения фаз наперед неизвестна. Ее особенность заключается в задании специфических ограничений на искомое распределение токов кабеля. Отметим, что эту задачу можно также решить, разыскивая на первом этапе непрерывное распределение тока кабеля по его сечению.

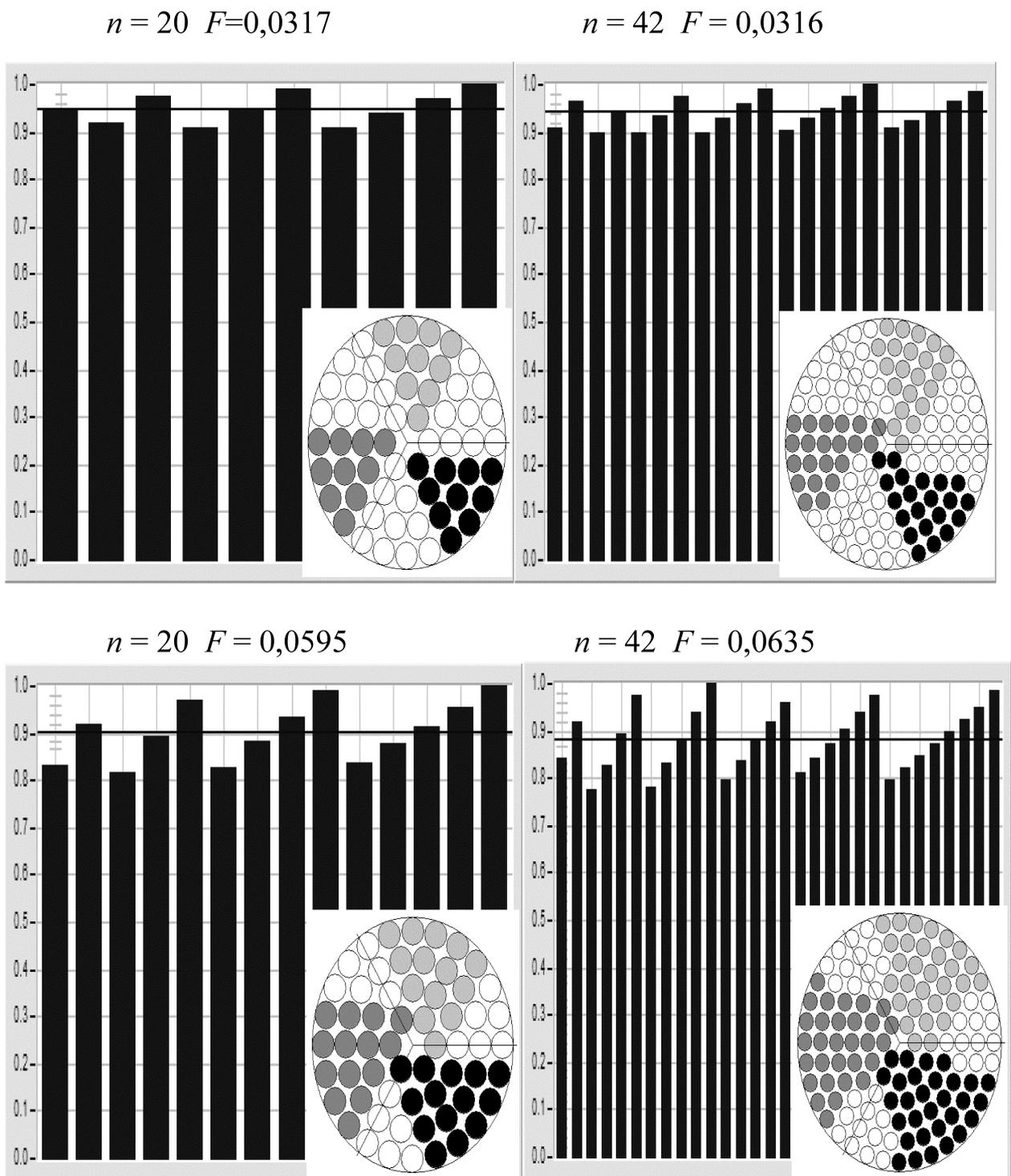


Рис. 3.29. Оптимизированные формы жил кабеля и распределение тока по сечению жилы кабеля при $\omega = 300$ 1/с для а) $k_i = 0,5$ и б) $k_i = 0,7$

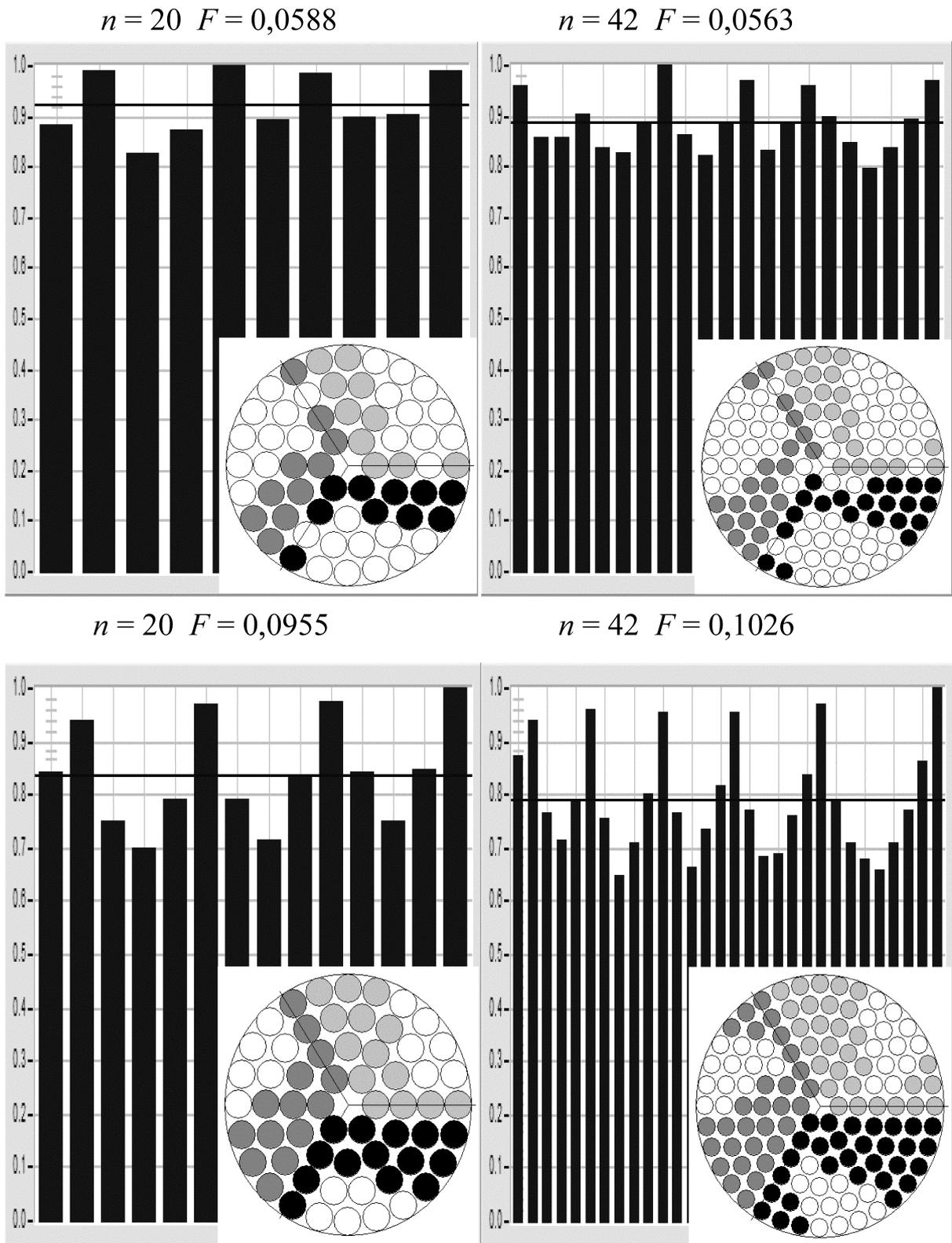


Рис. 3.30. Оптимизированные формы жил кабеля и распределение тока по сечению жилы кабеля при $\omega = 1500$ 1/с для а) $k_i = 0,5$ и б) $k_i = 0,7$

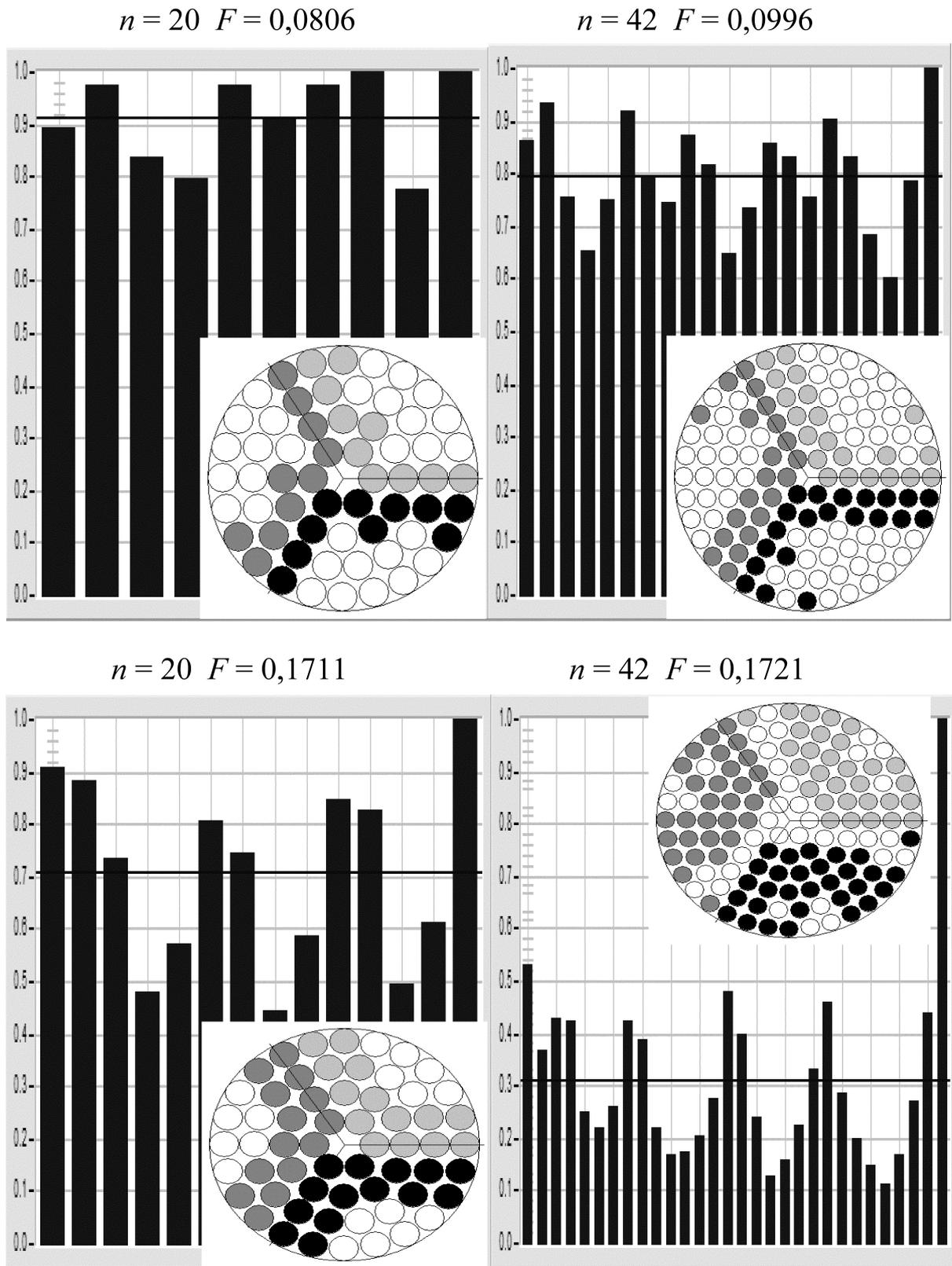


Рис. 3.31. Оптимизированные формы жил кабеля и распределение тока по сечению жилы кабеля при $\omega = 5000$ 1/с для а) $k_i = 0,5$ и б) $k_i = 0,7$

3.5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКА ПОМЕХ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Во второй главе мы рассматривали вопросы, связанные с определением параметров пассивных элементов электрических цепей. В настоящем параграфе рассмотрим прикладную задачу поиска местоположения источников помех в электрической цепи. При этом в качестве источников помех будем принимать источники тока, то есть активные элементы. Эту задачу также можно отнести к обратным задачам теории электрических цепей и рассматривать ее как частную задачу идентификации. Ее актуальность для практики очевидна.

Рассмотрим задачу в следующей постановке:

- местоположение источника помехи будем определять в линейной электрической цепи переменного тока с рабочей частотой $\omega = \omega_0$, параметры элементов которой известны;
- будем предполагать, что в электрической цепи имеется несколько узлов, доступных для измерений их напряжений относительно земли (тестовые узлы);
- имеется достоверная информация о том, что помехи могут возникать в узлах с номерами E_1, E_2, \dots, E_n цепи (потенциально возбуждаемые узлы);
- будем предполагать, что ни один из тестовых узлов не является узлом, в котором возможно появление помехи;
- источник помехи есть источник нестационарного шума J_d , подключенный между некоторым узлом N_x цепи и землей.

Задача состоит в определении номера N_x узла, к которому подключена помеха J_d , если известны измеренные в тестовых узлах цепи напряжения. Эту задачу будем называть задачей локализации источника нестационарной помехи. Отметим, что важное предположение о нестационарности помехи хорошо согласуется с практикой.

Электрическая цепь, в которой разыскивается местоположение источника помехи, измерительная система и сам источник помехи представлены на рис. 3.32.

