

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Инженерно-строительный институт

Работа допущена к защите
Заведующий кафедрой СМISK
_____ В.В.Лалин
« ___ » _____ 2019 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РЕДУЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ КОССЕРА

по направлению 08.04.01 Строительство

ООП 08.04.01_20 Технологии расчета, проектирования и реконструкции
промышленных и гражданских зданий и сооружений с использованием
современных программных комплексов

Выполнил:
студент гр. 23141/16

А.Е. Анисимов

Руководитель:
доцент кафедры СМISK ИСИ,
к.т.н., доцент

В.В. Куроедов

Научный консультант:
Старший преподаватель
кафедры СМISK ИСИ

Е.В. Зданчук

Консультант по
нормоконтролю:
доцент кафедры СМISK ИСИ,
к.т.н., доцент

В.А. Рыбаков

Санкт-Петербург
2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	7
1.1 Понятие сплошной среды	7
1.2 Обзор литературы	8
1.2.1 Исторический обзор	8
1.2.2 Обзор Современной литературы.....	15
1.2.2.1 Анализ отечественной литературы.....	15
1.2.2.2 Анализ зарубежной литературы.....	23
1.3 Постановка цели и задач диссертационного исследования	31
ГЛАВА 2. ВЕКТОР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ПОВОРОТА В ОБЪЕМЫ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА.....	32
2.1 Модель среды Коссера	32
2.2 Модель редуцированной среды Коссера	34
2.3 Постановка задачи	34
2.4 Решение исходных уравнений.....	35
2.5 Проверка достоверности результатов.....	41
2.6 Выводы по второй главе.....	42
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	43
3.1 Выделение вещественной части.....	43
3.2 Численный анализ полученных выражений	44
3.3 Применение результатов в образовательной деятельности	48
3.4 Применение результатов в строительстве.....	49
3.5 Выводы по третьей главе	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	50
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	52

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В современной науке все чаще задаются вопросами усовершенствования применяемых теорий, связанных с описанием напряженно-деформированного состояния материалов. Данная ситуация складывается из-за допущений, применяемых в физико-математических моделях в настоящее время. В виду данных факторов в 20 – 21 веке разрабатываются физико-математические модели материалов, которые отбрасывают допущения, предложенные в предыдущих работах. Современная наука предлагает использовать новые материалы в различных отраслях производственной деятельности человека, что приводит к потребности описания поведения данных материалов в зависимости от тех или иных внешних факторов (будь то силовые и не силовые факторы).

Актуальность проделанной работы направлена на описание взаимодействия как классических материалов, так и новых материалов, которые разрабатываются под определенные нужды с заранее определенными необходимыми параметрами, в различном масштабе и от различных внешних факторов. Модель редуцированной среды Коссера, которая рассматривает микроструктуру материала, в данных аспектах является интересной для исследователей в теоретическом и практическом ключе. Как было сказано ранее, с помощью данной физико-математической модели возможно проектирование материалов с заранее заданными характеристиками, описывать поведение хрупких и гранулированных материалов. Данная модель при достаточном ее исследовании может явиться отправным пунктом для будущих открытий.

Степень разработанности темы исследования. Классическая теория упругости, которая развивается с 17 века, рассматривает модели материалов, как идеализированные среды. В данной теории напряженно-деформированное состояние хорошо описывается напряженно-деформированное состояние материалов, которые используют в конструкциях (металл, бетон, древесина).

Однако, из-за микроструктуры материалов происходит расхождение результатов, полученных экспериментальным путем, в ходе рассмотрения распространения волн, а также колебательных процессов в массиве материала. Данный факт относится и к материалам, состоящим из отдельных частиц материала, то есть для сыпучих материалов.

В 1909 году после публикации труда братьев Коссера «Теория деформируемых тел», начала свое развитие механика обобщенных континуумов, учитывающая моментные напряжения в материале.

При рассмотрении среды Коссера с независимыми вращательными степенями свободы от перемещений и с нулевым тензором моментных напряжений имеет случай редуцированной среды Коссера, которую предложили использовать в 1984 году. Главным отличием редуцированного варианта среды Коссера является симметричность тензора напряжений при отсутствии динамических нагрузок, что делает данную модель неотличимой от классического варианта сплошной среды. Такая среда проще классического континуума Коссера в виду меньшего количества дополнительных констант, а также в виду отсутствия тензора моментных напряжений, что указывает на возможность применения данной теории на практике.

В настоящее время ведутся работы по изучению данной теории отечественными и зарубежными учеными.

Цель диссертационного исследования является изучение волновых процессов, а также их влияние на материал в рамках модели редуцированной среды Коссера от действия гармонических сил.

Задачи диссертационного исследования.

1. Вывод основных уравнений редуцированной среды Коссера в случае действия гармонической силы.
2. Вывести уравнение для нахождения вектора перемещения от действия гармонической силы.
3. Вывести уравнение для нахождения вектора угла поворота от действия гармонической силы.

4. Проверить достоверность полученных результатов.

Объектом диссертационного исследования является редуцированная среда Коссера.

Предметом диссертационного исследования является распространение волн в рамках редуцированной среды Коссера от действия гармонической силы.

Метод исследования данной работы – теоретический. При работе над диссертацией использовались уравнения Ламе для редуцированной среды Коссера, а так же математический аппарат.

Научная новизна работы заключается в том, что в рамках редуцированной среды Коссера найдены уравнения для вычисления вектора перемещения и угла поворота от действия сосредоточенной гармонической силы. Данная задача была решена для лишь в рамках классической теории упругости.

Практическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в повсеместном использовании сыпучих материалов в строительстве. Гранулированные материалы используются в качестве оснований зданий и сооружений, для создания искусственных земных поверхностей (намывные территории), для акустической маскировки сооружений, для звукоизоляции помещений, для теплоизоляции и так далее.

Теоретическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в развитии неклассических теорий, которые описывают материал и характер его работы. Данное исследование может послужить отправной точкой для новых работ в данной области.

На защиту выносятся полученные выражения для вычисления вектора перемещения и поворота в рамках редуцированной среды Коссера от действия гармонической силы в объеме сыпучего материала, а также достоверность данных выражений.

Достоверность полученных результатов доказывается исходя из свойств рассматриваемого Континуума, а также из результатов, полученных предшественниками.

Апробация результатов исследования.

1. Конференция «Механика жидкости, газов, материалов и конструкций в строительстве (25-27 апреля 2018 г.).
2. «Неделя науки 2018» в СПбПУ в рамках проведения научной конференции с международным участием (10-24 ноября 2018 г.).

Публикации по теме работы.

1. Лалин, В.В. Поверхность разрыва в анизотропной редуцированной среде Коссера. Теорема единственности для задач динамики с разрывами / В.В. Лалин, Е.В. Зданчук, А.Е. Анисимов // Прикладная механика и математика. (Статья подана на опубликование)

ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Понятие сплошной среды

Сплошная среда – физическое тело, в котором свойства точек, расположенных по соседству, практически одинаковые. Данное предположение указывает на то, что физические свойства и величины для тел при решении задач близки в соседних точках.

Виды сплошных сред:

1. Твердое тело.
2. Жидкость.
3. Газ.
4. Плазма.
5. Мягкое вещество.
6. Сыпучее тело.

Сплошная среда имеет бесконечное количество внутренних степеней свободы, однако с точки зрения математики необходимо учитывать, что все реальные тела обладают конечным числом степеней свободы, а модель сплошной среды имеет не исчислимое количество степеней свободы. Для описания сплошных сред используются поля физических величин (например: плотности; скорости и т. д.), а не отдельное описание частиц. В данном случае поле физической величины – это одна или несколько функций, которые описывают поведение точки пространства в каждый момент времени. Поле физических величин определяется усреднением свойств для всей модели.

Движение сплошной среды возможно представить в виде движения большого количества материальных точек. В данном случае за материальную точку принимается элементарный объем, содержащий частицу (все тело состоит из большого числа частиц с постоянным составом), которым можно возможно пренебречь (в виду малого размера).

Силовыми воздействиями, движением газообразных, жидких и деформируемых тел сплошной среды занимается механика сплошных сред.

Механика сплошных сред подразделяется на основные разделы:

1. Механика деформируемого твердого тела.
2. Гидромеханика.
3. Газовая динамика.

В свою очередь данные разделы подразделяются на подразделы (узкие области). Так, например, механика деформируемого твердого тела подразделяется на:

1. Теорию упругости.
2. Теорию пластичности.
3. Теорию трещин и т. д.

Теория упругости рассматривает и изучает деформацию упругих тел, при воздействии на них как статических, так и динамических внешних нагрузок. Основная цель теории упругости – определение деформаций и зависимость деформаций от времени при заданных внешних нагрузках.

Теория упругости используется в задачах инженерного дела и архитектуры, применяется при изучении и поиске новых материалов, в сейсмике. [1-11].

1.2 Обзор литературы

1.2.1 Исторический обзор

Краткая сводка по истории классической теории упругости.

Механика сплошных сред исследуется в течении нескольких веков. При ее изучении зародились: анализ, теория дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, а также много другое. При рассмотрении равновесия гибких нитей Я. Бернули (в 1694 г.) установил первое дифференциальное уравнение.

Первые уравнения с частными производными – уравнение поперечных колебаний струны Ж. Даламбера (в 1749 г.), уравнение движения идеальной

жидкости Л. Эйлера (в 1755 г.). После данных открытий ученые стали активно изучать твердые деформированные тела, на которые воздействуют внешние нагрузки. В 1771 г. Л. Эйлер вывел уравнения равновесия для тонких стержней.

Основываясь на корпускулярных представлениях Луи Анри Навье в 1821 году вводит уравнения равновесия изотропных упругих тел. В 1822 году О. Коши выводит основные уравнения теории упругости. Он рассматривает сплошную, напряженное состояние которой характеризуется силовым тензором (единственным).

Ж. Лагранж вводит тензор деформаций, в последствии Коши связывает тензор напряжений и деформаций, тем самым дает обобщение закона упругости М. Гука. Существенно дополнил теории упругости Д. Грин, чьи формулы связаны с энергией деформации.

В 1828 году Коши и в 1829 году Пуассон обратили свое внимание на вывод уравнений теории пластин на основе теории упругости. Сен-Венан отнесся с критикой к данной теории, он проявлял недоверие к сходимости разложений, которые использовали Коши и Пуассон. Хотя, точные доказательства данной теории отсутствуют, данный метод используют и в настоящее время. [12].

Краткая сводка по истории неклассической теории упругости.

В двадцатом столетии механика переживала всплески интереса и упадки. С ее помощью человечество достигло технического прогресса, но при этом остались определенные нюансы, связанные с описаниями микроструктуры материалов и их свойств. Для прояснения этих нюансов необходимо координальное улучшение существующих подходов к построению основных уравнений состояния, необходимых для описания сред и их свойств. Исходя из вышесказанного появляется необходимость описания объектов изучения не как материальную точку, а как многогранный объект с рядом свойств, определяющих микроструктуру тел, подверженных деформациям и их сопротивлению ей. В сравнении с прошлым веком

современные средства вычисления дают возможность получить численное решение задач механики, которые базируются на неклассических моделях сплошных сред. Методы Пуассона, Фойгтма, Кельвина указывают на наличие добавочных степеней свободы у структурных элементов таких как: вращательные и поступательные движения, а также на связанные с ними внутренние взаимодействия.

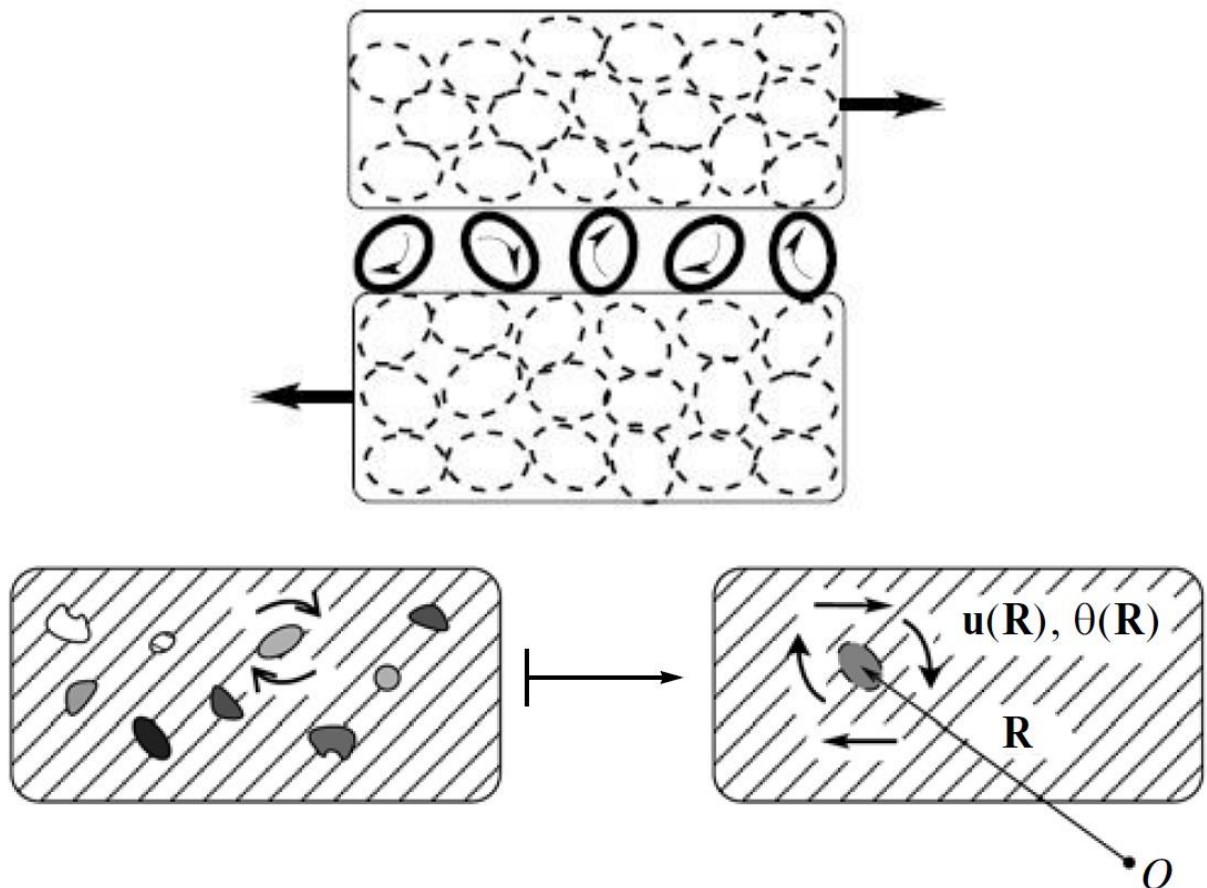


Рисунок 1.1 [68]. Описание движения частицы

Одна из таких моделей – модель среды Коссера. Данная модель основана на энергетическом подходе. Эта среда характеризуется наличием добавочной степенью свободы – вращательной степенью, а так моментным внутренним усилием, которые зависят от поверхностных и объемных усилий, имеющих моментное происхождение. Особенности модели, предложенной братьями Коссера являются характеристики твердого тела как вектором поворота, так и перемещением, а также присутствием тензора напряжения и тензора моментного напряжения, наличием тензора деформации, изгиба-кручения.

