

## Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины

*К.т.н., доцент Р.А. Абдикаримов\*,  
Ташкентский финансовый институт;*

*К.т.н. В.М. Жгутов\*\*,  
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»*

**Ключевые слова:** пологая оболочка переменной толщины; вязкоупругость; динамическая устойчивость

Тонкостенные пластины и оболочки широко применяются в технике и строительстве в качестве элементов разного рода конструкций. В одних случаях с их помощью достигается создание легких и экономичных, но вместе с тем достаточно прочных и жестких конструкций. В других случаях (например, в упругих элементах некоторых приборов) указанные конструкции, наоборот, наделяются необходимой гибкостью.

Тонкостенные элементы современных конструкций, выполненные в виде пластин и оболочек, предназначены для работы под воздействием силовых нагрузок (статических и динамических). Для придания в нужных местах большей жесткости профиль тонких пластин и оболочек может иметь плавные утолщения. Следовательно, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной (точнее, гладко-переменной) толщины.

Зачастую тонкостенные элементы конструкций допускают достаточно большие прогибы (даже при нагрузках, далеких от критических значений). Это означает, что при анализе напряженно-деформируемого состояния и устойчивости таких элементов следует учитывать геометрическую нелинейность.

При длительных нагрузках в материале оболочек (пластин и т.п.) может проявиться свойство ползучести (вязкоупругости), что приведет к существенному снижению их несущей способности.

В современной технике наряду с оболочками, выполненными из металлов (изотропного материала), широко используются конструкции, выполненные из различного рода композиционных материалов (являющихся анизотропными). Таким образом, возникает необходимость рассмотрения как изотропных оболочек (простейший случай), так и анизотропных оболочек (значительно более сложный случай).

Таким образом, для получения более реальной картины напряженно-деформированного состояния указанных элементов конструкций в виде пластин и оболочек необходимо проводить исследования в геометрически нелинейной постановке задачи при правильном совместном учете вязкоупругих и анизотропных свойств материала.

Анализ упругого деформирования пластин и круговых цилиндрических оболочек постоянной толщины (изготовленных из изотропных и ортотропных материалов) при осевых динамических нагрузках и поперечных внешних давлениях посвящен цикл работ. Обзор результатов этих исследований приведен в монографиях [1, 2].

Проблема динамической устойчивости цилиндрических оболочек (гладких и подкрепленных ребрами жесткости) при нестационарном внешнем давлении рассматривается в работах [3, 4], в которых приводятся решения задач деформирования ортотропных цилиндрических оболочек (подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости), имеющих начальное несовершенство формы. При этом считается, что осесимметричные сжимающие усилия по торцам, а также внешнее динамическое давление по боковой поверхности оболочки равномерно распределены.

Ряд публикаций посвящен задачам деформирования пластин и оболочек при динамических нагрузках с учетом ползучести (вязкоупругости) материалов. Обзор результатов проведенных в них исследований содержится в работе [5].

Вопросы устойчивости вязкоупругих прямоугольных в плане пластин и цилиндрических оболочек при осевых сжимающих нагрузках в геометрически нелинейной постановке задачи рассматривались в работах [6, 7]. При этом в качестве критериев динамической устойчивости использовались критерии А.С. Вольмира [2].

Решению геометрически нелинейных задач динамики изотропных и ортотропных вязкоупругих оболочек, находящихся под действием осевых динамических нагрузок и внешнего давления, посвящены публикации [8, 9], в которых применены подходы А.Е. Богдановича [10], основанные на использовании многочленной аппроксимации прогиба.

Исследованию устойчивости оболочек постоянной и ступенчато-переменной толщины в геометрически нелинейной постановке при учете (и не учете) ползучести материала посвящены работы В.М. Жгутова [11–14] и Р.А. Абдикаримова [15–26].

Однако поведение пластин и оболочек гладко-переменной толщины при совместном учете всех отмеченных выше важных факторов в настоящее время исследовано недостаточно и требует дальнейшего исследования.