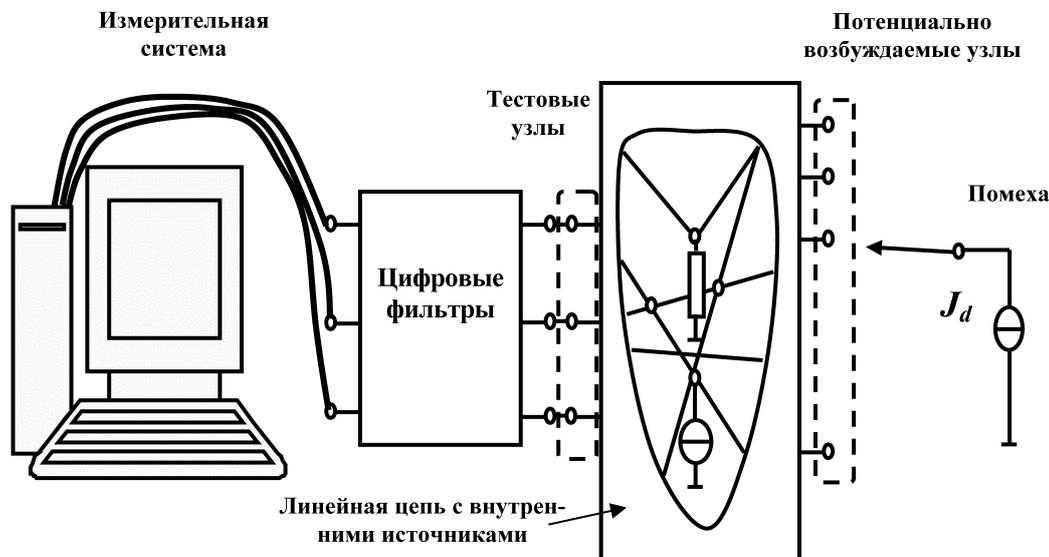


Рис. 3.32. Измерительная система, фильтры, источник помехи J_d и тестируемая электрическая цепь

Измерительная система соединена с электрической цепью через цифровые фильтры. Эти фильтры исключают из измерений рабочую частоту ω_0 . Поэтому на вход измерительной системы поступает сигнал, в котором отсутствует гармоника с частотой ω_0 . Будем предполагать, что измерительная система измеряет действующие значения напряжений.

Напряжения, измеряемые измерительной системой, не изменяются при переходе от цепи, приведенной на рис. 3.32, к цепи, представленной на рис. 3.33. При этом все источники напряжения рабочей частоты замкнуты накоротко, и источники тока рабочей частоты разомкнуты. При этом из спектра помехи следует исключить гармонику с частотой ω_0 . Поскольку источник помехи является источником нестационарного шума, то удаление из его спектра любой гармоники не изменит существенно его свойств и не окажет влияния на точность процедуры его локализации.

Таким образом, с точки зрения поиска местоположения источника помехи, электрические цепи, представленные на рис. 3.32 и рис. 3.33, эквивалентны. Как видно, цепь, представленная на рис. 3.33, проще цепи рис. 3.32. Поэтому ниже будем локализовать помеху в цепи, изображенной на рис. 3.33.

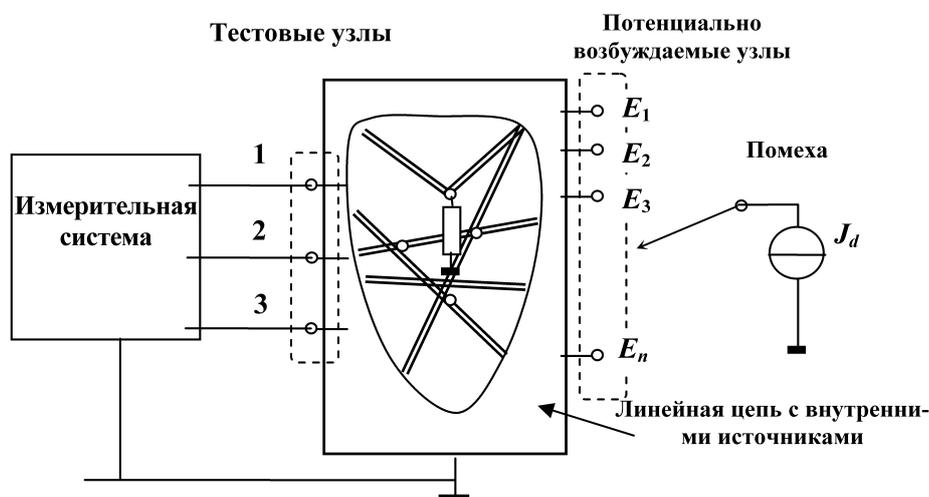


Рис. 3.33. Измерительная система и тестируемая электрическая цепь

Решение задачи локализации источника помехи начнем с частного случая локализации синусоидальной помехи $j_d = J_{m,d} \sin \omega t$, $\omega \neq \omega_0$. Для ее решения достаточно измерить напряжения V_1 и V_2 двух тестовых узлов (рис. 3.34). Будем решать задачу в два этапа. На первом (расчетном) этапе будем подключать источник помехи J_d поочередно ко всем потенциально возбуждаемым узлам и вычислять коэффициенты $\alpha_p = V_1/V_2$, которые назовем идентифицирующими коэффициентами. Здесь индекс « p » означает, что при расчете α_p источник помехи присоединен к узлу с номером « p », как это показано на рис. 3.34.

Напряжения тестовых узлов V_1 и V_2 пропорциональны J_d

$$V_1 = k_1 J_d, \quad V_2 = k_2 J_d, \quad \alpha = \frac{k_1 J_d}{k_2 J_d} = \frac{k_1}{k_2}.$$

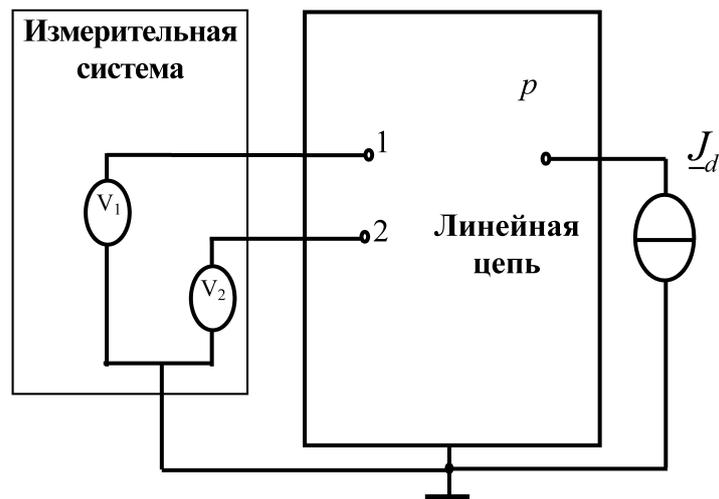


Рис. 3.34. Схема для выполнения расчетного этапа локализации синусоидальной помехи \underline{J}_d

Поэтому для любого « p » идентифицирующий коэффициент α не зависит от величины источника помехи J_d и определяется только тем, к какому узлу подсоединен источник помехи. Это свойство идентифицирующих коэффициентов будет использовано далее для локализации источника помехи. Отметим, что все коэффициенты α_p вещественны. Результаты расчетного этапа задачи локализации сведем в табл. 3.19.

Т а б л и ц а 3.19

Идентифицирующие коэффициенты α_{E_k} и соответствующие им номера узлов $E_k, k = \overline{1, n}$, определенные на расчетном этапе процедуры локализации

Номер узла	E_1	E_2	...	E_n
Идентифицирующий коэффициент	α_{E_1}	α_{E_2}	...	α_{E_n}

Вопрос выбора тестовых узлов имеет большое значение, поскольку он оказывает существенное влияние на точность локализации. Наилучшим является такое расположение тестовых узлов, при котором сигнал помехи приходит к тестовым узлам от возбужденного узла по различным ветвям. Далее мы поясним на примерах особенности выбора тестовых узлов и влияние их расположения на

точность локализации. На практике часто номера узлов, в которых возможно появление помехи, известны. Поэтому тестовые узлы можно выбрать из условия локализации помехи с наибольшей точностью. Точность локализации помехи можно повысить также введением дополнительных тестовых узлов.

Следующий этап локализации – экспериментальный. На этом этапе измерительная система выполняет непрерывное измерение и анализ напряжений $V_{1,exp}$ и $V_{2,exp}$. Если напряжения удовлетворяют неравенствам:

$$V_{1,exp} < V_{1,per} \text{ и } V_{2,exp} < V_{2,per},$$

где $V_{1,per}$ и $V_{2,per}$ – допустимые уровни помехи, то никаких действий не производится. Если хотя бы одно из неравенств не выполняется, то вычисляется экспериментальное значение идентифицирующего коэффициента $\alpha_{exp} = V_{1,exp}/V_{2,exp}$. Далее в табл. 3.19 находим коэффициент α_{E_k} , наиболее близкий к α_{exp} . Номер E_k в верхней ячейке таблицы соответствует номеру узла, в котором находится помеха. Таким образом, задача локализации синусоидального источника решена.

На практике описанный алгоритм локализации обладает низкой селективностью. Причинами этого являются следующие обстоятельства:

- значения идентифицирующих коэффициентов, полученные на первом расчетном этапе, могут быть равными (или весьма близкими) для различных потенциально возбуждаемых узлов;
- экспериментальное значение идентифицирующего коэффициента α_{exp} , в силу погрешности измерений, может быть одинаково близким к его нескольким расчетным значениям.

На практике помеха не является синусоидальной и имеет широкий частотный спектр. Как уже отмечалось, хорошей моделью помехи является представление ее как источника нестационарного шума. Покажем, что это обстоятельство позволяет значительно повысить точность локализации помехи.

Далее будем полагать, что в спектре помехи присутствует бесконечное количество гармоник. Пусть для определенности это гармоники с частотами $2\omega_0, 3\omega_0, \dots, M\omega_0$. На расчетном этапе локализации выполним расчет идентифицирующих коэффициентов $\alpha_p^{(k)}$ для каждой из гармоник. Здесь нижний индекс указывает, к какому из узлов подключен источник помехи, а верхний – номер гармоники в спектре помехи. Так как коэффициенты $\alpha_p^{(k)}$ не зависят от амплитуды источника помехи, то при расчете амплитуду источника помехи на всех частотах можно полагать равной 1. Результаты расчетов сведем в табл. 3.20.

Т а б л и ц а 3.20

Идентифицирующие коэффициенты $\alpha_{E_k}^{(m)}$, $m = \overline{2, M}$ и соответствующие им номера узлов $E_k, k = \overline{1, n}$ для гармоник с частотами $2\omega_0, 3\omega_0, \dots, M\omega_0$

	E_1	E_2	...	E_n
$2\omega_0$	$\alpha_{E_1}^{(2)}$	$\alpha_{E_2}^{(2)}$...	$\alpha_{E_k}^{(2)}$
$3\omega_0$	$\alpha_{E_1}^{(3)}$	$\alpha_{E_2}^{(3)}$...	$\alpha_{E_k}^{(3)}$
...
$M\omega_0$	$\alpha_{E_1}^{(M)}$	$\alpha_{E_2}^{(M)}$...	$\alpha_{E_k}^{(M)}$

Данные табл. 3.20 можно представить в виде двухмерного графика рис. 3.35. Функции $\alpha_{E_k}(\omega)$, $k = \overline{1, n}$, показанные на рис. 3.35, можно получить, например, сплайн-интерполяцией столбцов табл. 3.20. Таким образом, расчетный этап состоит в нахождении семейства функций $\alpha_p(\omega)$, подобных представленным на рис. 3.35.

Функции $\alpha_p(\omega)$ можно назвать идентифицирующими функциями. Отметим также, что расчетный этап выполняется однократно.

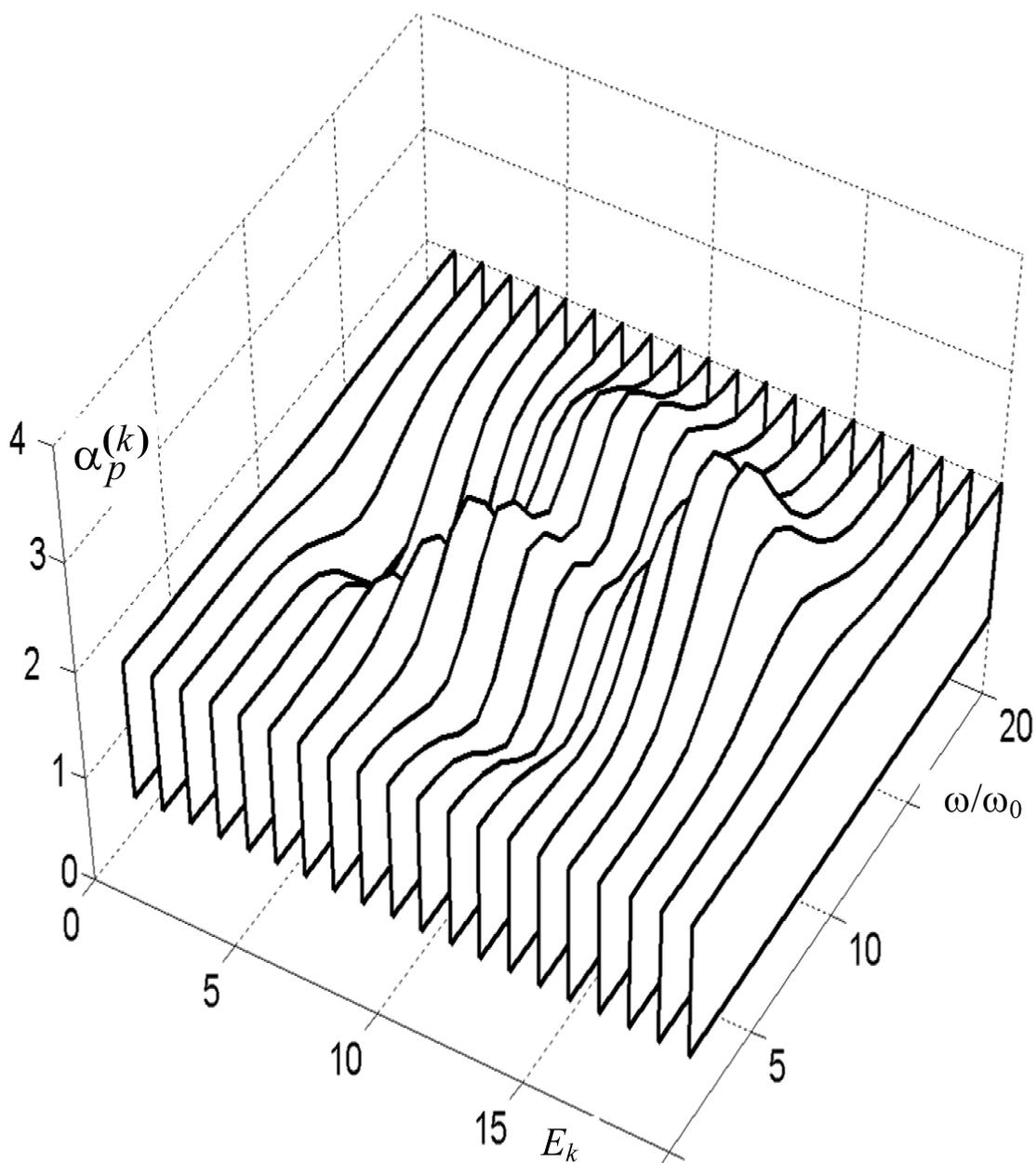


Рис. 3.35. Графическое представление идентифицирующих функций $\alpha_p(\omega)$, соответствующих табл. 3.20