Принимая во внимание описанных особенностей, научное сообщество именуется теорию Коссера моментной теорией, а среду в данной теории – континуумом Коссера. Направления точек моментной теории определяются векторами (директориями). Данная среда – ориентированная среда, в связи с тем, что она реагирует на распределенные моментные воздействия, получила название микрополярной (моментной) среды. Также можно встретить название несимметричной теории (в виду несимметричности тензора напряжений).

Братья Коссера являются одними из первых исследователей, предложивших использовать строгий математический аппарат для моделирования микронеоднородных сред, их свойств и структуры.

После предположений Коссера их идеи не пользовались особым интересом в научном сообществе на протяжении сорока-пятидесяти лет, хотя небольшие группы ученых проявляли к ним интерес. Данная ситуация может быть объяснена тем, что общая направленность физики в то время приходилась на развитие тяжелой промышленности, а также на военные разработки.

Стоит отметить, что П. Нахди указывает на то, что Дюгмер еще в конце 19 века вводит понятие ориентированной среды, а первое систематическое развитие теории предложили братья Коссера. Несмотря на то, что появлялись новые модели сред, их практически не изучали в виду достаточности и достоверности результатов классических моделей.

В 1950-1960-ых годах интерес к модели среды Коссера и к исследованию других неклассических подходов механики сплошных сред возрастает. В это время исследователи рассматривают модели несимметричной упругости, их обобщения, распространение на неупругие среды. Происходит обобщение понятия ориентированной среды, которое предусматривает возможность произвольных удлинений и поворотов директоров.

Работы Миндлина [13-15] и Койтера [16] внесли большой вклад в развитие моментных теорий. В трудах дано решение задачи о

распространении волн, вибрациях, центров деформации и концентрации напряжений. Рассматривая работу Коссера [17], Миндлин [14] вывел теорию определения напряжений с учетом влияния градиента деформации, в которой вводятся дополнительные силовые характеристики, а именно моментные напряжения. Основные уравнения моментной теории получили Трусдел и Тупин [18]. Теория неопределенных моментных напряжений были выведены Миндлином [14] и Тупиным [19] при рассмотрении специального континуума Коссера. Триоли [20] и Тупин [21] для вывели уравнения для вычисления конечных деформаций идеально упругих материалов. Данные уравнения совпадают в линейном виде с уравнениями, которые получили в своих трудах Раджагопал [22] и Аэро с Кувшинским [23].

Эксперименты по изучению свойств акустики слоистых и композиционных материалов [24, 25] привели к повышенному интересу научных работников к процессам распространения волн в микрополярных средах. Вопросами волновой динамики задавались авторы [26, 27]. Новыцкий [28] пытался обобщить теорию упругости Коссера.

Особенности распространения продольных и сдвиговых волн в поврежденной среде с микроструктурой посвящена работа [29], для описания упругой среды в [30, 31] внутренняя энергия задавалась в виде потенциала Мясникова-Ляховского. Данная модель позволила описать стационарные волны – солитоны [32, 33], а также вывести основные параметры зависимости волн от поврежденности материала. Данные зависимости могут быть применены при разработке новых методов акустической диагностики повреждений материалов.

При исследовании волн в упругом теле необходимо учитывать поверхностные волны Релея [34]. Работа [35] посвящена исследованию поверхностных волн Релея в ряде динамических задач. Поиск решения плоской задачи о воздействии динамической нормальной нагрузки на упругое полупространство и исследование поведения поверхностных волн типа Релея с учетом моментных напряжений приведено в работе [36].

Развитие микроэлектроники, наук о материалах, нанотехнологий в технике, химической промышленности, биоинженерии в последние годы обуславливает интерес к неклассической механике сплошных сред не только в теоретическом рассмотрении, но и в отношении механических свойств.

Работы недавних лет уделяют внимание развитию теории микрополярных сред, сравнению новых моделей с уже известными. Появляется обобщенная теория стержней Коссера., рассматриваются методы построения и решения задач. Некоторые работы направлены на экспериментальное изучение неклассических свойств реальных материалов, на изготовление искусственных структур типа Коссера, в которых наперед задаются необходимые свойства.

В динамической модели среды Коссера уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_i = \sigma_{ji,j} + x_i \\ J \ddot{\varphi}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + y_i \end{cases} \quad 1.1$$

где, u_i – вектор перемещений;

u_i – вектор поворота;

σ_{ji} – тензор напряжений;

μ_{ji} – тензор моментов;

x_i – составляющая вектора массовых сил;

y_i – составляющая вектора массовых моментов;

ρ – плотность материала;

J – мера инерции при вращении;

ϵ_{ijk} – ассиметричный тензор Леви-Чивиты.

Уравнение для теплопроводности несимметричной теории упругости:

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{k} \dot{\theta} = \eta_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \operatorname{div}(\dot{u}); \quad 1.2$$

где θ – перепад температуры;

T_0 – температура естественного состояния;

η_0 – коэффициент вязкости;

k – константа, зависящая от коэффициента теплопроводности и от теплопроводности при постоянной деформации.

Данные уравнения образуют систему из семи уравнений, которые имеют 7 неизвестных (3 компоненты вектора перемещений и вектора поворота, а также температуру) [37].

Многие физические задачи сопровождается ряд проблем, осложняющих постановку задач, которые препятствуют получению точных аналитических решений. Данные проблемы возникают из-за особенностей задач или сложного математического аппарата решения. Примерами особенностей и сложностей являются некоторые нелинейности, встречающиеся в задачах, переменные коэффициенты, сложные формы границ, нелинейные граничные условия на контурах материала. При наличии данных особенностей и сложностей для решения уравнений прибегают к аппроксимации, численным методам решения задач, а так же к сочетанию этих двух методов.

Одними из наиболее применимых приближенных методов является асимптотические методы возмущений [38]. При использовании данных методов решение показывается несколькими первыми членами асимптотического разложения по малым параметрам. Работы [39, 40] посвящены математическим аппаратам и изучению применимости лучевого метода при аппроксимации решений для задач динамического характера, которые рассматривают различные среды.

Несмотря на существование классической модели среды Коссера, также имеет место быть промежуточный вариант среды, в котором моментных напряжений нет, а вектор вращательной степени свободы не имеет зависимости от вектора перемещений.

В работе [41] такие среды классифицируют как «безмоментные среды со свободным вращением». В работе [42] видим применение данной теории к трехмерным телам, также в ней вводится понятие «редуцированной среды Коссера». В основе работ [43-46] лежат исследования основных уравнений теории и анализ решаемых задач.

Примеры применения редуцированной среды в исследованиях приводятся в работах [42, 47], так трудах предложено использование теории для описания океанических отложений и осадочных пород, а так же для описания любой сыпучей среды.

Задачи редуцированной среды Коссера неотличимы от задач классической теории упругости при отсутствии динамических нагрузок. Отличие пропадает из-за перехода тензора напряжений в симметричный вид в задачах статики.

В [47] получены независимые уравнения для потенциальных и вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота. Показано, что динамические свойства вихревых составляющих векторов перемещений и углов поворота одинаковы. Исследовано влияние дополнительной упругой постоянной на свойства дисперсионной кривой для поперечных волн. Данная кривая указывает на запрещенную зону частот, в которой волна не распространяется, что является интересным результатом. Данная запрещенная зона частот зависит от дополнительной упругой постоянной, которая в данный момент не определена экспериментальным путем.

Различные факты, относящиеся к несимметричной теории, присутствуют в исследованиях Бравко Г. Л. и Ивановой О. А [48-54], Белоносова С. М. [55], Лурье С.А. [56-59], Ванина Г. А. [60], Якушиной С. И., Фроленковой Л. Ю. и Шоркина В.С. [61], Ломакина В. А. и Ильюшина А. А [62], Кроткинской М. Р. [63], Шоркина В. С., Фроленковой Л. Ю. и Азарова А. С. [64], Кроткиной М. Р. [65], Седова Л. И. [66], Кунина И. А. [67], Сабодаш П. Ф. и Филиппова И. Г. [68].

1.2.2 Обзор Современной литературы

1.2.2.1 Анализ отечественной литературы

Теме диссертации посвящено не мало работ отечественных инженеров, ученых и специалистов. Среди них можно отметить проанализированные работы.

В работе [68] исследуются как вращательные, так и трансляционные степени свободы, в которой энергия независимо от поворота тел., в рамках редуцированной модели. Следует принимать во внимание, что в редуцированной среде Коссера тензор моментных отсутствует (равен нулю), а тензор напряжений – несимметричен. Данная модель позволяет описать сыпучие материалы (среды) и грунты. В виду малой технической базы по изучению поворотных деформаций, в работе исследуется влияние на трансляционные перемещения вращательных степеней свободы, изучая шаровый тензор инерции и изотропию по отношению к вращательным степеням свободы. Привести аналог классической среды невозможно, если исследуемые материалы проявляют изотропность к деформациям поворота, материал имеет анизотропию между деформациями (поворотными и трансляционными). При игнорировании вращательных степеней свободы в случае наличия анизотропии следует, что факт нарушения принципов материальной объективности.

Если проигнорировать вращения, исследователь интерпретирует уравнения редуцированной среды Коссера с шаровым тензором инерции и упругими тензорами, как уравнения изотропной среды (упругой), зависящей от деформаций, произошедших ранее.

Данные суждения справедливы и для уравнений малых отклонений от изотропного напряженного состояния нелинейной изотропной редуцированной среды Коссера и для случаев линейной упругой редуцированной среды Коссера с изотропией по отношению к поворотным деформациям и отсутствием перевязки между ними и трансляционными деформациями. Принцип материальной объективности нарушается, если в такой среде есть перевязка и соответствующей неполярной среды не существует. [68].

Стоит отметить, что в задачах статики тензор напряжений в рамках редуцированной среды Коссера принимает симметричный вид, хотя при рассмотрении динамических задач тензор является несимметричным.

Вышесказанное указывает на неотличимость среды Коссера в рамках статических задач от классических теорий, где вращение частиц связано с перемещениями некоторыми зависимостями. Работа [47] предлагает рассматривать данную теорию для описания моделей любого сыпучего материала.

Авторы работы [47] изучают зависимость векторов перемещений и поворотов в зависимости от потенциальной и вихревой составляющей. Выявлен факт неизменности динамических свойств вихревых компонент для векторов перемещений и поворотов. Проанализирована зависимость упругой постоянной на дисперсную кривую поперечных волн.

Труд [69] рассматривает полупространство с независимыми векторами поворота и перемещений, тензором напряжений и моментов, которые являются несимметричными, применительно к упругим поверхностным волнам в рамках среды Коссера. Для решения разрешающих уравнений используется спектр Фурье произвольной формы. Решения имеют вид волновых пакетов, описывающих волны Релея и затухающую с глубиной поперечную волну. Интересно, что аналогичное решение имеется для волн Релея в рамках классических сред, что не актуально для затухающей поперечной волны. Для иллюстрации в численных значениях показано сравнение решений двух волн (поперечной волны и волны Релея).

Наиболее важный результат заключается в том, что в полупространстве, динамическое поведение которого объясняется моделью среды Коссера, появляются одна поперечная компонента перемещений, несмотря на то что присутствует и поверхностная эллиптическая волна Релея. При геометрическом рассмотрении, данная волна подобает волне Лява. В классической теории упругости наличие волны Лява определяется наличием полупространства, но при уменьшении толщины слоя волна Лява переходит в объемную волну. Это говорит о том, что в среде Коссера существует волна, аналогов которой в классической теории упругости не существует.

Побочный результат показывает, что имеет место быть частота, которая зависит от материальных параметров, а скорости распространения поперечной поверхностной волны и волны Релея в полупространстве совпадают. [69].

В труде [70] при рассмотрении решений для различных волн (поверхностных, поперечных поверхностных, объемных продольных и поперечных, Релея, Лява в тонком слое) и при анализе результатов используются уравнения среды Коссера и уравнения для описания плоских волн.

При анализе решений, полученных в ходе рассмотрения волн в среде Коссера, с волнами классической теории упругости сделаны следующие заключения.

При изучении волн в среде Коссера выявлен факт дисперсионных свойств данных волн, в отличие от классической среды, в которой волны дисперсией не обладают.