### 1. Постановка задачи. Математическая модель

Будем исследовать динамическую устойчивость вязкоупругой пологой оболочки переменной толщины  $h = h(x, y)$  и главными кривизнами срединной поверхности  $k_x = 1/R_x$  и  $k_y = 1/R_y$  ( $R_x$  и  $R_y$  – главные радиусы кривизны), находящейся под действием осевой динамической нагрузки.

Предположим, что оболочка изготовлена из однородного изотропного материала и подвергается динамическому сжатию силой  $P(t) = v \cdot t$ , где  $v$  и  $t$  – скорость и время нагружения. Считаем, что оболочка имеет несовершенство формы, характеризуемое начальным прогибом («погибью»)  $w_0 = w_0(x, y, t)$ . Тогда, как известно, математическая модель деформирования оболочки описывается следующей системой уравнений [24] в перемещениях  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  и  $w = w(x, y, t)$  (полный прогиб):

$$\begin{aligned}
 & (1 - \Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y) w + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \frac{(1 - \mu^2) \rho h}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
 & (1 - \Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial h}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - (k_y + \mu k_x) w + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \frac{(1 - \mu^2) \rho h}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\
 & (1 - \Gamma^*) h^3 \left( \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} \right) + 3(1 - \Gamma^*) \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \times \\
 & \times \left( \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right) + 6(1 - \Gamma^*) h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x \partial y^2} \right) + \\
 & + 6(1 - \Gamma^*) h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y} \right) + 3(1 - \Gamma^*) \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} \right) + 6(1-\mu)(1-\Gamma^*) \left[ 2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} - \\
& - 12(1-\Gamma^*)h \left[ (k_x + \mu k_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\mu k_x + k_y) \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y)w + \right. \\
& \left. + \frac{k_x + \mu k_y}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{k_y + \mu k_x}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - 12 \frac{\partial w}{\partial x} (1-\Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y)w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (1-\Gamma^*) h \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \mu k_y)w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \\
& - 12 \frac{\partial w}{\partial y} (1-\Gamma^*) \left\{ h \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial h}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (k_y + \mu k_x)w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} (1-\Gamma^*) h \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} - (k_y + \mu k_x)w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \\
& - 12(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (1-\Gamma^*) h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{12(1-\mu^2)\rho h}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{12(1-\mu^2)}{E} q
\end{aligned} \tag{1}$$

В случае вязкоупругой ортотропной оболочки соответствующая математическая модель имеет вид [24]:

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - [k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)] \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
& \left. + [B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)] \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\
& \left. - [k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)]w \right\} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - [k_x B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + k_y B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*)] \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
& + [B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 2B (1 - \Gamma^*)] \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right\} + \\
& + 2 \frac{\partial h}{\partial x} B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
& + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - [k_y B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) + k_x B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)] w \left. \right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{h^3}{12} \left[ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + (8B (1 - \Gamma^*) + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} \left. \right] + \frac{1}{4} \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left( B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^3} + (B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \times \\
& \times \left[ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial y^3} + (B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{4} \left[ 2h \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times \\
& \times \left( B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial y^2} + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2} \right) + \left[ 2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] 2B (1 - \Gamma^*) \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x \partial y} - \\
& - h \left\{ (k_x B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) + k_y B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)) \frac{\partial u}{\partial x} + (k_x B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + k_y B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*)) \frac{\partial v}{\partial y} - \right. \\
& - (k_x^2 B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) + k_x k_y B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + k_x k_y B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + k_y^2 B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*)) w + \\
& + \frac{1}{2} (k_x B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) + k_y B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} (k_x B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + k_y B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*)) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right\} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (k_x B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) + k_y B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*)) \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
& + (B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 2B (1 - \Gamma^*)) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B (1 - \Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right.
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\right)w \left. \right\} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right\} - \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\
& - \left. \left( k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \right) w \right\} - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left( k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \left( B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 2B(1-\Gamma^*) \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left. B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial h}{\partial x} B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \right. \\
& - \left. \left. \left( k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \right) w \right\} \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& - \left. \left. \left( k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \right) w \right\} \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& - \left. \left. 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h B(1-\Gamma^*) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \right. \right.
\end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, математические модели задачи о динамической устойчивости вязкоупругих изотропных и ортотропных оболочек переменной толщины в геометрически нелинейной постановке описываются системами интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида (1) и, соответственно, (2). Начальные и краевые (граничные) условия считаются заданными.