Экспериментальный этап состоит в следующем:

- измерительная система выполняет непрерывное измерение и анализ напряжений $V_{1,exp}$ и $V_{2,exp}$. После того как уровень помехи превысил допустимый уровень ($V_{1,exp} > V_{1,per}$ или $V_{2,exp} > V_{2,per}$), выполняется

запись $2M$ значений напряжений $V_{1,exp}(t)$ и $V_{2,exp}(t)$ в моменты времени

$$t_k = \frac{\pi}{\omega_0 M} k, \quad k = \overline{1, 2M};$$

- выполним разложение в ряд Фурье функций $V_{1,exp}(t)$ и $V_{2,exp}(t)$ (например, с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье):

$$\begin{aligned} v_{1,exp}(k) &= \sum_{k=1}^{k=2M} V_{1,exp}(t_k) e^{-j\frac{\pi}{M}k}, \\ v_{2,exp}(k) &= \sum_{k=1}^{k=2M} V_{2,exp}(t_k) e^{-j\frac{\pi}{M}k} \end{aligned} \quad ; \quad (3.26)$$

- вычислим экспериментальную идентифицирующую функцию для частот $k\omega_0$, $k = \overline{1, M}$:

$$\alpha_{exp}^{(k)} = \frac{v_{1,exp}(k)}{v_{2,exp}(k)}, \quad k = \overline{1, M} \quad (3.27)$$

и построим с помощью, например, сплайн-интерполяции функцию $\alpha_{exp}(\omega)$;

- найдем в табл. 3.20 (или среди функций $\alpha_{E_k}(\omega)$, $k = \overline{1, n}$ на рис. 3.35) наиболее близкую к $\alpha_{exp}(\omega)$, то есть найдем решение задачи:

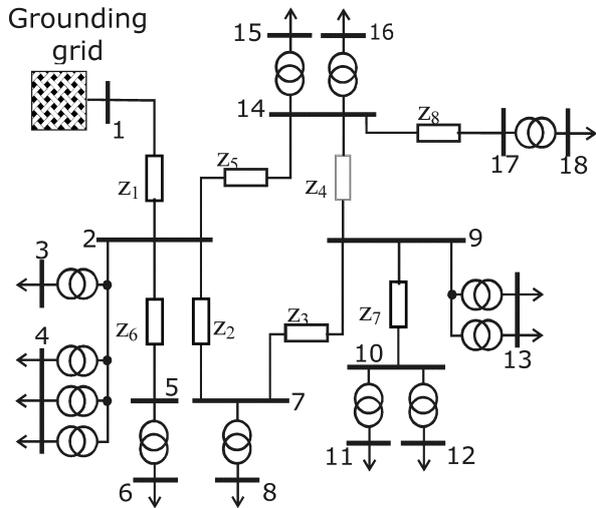
$$E_k: \quad \left\| \alpha_{E_k}(\omega) - \alpha_{exp}(\omega) \right\|_{E_k} \rightarrow \min.$$

Найденное таким образом значение E_k является номером узла, к которому подключена помеха. Отметим, что решение последней задачи минимизации не представляет значительных трудностей. Проще всего его выполнить перебором, так как в реальных задачах число столбцов табл. 3.20 редко превышает 100.

Рассмотрим применение изложенного метода для поиска местоположения источника помехи в энергосистеме, схема которой представлена на рис. 3.36, а. Идентифицирующие функции, рассчитанные на первом этапе, представлены на рис. 3.36, б. Эти идентифи-

цирующие функции получены для случая, когда тестовыми узлами были узлы 2 и 14.

a)



б)

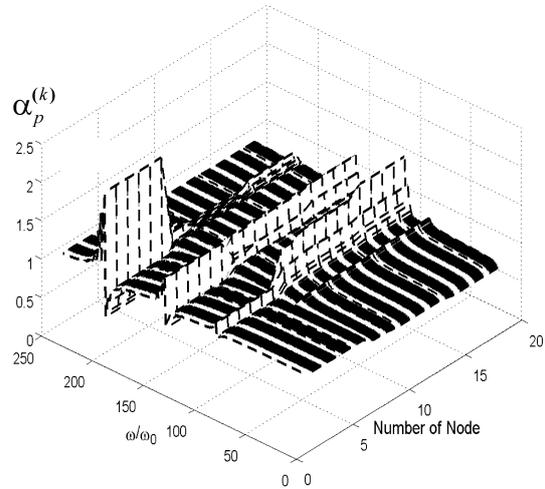
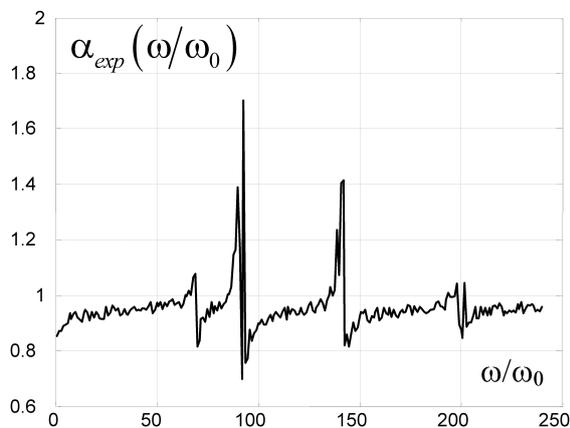


Рис. 3.36. Схема энергосистемы (a) и графическое представление табл. 3.20 для этой схемы (б)

В результате экспериментального этапа определена функция $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$, представленная на рис. 3.37, a. Погрешность определения $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$ составила $\sim 10\%$.

a)



б)

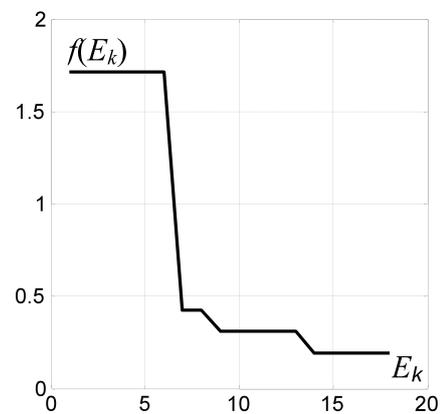


Рис. 3.37. Экспериментальная зависимость $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$ (a) и функция невязки (б)

Для локализации помехи необходимо определить среди идентифицирующих функций, полученных на расчетном этапе, наиболее близкую к $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$. Для этого построим график функции

$$f(E_k) = \left\| \alpha_{exp}(\omega/\omega_0) - \alpha_{E_k}(\omega/\omega_0) \right\|. \quad (3.28)$$

В соответствии с изложенным выше алгоритмом локализации помехи значения E_k , при которых $f(E_k)$ достигает наименьшего значения, соответствуют номеру узла, к которому присоединен источник помехи. График функции $f(E_k)$ для рассматриваемой задачи представлен на рис. 3.37, б. Как можно видеть, функция $f(E_k)$ принимает наименьшее значение при $E_k = 14 \div 18$. Следовательно, помеха находится в одном из узлов с номерами $14 \div 18$. При выполнении измерений в узлах 2 и 14 более точная локализация помехи невозможна. Действительно, топология цепи такова, что информация о сигнале помехи, расположенной в узлах $14 \div 18$, приходит по одним и тем же ветвям цепи.

Результат локализации при выборе в качестве тестовых узлов 6 и 14 показан на рис. 3.38. Как можно видеть, в данном случае, местоположение помехи (узел 5) определено однозначно.

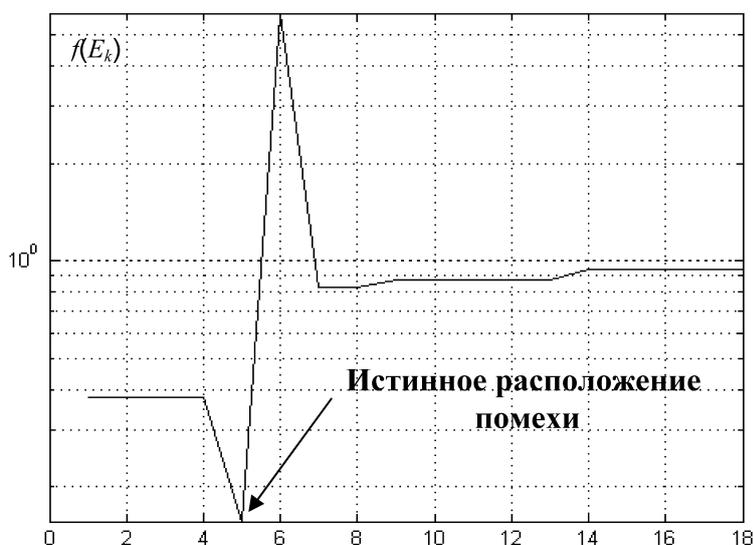


Рис. 3.38. Функция невязки при выборе в качестве тестовых узлов 6 и 14

Рассмотренный пример тестируемой цепи является одним из наиболее сложных для локализации. Это связано с относительно малым числом контуров в цепи и наличием в ней так называемых «висячих» ветвей. В многоконтурных цепях без «висячих» ветвей, выбор тестовых узлов не имеет столь большого значения.

В любой цепи точность локализации может быть существенно повышена введением дополнительного третьего тестового узла. Если мы имеем три тестовых узла с номерами T_1, T_2, T_3 , то локализация помехи может быть выполнена с помощью каждой пары $(T_1, T_2), (T_1, T_3), (T_2, T_3)$ узлов. Пусть для рассмотренного примера $T_1 = 2, T_2 = 12, T_3 = 13$. Тогда локализация по паре тестовых узлов (T_1, T_2) показывает, что помеха расположена либо в узле 9, либо в узле 13. Локализация по (T_1, T_3) показывает, что помеха может быть в узлах $9 \div 12$. Уже этой информации достаточно, чтобы однозначно указать местоположение помехи – узел 9. Использование данных локализации по (T_2, T_3) при этом не требуется.

В тестируемой цепи может быть несколько источников помех. Изложенный алгоритм дает возможность определить число этих источников и локализовать их. Рассмотрим кратко задачу локализации двух источников помехи, расположенных в различных узлах. Во-первых, из измерений $V_{1,exp}$ и $V_{2,exp}$ выясним, что в цепи более чем один источник помехи. Относительно второго источника помехи, будем предполагать, что он также есть источник нестационарного шума. Будем также полагать, что характеристики обоих источников не коррелированы.

Если в цепи действуют два источника помехи $J_{d,1}$ и $J_{d,2}$, то для k -ой гармоники можем записать

$$\begin{aligned} \underline{V}_1^{(k)} &= k_{1,1} \underline{J}_{d,1}^{(k)} + k_{1,2} \underline{J}_{d,2}^{(k)}, \\ \underline{V}_2^{(k)} &= k_{2,1} \underline{J}_{d,1}^{(k)} + k_{2,2} \underline{J}_{d,2}^{(k)}. \end{aligned}$$

Так как источники помехи не коррелированы, то функция $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$, вычисленная по $V_{1,exp}$ и $V_{2,exp}$, будет изменяться во вре-

мени. Чтобы зарегистрировать это изменение необходимо определить $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$ в двух последовательных временных интервалах. Например, найти по (3.26), (3.27) $\alpha_{1exp}(\omega/\omega_0)$ по измерениям в моменты времени $t_k = \frac{\pi}{\omega_0 M} k$, $k = \overline{1, 2M}$, $t_k \in [0, T]$ и затем $\alpha_{2exp}(\omega/\omega_0)$ – по измерениям в моменты времени $t_k \in [T, 2T]$, $k = \overline{1, 2M}$. Далее вычислить $\|\alpha_{1,exp}(\omega/\omega_0) - \alpha_{2,exp}(\omega/\omega_0)\|$. При действии в цепи одного источника помехи эта величина близка к нулю. Это свойство $\alpha_{exp}(\omega/\omega_0)$ можно использовать для выяснения вопроса о единственности источника помехи в цепи.

Пусть в цепи действует два источника помехи. Можно показать, что для их идентификации необходимо выполнить измерения как минимум в трех тестовых узлах. Алгоритм локализации помехи при этом не изменится. Однако размерность всех матриц и функций увеличится на единицу. Так на расчетном этапе необходимо заполнить трехмерную таблицу, а идентифицирующие функции будут двухмерными. Аналогично случаю одного источника помехи, условием, что в цепи действует именно два источника помехи, является постоянство во времени экспериментальной идентифицирующей функции. Если это условие нарушено, то в цепи три или более источников помехи. В этом случае для их локализации необходимы измерения в четырех тестовых узлах и т. д.

Предложенный метод локализации помехи весьма прост в реализации. Его недостатком является необходимость хранения большого объема информации при числе источников помех большем, чем три. В этом случае, размерность таблиц, создаваемых на расчетном этапе, будет четыре и более, и решение задачи (3.28) будет достаточно сложным. Возможной и перспективной альтернативой хранению и обработке больших таблиц может стать совмещение данного метода с

методом нейронных сетей. В этом случае, целью длительного расчетного этапа будет тренировка нейронной сети.