Выявлен факт продольной (горизонтальной) поляризации поверхностных волн, хотя данное явление в классической среде не наблюдается.

В отличие от классических упругих сред в среде Коссера волна Лява имеет дисперсию, включая множество волновых мод, а амплитуда зависима от глубины.

Данные заключения в будущем будут использованы в экспериментах (динамических) для определения моментных свойств упругих материалов. [70].

В исследовании [71] представляется, что в микрополярной среде имеет место стационарная упругая волна ротационного типа. Данная волна периодическая, скорость ее движения выше, чем скорость в классической среде, она имеет пилообразную форму, а также длина ее волны при росте амплитуды увеличивается.

При увеличении значения амплитуды длина волны увеличивается, а относительное значение волнового числа уменьшается. Выявлен факт того,

что чем больше значение максимально возможного относительного угла поворота, тем больше длина волны при фиксированном значении амплитуды. [71].

На основе уравнений динамики балочных упругих сред в работе [72] разработаны параллельные вычислительные алгоритмы для моделирования процесса распространения волн напряжений и деформаций в среде, состоящей из большого числа блоков, взаимодействующих через совместимые прослойки. Вычисления волн, вызванные локализованными импульсными возмущениями, показывают, что такую среду можно рассматривать как изотропную только в случае достаточно тонких прослоек. В случае относительно толстых прослоек наблюдаются эффекты анизотропии, который состоит в появлении продольных фронтов волны вдоль направлений координат и характерных колебаний скоростей и напряжений из-за вращательного движения блоков. Для описания волн в блочной среде с тонкими прослойками применимы уравнения изотропного континуума Коссера. По мере увеличения толщины прослоек может быть применена ортотропная теория континуума двух стрессов, учитывающая симметрию упругих свойств относительно координатных плоскостей. Сравнивая скорости упругих волн в рамках блочной модели и модели континуума, коэффициенты соответствия материала в специальных схемах квазистатической деформации с равномерным вращением блока и с образованием внутренней кривизны из-за неоднородного вращения, получаются простые формулы для оценки механических параметров ортотропного континуума Коссера, моделирующего блочную среду.

Для численного исследования процессов распространения упругих волн в блочных средах с податливыми прослойками разработан параллельный вычислительный алгоритм и компьютерная программа, ориентированная на многопроцессорные системы кластерной архитектуры. Расчеты волн, вызываемых локализованными импульсными воздействиями, показали, что блочную среду можно считать изотропной только в случае достаточно тонких

прослойки. В блочной среде с относительно толстыми прослойками наблюдаются эффекты анизотропии, которые заключаются в появлении вытянутых вдоль координатных направлений волновых фронтов и периодических колебаний вследствие вращательного движения блоков. Для моделирования упругих волн в многоблочной среде применима теория ортотропного моментного континуума, учитывающая независимые вращения блоков и вызванные этими вращениями моментные напряжения. Значения механических параметров моментного континуума получены на основе сопоставления скоростей распространения упругих волн и коэффициентов податливости материала в специальных схемах квазистатического деформирования. [72].

Работа [73] посвящена волнам в несимметричной теории упругости, в котором независимыми векторами перемещений и поворотов характеризуются деформационное состояние среды. Волна Релея рассматривается в редуцированной среде Коссера (в полупространстве). Сравниваются решения для редуцированной, полной среды Коссера и классической теорией упругости. Выявлена зона запрещающих частот, в которых среда волна не может существовать (распространяться).

Решено и изучено решение задач о распространении поверхностной волны Релея в редуцированной среде Коссера. Выявлены различия в полученных решениях для редуцированной, полной среды Коссера и классической теорией упругости. [73].

В работе [74] выводятся системы уравнений для разрешения нелинейной термоупругой среды Коссера. Вводятся допущения о конечной температуре и о малости перемещений, вращений, что позволяет учитывать лишь нелинейности, вызванные изменением температуры. Показано, что гиперболическое увеличение теплопроводности связано с временем распространения тепловых возмущений (согласно обобщенному закону Фурье). [74].

В работе [75] проводится изучение волн в среде Коссера, которые характеризуются векторами перемещения и поворота. В задачах фигурируют объемные волны, как поперечные, так и продольные. При рассмотрении трех компонент векторов перемещений и поворота исходная система координат разделяется на две, одна описывает продольную волну, другая – поперечную.

Основной результат заключается в интерпретации параметров, которые необходимы для решения задач о поверхностных волнах. Показано, что поперечная волна имеет четыре моды, в отличие от классической теории. [75].

В труде [76] рассматривается среда Коссера со стесненным вращением. В работе представлен переход от нелинейных уравнений к эволюционным уравнениям, описывающих динамику среды. Данные эволюционные уравнения состоят из четырех нелинейных уравнений в частных производных. Два уравнения – уравнения Бюргерса, а два других – Кортевега-де Вриза. В работе прибегают к численным и аналитическим исследованиям эволюции вязкоупругих волн. [76].

Основные цели работы [77] – разработать и реализовать алгоритмы для расчета, связанного с задачами динамики моментной теории упругости, опираясь на многопроцессорные вычислительные системы.

Полученные данные достоверны и обоснованы в виду использования строгих математических методов, применения компьютерного моделирования, что дает точное аналитическое решение.

В работе выявлено существование резонансных частот в ходе рассмотрения пространственной задачи в рамках среды Коссера, а так же выполнено моделирование такой задачи, используя многопроцессорные вычислительные системы.

С практической точки зрения ценность исследования заключается в создании системы прикладных программ, которые могут быть применены при численном исследовании волновых процессов в моментных средах с микроструктурой, рассматривающих задачи акустики и сейсмологии. [77].

Цель работы [78] – комплексное исследование волновых процессов в твердых телах, имеющих микроструктуру. Исследуются закономерности распространения разрывов, динамические характеристики различных типов волн, влияние микровращений на параметры волнового движения, ударно-волновые процессы, которые происходят при деформации твердого тела. В работе исследуется проникновение ударного импульса в микрополярном упругом полупространстве.

В работе решено множество задач, связанных с волновыми процессами в микрополярных средах.

Достоверность результатов исследований обоснована на классических подходах, численных и асимптотических решениях, строгостью математических приемов, непротиворечивостью численных экспериментов и аналитических выводов.

Результаты работы могут использоваться как исходные данные для проведения экспериментов, с помощью которых можно определить дефекты горных пород, части видов аморфных тел, а также керамики, с использованием волновой диагностики.

В работе [79] изучается один из видов несимметричной теории упругости, а именно псевдоконтинуум Коссера со сферическими границами. В диссертации произведена постановка и построение решений двумерных задач, которые рассматривают распространение нестационарных осесимметричных граничных возмущений в упругой псевдосреде Коссера.

В ходе исследования получено решение нестационарных осесимметричных задач, выявлено влияние возмущений различного типа на напряженно-деформированное состояния среды, получено решение задач о дифракции волн расширения на сферической плоскости применительно к псевдосреде Коссера, получена методика, позволяющая определять коэффициенты рядов Лапласа, Лежандра, Лорана. Также изучен предельный переход полученных решений к классической теории упругости. [79].

В работе [80] найдено решение для прочностных расчетов конструкций, подверженных ударному воздействию. Некоторые особенности усиления локализованных волн можно применять в сейсмологии. С помощью аппарата вывода нелинейных уравнений можно решить многие задачи математики и теоретической физики.

В ходе работы над работой [80] разработан для нелинейных волн новый вывод уравнений (учитывая граничные условия), показана возможность применения новых уравнений при рассмотрении волн деформации пластин и стержней, описаны условия, при которых осуществляется усиление уединенных волн деформаций.

В работе [81] исследуется алгебраический анализ конечностей степенного голоморфного разложения, применимый для решения комплексифицированных систем линейных дифференциальных уравнений в математической физике, а также в теории упругости.

В работе рассматривается моментная теория упругости Коссера, в которой голоморфное разложение бесконечно. Используя теорию функций двух комплексных переменных, выводится решение общих трехмерных задач, рассматривающих микрополярную среду Коссера. В ходе исследования для голоморфных разложений решений систем линейных дифференциальных уравнений с наличием постоянных коэффициентов математической физики проведен аналитический анализ, в виде голоморфных приближений получено решение уравнений трехмерной моментной теории упругости Коссера (случай статики), получены частные решения для задач моментной теории Коссера, приведена оценка точности и сравнительный анализ краевых задач моментной теории упругости Коссера. [81].

1.2.2.2 Анализ зарубежной литературы

Как и отечественные так и зарубежные инженеры, ученые и специалисты ведут исследования, связанные с темой диссертации. Анализ некоторых зарубежных работы представлен ниже.

Настоящая работа [82] дает явные решения для распространения поверхностных волн в однородном полупространстве, которое заполнено изотропным эластичным материалом типа Коссера. Данные решения важны при изучении сейсмических волн во время землетрясений, предполагая, что грунт моделируется как материал с микроструктурой. Для построения явных выражений возможных поверхностных волн ниже возмущения, используется предположение Строха. Далее полученные решения используются для изучения волны Релея и для получения явных уравнений скорости распространения поверхностной волны Рэлея. В работе представлены численные расчеты и графики для алюминиевой дроби в эпоксидной матрице.

В работе получены точные аналитические решения, а следовательно, ошибки, которые могут появиться в ходе расчета малы. В сравнении с другими исследованиями, полученное уравнение не связано с сложными ослабляющими коэффициентами. Авторы статьи считают, что выведенная формула будет использоваться и в дальнейших исследованиях. [82]

На основе уравнений динамики блочнооднородного упругого материала в работе [83] разработаны параллельные вычислительные алгоритмы для моделирования процесса напряжений и деформаций распространения волн в среде, состоящей из большого числа блоков, взаимодействующих через совместные прослойки. Расчеты волн, вызванных локализованными импульсными возмущениями, показывают, что такую среду можно считать изотропной только в случае достаточно тонких прослоек. В случае относительно толстых прослоек наблюдаются эффекты анизотропии, которые выражаются в появлении продолговатых фронтов волны вдоль направлений координат и характерных колебаний скоростей и напряжений из-за вращательного движения блоков. Для описания волн в блочной среде с тонкими прослойками используются уравнения изотропного континуума Коссера. Сравнивая скорости упругих волн в рамках блочнооднородной модели и модели континуума для оценки механических параметров ортотропного континуума Коссера, моделирующую блочную среду.в

двумерном пространстве ортотропной модели, разработаны вычислительные алгоритмы и программа для анализа распространения упругих волн. Сравнение показало схожесть результатов между вычислениями свойств волн, вызванных локализованными импульсом в рамках модели блочной среды с совместимыми прослойками и в рамках модели ортотропного континуума Коссера. [83].

В работе [84] представлена новая волновая теория тонкостенных балок открытого профиля с микроструктурой типа Коссера. Теория базируется на основе подхода, предложенного Россихиным и Шитиковой для предварительно напряженных пространственноизогнутых тонкостенных балок открытого профиля. Целью авторов является создание теории распространения преходящих волн (поверхностей сильного разрыва) в тонкостенных балках открытого профиля, которая должна сильно отличаться от теорий, подобных Тимошенко, в результате чего данные, сопоставлений соответствуют распространению переходных волн в трехмерном континууме Коссера.

Новая теория тонкостенных балок с микроструктурой Коссера была предложена на основе подхода, предложенном авторами в работе для предварительно напряженной пространственно изогнутой упругой балки открытого профиля. Достигнуто сопоставление новой теории и теории Тимошенко. Разработанный подход заключается в том, что найденные скорости волн зависят лишь от материальных констант материала и не зависят от дополнительных коэффициентов, связанных с геометрией тонких тел. Полученные данные дают возможность решать граничные задачи динамики, связанные с нестационарными возбуждениями в тонкостенных телах (удары, скоростные и силовые возбуждения). [84].

Работа [85] является введением в вариационную формулировку балок Коссера. Она дает подробный вывод и обработку приведенных законов баланса балок Коссера из Лагранжева дифференциального уравнения движения и принципа Гамильтона. Особое внимание уделяется деталям

выводов, сохраняя при этом предположение Бернулли о жестком поперечном сечении. Как сильная форма, так и слабая форма уравнения равновесия для балок Коссера генерируются независимо от уравнений равновесия для бесконечно малых напряжений. Слабую форму проверяют, получая ее из сильной формы приведенного закона в чисто аналитически. Сильная форма получается по принципу Гамильтона. После того, как получены уравнения с учетом конфигурации первоначально прямой опорной балки, выводятся уравнение баланса для балки изначально изогнутой (но недеформированной). Силы Д'Аламбера интерпретируются из справочной системы и выводов неинерциального директората. Установлены закон сохранения энергии и связанные с ним условия, устанавливающие связь между Лагранжианом и Гамильтоновым функционалом для балок Коссера. [85].

В рамках теории континуума Коссера в ходе работы над [86] разработана процедура масштабирования для оценки прочности в плоскости дискретных сред. Эта процедура является продолжением континуума Коссера, первоначально сформулированного для континуума Коши, на основе кинематического подхода предельного анализа и классической теории гомогенизации. Расширение континуума Коссера производится для того, чтобы учесть влияние вращения частиц на прочность дискретной среды. Процедура проиллюстрирована в отношении периодических сборок блоков при контакте, а затем обобщается на весь класс дискретных периодических сред с частицами аналогичного типа. Случай кладки рассматривается как приложение к исследованию. Критерии прочности колонн и стен сформулированы в тензорах несимметричных напряжений и плоских пар. Данная процедура позволяет показать, как уменьшается плотность среды в результате вращения частиц. [86].