## 2. Расчет динамической устойчивости вязкоупругих изотропных пологих оболочек переменной толщины

Решение полученных систем уравнений (1) и (2) осуществляем с помощью метода Бубнова–Галеркина при аппроксимации искомых функций  $u, v$  и  $w$  посредством некоторой полной системы известных (аппроксимирующих) функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям [27].

Полагая оболочку шарнирно опертой по контуру (краю), решение систем уравнений (1) и (2) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \\
w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad w_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $u_{nm} = u_{nm}(t)$ ,  $v_{nm} = v_{nm}(t)$ ,  $w_{nm} = w_{nm}(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$  – подлежащие определению коэффициенты (функции времени).

Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины

Подставляя выражения (3) в систему уравнений (1) и выполняя известную процедуру Бубнова–Галеркина с использованием безразмерных параметров

$$\frac{u}{h_0}, \frac{v}{h_0}, \frac{w}{h_0}, \frac{w_0}{h_0}, \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{h}{h_0}, \lambda = \frac{a}{b}, \delta = \frac{b}{h_0}, \bar{k}_x = \frac{a^2}{h_0 R_x}, \bar{k}_y = \frac{b^2}{h_0 R_y}, t^* = \frac{P}{P_{кр}} = \frac{\nu t}{P_{кр}} = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{кр}^*},$$

$$P^* = \frac{P}{E} \left( \frac{b}{h_0} \right)^2, \frac{q}{E} \left( \frac{b}{h_0} \right)^4, S = P_{кр}^* \left( \frac{\pi c E h_0^3}{\nu b^4} \right)^2; P_{кр}^* = \frac{P_{кр}}{E (b/h_0)^2} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)}, \Gamma(t) \frac{\sqrt{S}}{\omega},$$

получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (сохраняем прежние обозначения для искоемых функций  $w_{nm} = w_{nm}(t), u_{nm} = u_{nm}(t), v_{nm} = v_{nm}(t)$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( d_{1klmn} u_{nm} + \lambda e_{1klmn} v_{nm} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{k_x + \lambda^2 \mu k_y}{\lambda \delta} f_{1klmn} (w_{nm} - w_{0nm}) \right) + \frac{1}{\delta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{1klmnij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} = 0, \\ & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klmn} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( \frac{1}{\lambda} d_{2klmn} u_{nm} + e_{2klmn} v_{nm} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\lambda^2 k_y + \mu k_x}{\lambda^2 \delta} f_{2klmn} (w_{nm} - w_{0nm}) \right) + \frac{1}{\delta} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{2klmnij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} = 0, \\ & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{klmn} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 (1 - \Gamma^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left( d_{3klmn} u_{nm} + e_{3klmn} v_{nm} + f_{3klmn} (w_{nm} - w_{0nm}) \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M g_{3klmnij} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \right\} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{klmn}^* w_{nm} t^* - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} (1 - \Gamma^*) \left( d_{4klmnij} u_{ij} + \right. \right. \\ & \left. \left. + e_{4klmnij} v_{ij} + f_{4klmnij} (w_{ij} - w_{0ij}) \right) + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M g_{klmnijrs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) \right\} = 0, \\ & u_{nm}(0) = u_{0nm}, \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, v_{nm}(0) = v_{0nm}, \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, w_{nm}(0) = w_{0nm}, \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость звука в материале оболочки;  $P_{кр}^* = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)} E \left( \frac{h_0}{b} \right)^2$  – статическая

критическая нагрузка;  $\omega = \sqrt{\pi^2 E h_0^2 P_{кр}^* / (\rho b^4)}$  – частота основного тона колебаний. (Остальные постоянные коэффициенты, входящие в систему (4), связаны с координатными функциями и их производными).