Метод справедлив с существенными упрощениями и для цепей постоянного тока. Его можно также применить для локализации источника помех в нелинейных цепях и, в частности, в цепях с полупроводниковыми элементами. При этом должно выполняться условие, что помеха представляет собой «малый сигнал» относительно рабочего режима устройства.

3.6. РАЗМЕЩЕНИЕ АКТИВНО-АДАПТИВНЫХ УСТРОЙСТВ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

В настоящем параграфе рассмотрим прикладную задачу поиска оптимального местоположения активно-адаптивных устройств в электроэнергетической системе (ЭЭС). При этом в качестве активно-адаптивных устройств будем рассматривать FACTS-устройства различного типа. Эту задачу также можно отнести к обратным задачам теории электрических цепей и рассматривать ее как задачу идентификации. Актуальность данной задачи для практики очевидна, ее решение позволит повысить эффективность работы электроэнергетических систем.

Регулирование потоков мощности является одним из актуальных направлений повышения эффективности энергосистем, поэтому его технические и организационные аспекты представляли и представляют собой объект многочисленных научных исследований. Трудности в решении проблем регулирования потоков мощности в системах переменного тока связаны с взаимозависимостью всех протекающих мощностей. Появление активно-адаптивных устройств (FACTS-устройств), позволяющих в широких пределах изменять параметры передающих линий и нагрузок, открыло новое направление в решении проблемы регулирования потоков мощности. Новые устройства позволяют значительно улучшать характеристики режимов работы энергосистем, что сделало актуальными задачи их оптимального

размещения в энергосистеме и задачи оперативного управления ими с целью обеспечения наилучшего в текущей ситуации режима работы энергосистемы. Одному из возможных общих подходов к решению этой задачи посвящен настоящий параграф. Предлагается применять обобщения так называемой билинейной теоремы, справедливой для линейных систем. Как будет показано далее, использование этого теоретического результата позволяет оперативно решать и задачи оптимизации режимов работы энергосистемы, и задачи размещения активно-адаптивных устройств, исходя из различных критериев оптимальности.

В начале параграфа рассмотрен наш подход к определению аналитических зависимостей для активных мощностей, передаваемых между узлами энергетической системы от параметров активно-адаптивных устройств. Рассматриваемые в этом разделе задачи линейны, поэтому полученные в разделе соотношения, являются «точными» в смысле допущений, которые будут приняты при их выводе. Далее мы откажемся от линейной постановки и подробно рассмотрим погрешность, возникающую при использовании полученных нами аналитических выражений, как для активных, так и для реактивных мощностей. В заключении будет рассмотрено приложение полученных результатов применительно к электроэнергетической системе мегаполиса Санкт-Петербург, Ленинградская область.

3.6.1. Определение аналитических зависимостей для активных мощностей, передаваемых между узлами электроэнергетической системы, при регулировании с помощью активно-адаптивных устройств

Задача расчета активных мощностей в узлах энергосистемы может быть сведена к решению системы линейных уравнений:

$$\mathbf{B}\Theta = \mathbf{P}, \quad (3.29)$$

где \mathbf{B} – матрица узловых проводимостей, Θ и \mathbf{P} – векторы фазовых углов напряжений и активных мощностей. После решения (3.29) ак-

тивные мощности, передаваемые по линиям, вычисляются из соотношений: $P_{im} = (\theta_i - \theta_m) / X_{im}$, где « i » и « m » – номера узлов, между которыми включена линия.

Рассмотрим зависимость решения системы уравнений (3.29) от величины x , добавляемой к произвольному коэффициенту матрицы $b_{k,j} \in \mathbf{B}$. Решение (3.29) для любой из переменных $\theta_i \in \Theta$ может быть представлено в виде

$$\theta_i = \Delta_i / \det(\mathbf{B}),$$

где Δ_i – определитель матрицы $\hat{\mathbf{v}}$, полученной из \mathbf{B} , заменой i -го столбца на столбец \mathbf{P} . Разложим этот определитель по элементам j -го столбца, в котором находится изменяемый элемент $b_{k,j}$

$$\Delta_i = \Delta_j^1 b_{1j} + \Delta_j^2 b_{2j} + \dots + \Delta_j^k (b_{kj} + x) + \dots + \Delta_j^n b_{nj} = \tilde{A}_i^{kj} + \tilde{B}_i^{kj} x,$$

где Δ_j^k – алгебраическое дополнение к элементу $b_{k,j}$, $k = \overline{1, n}$ матрицы $\hat{\mathbf{B}}$, \tilde{A}_i^{kj} и \tilde{B}_i^{kj} – некоторые константы, не зависящие от x , n – общее число узлов рассматриваемой энергосистемы.

Выполнив аналогичные действия с определителем матрицы \mathbf{B} получим: $\det(\mathbf{B}) = \tilde{C}^{kj} + \tilde{D}^{kj} x$, тогда

$$\theta_i = \frac{\tilde{A}_i^{kj} + \tilde{B}_i^{kj} x}{\tilde{C}^{kj} + \tilde{D}^{kj} x} = \frac{A_i^{kj} + B_i^{kj} x}{C^{kj} + x}. \quad (3.30)$$

Выражение (3.30), известное как билинейная теорема, дает искомую зависимость решения (3.29) от изменения произвольного элемента матрицы \mathbf{B} .

Отметим, что константы C^{kj} зависят только от расположения элемента $b_{k,j}$ в матрице \mathbf{B} , а константы \tilde{A}_i^{kj} , \tilde{B}_i^{kj} также и от номера “ i ” переменной.

Матрица \mathbf{B} в рассматриваемых в настоящем параграфе задачах – это матрица узловых проводимостей. Будем исследовать наиболее общий случай, когда ветвь с изменяемой проводимостью не связана с базисным узлом. Тогда изменение величины проводимости, располо-

женной между k -ым и j -ым узлами, на величину x приведет к изменению четырех элементов матрицы \mathbf{B} , как это показано на рис. 3.39, а.

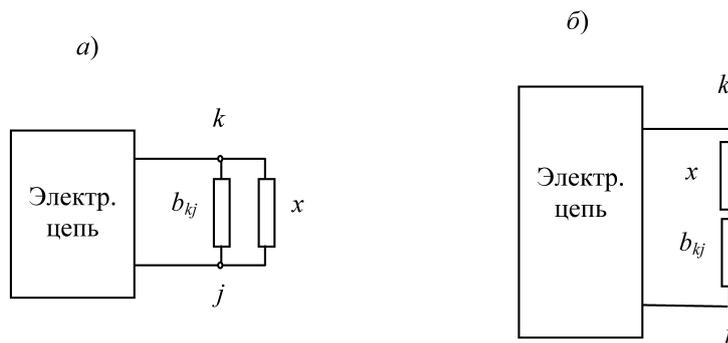


Рис. 3.39. Параллельное и последовательное добавление ветви

Соотношение (3.30) справедливо и в этом случае, что может быть доказано следующим образом. Пусть электрическая цепь содержит одну изменяемую проводимость. Тогда уравнения Кирхгофа для определения всех токов и напряжений в этой электрической цепи могут всегда быть записаны таким образом, чтобы варьируемая проводимость входила только в одно слагаемое в одно из уравнений. Справедливость билинейной теоремы для этого случая показана выше. Если теперь для этой же цепи записать уравнения метода узловых напряжений, варьируемая проводимость будет входить в матрицу проводимостей так, как это показано на рис. 3.40. Однако, форма записи уравнений не может изменить свойств решения, поэтому соотношения (3.30) выполняются и в этом случае.

$$\begin{array}{c}
 k \\
 j
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 k \\
 j
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \cdots & b_{kk} + x & \cdots & b_{kj} - x & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & b_{jk} - x & \cdots & b_{jj} + x & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{bmatrix}$$

Рис. 3.40. Вхождение параметра x в матрицу узловых проводимостей

Проведенные выше рассуждения справедливы и для схемы, представленной на рис. 3.39, б при использовании метода контурных токов. Поэтому соотношения (3.30) верны как для последовательно, так и для параллельно подключаемых ветвей.

Дробно-линейная зависимость от варьируемого параметра x справедлива также и для любой линейной комбинации переменных $\theta_i, i = \overline{1, n}$. Покажем справедливость этого свойства решения (3.29) на примере важного для дальнейшего случая линейной комбинации двух переменных θ и θ_m :

$$\begin{aligned} \alpha\theta_i + \beta\theta_m &= \alpha \frac{A_i^{kj} + B_i^{kj}x}{C^{kj} + x} + \beta \frac{W_m^{kj} + R_m^{kj}x}{C^{kj} + x} = \\ &= \frac{(\alpha A_i^{kj} + \beta W_m^{kj}) + (\alpha B_i^{kj} + \beta R_m^{kj})x}{C^{kj} + x} = \frac{D^{kj} + F^{kj}x}{C^{kj} + x}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

При выводе использовано свойство независимости констант знаменателя от номера переменной, отмеченное выше. Используя (3.31), получаем, что активная мощность, перетекающая между двумя узлами « i » и « m », также является дробно-линейной функцией варьируемого параметра x

$$P_{im} = \frac{1}{X_{im}} (\theta_i - \theta_m) = \frac{A_{im}^{kj} + B_{im}^{kj}x}{C^{kj} + x}. \quad (3.32)$$

В последнем выражении X_{im} – реактивное сопротивление линии, соединяющей узлы « i » и « m », P_{im} – активная мощность, передаваемая по этой линии, $A_{im}^{kj}, B_{im}^{kj}, C^{kj}$ – константы, подлежащие определению, x – варьируемый параметр, имеющий в нашем случае смысл изменения проводимости, вносимого активно-адаптивным устройством в линию, расположенную между узлами « k » и « j » (рис. 3.39, б). Будем считать, что величина x (в относительных единицах) ограничена неравенствами:

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \quad (3.33)$$

где величины x_{\min} , x_{\max} определяются конкретным видом активно-адаптивного устройства, и могут быть, например, $-0,2$ и $0,8$.

Рассмотрим далее метод определения констант A_{im}^{kj} , B_{im}^{kj} , C^{kj} . Для определения трех независимых констант необходимо выполнить три расчета или независимых эксперимента для определения потоков активной мощности в электроэнергетической системе при различных значениях x . Пусть такие расчеты (или эксперименты) выполнены, и их результаты сведены в табл. 3.21.

Т а б л и ц а 3.21

Определение констант A_{im}^{kj} , B_{im}^{kj} , C^{kj}

x	$i = 1$				$i = 2$			$i = 3$	
	$m = 2$	$m = 3$...	$m = n$	$m = 3$...	$m = n$	$m = 4$...
0	$P_{12}^{(0)}$	$P_{13}^{(0)}$...	$P_{1n}^{(0)}$	$P_{23}^{(0)}$...	$P_{2n}^{(0)}$	$P_{34}^{(0)}$...
x_{\min}	$P_{12}^{(x_{\min})}$	$P_{13}^{(x_{\min})}$...	$P_{1n}^{(x_{\min})}$	$P_{23}^{(x_{\min})}$...	$P_{2n}^{(x_{\min})}$	$P_{34}^{(x_{\min})}$...
x_{\max}	$P_{12}^{(x_{\max})}$	$P_{13}^{(x_{\max})}$...	$P_{1n}^{(x_{\max})}$	$P_{23}^{(x_{\max})}$...	$P_{2n}^{(x_{\max})}$	$P_{34}^{(x_{\max})}$...

Предполагается, что устройство FACTS включено между некоторыми узлами « k » и « j ». В первом столбце табл. 3.21 содержатся значения переменной x , выбор которых из интервала $[x_{\min}, x_{\max}]$, в общем случае, произволен. Во втором столбце рассчитанные или измеренные активные мощности, перетекающие между узлами «1» и «2», в третьем - между узлами «1» и «3» и далее до потока мощности между узлами «1» и « n ». В столбце « $n + 2$ » поток мощности между узлами «2» и «3», в « $n + 3$ » – между узлами «2» и «4» и так далее. Очевидно, что одна строка таблицы может быть заполнена в результате анализа одного режима работы энергосистемы.

Дальнейшее решение задачи определения констант сводится к решению систем линейных уравнений вида:

$$\frac{A_{im}^{kj}}{C^{kj}} = P_{im}^{(0)}, \quad \frac{A_{im}^{kj} + x_{\min} B_{im}^{kj}}{C^{kj} + x_{\min}} = P_{im}^{(x_{\min})}, \quad \frac{A_{im}^{kj} + x_{\max} B_{im}^{kj}}{C^{kj} + x_{\max}} = P_{im}^{(x_{\max})}, \quad (3.34)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad m = \overline{2, n}, \quad i < m,$$

которые при одновременном выполнении неравенств: $C^{kj} \neq 0$, $C^{kj} \neq -x_{\min}$, $C^{kj} \neq -x_{\max}$ сводятся к (3.35). Выполнение неравенств $C^{kj} \neq 0$, $C^{kj} \neq -x_{\min}$, $C^{kj} \neq -x_{\max}$ гарантируется тем, что все перетоки мощности в табл. 3.21 конечны.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -P_{im}^{(0)} \\ 1 & x_{\min} & -P_{im}^{(x_{\min})} \\ 1 & x_{\max} & -P_{im}^{(x_{\max})} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{im}^{kj} \\ B_{im}^{kj} \\ C^{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{\min} P_{im}^{(x_{\min})} \\ x_{\max} P_{im}^{(x_{\max})} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad m = \overline{2, n}, \quad i < m. \quad (3.35)$$

Системы уравнений (3.35) допускают простое аналитическое решение:

$$\begin{bmatrix} A_{im}^{kj} \\ B_{im}^{kj} \\ C^{kj} \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_{\max} - x_{\min}) P_{im}^{(0)} - x_{\max} P_{im}^{(x_{\min})} + x_{\min} P_{im}^{(x_{\max})}} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_{\min} P_{im}^{(x_{\max})} - x_{\max} P_{im}^{(x_{\min})} & x_{\max} P_{im}^{(0)} & -x_{\min} P_{im}^{(0)} \\ P_{im}^{(x_{\min})} - P_{im}^{(x_{\max})} & P_{im}^{(x_{\max})} - P_{im}^{(0)} & P_{im}^{(0)} - P_{im}^{(x_{\min})} \\ x_{\min} - x_{\max} & x_{\max} & -x_{\min} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_{\min} P_{im}^{(x_{\min})} \\ x_{\max} P_{im}^{(x_{\max})} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Подставляя в (3.34) последовательно данные из столбцов табл. 3.21, получим полный для данной энергосистемы набор констант A_{im}^{kj} , B_{im}^{kj} , C^{kj} . После выполнения этих несложных расчетов можно, пользуясь соотношениями (3.32), определить потоки мощности между любыми узлами энергосистемы.