В работе [87] представлен новый метод механического моделирования тонких, упругих, пространственных стержней и стержневых систем, подверженных большим деформациям и вращению. Разрабатывается метод изометрического расположения для геометрически точной нелинейной

теории стержней Коссера. Осевые линии стержня представлены в виде пространственных кривых NURBS, а ориентации поперечного сечения параметризуются как четырехмерные кривые NURBS. В изогометрической структуре сильные формы равновесных уравнений для сил и моментов дискретизированной модели Коссера сгруппированы так, что приводят к эффективному методу дискретизации более высокого порядка. Для стержневых систем, состоящих из нескольких, соединенных стержней, вводится формулировка квазивязкости. Она основана на сильном обеспечении непрерывности перемещения и изменении ориентации поперечного сечения на интерфейсах. Также разрабатывается смешанная изогометрическая формула, основанная на независимой дискретизации внутренних сил и моментов, облегчающая блокировку сдвига для тонких стержней. Методы моделирования новых стержней подтверждены численными исследованиями сходимости. Дальнейшие вычислительные примеры включают реалистичные приложения с большими деформациями и вращениями, а также крупномасштабную структуру стержня с несколькими сотнями связанных стержней и сложным изгибом. [87].

Материалы с отрицательными модулями упругости рассматриваются в работе [88]. Они могут быть неустойчивы, а также могут быть стабилизированы конкретными граничными условиями. В твердых материалах при сжатии вращающиеся несферические частицы создают эффект отрицательного модуля сдвига Коссера. В работе рассматривается распространение волн в таких материалах, демонстрируется, что при положительной сумме отрицательного модуля сдвига Коссера и обычного модуля сдвига, волны могут распространяться. В обычном изотропном континууме Коссера вращающаяся волна и одна из сдвиговых волн существуют только на частотах выше порога. Когда модуль сдвига Коссера отрицателен, все волны существуют на всех частотах; наблюдаются завихренные и сдвиговые волны, можно обнаружить и исследовать отрицательные модули.

Материалы с отрицательными модулями, нарушающими второй закон термодинамики, в некоторых случаях могут быть стабилизированы граничными условиями или более общими, включив их в охватывающую систему, так что полная энергия будет положительной. В частности, при распространении плоских волн в «бесконечном» изотропном континууме Коссера (т.е. волны с длиной волны намного меньше размеров рассматриваемого материала) модуль сдвига Коссера (модуль, связанный с несимметричной частью сдвигового напряжения и внутренними вращениями) может принимать отрицательные значения, пока его значение не превышает значение стандартного (положительного) модуля сдвига. В этом случае континуум по-прежнему поддерживает плоские волны. [88].

Модели континуума Коссера доказали, что способны охарактеризовывать микроструктурные эффекты в гранулированных материалах. В рассматриваемой работе [89] изучается модальность определения микроструктурных эффектов, связанных с параметрами модели Коссера. Плоские испытания сдвига Куэтта рассматриваются с конкретной гипопластической моделью континуума Коссера, которая состоит из двух неопределенных параметров. Разработка образца для деформации в плоском испытании сдвига Куэтта подразделяется на три этапа. Представлен аналитический вариант для начального отклика, который характеризует реакцию образца на небольшой сдвиг деформации. Численные результаты представлены для испытаний на сдвиг при конечной деформации, которая демонстрирует развитие локализованной зоны в образце. Наконец, выведено управляющее уравнение и получено решение для устойчивого состояния грунта в развитой полосе сдвига. Данные результаты обеспечивают метод оценки параметров прочности, которые связаны с микродеформацией, в модели, предложенной Коссера.

Рассматривая модель Коссера для конкретного случая гипопластики, был проанализирован сыпучий материал на предмет плоского сдвига Куэтта. Модель, заданная как расширение классической модели континуума, состоит

из трех дополнительные параметры, связанные с микродеформацией, два из которых должны быть определены. Благодаря численному моделированию, а также наращиванию деформаций рассматриваемых тел в плоскости, при тесте на сдвиг Куэтта аналитически получены решения для начального состояния перед и после сдвига. [89].

Проведено сравнение между двумерными упругими дискретными решетками и соответствующим континуумом Коссера. Во-первых, показано, как уравнения движения модели Коссера могут быть извлечены из уравнений решетчатой модели. Для этой цели разрабатываются две геометрии решетки: гексагональная решетка с 7 ячейками и квадратная решетка из 9 ячеек. Для обеих решеток отдельные клетки имеют два трансляционных пружинных взаимодействия и вращательное пружинное взаимодействие с соседними клетками. Во-вторых, рассматриваются дисперсионные соотношения для моделей решетки и модели континуума Коссера, чтобы определить, до какой длины волны поля деформации существуют, модель Коссера точно представляет лежащую в основе дискретную микроструктуру. Рассматривается влияние анизотропии решетки и ее неоднородность на эту точность определения.

В работе [90] изотропная модель континуума Коссера была сравнена с двумя разными дискретными моделями, которые представляют собой 7-элементную гексагональную решетку и 9-клеточную квадратную решетку. Цель этого сравнения должна - исследовать, до какого уровня деформации модель Коссера точно представляет спецификацию, лежащую в основе дискретной микроструктуры. Благодаря анализу дисперсионных кривых было продемонстрировано, что модель Коссера дает точные результаты для деформационных полей с длиной волны, превышающей примерно шестикратную микроструктуру расстояний ячейки d . Для более коротких длин волн (сильные) отклонения возникают в результате увеличения неоднородности и анизотропии, которые вызваны дискретностью микроструктуры. Было показано, что геометрия структуры дискретной

решетки сильно определяет формат взаимосвязи между свойствами микромасштаба и макромасштабными свойствами, а также между анизотропией и неоднородностью в коротковолновой связи. Хотя модель Коссера дает нереалистичные результаты в области коротких длин волн, управляющие уравнения оказываются гораздо менее вовлеченными, чем уравнения, соответствующие решетчатой модели. Поэтому для краевых задач, в которых длины волн, в несколько раз превышающие размер частиц, не играют роли. Модель Коссера может быть более приемлемым инструментом анализа, в сравнении с моделью дискретной решетки.[90].

В труде [91] модель Коссера разработана в нелинейной форме для описания появления более низких частот в спектрах сейсмических волн. Как и в теории жидких кристаллов Эриксона, упругие и вязкие реологические элементы объединяются, чтобы получить адекватные результаты. Трансляционные степени свободы описываются линейной упругостью, но вращательные кинематически независимые движения определяются нелинейным упругим потенциалом и линейной вязкостью.

Динамика линейных возмущений показывает, что продольные сдвиги и вращения полностью независят от других движений. Эти вращения представляют собой локальные колебания из-за существования потенциала, а также не распространяются. Однако линейные поперечные сдвиги и микровращения связаны. Показано, что они описывают сейсмические и акустические волны.

В нелинейном случае эти движения демонстрируют некоторые новые интересные явления. Например, если рассматривать распространение гармонической упругой волны, то микровращения ведут себя как нелинейные осцилляторы, возбуждаемые внешней гармонической силой. Таким образом, система производит те же эффекты, что и полученные недавно для уравнения типа Даффинга с помощью теории аттракторов. Это означает, что начальная гармоническая волна генерирует вторичные волны с более низкими частотами. Эти вторичные частоты обычно соизмеримы с исходными.

Численные результаты показывают, что явление все еще имеет место, если начальная волна состоит из непрерывно распределенных гармоник.[91].

1.3 Постановка цели и задач диссертационного исследования

Объектом исследования данной работы является редуцированная среда Коссера, а предметом – распространение волн в данной среде. Анализ работ нынешнего и прошлого столетия дает понять, что исследователи обращают свое внимание в основном на теоретическое изучение темы в рамках моделей сред Коссера. Этот факт подтверждает малое количество экспериментальных трудов в данной теме. Материал работы актуален в виду технической возможности моделирования сложных сред с микроструктурой, учитывающих вращательные степени свободы частиц, что позволит в свою очередь создавать новые материалы с заданными свойствами, что столь необходимо в развивающейся технике и науке. В работе запланировано вывести уравнения для определения значений перемещения и угла поворота частиц от действия сосредоточенной гармонической силы. В виду вышесказанного цель работы:

- Аналитическим путем вывести уравнения, которые позволят вычислить вектор перемещения и угла поворота частиц от внешнего заданного воздействия.
- Проверить достоверность полученных результатов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить физико-математическую модель редуцированной среды Коссера.
2. Рассмотреть ранее полученные результаты в рамках моментных континуумов и в рамках классической теории упругости.
3. Аналитическим путем вывести необходимые уравнения.
4. Проверить достоверность полученных результатов, опираясь на опыт предыдущих работ.

ГЛАВА 2. ВЕКТОР ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ПОВОРОТА В ОБЪЕМЫ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

2.1 Модель среды Коссера

При рассмотрении среды Коссера абсолютно твердым телом является каждая микрочастица, составляющая объем материала. В данной среде учитывается ориентация частицы, изменение центра ее тяжести. В связи с тем, что каждая частица объема материала представляет собой не материальную точку, а самостоятельное тело, расстояние между телами которых сравнимо с расстояниями между телами, они характеризуются системой сил, действующих на каждую частицу. Чтобы реализовать данное предположение, следует ввести результирующий момент в дополнение к равнодействующей силе.

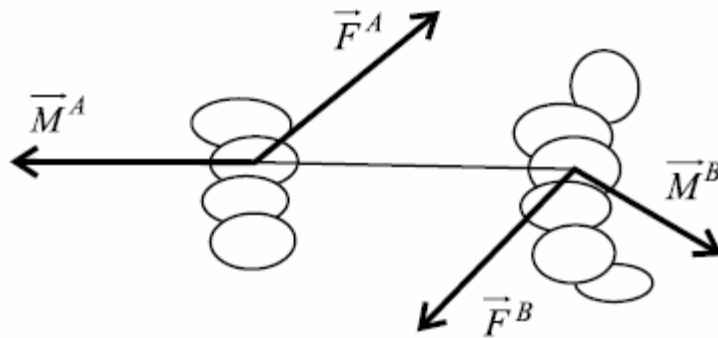


Рисунок 2.1 [37]. Взаимодействие тел (частиц) в рамках модели среды Коссера.

Влияние частиц А и В друг на друга следует определять с введением нецентральных сил F_i^A и F_i^B (местами приложения сил можно считать центры инерции) и моментных составляющих M_i^A и M_i^B . В связи с такими допущениями в рамках континуума учитывается вращение частиц, моментные. Модель материала характеризуется так, чтобы передача нагрузки через бесконечно малую поверхность dS описывалась не только главным вектором сил pdS , но и главным моментом mdS , называют средой Коссера, а в литературе за теорией закрепилось название несимметричной (неклассической) теории упругости [92].

При выводе тензоров напряжений и моментных напряжений используется классический метод с тетраэдром (ограниченным ортогонально).

Уравнения равновесия на поверхностях граней тетраэдра имеют вид:

$$p_i = \sigma_{ji} \cdot n_j;$$

$$p_i = \mu_{ji} \cdot n_j.$$

Тензор σ и тензор μ несимметричны. Тензор μ – характеристика напряженного состояния материала, что зависит от моментного тензора упругости.

Уравнения равновесия в объеме тела имеют вид:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0; \quad 2.1$$

$$\epsilon_{ijk} \cdot \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0; \quad 2.2$$

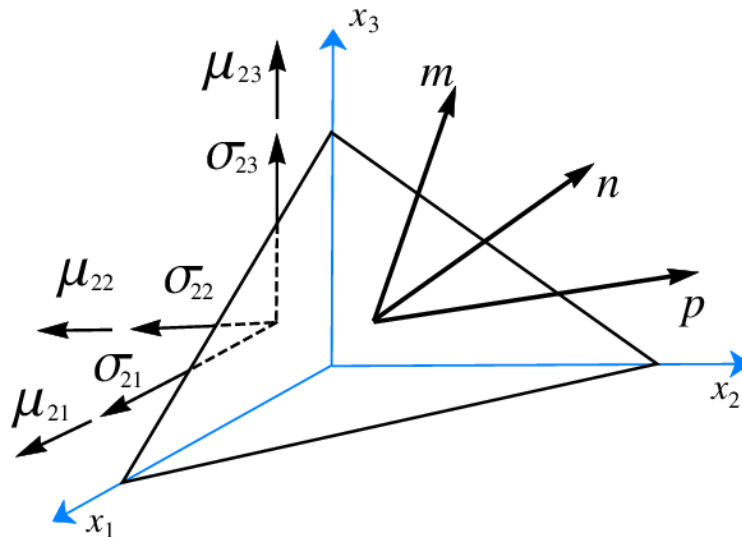


Рисунок 2.2 [92]. Вектор напряжений и вектор напряженного состояния, характеризующий тензор моментных напряжений.

Разрешающие уравнения для изотропных однородных и центрально-симметричных материалов имеют вид:

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha)\epsilon_{ji} + (\mu - \alpha)\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}; \quad 2.3$$

$$\mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon)\chi_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij}. \quad 2.4$$

Где λ и μ – постоянные константы Ламе;

$\alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ – физические постоянные материала несимметричной теории упругости в рамках полной классической среды Коссера [92].

2.2 Модель редуцированной среды Коссера

При рассмотрении среды Коссера с независимыми вращательными степенями свободы от перемещений и с нулевым тензором моментных напряжений имеет случай редуцированной среды Коссера. Главным отличием редуцированного варианта среды Коссера является симметричность тензора напряжений при отсутствии динамических нагрузок, что делает данную модель неотличимой от классического варианта сплошной среды.

Основные уравнения движения имеют вид:

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{X} = \rho \dot{\mathbf{u}}; \quad 2.5$$

$$2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad 2.6$$

Где μ и λ – постоянные коэффициенты Ламе;

\mathbf{u} – вектор перемещения;

$\boldsymbol{\theta}$ – вектор вращения;

\mathbf{X} – вектор удельной плотности объемных сил;

ρ – плотность;

α – физическая постоянная материала в рамках редуцированной среды Коссера;

\mathbf{Y} – вектор удельной плотности объемных моментов;

j – плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении)

[44].