Интегрирование полученной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений проводим с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [7, 28], который в обобщенном виде изложен в работе [29]. В качестве ядер релаксации используем слабосингулярное ядро Колтунова-Ржаницына вида [30]:

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (5)$$

На основе предложенного алгоритма составлена программа для расчетов на ЭВМ (на алгоритмическом языке *Delphi*) и проведены соответствующие вычислительные эксперименты. Вычисления проводились при различных значениях реологических и геометрических параметров вязкоупругой пологой оболочки.

В качестве критерия устойчивости, определяющего критическое время и нагрузку, принято, следуя работе [2], условие от том, что «стрела прогиба» не должна превышать некоторую заранее установленную величину (равную, в частности, толщине оболочки или пластины). Для определения динамической Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины

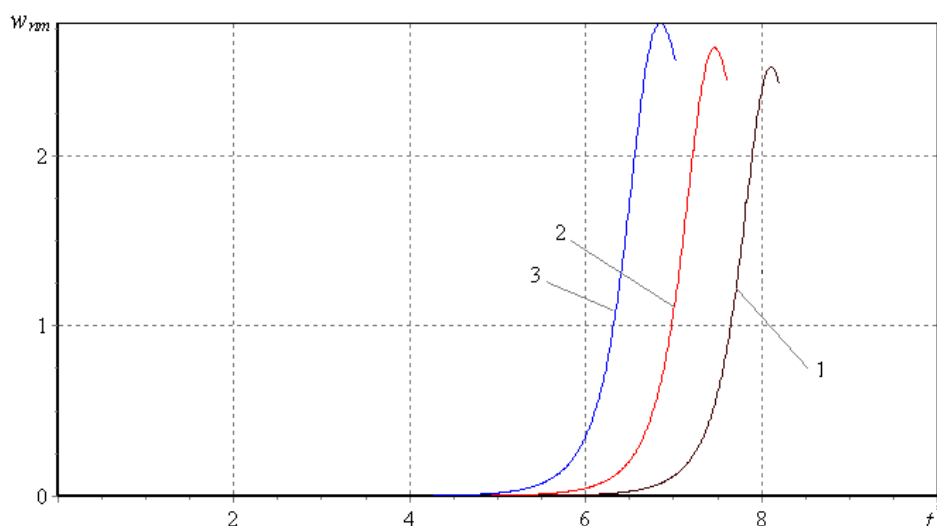
критической нагрузки используем коэффициент динамичности  $K_D$ , равный отношению динамической критической нагрузки к верхней статической.

Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах оболочки отражены на графиках, представленных на рис.1–3.

Закон изменения толщины оболочки был принят в виде:  $h = h(x) = 1 - \alpha^* x$ , где  $\alpha^*$  – параметр, характеризующий изменение толщины. В качестве исходных данных принимались следующие значения (если не оговорено иное):

$$A = 0,05; \alpha = 0,25; \beta = 0,05; \mu = 0,3; \delta = 25; k_x = k_y = 20; S = 1; w_0 = 0,0001; q = 0; \lambda = 1 \text{ и } \alpha^* = 0,5.$$

На рис. 1 приведены графики зависимости величин прогиба от времени, соответствующие значениям коэффициента вязкости  $A = 0$  (кривая 1),  $A = 0,05$  (кривая 2) и  $A = 0,1$  (кривая 3). Указанным значениям параметра  $A$  соответствуют следующие значения коэффициента динамичности:  $K_D = 7,62$ ,  $K_D = 6,94$  и  $K_D = 6,32$ . Полученные результаты показывают, что учет вязкоупругих свойств материала рассматриваемой оболочки приводит к уменьшению критической нагрузки.