Соотношения (3.28) могут быть с успехом использованы и для оптимизации режима работы энергосистемы (ЭС). Пусть необходимо определить, каким должно быть значение x_{opt} , обеспечиваемое активно-адаптивным устройством, находящимся между узлами « k » и « j »,

чтобы активная мощность P_{im} , передаваемая между узлами « i » и « m », принимала определенное оптимальное для данного режима значение, например \tilde{P}_{im} . Из (3.32) находим:

$$x_{opt} = \frac{A_{im}^{kj} - \tilde{P}_{im} C^{kj}}{\tilde{P}_{im} - \tilde{B}_{im}^{kj}}. \quad (3.37)$$

Для того чтобы полученный режим был реализуем, необходимо, чтобы выполнялись неравенства: $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Получение из соотношения (3.37) значения x_{opt} , выходящего за пределы этого диапазона, информирует о том, что получение требуемой мощности \tilde{P}_{im} с помощью активно-адаптивного устройства, находящегося между узлами « k » и « j », невозможно.

Постановки и методы решения с помощью рассматриваемого подхода более сложных оптимизационных задач будут приведены далее, при рассмотрении систем, содержащих несколько активно-адаптивных устройств. Здесь отметим ряд достаточно общих и полезных для практики свойств систем, содержащих одно активно-адаптивное устройство, которые могут быть легко доказаны с применением билинейной теоремы.

Свойство 1

При наличии в энергосистеме одного активно-адаптивного устройства максимальное и минимальное значение активной мощности, передаваемое по любой из линий энергосистемы, достигается при крайних значениях x .

Действительно, каждая из мощностей – билинейная функция параметра x , причем, как уже отмечалось, на физически реализуемом интервале $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ все передаваемые мощности конечны. Следовательно, каждая из мощностей монотонная (монотонно возрастающая или монотонно убывающая) функция x , откуда и следует справедливость свойства 1.

Замечание

Доказанное свойство справедливо в предположении, что перетоки активных мощностей описываются уравнением (3.29), которое само по себе является приближением к реальному режиму ЭЭС. Уравнение (3.29) получено при пренебрежении реактивными мощностями и в предположении, что линии, соединяющие ЭЭС, относительно короткие. Последнее предположение приемлемо для мегаполисов, территориальные размеры которых относительно невелики. Далее мы откажемся от обоих предположений. Соответственно, в ЭЭС могут появиться ветви, для которых Свойство 1 не справедливо. Предваряя полученные далее результаты, отметим здесь, что из $\sim 10^6$ расчетов перетоков активных мощностей по ветвям ЭЭС мегаполиса только 2 % не описываются Свойством 1, а для 98% случаев оно оказалось справедливым.

Свойство 2

При наличии в энергосистеме одного активно-адаптивного устройства максимальная и минимальная чувствительность активной мощности, передаваемой по любой из линий энергосистемы, к изменению параметра регулирования x достигается при крайних значениях x .

Это свойство следует из того, что производная дробно-линейной функции на интервале монотонности также монотонная функция. И, следовательно, экстремальные значения достигаются на краях промежутка.

Достаточно подробное описание использования билинейной теоремы для описания энергосистемы с одним активно-адаптивным устройством, выполненное выше, необходимо для пояснения предлагаемого подхода на простейшем примере. Следующие далее обобщения для 2-х и 3-х активно-адаптивных устройств в идеологическом плане не отличаются от рассмотренного случая, но их изложение требует значительно более громоздких выкладок, часть из которых будет опускаться, так как они аналогичны рассмотренным выше.

Рассмотрим далее энергосистему, содержащую два активно-адаптивных устройства с параметрами регулирования x_1 и x_2 в линиях, соединяющих узлы « k_1 », « j_1 », « k_2 », « j_2 », соответственно (рис. 3.41). В этом случае применение билинейной теоремы дает для перетока мощности между узлами « i » и « m » соотношение:

$$P_{im} = \frac{A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_{12}x_1x_2}{B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + x_1x_2}, \quad (3.38)$$

где верхние индексы k_1, j_1, k_2, j_2 у констант для краткости опущены. Чтобы убедиться в его справедливости, рассмотрим систему уравнений (3.29), в которой произвольным образом изменяются два элемента:

$$b_{k_1, j_1} + x_1 \in \mathbf{B}, \quad b_{k_2, j_2} + x_2 \in \mathbf{B}.$$

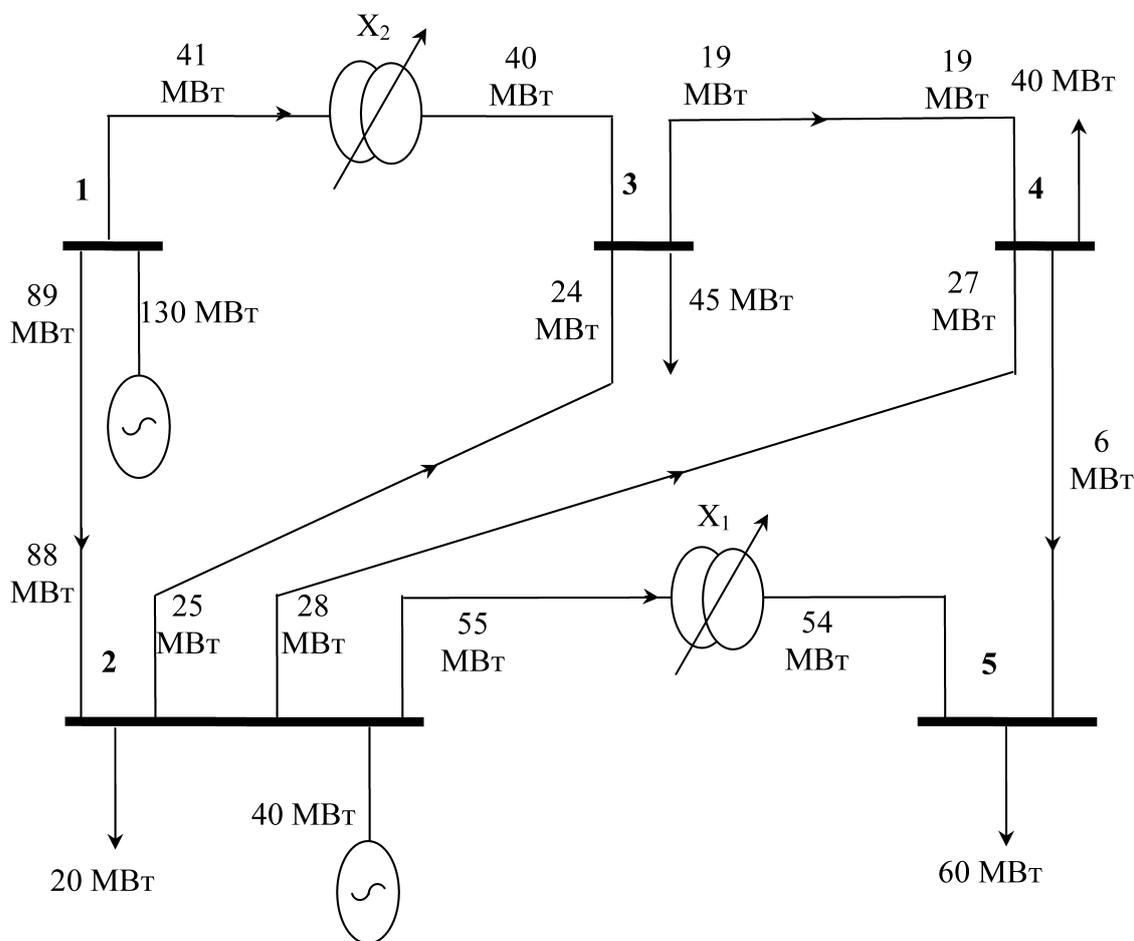


Рис. 3.41. Энергосистема с двумя активно-адаптивными устройствами

Элементы θ_i вектора Θ системы уравнений (3.29), можно, как и для системы с одним активно-адаптивным устройством, представить в виде (3.30). Выражение для Δ_i может быть записано в виде двойной суммы:

$$\Delta_i = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k_1}}^{q=n} \left(\sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q, k_2}}^{p=n} \Delta_{j_1, j_2}^{q, p} b_{pj_2} + \Delta_{j_2}^{q, k_2} b_{pj_2} (b_{k_2 j_2} + x_2) \right) b_{qj_1} + \\ + \Delta_{j_1, j_2}^{k_1, k_2} (b_{k_1 j_1} + x_1)(b_{k_2 j_2} + x_2) = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_{12} x_1 x_2 \quad (3.39)$$

где A_0, A_1, A_2, A_{12} – константы, не зависящие от x_1 и x_2 ; $\Delta_{j_1, j_2}^{q, p}$ – определитель матрицы $\bar{\mathbf{v}}$, полученной из матрицы \mathbf{V} вычеркиванием p -ой и q -ой строки и j_1 -го и j_2 -го столбцов с соответствующим знаком. Выполнив аналогичные действия с определителем матрицы \mathbf{V} , получим выражение, аналогичное (3.38) для любого элемента вектора решения системы уравнений (3.38). Далее, повторяя рассуждения, проведенные выше для энергосистемы с одним активно-адаптивным устройством, приходим к выражению (3.38).

Рассмотрим процедуру определения констант $A_0, A_1, A_2, A_{12}, B_0, B_1, B_2$, входящих в выражение для мощности P_{im} . Для этого заполним табл. 3.22 – аналог табл. 3.21. Для уменьшения громоздкости выполним определение констант в выражении для мощности P_{24} только одной линии. Необходимо определить 7 констант, поэтому следует выполнить 7 расчетов (измерений) режимов энергосистемы при различных значениях x_1 и x_2 . Задача определения констант сводится к решению системы линейных уравнений седьмого порядка, аналогичной (3.35)

$$P_{im}^{(x_1, x_2)} = \frac{A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_{12} x_1 x_2}{B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + x_1 x_2}, \\ x_1 \in X_1 \equiv \{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}, x_1^{(5)}, x_1^{(6)}, x_1^{(7)}\}, \\ x_2 \in X_2 \equiv \{x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}, x_2^{(4)}, x_2^{(5)}, x_2^{(6)}, x_2^{(7)}\}, \quad (3.40)$$

где множества X_1 и X_2 состоят из произвольных значений параметров активно-адаптивных устройств. Решение (3.40) при неравенстве нулю знаменателя, что как и в случае с одним активно-адаптивным устройством гарантируется конечностью всех $P_{im}^{(x_1, x_2)}$, сводится к решению системы линейных уравнений и может быть легко получено.

Для энергосистемы, представленной на рис. 3.41, был выполнен численный расчет. Мощности $P_{24}^{(x_1, x_2)}$ и константы $A_0, A_1, A_2, A_{12}, B_0, B_1, B_2$, определенные из системы уравнений (3.40), представлены в табл. 3.22.

Т а б л и ц а 3.22

Определение констант $A_0, A_1, A_2, A_{12}, B_0, B_1, B_2$

x_1	x_2	P_{24} (МВт)	Константы
0	0	$P_{24}^{(0,0)} = \frac{A}{B} = 27,88$	$A_0 = 317,253$
0	0,8	$P_{24}^{(0,0,8)} = \frac{A_0 + 0,8A_2}{B_0 + 0,8B_2} = 18,60$	$A_1 = -125,157$
0,8	0	$P_{24}^{(0,8,0)} = \frac{A_0 + 0,8A_1}{B_0 + 0,8B_1} = 22,30$	$A_2 = 216,676$
∞	∞	$P_{24}^{(\infty,\infty)} = A_{12} = 80,38$	$A_{12} = 80,380$
-0,2	0,8	$P_{24}^{(-0,2,0,8)} = \frac{A_0 - 0,2A_1 + 0,8A_2 - 0,16A_{12}}{B_0 - 0,2B_1 + 0,8B_2 - 0,16} = 19,54$	$B_0 = 11,379$
0,8	-0,2	$P_{24}^{(0,8,-0,2)} = \frac{A_0 + 0,8A_1 - 0,2A_2 - 0,16A_{12}}{B_0 + 0,8B_1 - 0,2B_2 - 0,16} = 23,61$	$B_1 = -2,053$
0,5	0	$P_{24}^{(0,5,0)} = \frac{A_0 + 0,5A_1}{B_0 + 0,5B_1} = 24,60$	$B_2 = -4,553$

На рис. 3.42 построена поверхность $P_{24} = f(x_1, x_2)$, дающая наглядное представление о характере изменения мощности P_{24} при допустимых изменениях параметров активно-адаптивных устройств.