2.3 Постановка задачи

При действии на неограниченный объем материала объемных сосредоточенных сил необходимо иметь решения динамических уравнений, чтобы охарактеризовать волновые процессы, а также процессы движения частиц и всего материала.

Для аналитического вывода уравнений, которые позволят вычислить вектор перемещения и угла поворота, зададимся исходными данными:

1. Прикладываемая сила – единичная.
2. Прикладываемая сила – гармоническая (амплитудное значение равно единице).
3. Точка приложения силы находится в начале координат.
4. Прикладываемая сила направлена вдоль одной из осей координат.
5. Круговая частота гармонических колебаний – ω .

Для вычисления вектора перемещения и поворота решим неоднородные уравнения Ламе, используя исходные данные. Запишем данные уравнения (2.7) и (2.8):

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\mathbf{u} - (\mu + \alpha)\text{rotrot}\mathbf{u} + 2\alpha\text{rot}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{e}\delta(\mathbf{r}_N, \mathbf{r}_{N_0})e^{-i\omega t} = (2.7)$$

$$= \rho\ddot{\mathbf{u}};$$

$$2\alpha\text{rot}\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\varphi} = J\ddot{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (2.8)$$

2.4 Решение исходных уравнений.

Приведем вектор перемещения и угла поворота в соответствие с видом неоднородного члена уравнений (2.7) и (2.8). Векторы перемещения и поворота будут вектор-функциями координат, умноженными на $e^{-i\omega t}$ и иметь вид:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{U}}e^{-i\omega t}. \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}e^{-i\omega t}. \quad (2.10)$$

В свою очередь, вторые производные вектора поворота и вектор перемещения имеют вид:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \omega^2\tilde{\mathbf{U}}. \quad (2.11)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \omega^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (2.12)$$

В соответствии с (2.9-2.12) преобразуем уравнения (2.7) и (2.8), подставив \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ в соответствии с видом неоднородного члена. Уравнения принимают вид:

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\tilde{\mathbf{U}} - (\mu + \alpha)\text{rotrot}\tilde{\mathbf{U}} + 2\alpha\text{rot}\tilde{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{e}\delta(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{U}} =$$

$$= 0; \quad (2.13)$$

$$2\alpha\text{rot}\tilde{\mathbf{U}} - 4\alpha\tilde{\boldsymbol{\varphi}} + J\omega^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 0. \quad (2.14)$$

Из (2.14) выразим значение вектора угла поворота:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{2\alpha}{4\alpha - J\omega^2} \text{rot}\tilde{\mathbf{U}}. \quad (2.15)$$

Заменяем вектор поворота в выражении (2.13) на правую часть выражения (2.15). После подстановки имеем:

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\tilde{\mathbf{U}} - \left(\mu + \alpha - \frac{4\alpha^2}{4\alpha - J\omega^2}\right)\text{rotrot}\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{e}\delta(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{U}} = 0. \quad (2.16)$$

Введем обозначение:

$$\chi = \frac{4\alpha^2}{4\alpha - J\omega^2}.$$

С введенным обозначением уравнение (2.16) принимает вид:

$$(\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\tilde{\mathbf{U}} - (\mu + \alpha - \chi)\text{rotrot}\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{e}\delta(\mathbf{r}) + \rho\omega^2\tilde{\mathbf{U}} = 0. \quad (2.17)$$

Для того, чтобы найти решение исходных уравнений, воспользуемся методом решения уравнений такого вида через преобразование Фурье по координатам:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{r})] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}.$$

Где \mathbf{p} – дополнительная действительная переменная.

После преобразований выражение (2.17) примет вид:

$$-(\lambda + 2\mu)\mathbf{p}\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p} \times \mathbf{p} \times \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] + \mathbf{e} + \rho\omega^2\mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] = 0. \quad (2.18)$$

Воспользуемся свойством векторного перемножения:

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) = \mathbf{p}\mathbf{p} - \mathbf{E}\mathbf{p}^2.$$

Преобразуем уравнение (2.18), используя свойство векторного умножения:

$$(\alpha - \lambda - \mu - \chi)\mathbf{p}\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p}^2\mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] + \mathbf{e} + \rho\omega^2\mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] = 0. \quad (2.19)$$

Представим вектор $\tilde{\mathbf{U}}$ в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\mathbf{N}, \mathbf{N}_0) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{N}_0);$$

где \mathbf{N}_0 - точка расположения источника силы;

\mathbf{N} - точка, из которой ведется наблюдение;

$\mathbf{U}(\mathbf{N}, \mathbf{N}_0)$ - тензор 2-го ранга (тензор Грина);

$\mathbf{e}(N_0)$ - не зависит от координат и может быть вынесена из преобразования Фурье.

Воспользовавшись вышеприведенными представлениями, уравнение (2.19) принимает вид:

$$(\alpha - \lambda - \mu - \chi)\mathbf{pp} \cdot \mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p}^2\mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] + \mathbf{E} + \rho\omega^2\mathbf{F}[\tilde{\mathbf{U}}] = 0. \quad (2.19)$$

Исходя из вида уравнения (2.19), следует, что решение данного уравнения имеет вид:

$$\mathbf{F}[\mathbf{U}] = \mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{pp}. \quad (2.20)$$

Учитывая (2.20), уравнение (2.19) примет вид:

$$\begin{aligned} (\alpha - \lambda - \mu - \chi)\mathbf{A}\mathbf{pp} + (\alpha - \lambda - \mu - \chi)\mathbf{B}\mathbf{p}^2\mathbf{pp} - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p}^2\mathbf{A}\mathbf{E} - \\ - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{B}\mathbf{p}^2\mathbf{pp} + \mathbf{E} + \rho\omega^2\mathbf{A}\mathbf{E} + \rho\omega^2\mathbf{B}\mathbf{pp} = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Считаем, что \mathbf{E} и \mathbf{pp} - независимы. Вычислим значения коэффициента \mathbf{A} из (2.21):

$$\begin{aligned} -(\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p}^2\mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{E} + \rho\omega^2\mathbf{A}\mathbf{E} = 0; \\ \mathbf{A} = -\frac{1}{\rho\omega^2 - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p}^2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Считаем, что \mathbf{E} и \mathbf{pp} - независимы. Вычислим значения коэффициента \mathbf{B} из (2.21):

Вычислим значения коэффициента \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha - \lambda - \mu - \chi}{\rho\omega^2 - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{p}^2}\mathbf{pp} + (\alpha - \lambda - \mu - \chi)\mathbf{B}\mathbf{p}^2\mathbf{pp} - \\ - (\mu + \alpha - \chi)\mathbf{B}\mathbf{p}^2\mathbf{pp} + \rho\omega^2\mathbf{B}\mathbf{pp} = 0; \\ \mathbf{B} = \frac{\alpha - \lambda - \mu - \chi}{\rho\omega^2 - (\mu + \alpha - \chi)} \times \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\mu + \alpha - \chi)}} \times \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Преобразуем значение \mathbf{B} , полученное в (2.23):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)}} - \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\mu + \alpha - \chi)}} = \frac{\rho\omega^2(-\lambda - \mu + \alpha - \chi)}{(\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha - \chi)} \times \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)}} \times \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\mu + \alpha - \chi)}}; \\ \mathbf{B} = \frac{1}{\rho\omega^2} \times \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\lambda + 2\mu)}} - \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho\omega^2}{(\mu + \alpha - \chi)}} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Результаты, полученные в (2.22) и (2.24) подставим в выражение (2.20).

Имеем:

$$F[\mathbf{U}] = \frac{1}{(\mu + \alpha - \gamma) \left(\mathbf{p}^2 - \frac{\rho \omega^2}{(\mu + \alpha - \gamma)} \right)} \mathbf{E} + \frac{1}{\rho \omega^2} \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)}} - \frac{1}{\mathbf{p}^2 - \frac{\rho \omega^2}{(\mu + \alpha - \gamma)}} \right) \mathbf{p} \mathbf{p}. \quad (2.25)$$

Теперь обратимся к фундаментальному решению оператора Гельмгольца []. Рассмотрим уравнение:

$$(\Delta + k^2) \boldsymbol{\varepsilon} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Метод преобразования Фурье сводит уравнение, представленное выше к алгебраическому:

$$F[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{k^2 - \mathbf{p}^2}.$$

При этом, известно, что решение неоднородного уравнения Гельмгольца имеет вид []

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi R};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{e^{-ikR}}{4\pi R};$$

где $R = |\mathbf{r}_{|N} - \mathbf{r}_{|N_0}|$.

Т.к на основании условия излучения [] гармоническое движение должно исключать сходящуюся, т.е. приходящую из бесконечности, волну, в качестве фундаментального решения необходимо применять:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi R}.$$

Следовательно, обратное преобразование Фурье примет вид:

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2 - k^2} = \frac{1}{4\pi} F \left[\frac{e^{ikR}}{R} \right]. \quad (2.26)$$

Для упрощения решаемых уравнений, введем следующие обозначения:

$$k_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)}. \quad (2.27)$$

$$k_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{(\mu + \alpha - \gamma)}. \quad (2.28)$$

Воспользовавшись выражениями (2.26)-(2.27), выражение (2.25) принимает вид:

$$F[\mathbf{U}] = \frac{k_2^2}{4\pi\rho\omega^2} F\left[\frac{1}{R} e^{iRk_2}\right] \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left(F\left[\frac{1}{R} e^{iRk_1}\right] - F\left[\frac{1}{R} e^{iRk_2}\right] \right) \mathbf{p}\mathbf{p}.$$

Вычислим тензор Грина:

$$\mathbf{U}(N, N_0) = \frac{\mathbf{E}k_2^2}{4\pi R\rho\omega^2} e^{iRk_2} + \left(\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \right) \nabla\nabla \frac{1}{R} (e^{iRk_2} - e^{iRk_1}).$$

Вычислив градиенты, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(N, N_0) = & \frac{\mathbf{E}k_2^2}{4\pi R\rho\omega^2} e^{iRk_2} + \left(\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \right) \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{E}}{R^2} - \frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}}{R^4} \right) (-ik_1 e^{iRk_1} + ik_2 e^{iRk_2}) - \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{R^3} (k_2^2 e^{iRk_2} - k_1^2 e^{iRk_1}) + \left(\frac{\mathbf{E}}{R^3} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{R^5} \right) (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{R^4} (ik_1 e^{iRk_1} - ik_2 e^{iRk_2}) \right]. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, имеем тензор второго ранга (тензор Кельвина-Сомильяно):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(N, N_0) = & \frac{\mathbf{E}}{4\pi R\rho\omega^2} \left[\frac{1}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) + \frac{1}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + k_2^2 e^{iRk_2} \right] + \\ & + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{4\pi R^3\rho\omega^2} \left[k_1^2 e^{iRk_1} - k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \frac{3}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Исходя из вида тензора Кельвина-Сомильяно, вектор перемещения имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{4\pi R\rho\omega^2} \left[\frac{1}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) + \frac{1}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + k_2^2 e^{iRk_2} \right] + \\ & + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{4\pi R^3\rho\omega^2} \left[k_1^2 e^{iRk_1} - k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \frac{3}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Выражение (2.15) показывает, что:

$$\tilde{\Phi} = \frac{2\alpha}{4\alpha - J\omega^2} \text{rot}\tilde{\mathbf{U}}.$$

Вычислим вектор поворота согласно выражению (2.15):

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{2\alpha}{4\alpha - J\omega^2} \text{rot} \left[\begin{array}{l} \frac{\mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{4\pi R\rho\omega^2} \left[\frac{1}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) + \frac{1}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + k_2^2 e^{iRk_2} \right] + \\ + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{4\pi R^3\rho\omega^2} \left[k_1^2 e^{iRk_1} - k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \right. \\ \left. - \frac{3}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right] \end{array} \right].$$

Преобразуем выражение, полученные выше для упрощения решения:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2\alpha}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi\rho\omega^2} \operatorname{rot} \mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t} \\
&\left[\frac{1}{R^2} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) + \frac{1}{R^3} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + \frac{1}{R} k_2^2 e^{iRk_2} \right] + \\
&+ \frac{2\alpha}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi\rho\omega^2} \operatorname{rot} \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t} \\
&\left[\frac{1}{R^3} k_1^2 e^{iRk_1} - \frac{1}{R^3} k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R^4} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \frac{3}{R^5} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right].
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Из выражения (2.31) видно, что требуется вычислить ротор. Воспользуемся равенством (2.32) для второго слагаемого:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} (\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)f(\mathbf{r})) = \\
&= (\operatorname{rot} \mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{e} + \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}(N_0) \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \\
&= -f(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{e}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Вычислив ротор, получаем вектор поворота в рамках редуцированной среды Коссера от действия гармонической силы в объеме сыпучего материала:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2\alpha \mathbf{r} \times \mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi\rho\omega^2 R^2} \\
&\left[e^{iRk_1} \left(\frac{3ik_1}{R^2} + \frac{k_1^2}{R} - \frac{3}{R^3} \right) - e^{iRk_2} \left(\frac{3ik_2}{R^2} + \frac{2k_2^2}{R} - \frac{3}{R^3} - ik_2^3 \right) \right] - \\
&- \frac{2\alpha \mathbf{r} \times \mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi\rho\omega^2 R^3} \\
&\left[k_1^2 e^{iRk_1} - k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \frac{3}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right].
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Упростим выражение (2.33):

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2\alpha k_2^2 e^{iRk_2} \mathbf{r} \times \mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi\rho\omega^2 R^2} \left(ik_2 - \frac{1}{R} \right) = \\
&= \frac{2\alpha e^{iRk_2} \mathbf{r} \times \mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi(\mu + \alpha - \chi)R^2} \left(ik_2 - \frac{1}{R} \right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

В результате решения уравнений Ламе в рамках редуцированной среды Коссера при действии гармонической силы получены выражения для определения вектора перемещения (2.30) и поворота (2.34).