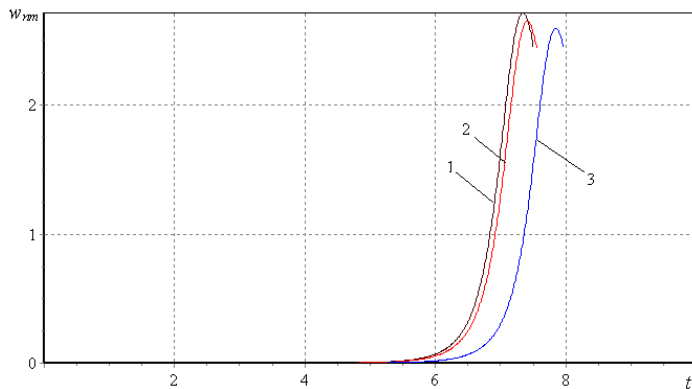
**Рисунок 1. Зависимости прогиба изотропной оболочки от времени при различных значениях коэффициента вязкости:**

$A = 0$  (кривая 1),  $A = 0,05$  (кривая 2) и  $A = 0,1$  (кривая 3).

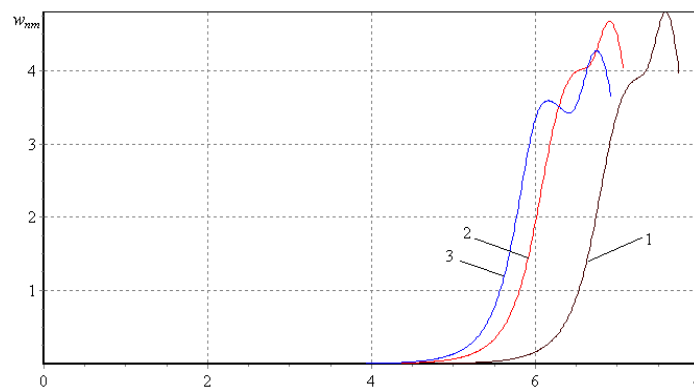
Исследовано также влияние на динамическую устойчивость оболочки параметра  $\alpha^*$  изменения ее толщины. На рис. 2 представлены зависимости прогиба от времени, отвечающие значениям  $\alpha^* = 0$  (кривая 1),  $\alpha^* = 0,4$  (кривая 2) и  $\alpha^* = 0,8$  (кривая 3). Соответствующий коэффициент динамичности  $K_D = 6,84$ ,  $K_D = 6,92$  и  $K_D = 7,36$ . Вычисления производились при равных объемах полой оболочки постоянной и переменной толщины. Из графиков видно, что с уменьшением толщины оболочки значение коэффициента  $K_D$  увеличивается.

На рис. 3 представлены результаты исследования влияния на динамическую устойчивость параметра  $r$  изменения ее толщины, подчиняющейся иному закону, а именно  $h(x) = 1 + 0,3 \sin(2r - 1)\pi x$  (кривые 1, 2 и 3, отвечающие значениям  $r = 0,5$ ,  $r = 1$  и  $r = 2$ ). Получены соответствующие значения коэффициента динамичности:  $K_D = 6,53$ ,  $K_D = 5,81$  и  $K_D = 5,57$ . Вычисления производились при равных объемах полой оболочки постоянной и переменной толщины. Из рассмотрения рис. 3 видно, что с увеличением толщины значение коэффициента  $K_D$  уменьшается.