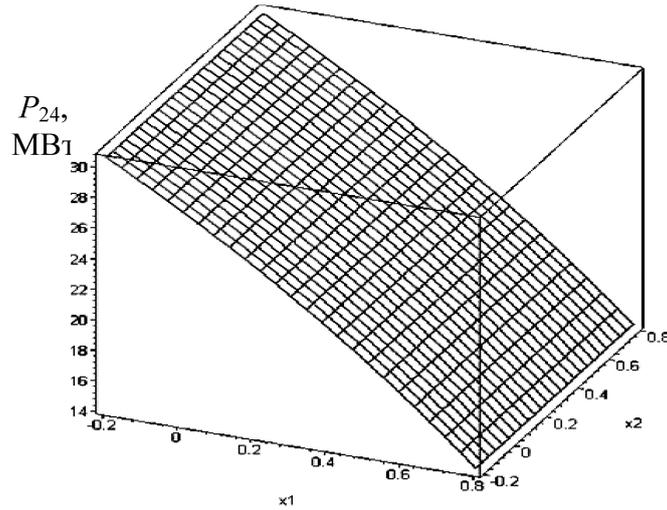


Рис. 3.42. Изменение мощности P_{24} (МВт) от параметров x_1 и x_2 активно-адаптивных устройств, включенных, как это показано на рис. 3.41

Описанный подход может быть применен, если энергетическая система содержит три или более активно-адаптивных устройств. Так, для трех активно-адаптивных устройств, характеризуемых параметрами x_1 , x_2 и x_3 и расположенных между различными узлами, для активной мощности, передаваемой между узлами « i » и « m », будем иметь:

$$P_{im} = \frac{A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_{12}x_1x_2 + A_{13}x_1x_3 + A_{23}x_2x_3 + A_{123}x_1x_2x_3}{B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_{12}x_1x_2 + B_{13}x_1x_3 + B_{23}x_2x_3 + x_1x_2x_3}. \quad (3.41)$$

Соответственно для использования этого выражения необходимо определить 15 констант и, следовательно, выполнить 15 расчетов режимов работы энергосистемы при различных комбинациях x_1 , x_2 и x_3 . Определение констант в этом случае, как и в случае с произвольным количеством активно-адаптивных устройств, сводится к решению системы линейных уравнений, аналогичной (3.35) и (3.40) и не представляет серьезной сложности даже для моделей энергосистем с высоким уровнем детализации. Поэтому определение констант может выполняться в реальном времени параллельно с изменениями, происходящими в энергосистеме. Решение этой задачи было выполнено для

схемы, представленной на рис. 3.43. На рис. 3.44 представлены поверхности $P_{24} = f(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=0,6}$, $P_{24} = f(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=-0,2}$.

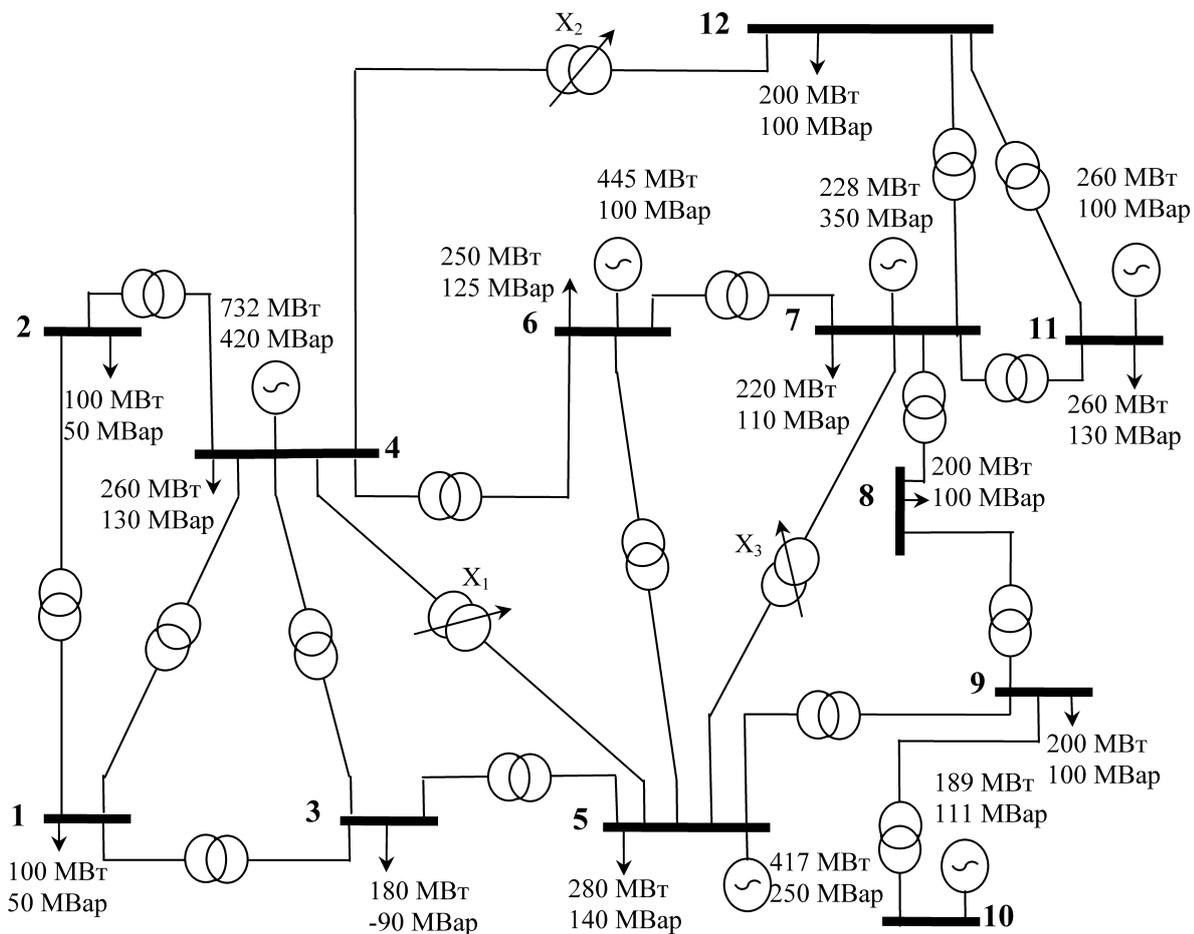


Рис. 3.43. Энергосистема с тремя активно-адаптивными устройствами

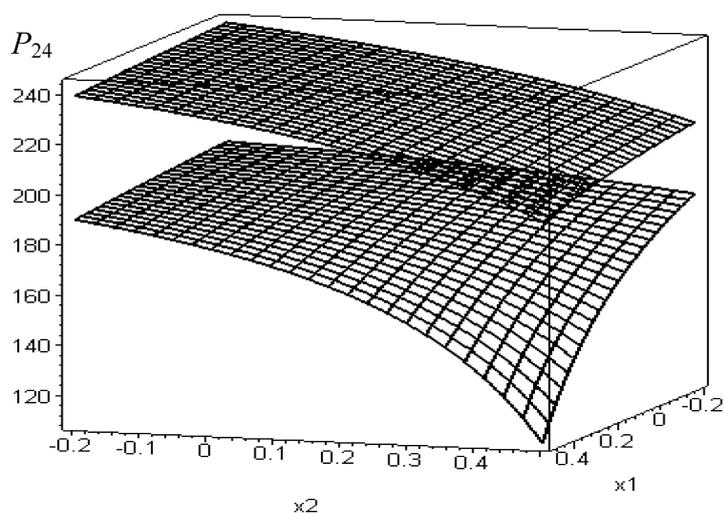


Рис. 3.44. Изменение мощности P_{24} (МВт) от параметров x_1 и x_2 активно-адаптивных устройств, включенных, как это показано на рис. 3.43

Аналогично могут быть получены аналитические выражения для активных мощностей, передаваемых между узлами, для энергосистем с произвольным количеством активно-адаптивных устройств. Важно, что аналитические выражения для перетоков мощностей (3.32), (3.38), (3.41) получаются за 3, 7, 15 расчетов режима ЭЭС разом для всех ветвей. При этом константы числителей соотношений различны для каждой из ветвей, а константы знаменателей совпадают. В настоящей работе наше внимание было сосредоточено на зависимостях мощностей от параметров активно-адаптивных устройств. Однако в качестве варьируемых параметров могут быть выбраны и проводимости узлов нагрузки. Это еще более расширит область приложений методики, например, для наибо́льшего восстановления ЭЭС после аварий.

Ранее (соотношение(3.37)) было показано, как полученное аналитическое выражение (3.32) может использоваться для оптимизации режима ЭЭС с одним активно-адаптивным устройством. При наличии в ЭЭС большего числа подобных устройств возможны и более сложные, более содержательные постановки задач оптимизации режимов. Варианты таких постановок будут рассмотрены в следующем разделе. Здесь отметим, что сами постановки оптимизационных задач возможны благодаря предложенной методике получения аналитических зависимостей, связывающих перетоки мощности и параметры активно-адаптивных устройств.

3.6.2. Постановки и решение задач оптимизации режимов электроэнергетических систем

Задачи оптимизации режимов, как уже говорилось, относятся к классу так называемых обратных задач [15]. Целью решения обратных задач является нахождение таких параметров ЭЭС, чтобы режим ее работы был оптимален по некоторым сформулированным в условиях обратной задачи критериям. Рассматриваемые в настоящем разделе обратные задачи имеют в качестве параметров, подлежащих определению, параметры активно-адаптивных устройств. Далее, при

рассмотрении различных постановок задач будем предполагать, что предварительно решена задача определения констант, входящих в соотношения (3.32), (3.38), (3.41) для всех линий ЭЭС так, как это показано в предыдущем разделе. Для упрощения записи будем рассматривать энергосистему с двумя активно-адаптивными устройствами, включенными между узлами k_1, j_1, k_2, j_2 , имеющими управляемые параметры x_1 и x_2 .

Задача 1. Определить значение параметров x_1, x_2 активно-адаптивных устройств, обеспечивающих наибольший переток активной мощности между узлами « i » и « m » ЭЭС при постоянстве перетока активной мощности P_{pq} между узлами « p » и « q ».

Запишем математическую формулировку Задачи 1.

$$\sum_n \frac{A_0^{(n,i)} + A_1^{(n,i)} x_1 + A_2^{(n,i)} x_2 + A_{12}^{(n,i)} x_1 x_2}{B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + x_1 x_2} - \sum_s \frac{A_0^{(s,m)} + A_1^{(s,m)} x_1 + A_2^{(s,m)} x_2 + A_{12}^{(s,m)} x_1 x_2}{B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + x_1 x_2} \xrightarrow{x_1, x_2} \max$$

при ограничении

$$\begin{aligned} & \sum_d \frac{A_0^{(d,p)} + A_1^{(d,p)} x_1 + A_2^{(d,p)} x_2 + A_{12}^{(d,p)} x_1 x_2}{B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + x_1 x_2} = \\ & = \sum_g \frac{A_0^{(g,q)} + A_1^{(g,q)} x_1 + A_2^{(g,q)} x_2 + A_{12}^{(g,q)} x_1 x_2}{B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + x_1 x_2} + P_{pq}. \end{aligned}$$

Входящие под знаки сумм дробно-полиномиальные функции имеют смысл активных мощностей, втекающих соответственно в i -ый, m -ый, p -ый и q -ый узлы. В ограничении суммирование идет по всем ветвям, подходящим соответственно к узлам « p » и « q », кроме ветви « pq ». Решение Задачи 1 может быть выполнено любым из хорошо развитых методов нелинейного программирования.

Задача 2. Определить область эффективного действия активно-адаптивных устройств, под которой будем понимать подмножество линий, в которых изменение параметров x_1, x_2 активно-адаптивных

устройств приведет к изменению перетока мощности, например, не менее чем на 10 %.

Отметим, что максимальный и минимальный перетоки в линиях могут в общем случае, при наличии в системе более чем одного активно-адаптивного устройства достигаться не при максимальном или минимальном значении x . Поэтому данная задача не тривиальна и не может быть решена перебором крайних значений. Запишем математическую формулировку Задачи 2. Определить множество F линий, для которых

$$\Delta_{im} = \frac{\max_{x_1, x_2 \in G} P_{im}(x_1, x_2) - \min_{x_1, x_2 \in G} P_{im}(x_1, x_2)}{\int_{x_{1,\min}}^{x_{1,\max}} \int_{x_{2,\min}}^{x_{2,\max}} P_{im}(x_1, x_2) dx_1 dx_2} > 0,1, \quad (3.42)$$

где $G = \{x_{1,\min} \leq x_1 \leq x_{1,\max} \cup x_{2,\min} \leq x_2 \leq x_{2,\max}\}$, область поиска экстремума.

Благодаря тому, что выражения, полученные для функции $P_{im}(x_1, x_2)$, весьма просты, задачи определения экстремумов и вычисления интеграла в (3.42) могут быть решены аналитически. Их полные решения достаточно громоздки для того, чтобы включать их в данный материал, но могут быть легко получены с помощью программ, работающих с аналитическими выражениями (например, Maple). Поэтому вычисление Δ_{im} для линии выполняются за очень короткое время. Следовательно, Задача 2 может быть решена перебором $i, m = \overline{1, n}, i, m \neq k_1, j_1, k_2, j_2$. При высоком уровне детализации математической модели энергосистемы для оптимизации процесса построения множества F может быть использован, например, генетический алгоритм [14].

Задача 3. Определить местоположение в энергосистеме активно-адаптивных устройств таким образом, чтобы перетоки мощности в некотором заданном множестве Φ линий регулировались наиболее эффективно.

Будем предполагать, что для всех линий, регулируемых эффективно (то есть входящих во множество Φ), выполняется неравенство (3.42). Будем также предполагать, что в нашем распоряжении имеется процедура решения Задачи 2, то есть алгоритм построения множества $F(k_p, j_p, k_q, j_q)$ реализован. Запишем математическую формулировку Задачи 3. Определить номера узлов k_p, j_p, k_q, j_q таких, что:

$$M(k_p, j_p, k_q, j_q) = \text{Num}[\Phi \setminus F(k_p, j_p, k_q, j_q)] \xrightarrow{p, q} \min,$$

где $\text{Num}[\cdot]$ – функция, определяющая число элементов множества. Очевидно, что каждое вычисление минимизируемой функции $M(k_p, j_p, k_q, j_q)$ эквивалентно решению Задачи 2. Поэтому решение Задачи 3 перебором возможно лишь для достаточно простых моделей энергосистем. В более сложных случаях решение Задачи 3 может быть выполнено с помощью генетического алгоритма.

Задача 4. Установить в линии, находящейся между узлами « i » и « m », поток активной мощности \tilde{P}_{im} при одном из следующих ограничений:

4.1. В регулировании, по возможности, должно участвовать только одно активно-адаптивное устройство, привлечение для регулирования второго активно-адаптивного устройства допустимо, только если необходимое значение мощности не может быть достигнуто регулированием с помощью одного активно-адаптивного устройства.