2.5 Проверка достоверности результатов

Проверка достоверности полученного результата заключается в приравнении дополнительной константы α к нулю, что должно привести полученные уравнения к модели классической теории упругости.

Если $\alpha = 0$, то:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)}; \\ k_2^2 &= \frac{\rho\omega^2}{(\mu+\alpha-\chi)}; \\ \alpha - \chi &= \alpha - \frac{4\alpha^2}{4\alpha - J\omega^2} = \frac{\alpha(4\alpha - J\omega^2) - 4\alpha^2}{4\alpha - J\omega^2} = \frac{0 \cdot (4 \cdot 0 - J\omega^2) - 4 \cdot 0^2}{4 \cdot 0 - J\omega^2} = 0; \\ k_2^2 &= \frac{\rho\omega^2}{\mu}. \end{aligned}$$

Решением данной задачи в рамках классической теории упругости занимался Пупырев. Вектор перемещения в рамках классической теории упругости имеет вид:

$$\mathbf{U}(N, N_0) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[\left(\mathbf{E} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{R^2} \right) \left(\frac{(ik_2 R - 1)e^{iRk_2}}{R^3} - \frac{(ik_1 R - 1)e^{iRk_1}}{R^3} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{k_1^2 e^{iRk_1}}{R} - \frac{k_2^2 e^{iRk_2}}{R} \right) \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{R^2} + \frac{k_2^2 e^{iRk_2}}{R} \mathbf{E} \right];$$

Преобразуем данное выражение и получим тензор второго ранга (тензор Кельвина-Сомильяно):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(N, N_0) &= \frac{\mathbf{E}}{4\pi R\rho\omega^2} \left[\frac{1}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) + \frac{1}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + k_2^2 e^{iRk_2} \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{4\pi R^3 \rho\omega^2} \left[k_1^2 e^{iRk_1} - k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \frac{3}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Исходя из вида тензора Кельвина-Сомильяно, вектор перемещения по Пупыреву имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{4\pi R\rho\omega^2} \left[\frac{1}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) + \frac{1}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) + k_2^2 e^{iRk_2} \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{e}(N_0)e^{-i\omega t}}{4\pi R^3 \rho\omega^2} \left[k_1^2 e^{iRk_1} - k_2^2 e^{iRk_2} - \frac{3}{R} (ik_2 e^{iRk_2} - ik_1 e^{iRk_1}) - \frac{3}{R^2} (e^{iRk_1} - e^{iRk_2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

где:

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)};$$

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Видно, что результаты в выражениях (2.30) и (2.36) одинаковы, что обусловлено равенствами коэффициентов. Данная проверка показывает, что полученное выражение для определения вектора перемещения в рамках редуцированной среды Коссера от действия единичной гармонической силы вычислено верно.

2.6 Выводы по второй главе

Во второй главе диссертационного исследования рассмотрены разрешающие уравнения как для классической, так и для редуцированной среды Коссера при действии гармонической нагрузки.

В ходе исследования:

1. Показан математический аппарат для решения задач данного типа.
2. Решены уравнения Ламе относительно вектора перемещений.
3. Решены уравнения Ламе относительно вектора поворота.
4. Проведена проверка достоверности результатов, которая сравнивает ранее полученный результат в рамках классической теории упругости и результаты, полученные в данной работе. Данные проверки имеют место быть в виду особенностей редуцированной среды Коссера.

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1 Выделение вещественной части

Во второй главе диссертационного исследования были получены выражения для определения вектора перемещения (2.30) и поворота (2.35). Необходимо преобразовать данные выражения для численного исследования результатов (выделить вещественную часть выражений). Выделим вещественные части данных выражений с помощью формулы Эйлера.

Формула Эйлера имеет вид:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (3.1)$$

Выделим вещественную часть выражения (2.30) с помощью равенства (3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = & \frac{e(N_0)}{4\pi R \rho \omega^2} \left[\frac{1}{R} (ik_2(\cos(Rk_2 - \omega t) + i \sin(Rk_2 - \omega t)) - ik_1(\cos(Rk_1 - \omega t) + \right. \\ & \left. + i \sin(Rk_1 - \omega t))) + \frac{1}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) + i \sin(Rk_1 - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t) - \right. \\ & \left. - i \sin(Rk_2 - \omega t)) + k_2^2(\cos(Rk_2 - \omega t) + i \sin(Rk_2 - \omega t)) \right] + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)}{4\pi R^3 \rho \omega^2} \left[k_1^2(\cos(Rk_1 - \omega t) + \right. \\ & \left. + i \sin(Rk_1 - \omega t)) - k_2^2(\cos(Rk_2 - \omega t) + i \sin(Rk_2 - \omega t)) - \frac{3}{R} (\cos(Rk_2 - \omega t) + \right. \\ & \left. + i \sin(Rk_2 - \omega t)) - ik_1(\cos(Rk_1 - \omega t) + i \sin(Rk_1 - \omega t)) - \frac{3}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) + \right. \\ & \left. + i \sin(Rk_1 - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t) - i \sin(Rk_2 - \omega t)) \right]; \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = & \frac{e(N_0)}{4\pi R \rho \omega^2} \left[\frac{1}{R} (k_2(i \cos(Rk_2 - \omega t) - \sin(Rk_2 - \omega t)) - k_1(i \cos(Rk_1 - \omega t) - \right. \\ & \left. - \sin(Rk_1 - \omega t))) + \frac{1}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) + i \sin(Rk_1 - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t) - \right. \\ & \left. - i \sin(Rk_2 - \omega t)) + k_2^2(\cos(Rk_2 - \omega t) + i \sin(Rk_2 - \omega t)) \right] + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)}{4\pi R^3 \rho \omega^2} \left[k_1^2(\cos(Rk_1 - \omega t) + \right. \\ & \left. + i \sin(Rk_1 - \omega t)) - k_2^2(\cos(Rk_2 - \omega t) + i \sin(Rk_2 - \omega t)) - \frac{3}{R} (k_2(i \cos(Rk_2 - \omega t) - \right. \\ & \left. - \sin(Rk_2 - \omega t)) - k_1(i \cos(Rk_1 - \omega t) - \sin(Rk_1 - \omega t))) - \frac{3}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) + \right. \\ & \left. + i \sin(Rk_1 - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t) - i \sin(Rk_2 - \omega t)) \right]. \end{aligned}$$

Выделение вещественной части сводится к вычислению лишь вещественных значений, что ведет к игнорированию слагаемых, которые умножены на мнимую единицу. В результате преобразования имеем вещественную часть вектора перемещений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = & \frac{\mathbf{e}(N_0)}{4\pi R\rho\omega^2} \left[\frac{1}{R} (k_1 \sin(Rk_1 - \omega t) - k_2 \sin(Rk_2 - \omega t)) + \frac{1}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) - \right. \\
& \left. - \cos(Rk_2 - \omega t)) + k_2^2 \cos(Rk_2 - \omega t) \right] + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}(N_0)}{4\pi R^3\rho\omega^2} \left[k_1^2 \cos(Rk_1 - \omega t) - \right. \\
& \left. - k_2^2 \cos(Rk_2 - \omega t) - \frac{3}{R} (k_1 \sin(Rk_1 - \omega t) - k_2 \sin(Rk_2 - \omega t)) - \frac{3}{R^2} (\cos(Rk_1 - \right. \\
& \left. - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t)) \right]. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Выделим вещественную часть выражения (2.34) с помощью равенства (3.1):

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2\alpha\mathbf{r}\times\mathbf{e}(N_0)}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi(\mu + \alpha - \chi)R^2} \left(ik_2 - \frac{1}{R} \right) (\cos(Rk_2 - \omega t) + i \sin(Rk_2 - \\
& \quad - \omega t)); \\
\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2\alpha\mathbf{r}\times\mathbf{e}(N_0)}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi(\mu + \alpha - \chi)R^2} \left(ik_2 \cos(Rk_2 - \omega t) + iik_2 \sin(Rk_2 - \omega t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{R} \cos(Rk_2 - \omega t) - i\frac{1}{R} \sin(Rk_2 - \omega t) \right); \\
\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2\alpha\mathbf{r}\times\mathbf{e}(N_0)}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi(\mu + \alpha - \chi)R^2} \left(ik_2 \cos(Rk_2 - \omega t) - k_2 \sin(Rk_2 - \omega t) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{R} \cos(Rk_2 - \omega t) - i\frac{1}{R} \sin(Rk_2 - \omega t) \right).
\end{aligned}$$

Выделение вещественной части сводится к вычислению лишь вещественных значений, что ведет к игнорированию слагаемых, которые умножены на мнимую единицу. В результате преобразования имеем вещественную часть вектора поворота:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}, t) = \frac{2\alpha\mathbf{r}\times\mathbf{e}(N_0)}{(4\alpha - J\omega^2)4\pi(\mu + \alpha - \chi)R^2} \left(-k_2 \sin(Rk_2 - \omega t) - \frac{1}{R} \cos(Rk_2 - \omega t) \right). \tag{3.3}$$

Выражения (3.2) и (3.3) содержат вещественные части векторов перемещения и поворота, что позволяет численно проанализировать полученные результаты работы.

3.2 Численный анализ полученных выражений

Ранее были получены выражения для вычисления вещественных частей вектора перемещения и поворота. Данные результаты позволяют численно оценить зависимости вектора перемещения и поворота от исходных данных.

Так как в работе ставилась задача по определению векторов перемещения и поворота, проведем анализ неустановленного источника

гармонической нагрузки в объеме сыпучего материала (то есть его характеристик подбираются исследователем в зависимости от преследуемых целей).

Полученные уравнения:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{e}(N_0)}{4\pi R \rho \omega^2} \left[\frac{1}{R} (k_1 \sin(Rk_1 - \omega t) - k_2 \sin(Rk_2 - \omega t)) + \frac{1}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t)) + k_2^2 \cos(Rk_2 - \omega t) \right] + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)}{4\pi R^3 \rho \omega^2} \left[k_1^2 \cos(Rk_1 - \omega t) - k_2^2 \cos(Rk_2 - \omega t) - \frac{3}{R} (k_1 \sin(Rk_1 - \omega t) - k_2 \sin(Rk_2 - \omega t)) - \frac{3}{R^2} (\cos(Rk_1 - \omega t) - \cos(Rk_2 - \omega t)) \right];$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) = \frac{2\alpha \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(N_0)}{(4\alpha - \omega^2) 4\pi (\mu + \alpha - \chi) R^2} \left(-k_2 \sin(Rk_2 - \omega t) - \frac{1}{R} \cos(Rk_2 - \omega t) \right).$$

Исходные данные для первого исследования (изменения перемещения в зависимости от удаления точки исследования от источника силовой нагрузки) показаны в табл.3.1:

Таблица 3.1. Исходные данные для первого исследования

Силовая нагрузка	$\mathbf{e}(N_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Н}$
Начальная точка исследования	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ м}$
Шаги изменения точки исследования	$\Delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ м}$
Объемный вес	$\rho = 20000 \text{ Н/м}^3$
Модуль упругости	$E = 2,5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$
Коэффициент Пуассона	$\nu = 0,15$
Порядок несимметрии	$N = 0,5$
Частота силовой нагрузки	$\nu = 1 \text{ с}^{-1}$
Радиус рассматриваемых частиц	$R_{\text{частиц}} = 0,02 \text{ м}$
Время фиксации перемещений	$t = 10 \text{ с}$

Принимая во внимание исходные данные имеем:

$$R = |\mathbf{r}| = 10 \text{ м};$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 = 6,28 \frac{1}{\text{с}};$$

$$k_1^2 = \frac{\rho \omega^2}{(\lambda + 2\mu)} = 0,00299 \frac{1}{\text{м} \cdot \text{с}^2};$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 4,66 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2;$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1,09 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2;$$

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{(\mu+\alpha-\chi)} = 0,00726 \frac{1}{\text{м}\cdot\text{с}^2};$$

$$\alpha = \frac{\mu N^2}{1-N^2} = 3,62 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2;$$

$$\chi = \frac{4\alpha^2}{4\alpha-J\omega^2} = 3,62 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2;$$

$$J = \frac{2}{5} mR_{\text{частиц}}^2 = 1,07 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{с}^2/\text{м}^2.$$

Характеристики материала приведены для щебня в соответствии с [93].

Важно отметить, что в соответствии с (3.3) вектор поворота является нулевым при рассмотрении точки, которая лежит на оси, по которой действует силовая нагрузка.

Построим график зависимости перемещения от удаленности точки рассмотрения (с учетом, что $\Delta R = 2 \text{ м}$):



Рисунок 3.1. График зависимости перемещения частиц от удаления от источника силовой нагрузки.