**Рисунок 2. Зависимость прогиба от времени при различных значениях параметра  $\alpha^*$  изменения толщины изотропной оболочки:**  
 $(h = h(x) = 1 - \alpha^* x)$ :  $\alpha^* = 0$  (кривая 1),  $\alpha^* = 0,4$  (кривая 2) и  $\alpha^* = 0,8$  (кривая 3)



**Рисунок 3. Зависимость прогиба от времени при различных значениях параметра изменения толщины изотропной оболочки:**  
 $(h(x) = 1 + 0,3 \sin(2r - 1)\pi x)$ :  $r = 0,5$  (кривая 1),  $r = 1$  (кривая 2),  $r = 2$  (кривая 3)

### 3. Расчет динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных пологих оболочек переменной толщины

Рассмотрим теперь задачу о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пологой оболочки переменной толщины. При принятых предположениях математическая модель задачи описывается системой уравнений (2). Считая, что оболочка шарнирно оперта по контуру, все перемещения (включая полный и начальный прогибы) аппроксимируем в методе Бубнова–Галеркина в виде (3).

В результате получаем следующую дискретную модель рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ (1 - \Gamma_{11}^*) d_{1klmn} + (1 - \Gamma^*) d_{2klmn} \right] u_{nm} + \right. \\
 & + \left[ (1 - \Gamma_{12}^*) d_{3klmn} + (1 - \Gamma^*) d_{4klmn} \right] v_{nm} + \left. \left[ (1 - \Gamma_{11}^*) d_{5klmn} + (1 - \Gamma_{12}^*) d_{6klmn} \right] (w_{nm} - w_{0nm}) \right\} + \\
 & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left\{ (1 - \Gamma_{11}^*) d_{7klmnij} + (1 - \Gamma_{12}^*) d_{8klmnij} + (1 - \Gamma^*) d_{9klmnij} \right\} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \Big\} = 0, \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klmn} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ (1 - \Gamma_{21}^*) e_{1klmn} + (1 - \Gamma^*) e_{2klmn} \right] u_{nm} + \right. \\
 & + \left[ (1 - \Gamma_{22}^*) e_{3klmn} + (1 - \Gamma^*) e_{4klmn} \right] v_{nm} + \left. \left[ (1 - \Gamma_{22}^*) e_{5klmn} + (1 - \Gamma_{21}^*) e_{6klmn} \right] (w_{nm} - w_{0nm}) \right\} + \\
 & + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left\{ (1 - \Gamma_{22}^*) e_{7klmnij} + (1 - \Gamma_{21}^*) e_{8klmnij} + (1 - \Gamma^*) e_{9klmnij} \right\} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \Big\} = 0, \quad (6) \\
 & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{klmn} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{klmn}^* w_{nm} t^* + \eta_3 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[ (1 - \Gamma_{11}^*) f_{1klmn} + (1 - \Gamma_{21}^*) f_{2klmn} \right] u_{nm} + \right. \\
 & + \left[ (1 - \Gamma_{12}^*) f_{3klmn} + (1 - \Gamma_{22}^*) f_{4klmn} \right] v_{nm} + \left. \left[ (1 - \Gamma_{11}^*) f_{5klmn} + (1 - \Gamma_{12}^*) f_{6klmn} + (1 - \Gamma_{22}^*) f_{7klmn} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. (1 - \Gamma_{21}^*) f_{8klmn} + (1 - \Gamma^*) f_{9klmn} \right] (w_{nm} - w_{0nm}) \right\} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left\{ (1 - \Gamma_{11}^*) g_{1klmnij} + \right. \\
 & + \left. \left. (1 - \Gamma_{12}^*) g_{2klmnij} + (1 - \Gamma_{21}^*) g_{3klmnij} + (1 - \Gamma_{22}^*) g_{4klmnij} \right\} (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \Big\} = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[ (1-\Gamma_{11}^*) \xi_{1klmij} + (1-\Gamma_{21}^*) \xi_{2klmij} + (1-\Gamma^*) \xi_{3klmij} \right] u_{ij} + \right. \\
& \quad \left. + [(1-\Gamma_{22}^*) \xi_{4klmij} + (1-\Gamma_{12}^*) \xi_{5klmij} + (1-\Gamma^*) \xi_{6klmij}] v_{ij} + \right. \\
& \quad \left. + [(1-\Gamma_{11}^*) \xi_{7klmij} + (1-\Gamma_{12}^*) \xi_{8klmij} + (1-\Gamma_{22}^*) \xi_{9klmij} + (1-\Gamma_{21}^*) \xi_{10klmij}] (w_{ij} - w_{0ij}) \right\} + \\
& \quad + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left\{ (1-\Gamma_{11}^*) g_{5klmijrs} + (1-\Gamma_{12}^*) g_{6klmijrs} + (1-\Gamma_{22}^*) g_{7klmijrs} + \right. \\
& \quad \left. + (1-\Gamma_{21}^*) g_{8klmijrs} + (1-\Gamma^*) g_{9klmijrs} \right\} (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) \Big\} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$u_{nm}(0) = u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \quad w_{nm}(0) = w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}.$$