4.2. Изменение параметров x_1 и x_2 активно-адаптивных устройств при переходе к режиму, обеспечивающему переток мощности \tilde{P}_{im} , должно быть минимально возможным.

4.3. Поток P_{pq} активной мощности между узлами « p » и « q » должен измениться на минимально возможную величину.

4.4. Поток P_{pq} активной мощности между узлами « p » и « q » должен быть возможно ближе к заданному значению \tilde{P}_{pq} , то есть одновременно устанавливаются «оптимальные» потоки мощности в двух линиях.

4.5. Поток активной мощности \tilde{P}_{im} должен быть максимально (минимально) возможным.

Пусть решение Задачи 4 без ограничений: определить x_1^{opt} и x_2^{opt} такие, что:

$$\tilde{P}_{im} = \frac{A_0 + A_1 x_1^{opt} + A_2 x_2^{opt} + A_{12} x_1^{opt} x_2^{opt}}{B_0 + B_1 x_1^{opt} + B_2 x_2^{opt} + x_1^{opt} x_2^{opt}} \quad (3.43)$$

- не существует, что соответствует заданию мощности \tilde{P}_{im} , недостижимой ни при каких значениях x_1^{opt} и x_2^{opt} ;
- единственно, что соответствует решению Задачи 4 с ограничением 4.5;
- многозначно, то есть имеется множество пар (x_1^{opt}, x_2^{opt}) , удовлетворяющих равенству (3.43), и для определения одной из них могут быть поставлены дополнительные условия, такие как 4.1–4.4. Таким образом, решение Задачи 4 с ограничениями 4.1–4.4 сводится к поиску экстремума \tilde{P}_{im} , вычисляемому в (3.43), по x_1 и x_2 при соответствующих ограничениях.

3.6.3. Оценка погрешности методики при ее использовании для получения аналитических выражений в нелинейных задачах

Задача определения токов и напряжений, а также перетоков активных и реактивных мощностей в ЭЭС в общем случае нелинейна. Одна из удобных формулировок этой задачи:

$$\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{J}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{J}^* \quad (3.44)$$

может быть записана в терминах комплексных напряжений узлов, комплексных токов ветвей и комплексной мощности. Решение (3.44) при частично заданных векторах $\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{J}, \dot{\mathbf{S}}$ приводит с очевидностью к нелинейной задаче, в то время как анализируемая электрическая цепь

(схема замещения ЭЭС) линейна. Линеаризация (3.44) приводит к уравнению (3.29), рассмотренному выше.

Будем искать аналитическую аппроксимацию зависимости активной и реактивной мощности от параметра схемы замещения ЭЭС в виде дробно-линейных функций, как это делалось для (3.29). Такой подход оправдывается тем, что ЭЭС в основном осуществляет транспорт и распределение именно активной мощности, для которой аппроксимация в виде дробно-линейных функций является «точной». Для повышения точности аппроксимации будем использовать для определения входящих в нее констант решение задачи (3.44), получаемое, с помощью какой-либо программы анализа режимов ЭЭС.

Для оценки погрешности аналитических выражений, получаемых при таком подходе, были выполнены расчеты набора тестовых схем IEEE, специально разработанных для тестирования программ, рассчитывающих режимы ЭЭС. Были рассчитаны схемы, содержащие 14, 30 и 57 узлов. Относительная погрешность в определении активной мощности для 57 узловой схемы представлена на рис. 3.45.

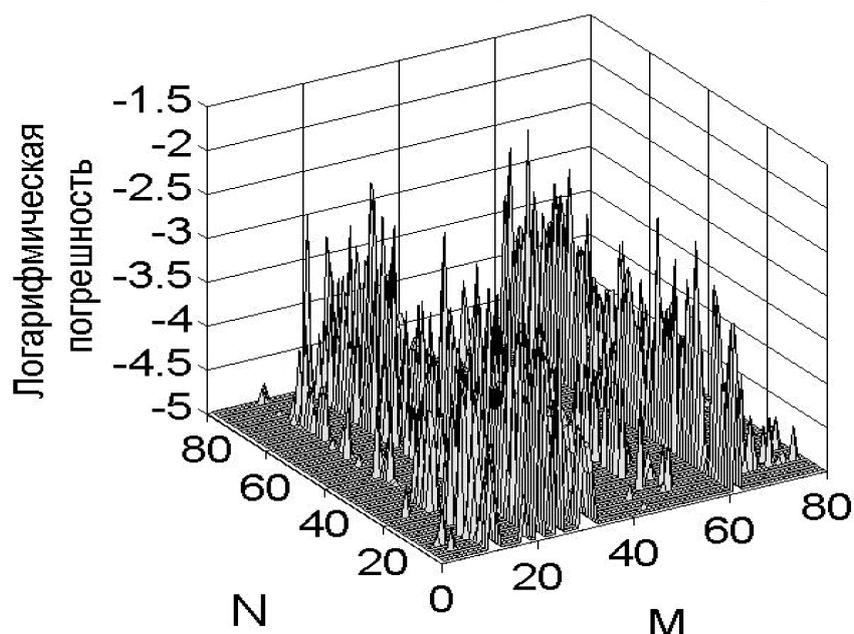


Рис. 3.45. Логарифмическая погрешность аппроксимации зависимости активной мощности от параметра активно-адаптивного устройства

Относительная погрешность в определении реактивной мощности для указанной схемы представлена на рис. 3.46.

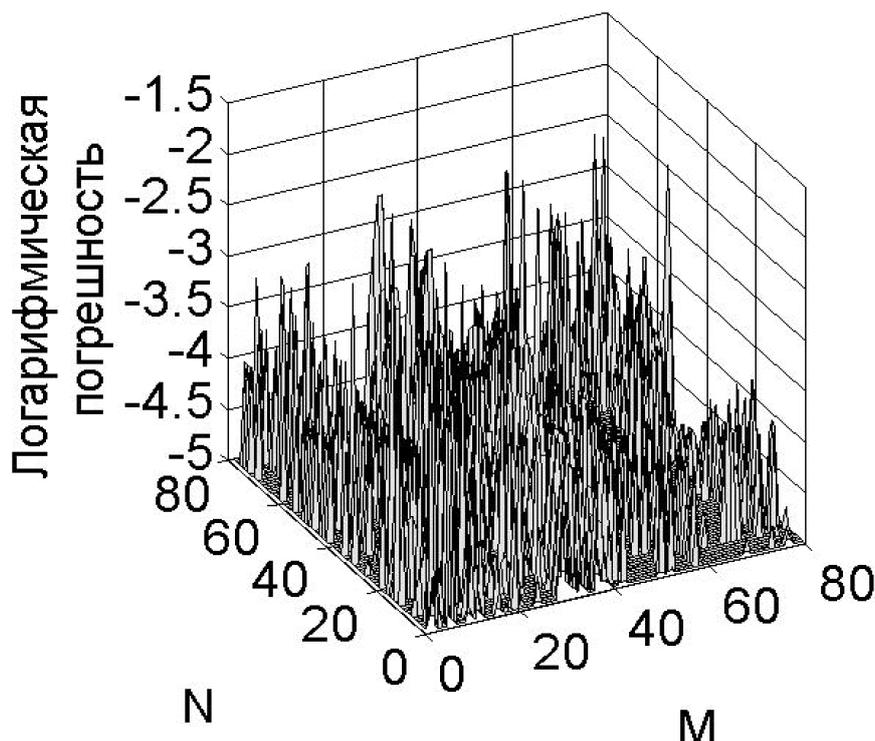


Рис. 3.46. Логарифмическая погрешность аппроксимации зависимости реактивной мощности от параметра активно-адаптивного устройства

На рис. 3.45, 3.46 по оси абсцисс отложен номер ветви, где установлено активно-адаптивное устройство, по оси ординат – номер ветви, в которой регулируется переток мощности, по вертикальной оси относительная логарифмическая погрешность

$$\Delta = \log \frac{(D_{\max} - D_{\min}) \sqrt{\sum_n (D - \hat{D})^2}}{\sum_n D^2}, \quad D \equiv \begin{cases} P \\ Q \end{cases}$$

в определении активной (реактивной) мощности. Здесь D – «точное», полученное с помощью программы расчета режимов ЭЭС (например, RasrtWin) значение активной или реактивной мощности, \hat{D} – значение активной или реактивной мощности, полученное с помощью дробно-линейной аппроксимации, $D_{\max} - D_{\min}$ – диапазон регулирования мощности.

Как можно видеть, логарифмическая погрешность для активной мощности всюду не превышает 10^{-2} (то есть менее 1 %), а для реактивной мощности не превышает $10^{-1,5}$ (около 3 %). Аналогичные оценки для погрешностей были получены и для других схем IEEE. Эти оценки позволяют с уверенностью использовать дробно-полиномиальную аппроксимацию вида (3.32), (3.38) в качестве аналитических выражений при решении различных обратных задач.

3.6.4. Оптимизация активно-адаптивных устройств электроэнергетических систем применительно к мегаполису Санкт-Петербург, Ленинградская область

Рассмотрим решение задачи размещения и управления активно-адаптивными устройствами на примере ЭЭС мегаполиса Санкт-Петербург, Ленинградская область. В состав рассматриваемой энергосистемы входят объекты генерации суммарной установленной мощностью 10930 МВт. Основными объектами генерации являются Ленинградская атомная электростанция, Киришская ГРЭС-19, Северо-Западная ТЭЦ, Северная ТЭЦ-21 и Южная ТЭЦ-22. Рассматриваемая ЭЭС включает в себя также 325 линий электропередач класса 10–750 кВ и 310 трансформаторных подстанций и распределительных устройств электростанций напряжением 110–750 кВ суммарной мощностью трансформаторов 30183 МВА. Функции диспетчерского управления осуществляет филиал ОАО «СО ЭЭС» «Региональное диспетчерское управление энергосистемами Санкт-Петербурга и Ленинградской области» (Ленинградское РДУ).

Схема рассматриваемой энергосистемы является по своей структуре типичной схемой мегаполиса. Для такой схемы характерны высокая плотность генерации и потребления электрической и тепловой энергии. В связи с жёсткими климатическими условиями региона большую часть года энергосистема вынуждена работать по теплофикационному графику. К особенностям топологии сети следует отнести характерные для схемы мегаполиса короткие линии электропередач. Стеснённые условия плотной городской застройки и высокая

стоимость земли представляют определённые сложности при строительстве новых энергетических объектов, что приводит к необходимости максимально эффективно их эксплуатировать. В режиме максимума электрических нагрузок существует необходимость так перераспределять перетоки мощности, чтобы обеспечить надёжное электроснабжение потребителей и не допустить перегрузок электрооборудования с последующим выходом его из строя.

В настоящем разделе показаны только новые постановки задач перераспределения мощностей, которые становятся доступными с использованием описанного выше подхода. Подробнее рассмотрены также весьма актуальные задачи, такие как минимизация потерь активной мощности и обеспечение уровней напряжения в сети. Задача минимизации потерь активной мощности ставилась как задача поиска наилучшего места подключения активно-адаптивного устройства. Рассматривалось два типа активно-адаптивных устройств: устройство продольной компенсации (УПК) и статический тиристорный компенсатор (СТК), включаемый параллельно нагрузке. Далее активно-адаптивное устройство последовательно переставлялось во все ветви (узлы) схемы и для каждого его положения выполнялась аппроксимация потерь. При заданных одинаковыми для всех сравниваемых режимов мощностях потребителей вычислялось значение параметра активно-адаптивного устройства, соответствующее минимуму потерь. Именно на этом этапе активно использовались теоретические результаты, рассмотренные в параграфе 3.6. Далее каждому положению активно-адаптивного устройства приписывалось соответствующее значение мощности потерь. Результаты этих расчетов для сетей 110-220 кВ приведены на рис. 3.47 – для УПК и рис. 3.48 – для СТК.

На рис. 3.47 (и всех последующих) по оси абсцисс отложены номера ветвей, в которых устанавливалось УПК (СТК). При этом номеру «1» соответствует узел, где эффект снижения потерь наибольший, номеру «2» – следующий за ним по эффективности и т. д.



Рис. 3.47. Зависимость минимальных потерь от места установки УПК



Рис. 3.48. Зависимость минимальных потерь от места установки СТК

Как можно видеть, установка УПК приводит к заметному снижению потерь только в 17 узлах. При этом наибольшее снижение потерь менее 1 % (0,5 МВт). При поперечной компенсации (установка СТК, рис. 3.48) число перспективных узлов еще меньше, однако снижение потерь составляет 7 % (4,5 МВт).

Близкой к задаче минимизации потерь является задача поиска места установки активно-адаптивного устройства, обеспечивающего наиболее широкий диапазон регулирования токов в ветвях ЭЭС. В качестве максимизируемой целевой функции f в наших расчетах рассматривалась функция

$$f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{(I_{k,\max} - I_{k,\min})^2}{I_{k,0}^2}}, \quad (3.45)$$

где $I_{k,0}$ – ток k -ой линии при отключённом УПК (СТК), $I_{k,\max}$, $I_{k,\min}$ – максимальное и минимальное значения токов k -ой линии. При определении $I_{k,\max}$ в обоих случаях учитывались допустимые токи оборудования и проводов. Результаты расчетов задачи поиска места установки активно-адаптивного устройства, обеспечивающего наиболее широкий диапазон регулирования токов в ветвях ЭЭС, представлены на рис. 3.49 и 3.50.