Построим график зависимости перемещения от времени на расстоянии 10 метров от источника силовой нагрузки (с учетом, что $t = 10$ с, а $\Delta t = 0,05$ с):

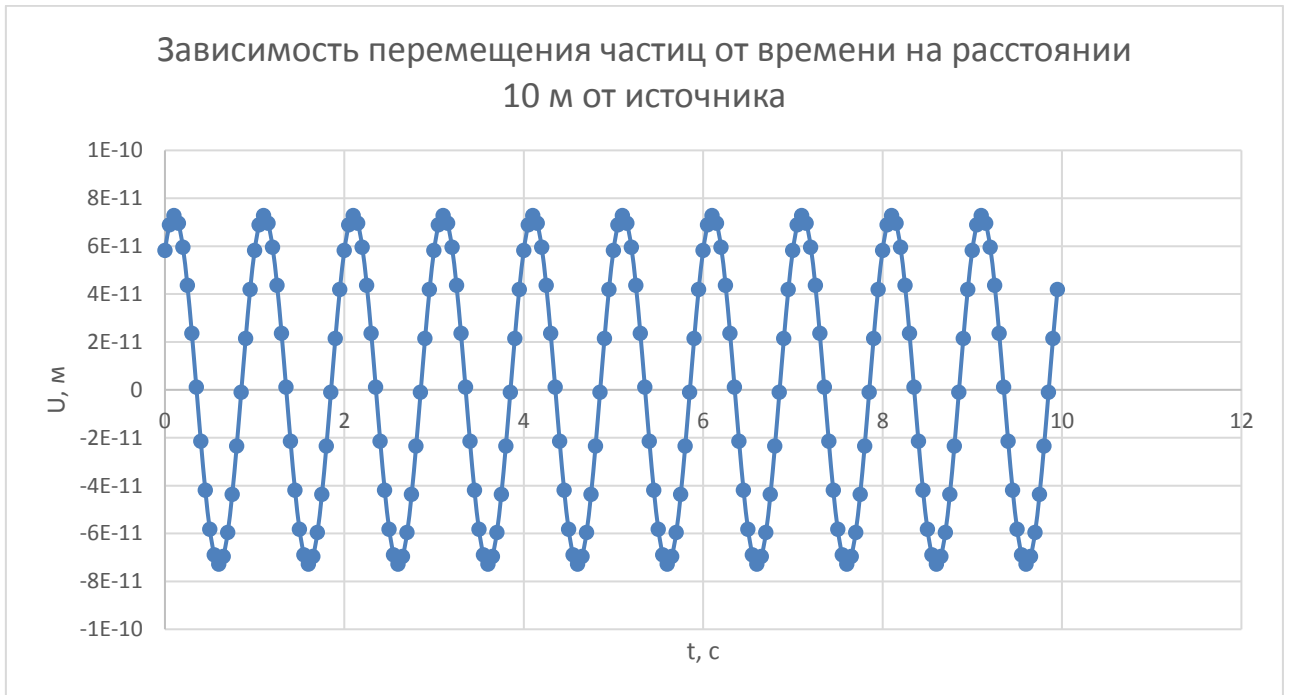


Рисунок 3.2. График зависимости перемещения частиц от времени на расстоянии 10 метров от источника.

Для второго исследования изменим значение частоты силовой нагрузки. Пусть $\nu = 1 \text{ с}^{-1}$, тогда зависимости приобретут следующий вид:

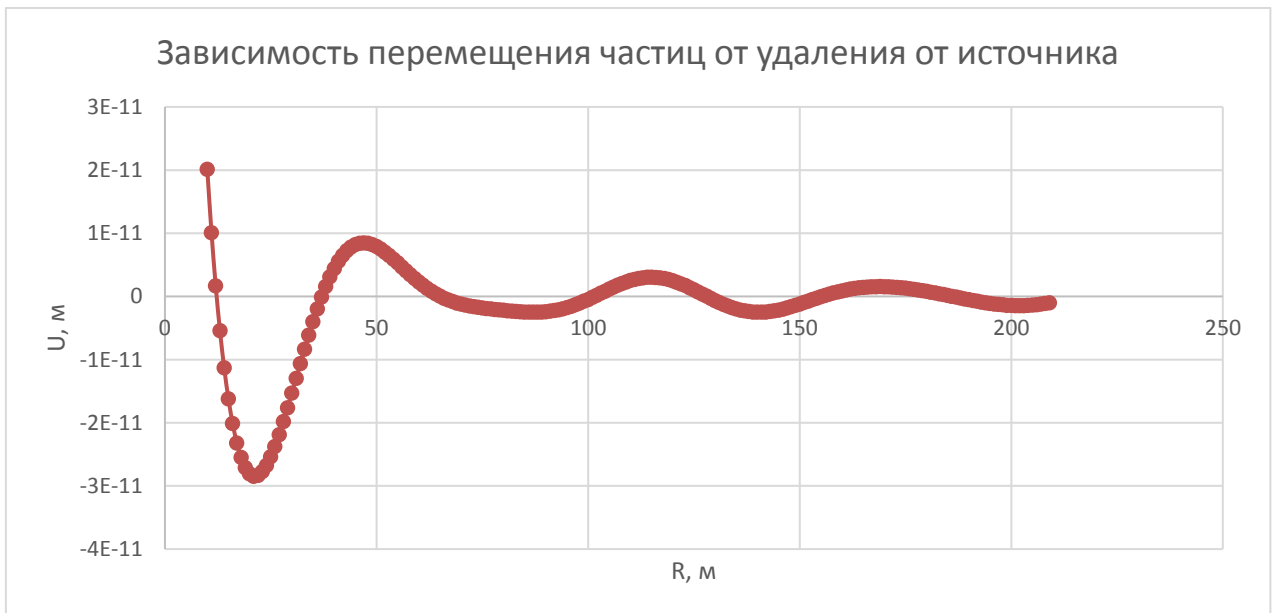


Рисунок 3.1. График зависимости перемещения частиц от удаления от источника силовой нагрузки.

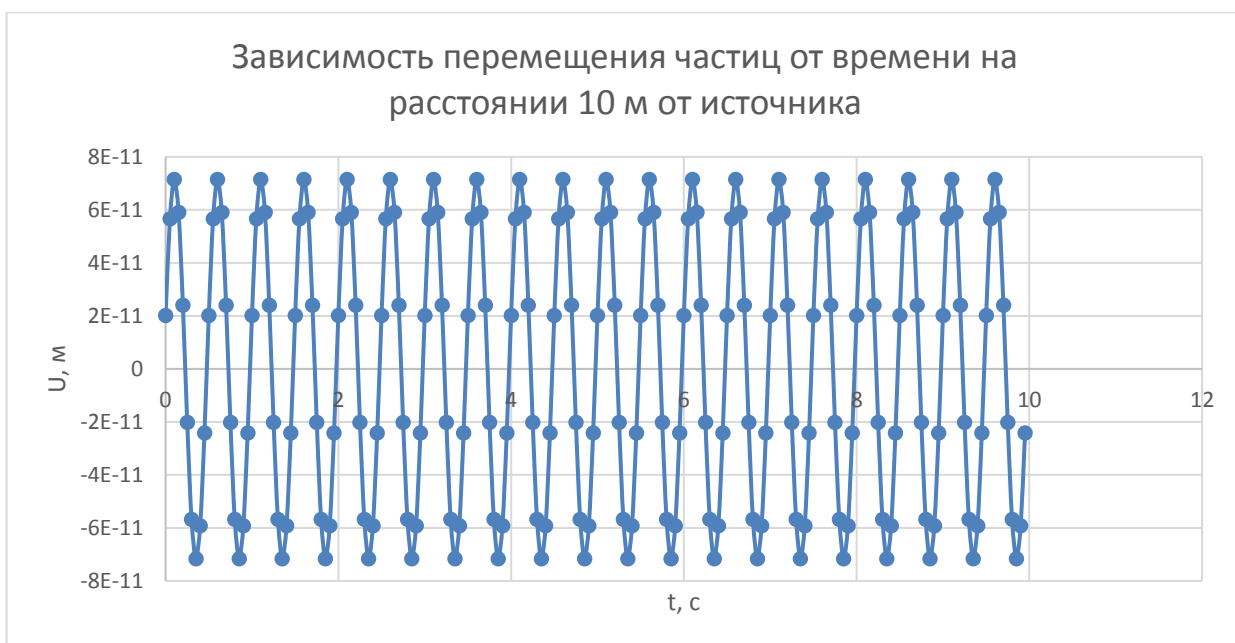


Рисунок 3.2. График зависимости перемещения частиц от времени на расстоянии 10 метров от источника.

Полученные результаты показывают:

- перемещаясь частицы образуют зоны уплотнения и разуплотнения материала;
- частицы материала колеблются в зависимости от времени;
- для уточнения результатов расчета требуется определять шаг переменных величин, чтобы результат отражал работу материала при данной нагрузке.

3.3 Применение результатов в образовательной деятельности

Проведенное исследование, а также его результаты могут найти свое применение в образовательной деятельности:

1. Студенты технических специальностей могут изучать методы решения задач данного типа, что позволит решить задачи о воздействии различных силовых факторов.
2. Студенты технических специальностей могут рассматривать неклассические теории упругости для решения задач, которые классическая теория упругости описывает с неточностями.

3.4 Применение результатов в строительстве

В строительстве широко развито применение сыпучих материалов, что приводит к возможности применения результатов работы в данной сфере. Полученные результаты при дальнейшем изучении могут найти свое применение в методиках по расчету фундаментов и оснований, так как сыпучий грунт может служить основанием зданий и сооружений. В виду увеличения населения планеты и экономии пространства на поверхности, развивается подземное строительство, а также намывные территории. Изучаемая нагрузка может возникать при работе оборудования с вращающимися частями (различные двигатели, расположенные в зданиях и сооружениях), забивке свай, проезде поездов метрополитена, автомобилей (в транспортных тоннелях).

3.5 Выводы по третьей главе

Как показано, большое количество сыпучих материалов применяется в строительной отрасли, а также существуют сосредоточенные гармонические силы, воздействующие на данные сыпучие материалы, что указывает на применимость проделанной работы к строительной деятельности. Недостатки классических теорий при описании сыпучих материалов указывает на необходимость поиска новых решений существующих задач. С развитием техники и усложнением конструкций зданий и сооружений, начинают предъявляться требования к точности расчетов. Данную проблему можно попробовать решить в рамках редуцированной среды Коссера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате диссертационного исследования можно сформулировать ряд выводов:

1. В работе получены уравнения для вычисления векторов перемещения и поворота в рамках редуцированной среды Коссера от действия сосредоточенной гармонической силы, действующей в объеме сыпучего материала. Полученные выражения были проверены на достоверность. Проверка заключается в сравнении результатов, полученных в данной работе, с результатами, полученными исследователями в рамках классической теории упругости. Достоверность доказана с учетом свойств рассматриваемого континуума.

2. В третьей главе работы из полученных уравнений для вычисления векторов перемещения и поворота выделены вещественные части, что позволяет численно проанализировать полученные выражения.

3. Проведен численный анализ вещественных частей полученных уравнений, показаны вычисления всех присутствующих коэффициентов. Выявлены зависимости, которые влияют на результаты вычислений. Показано, что при определенных нагрузках некоторые рассматриваемые частицы лишь перемещаются, а поворот отсутствует.

4. Проанализированы перспективы развития модели среды Коссера как в теоретическом, так и в практическом плане в ближайшем будущем. Данная модель описания среды интересна:

- в образовательном процессе;
- в рамках изучения волновых процессов в материалах;
- при создании современных материалов с заданными свойствами;
- в рамках описания поведения сыпучих материалов;
- в компьютерном моделировании движения отдельных частиц материала, для прогнозирования различных процессов в материале (например, программный комплекс «LC-DYNA»);

– при создании новейших методов для неразрушающего контроля материалов и конструкций.

5. Предложены возможные варианты применения результатов работы в сфере строительства.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баранов, А.А. Релятивистская термомеханика сплошных сред / А.А. Баранов, В.Л. Колпащиков. - Минск: Наука и техника, 1974. 152с.
2. Димитриенко, Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды / Ю.И. Димитриенко. - М.: Физматлит, 2009. - 624 с.
3. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды. / А.А. Ильюшин. - М.: Издательство Московского университета, 1978. - 287 с.
4. Ишлинский, А.Ю. Механика: Идеи, задачи, приложения / А.Ю. Ишлинский. - М.: Наука, 1985. - 624 с.
5. Коларов, Д. Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. - М.: Наука, 1979. - 302 с.
6. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.
7. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Том 1 / Л.И. Седов. - М.: Наука, 1970. - 492 с.
8. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Том 2 / Л.И. Седов. - М.: Наука, 1970. - 568 с.
9. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. - М.: Наука, 1975. - 592 с.
10. Чёрный, Л.Т. Релятивистские модели сплошных сред / Л.Т. Черный. - М.: Наука, 1983. - 288 с.
11. Голдстейн, Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. - М.: Наука, 1975. - 413с.
12. Жилин, П.А. Рациональная механика сплошных сред / П.А. Жилин. - СПб: изд-во Политехн. Ун-та, 2012. - 584 с.
13. Mindlin, R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stress in linear elasticity / R.D. Mindlin, H.F. Tiersten // *Archive of Rational Mechanics and Analysis*. - 1962. - 11, №5. - Pp. 415-448.

14. Mindlin, R.D. Influence of couple-stress on stress concentrations / R.D. Mindlin // *Experimental Mechanics*. – 1963. - №3. - Pp. 1-7.
15. Mindlin, R.D. Micro-structure in linear elasticity / R.D. Mindlin // *Archive of Rational Mechanics and Analysis*. - 1964. - 13, №1. - Pp. 51-78.
16. Koiter, W.T. Couple stresses in the theory of elasticity / W.T. Koiter // *Proceedings Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen, B 67*. - 1964, № 1. - Pp. 17-44.
17. Cosserat, E. *Teorie des corps deformeables* / E. Cosserat, F. Cosserat. - Paris: Hermann. - 1909.
18. Truesdell, C., Toupin R. The classical field theories *Encyclopedia of Physics*, v.III / 1, Secs.200, 203, 205 / C. Truesdell, R. Toupin. - Berlin: Gottingen – Heidelberg. - 1960.
19. Toupin, R.A. Elastic materials with couple stresses / R.A. Toupin // *Arch. Ration. Mech. And Analysis*. - 1962. - Vol. 1. - Pp.385-414.
20. Grioli, G. Elastic it a simmetrica / G. Grioli // *Ann. Mat. pura. Edappl. Ser. IV*, Vol. 50. - 1960. - Pp. 389-417.
21. Toupin, R.A. Theories of elasticity materials with couple stresses / R.A. Toupin // *Arch. Ration. Mech. And Analysis*. - 1964. - Vol. 17, № 2. - Pp. 85-112.
22. Аэро, Э.Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // *Физика твердого тела*. - 1960. - Вып. 7, Т. 2. - С. 1399-1409.
23. Кувшинский, Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения / Е.В. Кувшинский, Э.Л. Аэро // *Физика твердого тела*. - 1963. - Вып. 9, Т. 5. - С.2591-2598.
24. Gauthier, R.D. A quest for micropolar elastic constants / R.D. Gauthier, W.A. Jashman // *J. Appl. Mech., Tr. ASME*. - 1975. - Vol. 97, Ser. E. - Pp.369-374.
25. Никитина, Н.Е. Об одной составляющей погрешности измерения фазовой скорости ультразвука импульсным методом / Е.Н. Никитина // *Дефектоскопия*. - 1989. - № 8. - С.23-29.