Интегрирование системы (6) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [7, 28, 29]. В качестве ядер релаксации  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{ij}$ ,  $i = 1, 2; j = 1, 2$  использованы слабосингулярные ядра Колтунова–Ржаницына вида (5).

Результаты вычислений на ЭВМ, соответствующие различным физическим и геометрическим параметрам, выражаются в виде графиков, представленных на рис. 4, 5. Закон изменения толщины оболочки был принят в виде:  $h = 1 - \alpha^* x$ . При вычислениях использовались следующие исходные данные (если не оговорено иное):

$$\mu = 0,3; \quad \delta = 25; \quad k_x = k_y = 20; \quad S = 1; \quad w_0 = 0,0001; \quad q = 0; \quad \lambda = 1 \text{ и } \alpha^* = 0,5.$$

Рис. 4 характеризует влияние вязкоупругих свойств материала на поведение ортотропной пологой оболочки при ее деформировании. Кривая 1 соответствует случаю, при котором вязкоупругие свойства материала не учитываются ( $A = A_{ij} = 0; i = 1, 2; j = 1, 2$ ) («упругому» случаю). Кривая 2 отвечает случаю, при котором вязкоупругие свойства материала учитываются только при сдвиге, а кривая 3 – случаю, при котором вязкоупругие свойства материала учитываются при растяжении (сжатии) и сдвиге ( $A = A_{ij} = 0,05; i = 1, 2; j = 1, 2$ ).

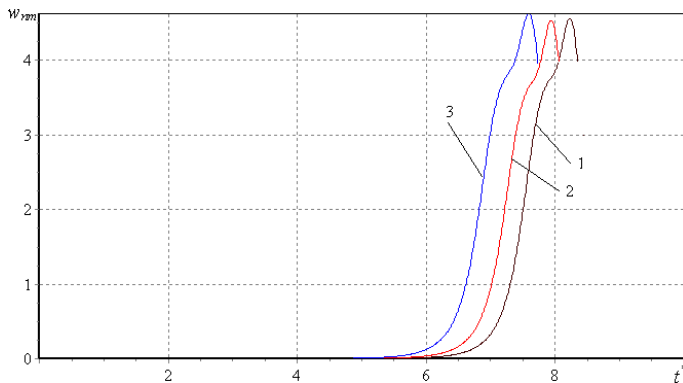


Рисунок 4. Зависимость прогиба ортотропной оболочки от времени при

- неучете вязкоупругих свойств материала (кривая 1);
- учете вязкоупругих свойств материала при сдвиге (кривая 2);
- учете вязкоупругих свойств материала при растяжении (сжатии) и сдвиге (кривая 3).