Суммарный диапазон регулирования токов в линиях при установке одного УПК

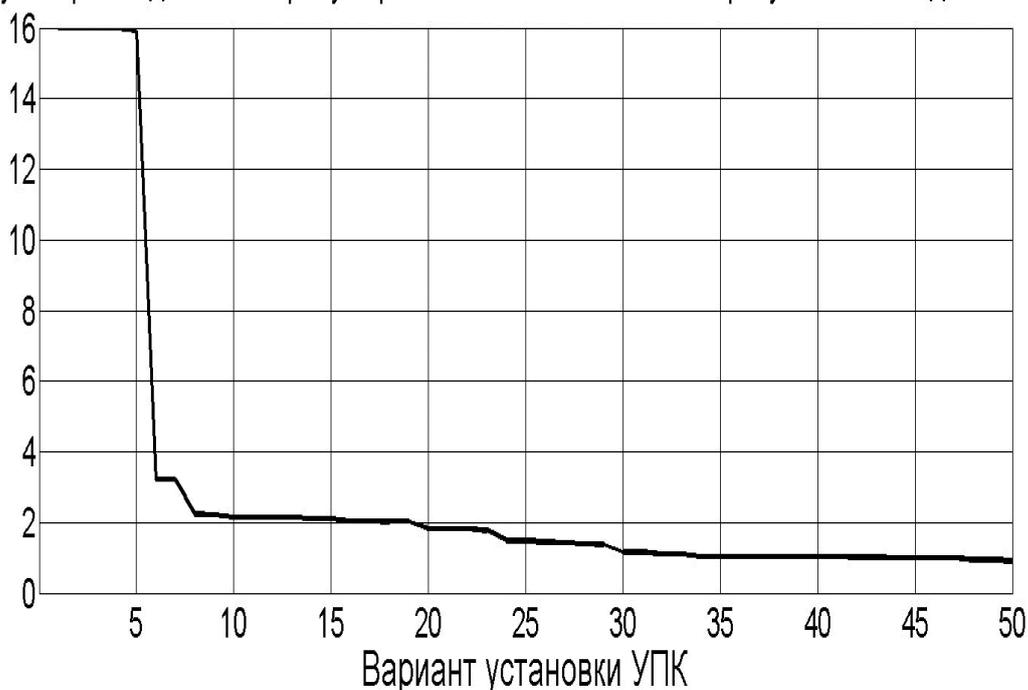


Рис. 3.49. Зависимость наибольшей ширины диапазона варьирования токов при установке УПК (в о.е. соответствии с (3.45))

Суммарный диапазон регулирования токов в линиях при установке одного СТК

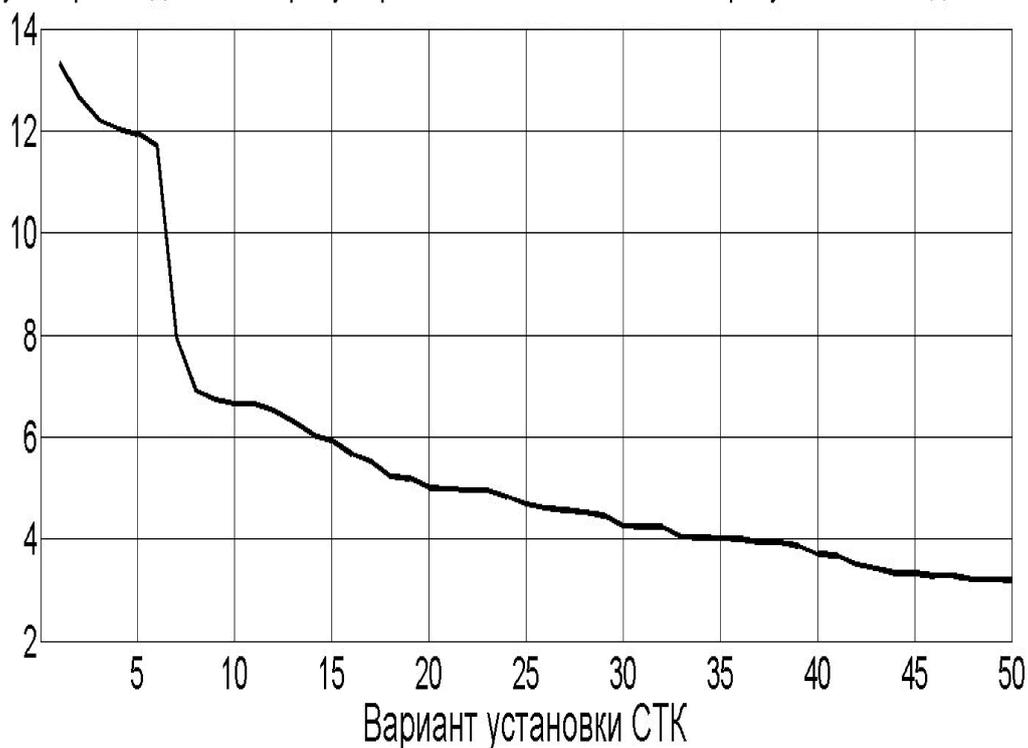


Рис. 3.50. Зависимость наибольшей ширины диапазона варьирования токов при установке СТК (в о.е. соответствии с (3.45))

Как следует из графиков, вариативность токов высокая, особенно при использовании СТК, установленных в узлах подключения мощной нагрузки, полностью компенсирующих её реактивную мощность.

Результаты решения задачи поиска места расположения активно-адаптивного устройства, осуществляющего наилучшее регулирование напряжения, приведены на рис. 3.51 и 3.52.

Максимизируемая функция для напряжений формируется в этом случае в соответствии с (3.45) с формальной заменой токов на напряжения. Как и следовало ожидать, ширина диапазона варьирования весьма незначительна и больше для СТК.

Метод анализа поведения ЭЭС при изменении ее параметров применен для оптимизации режима работы ЭЭС по одному критерию оптимальности. Как было показано, задачи оптимизации режимов в рассматриваемом подходе сводятся к достаточно простым задачам

минимизации дробно-полиномиальных функций. Это важное достоинство предложенного подхода позволит при дальнейшем его развитии ставить и решать задачи многокритериальной оптимизации. Одна из основных сложностей решения многокритериальных задач, связанная с большим объемом расчетов, необходимых для вычисления границ множества Парето [16], снимается при использовании предложенного подхода, так как при вычислении критериев оптимальности расчет режима ЭЭС не выполняется.

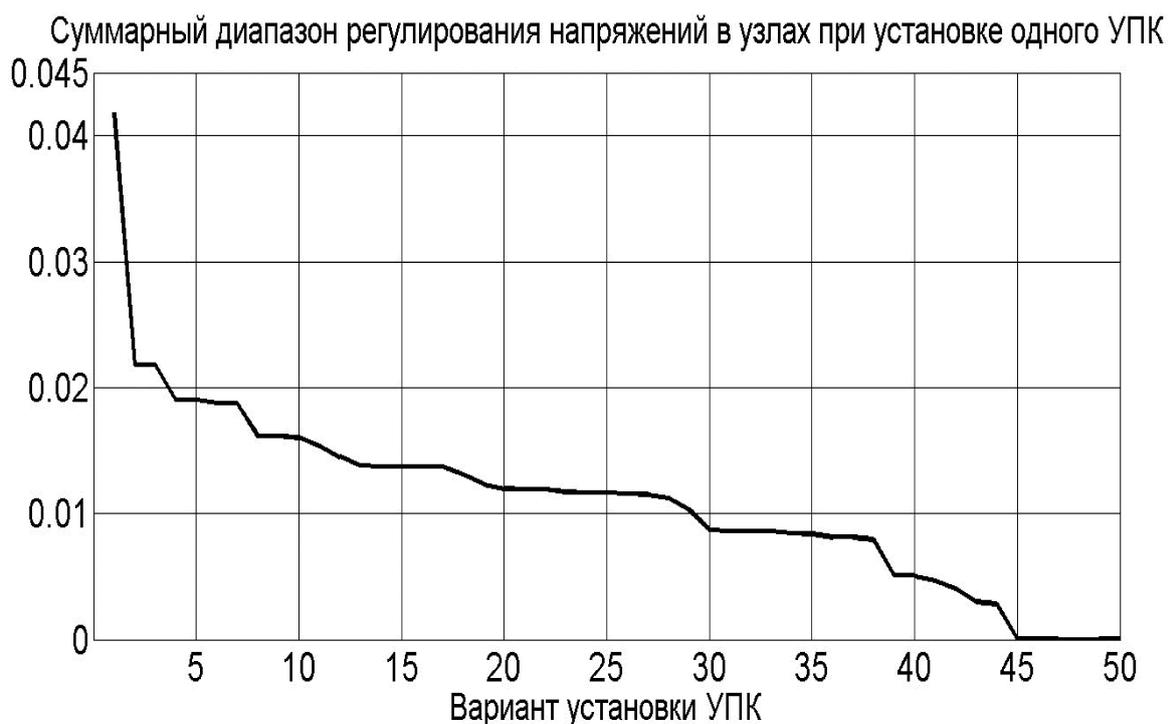


Рис. 3.51. Зависимость наибольшей ширины диапазона варьирования напряжений при установке УПК (в о.е. соответствии с (3.45))

Необходимо также отметить возможную перспективность предложенного подхода при решении задач наиболее быстрого восстановления работы ЭЭС после аварий. Эти задачи, многокритериальные по своей сути, должны решаться в весьма ограниченное время, что также, по нашему мнению, позволяет включать их в область перспективных для разрабатываемого подхода задач.



Рис. 3.52. Зависимость наибольшей ширины диапазона варьирования напряжений при установке СТК (в о.е. соответствии с (3.45))

Изложенное позволяет сделать следующие выводы. Билинейная теорема обосновывает дробно-полиномиальный вид связей между потоками мощности в энергосистеме и ее параметрами. Коэффициенты этих связей могут быть легко определены из немногочисленных расчетов режимов работы ЭЭС или из экспериментов. Относительно простые аналитические зависимости потоков мощности от параметров энергосистемы можно эффективно использовать для оптимизации режимов работы ЭЭС с активно-адаптивными устройствами.

Использование дробно-полиномиальных связей между потоками мощности (токами линий, напряжениями узлов) в ЭЭС и ее параметрами позволяет ставить и решать новые задачи оптимального управления работой ЭЭС. Для перспективной схемы ЭЭС Санкт-Петербурга, насчитывающей более тысячи ветвей, решены задачи поиска наилучшего расположения активно-адаптивного устройства при различных критериях оптимальности: минимум потерь в ЭЭС, наилучшая управляемость по току, наилучшая управляемость по напряжению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены основные постановки обратных задач электротехники и электроэнергетики, их особенности и проблемы, возникающие при их решении. Представлены современные подходы, позволяющие получить адекватное решение обратной задачи даже в условиях, когда цепь описывается жесткой системой дифференциальных уравнений (при описании во временной области) или системой алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей (в установившемся режиме). Рассмотрены важные для практики обратные задачи и представлены методы их решения.

Для решения обратной задачи идентификации параметров авторами разобраны два оригинальных метода: метод узловых сопротивлений (использующий узловой базис) и метод, основанный на контурном базисе, – метод контурных проводимостей.

В пособии показано, что погрешность идентификации быстро возрастает с ухудшением обусловленности математической модели цепи, и предложен оригинальный метод идентификации для этого случая, основанный на принципе квазистационарности производных. Погрешность идентификации этого метода практически не зависит от обусловленности математической модели цепи. Предлагаемое авторами применение принципа повторных измерений позволяет существенно повысить точность решения задач идентификации цепей постоянного и переменного тока при использовании, как метода узловых сопротивлений, так и метода контурных проводимостей.

Студенты, изучившие курс, изложенный в данном пособии, получат широкий спектр знаний в области обратных задач электротехники и электроэнергетики и овладеют навыками и методами решения актуальных практических обратных задач. К важнейшим из них относятся: задача синтеза схемы замещения длинной линии, задача параметрического синтеза оптимальной искусственной формирующей линии, задача расчета параметров схем замещения устройств по их час-

тотным характеристикам, задача оптимизации многожильного трехфазного кабеля на основе различных критериев оптимальности, задача поиска местоположения источников помех в электрической цепи, задача поиска оптимального местоположения активно-адаптивных устройств в электроэнергетической системе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Curtis E. B. Inverse Problems for Electrical Networks / E. B. Curtis and J. A. Morrow.* – Singapore, NY : World Scientific Publishing Co., 2000.
2. *Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт.* – М. : Мир, 1985.
3. *Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.* – М. : Наука, 1979.
4. *Ракитский Ю. В. Численные методы решения жестких задач / Ю. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий.* – М. : Наука, 1979.
5. *Ланнэ А. А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация / А. А. Ланнэ.* – Л. : ВАС. 1985. – 240 с.
6. *Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер.* – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004.
7. *Норенков И. П. Основы автоматизированного проектирования / И. П. Норенков.* – М. : Изд. МГТУ, 2000.
8. *Данилов Л. В. Ряды Вольтерра-Пикара в теории нелинейных электрических цепей / Л. В. Данилов.* – М. : Радио и связь, 1987.
9. *Демирчян К. С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей / К. С. Демирчян., П. А. Бутырин.* – М. : Высшая школа, 1988.
10. *Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева.* – СПб. : Лань, 2008. 736 с.
11. *Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. т.2 / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин.* – СПб. : Питер, 2007.
12. *Коровкин Н. В. Синтез формирующих линий с помощью генетического алгоритма / Н. В. Коровкин [и др.].* – Тезисы докладов 4-го Межд. Симп. по ЭМС и электромагнитной экологии. – СПб. : 2001. – С. 273-278.
13. *Кучинский Г. С. Мощные неоднородные формирующие линии высокого напряжения микро- и наносекундного диапазона / Г. С. Кучинский [и др.].* – Электричество. – 1999. – № 8.
14. *Коровкин Н. В. Использование генетического алгоритма для решения электротехнических задач / Н. В. Коровкин, А. А. Потиеенко.* – Электричество. – 2002. – № 11.

15. *Korovkin N. V. Inverse problems in electric circuits and electromagnetic / N. V. Korovkin, V. L. Chechurin, M. Hayakawa. – USA, Springer : 2006 – 331 p.*
16. *Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации в теории управления / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : Питер, 2004. – 256 с.*

Адалев Алексей Сергеевич, Коровкин Николай Владимирович,
Фролов Олег Валерьевич, Чудный Владимир Сергеевич

**СВОЙСТВА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ**

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать _____ 2011. Формат 60×84/16. Печать цифровая
Усл. печ. л. 13,75. Уч.-изд. л. 13,75. Тираж 100. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами
в цифровом типографском центре Издательства Политехнического
университета:

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел. (812) 540-40-14

Тел./факс: (812) 927-57-76