26. Виноградова, М.Б. Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухорукова. - М.: Наука. - 1979. - 381 с.
27. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. - М.: Наука. - 1977. - 415с.
28. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. - М.: Наука. - 1980. - 512 с.
29. Ляховский, В.А. О поведении упругой среды с микронарушениями / В.А. Ляховский, В.П. Мясников // Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1984. - № 10. - С.71-75.
30. Лем, Дж.Л. Введение в теорию солитонов / Дж.Л. Лем. - М.:Бибфизмат. - 1997. - 294с.
31. Карпман, В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В.И. Карпман. - М.: Наука. - 1973. - 175с.
32. Крылов, А.Л. Градиентно-согласованная нелинейная модель генерации ультразвука при распространении сейсмических волн / А.Л. Крылов, Н.Г. Мазур, В.Н. Николаевский, Г.А. Эль // Прикладная математика и механика. - 1993. - Вып. 6, Т. 57. - С.100-109.
33. Динариев, О.Ю. Нестационарный режим микровращений / О.Ю. Динариев, В.Н. Николаевский // Прикладная математика и механика. - 1993. - Вып. 5, Т. 57. - С.175-180.
34. Сабодаш, П.Ф. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений / П.Ф. Сабодаш, И.Г. Филиппов // Сб. Прочность и пластичность (М.: Наука). - 1971. - С.317-321.
35. Coleman, B.D. Waves in materials with memory. The velocity of one dimensional Shock and acceleration waves / B.D. Coleman, M.E. Gurtin, J.R. Herrera // Arch. Ration. Mech. and Analysis. - 1965. - 19, № 1. - Pp. 1.
36. Hadamar, J. Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique / J. Hadamar. - Paris. 1903.
37. Виноградова, Ю.В. Вывод уравнений динамики нелинейной среды Коссера / Ю.В. Виноградова, В.И. Ерофеева // Вестник Нижегородского

университета им. Н. И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление. - 2009. - №6 (1). - С.159-162.

38. Бабичева, Л.А. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических телах / Л.А. Бабичева, Г.И. Быковцев, Н.Д. Вервейко // М.: ПММ. - 1973. - Вып.1, Т.37. - С.145-155.

39. Вервейко, Н.Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара /Н.Д. Вервейко. – М.:Воронеж. - 1997. - 204 с.

40. Гольденблат, И.Н. Нелинейные проблемы теории упругости / И.Н. Гольденблат. - М.: Наука. - 1969. - 336 с.

41. Лалин, В.В. О классификации сплошных сред. Новые модели в строительной механике / В.В. Лалин // VII международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте». Тезисы. СПб. - 2008. - С.123.

42. Lawrence, M. Schwartz. Vibration Models in Granular Materials / M. Schwartz Lawrence, Linton Johnson Davis, Feng Shechao // Physical Review Letters. - 1984. - Vol. 52, №10. - Pp.831-834.

43. Grekova, E.F. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model / E.F. Grekova, M.A. Julesh, G.C. Herman // Bull. Seismol. Soc. Am. - 2009. - Vol. 99, №2B. - Pp.1423-1428.

44. Кулеш, М.А. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера / М.А. Кулеш, Е.Ф. Грекова, И.Н. Шардаков // Акустический журнал. - 2009. - Том 55Б №2. - С.216-225.

45. Zdanchuk, E. The theory of continuous medium with free rotation without coupled Stresses / E. Zdanchuk, V. Lalin // Proceedings of the XXXVIII Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS. - 2010. - Pp 771-775.

46. Lalin, V. On the Cauchy problem for nonlinear reduced Cosserat continuum / V. Lalin, E. Zdanchuk // Proceedings of the XXXIX Summer School – Conference ADVANCED PROBLEMS IN MECHANICS. - 2011. - Pp.549-552

47. Лалин, В.В. Об одной модели сыпучих сред. Волны в редуцированной среде Коссера / В.В. Лалин, Е.В. Зданчук // Инженерно-строительный журнал, №5. - 2012. - С.65-71.

48. Бравко, Г.Л. Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссера / Г.Л. Бравко // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. - 1996. - №5. - С.55-63.

49. Бравко, Г.Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера / Г.Л. Бравко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2002. - №1. - С.75-91.

50. Бравко, Г.Л. Основные понятия и законы рациональной механики среды Коссера / Г.Л. Бравко. - Тула: Изд-во ТулГУ. - 2010. - С.104-105.

51. Бравко, Г.Л. Механическая структура и уравнения простейших моделей среды Коссера / Г.Л. Бравко, О.А. Иванова, С.С. Лознев // Ломоносовские чтения. Тез. докл. научн. конф. Ломоносовские чтения. Секц. механики. 17-27 апреля 2003, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: Изд-во Моск. ун-та. - 2003. - С.30-31.

52. Бравко, Г.Л. Плоские колебания оснащенного стержня Коссера в потоке газа / Г.Л. Бравко, О.А. Иванова // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 17-27 апреля 2006, Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: Изд-во Моск. ун-та. - 2006. - С.33-33.

53. Бравко, Г.Л. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера / Г.Л. Бравко, О.А. Иванова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2008. - № 1. - С.22-36.

54. Бравко, Г.Л. Изгибные формы равновесия стержня Коссера с частично пластическими свойствами / Г.Л. Бравко, О.Ф. Иванова // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2008. Москва. М.: Изд-во Моск. ун-та. - 2008. - С.39-40.

55. Белоносова, С.М. Моментная теория упругости / С.М. Белоносова. - Владивосток: Дальнаука. - 1983. - 542 с.

56. Лурье, С.А. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые обобщения / С.А. Лурье // Механика композиционных материалов и конструкций. - 1996. - Т. 2, № 2. - С.84-104.

57. Lurie, S. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites / S. Lurie // Int. J. Comp Mater Scs. - 2003. 28 (3-4). - Pp.529-539.

58. Lurie, S. Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects / S. Lurie // Analysis and simulation of Multifield Problems, Springer. - 2003. - Vol.12. - Pp.101-110.

59. Лурье, С.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» / С.А. Лурье // Современные проблемы механики гетерогенных сред: Сборник научных трудов. Институт прикладной механики РАН. - 2006. - Вып.1. - С.235-267.

60. Ванин, Г.А. Градиентная теория упругости / Г.А. Ванин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 1999. - №1. - С.46-53.

61. Фроленкова, Л. Ю. Вариант подхода к моделированию линейной упругой среды / Л.Ю. Фроленкова, В.С. Шоркин С.И. Якушина // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. - 2011. - №2. - С.2-7.

62. Ильюшин, А.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел / А.А. Ильюшина, В.А. Ломакин // Прочность и пластичность. М.: Наука. - 1971. - С.54-61.

63. Короткина, М.Р. Моментные теории упругости и их связь с полевыми теориями, построенными на дискретных структурах / М.Р. Короткина // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та. - 1975. - №4. - С.225-240.

64. Шоркин, В.С. Учет влияния тройного взаимодействия частиц среды на поверхностные и адгезионные свойства твердых тел / В.С. Шоркин, Л.Ю. Фроленкова, А.С. Азаров // Материаловедение. - 2011. - №2. - С.2-7.

65. Седова, Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы / Л.И. Седова // ПММ. - 1968. - Т.32, №5. - С.771-785.

66. Кунин, И.А. Теория упругих сред с микроструктурой / И.А. Кунин. - М.: Наука. - 1975. - С.416.

67. Сабодаш, П.Ф. О взаимодействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений / П.Ф. Сабодаш, И.Г. Филиппов // Прочность и пластичность. М.: Наука. - 1971. - № 4. - С.317-321.

68. Грекова, Е.Ф. Линейная редуцированная среда Коссера с шаровым тензором инерции, вращения в которой не наблюдаются в эксперименте. / Е.Ф. Грекова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2012. - №5. - С.58-64.

69. Кулеш, М.А. О свойствах поверхностных волн в упругой среде Коссера. / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2006. - №14. - С.109-113.

70. Кулеш, М.А. Волны в упругой среде Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2008. - №16. - С.64-75.

71. Виноградова, Ю.В. Распространение нелинейной стационарной волны ротационного типа в среде Коссера. / Ю.В. Виноградова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. - 2011. - №4-5. - С.2069-2070.

72. Садовский, В.М. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера. / В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.А. Похабова // Вычислительная механика сплошных сред. - 2014. - Т.7. №1. - С.52-60.

73. Кулеш, М.А. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера / М.А. Кулеш, Е.Ф. Грекова, И.Н. Шардаков // Акустический журнал. - 2009. - Т.55, №2. - С.216-225.

74. Пеплин, Ф.С. Нелинейная математическая модель динамики термоупругой среды Коссера./ Ф.С. Пеплин // Вестник научно-технического развития. 2016. - №8 (108). - С.15-19.

75. Кулеш, М.А. Анализ волнового решения эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, М.В. Улитин, И.Н. Шардаков // Прикладная механика и техническая физика. - 2008. - Т.49., №2(288). - С.323-329.

76. Ерофеев, В.И. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением / В.И. Ерофеев, А.И. Землянухин, В.М. Катсон, С.Ф. Шешенин // Вычислительная механика сплошных сред. - 2009. - Т.2., №4. - С.67-75.

77. Варыгина, М.П. Параллельные вычисления в задачах динамики моментного континуума Коссера: диссертация кандидата физико-математических наук: 05.13.18 / Варыгина Мария Петровна. – Красноярск, 2010. – 105 с.

78. Кончакова, Н.А. Исследование волновых процессов в термоупругой среде Коссера: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.02.04/ Кончакова Наталия Александровна. – Воронеж, 1998. – 170 с.

79. Лай, Т.Т. Нестационарные волны в упругих моментных средах: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.02.04 / Лай Тхань Туан. - Москва, 2012. – 112 с.

80. Порубов, А. В. Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах: диссертация доктора физико-математических наук: 01.02.04 / Порубов Алексей Викторович. - Санкт-Петербург, 2006. – 313 с.

81. Титоренко, Д.Ф. Решение пространственных задач моментной теории упругости методами многомерного комплексного анализа: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.02.04 / Титоренко Дмитрий Федорович. - Москва, 2003. – 135 с.

82. Stan, C. Rayleigh waves in Cosserat elastic materials / C. Stan, G. Ionel Dumitrel // International Journal of Engineering Science. - 2012. - Vol.51. - Pp.117-127.
83. Sadovskii, V.M. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum/ V.M. Sadovskii, O.V. Sadovskaya // Wave Motion. - 2015. - Vol.52. - Pp.138-150.
84. Rossikhin, Y.A. Transient wave velocities in pre-stressed thin-walled beams of open profile with Cosserat-type micro-structure / Y.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Composites Part B: Engineering. - 2015. - Vol.83. - Pp.323-332.
85. Chadha, M. An introductory treatise on reduced balance laws of Cosserat beams / M. Chadha, M.D. Todd // International Journal of Solids and Structures. - 2017. - Vol.126–127. - Pp.54-73.
86. Godio, M. A limit analysis approach based on Cosserat continuum for the evaluation of the in-plane strength of discrete media: Application to masonry / M. Godio, I. Stefanou, K. Sab, J. Sulem, S. Sakji // European Journal of Mechanics - A/Solids. - 2017. - Vol.66. - Pp.168-192.
87. Weeger, O. Isogeometric collocation methods for Cosserat rods and rod structures / O. Weeger, Y. Sai-Kit, M.L. Dunn // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2017. - Vol.316. – Pp.100-122.
88. Pasternak, E. Wave propagation in materials with negative Cosserat shear modulus / E. Pasternak, A.V. Dyskin, M. Esin // International Journal of Engineering Science. - 2016. - Vol.100. – Pp.152-161.
89. Wenxiong, H. Analysis of plane Couette shear test of granular media in a Cosserat continuum approach / H. Wenxiong, S.W. Sloan, D. Sheng // Mechanics of Materials. - 2014. - Vol.69., Issue1. – Pp.106-115.
90. Suiker, A.S.J. Borst de R. Comparison of *wave* propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models / A.S.J. Suiker, A.V. Metrikine // International Journal of Solids and Structures. - 2001. - Vol.38., Issue9. - Pp.1563-1583.

91. Dinariev, O.Y. The nonlinear viscoelastic Cosserat model for the wave propagation with generation of subharmonics / O.Y. Dinariev, V.N. Nikolaevskii // International Journal of Solids and Structures. - 1998. - Vol.35., Issues34–35. – Pp.4575-4586.

92. Емельянов, А.Н. Эффективные характеристики в моментной теории упругости: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.02.04 / Емельянов Александр Николаевич. – Москва, 2016.

93. Вайнштейн, Е.В. Исследование изменения касательных напряжений и вертикальных перемещений от лесовозного автопоезда в конструкции дорожной одежды и земляного полотна / Е.В. Вайнштейн, В.М. Вайнштейн, П.А. Нехорошков // Инженерный вестник Дона. – 2012. №23. – С.39.