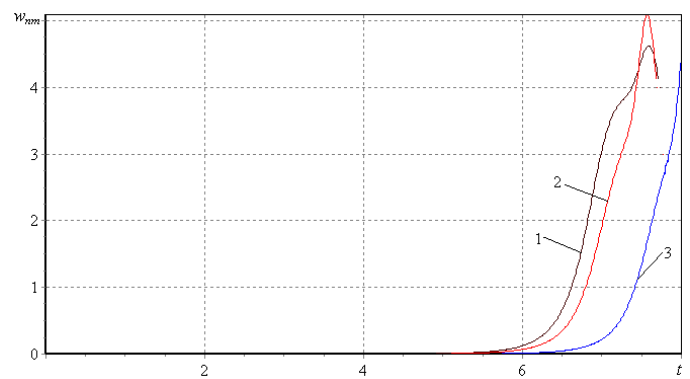


Рисунок 5. Зависимость прогиба от времени анизотропной оболочки при различных значениях параметра анизотропии  $\Delta$ :  $\Delta = 1$  (кривая 1),  $\Delta = 2$  (кривая 2) и  $\Delta = 3$  (кривая 3)

Коэффициент динамичности в указанных случаях принимает значения  $K_d = 7,3$ ,  $K_d = 7,01$  и  $K_d = 6,61$  соответственно. Из рис. 4 следует, что полный учет вязкоупругих свойств материала приводит к более раннему, интенсивному возрастанию прогибов и, соответственно, уменьшению значений  $K_d$ .

Рис. 5 иллюстрирует влияние анизотропных свойств материала на процесс устойчивости пологой оболочки.

Как видно из рис. 3, увеличение параметра  $\Delta$ , характеризующего степень анизотропии (кривая 1 построена при  $\Delta = 1$ ; кривая 2 – при  $\Delta = 2$  и кривая 3 – при  $\Delta = 3$ ), приводит к более позднему и интенсивному возрастанию прогибов. Установлено, что значение  $K_d$  (отвечающего критическим значениям времени и нагрузки) с увеличением параметра  $\Delta$  также возрастает.

### Заключение

Исследована динамическая устойчивость пологих оболочек переменной толщины с учетом геометрической нелинейности, а также вязкоупругих и анизотропных свойств материала. В широких пределах изменения физико-механических и геометрических параметров определены коэффициенты динамичности, позволяющие находить критическую нагрузку и критическое время.

Выявлен ряд новых механических эффектов, в частности:

- получаемые численные значения решения задач устойчивости оболочек в упругой и вязкоупругой постановке отличаются друг от друга на 15–20%;
- учет вязкоупругих свойств материала приводит к существенному снижению критических нагрузки и времени;
- учет изменения толщины тонкостенных элементов конструкций по различным законам приводит к уменьшению критической нагрузки и времени до 20–50%;
- учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению коэффициента динамичности до 20–40%.

Для всех рассмотренных случаев проводилось сравнение результатов, полученных как при одночленной аппроксимации, так и при многочленных аппроксимациях прогиба. Установлено, в частности, что даже в случае оболочек постоянной толщины следует использовать многочленную аппроксимацию прогиба.

Проведено исследование сходимости метода Бубнова–Галеркина. Для каждого случая найдено число полуволн, необходимое для получения решения достаточной точности.

### Литература

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1956. 600 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.
3. Амиро И. Я. и др. Колебания ребристых оболочек вращения. Киев: Наукова Думка. 1988. 172 с.
4. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Исследования в области устойчивости ребристых оболочек // Прикладная механика. 1983. Т. 19. №11. С. 3-20.
5. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Наука, 1968. 416 с.
6. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Тангиров А. Э. Динамическая устойчивость вязкоупругой ортотропной пластины // ДАН УзССР. №9. 1989. С. 19-21.
7. Эшматов Х. Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Дис... на соис. учен. степ. док.техн.наук: 18.05.13. Ин-т проблем моделирования в энергетике АН Украины. Киев, 1991. 337 с.
8. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Акбаров У. Й. Устойчивость вязкоупругой ортотропной пластины при динамическом нагружении // Труды 15-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1990. С. 372-378.
9. Эшматов Х., Юсупов М. Исследование динамической устойчивости вязкоупругих пластин переменной жесткости // Изв. АН УзССР. Сер.техн. наук. 1987. №4. С. 44–47.
10. Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне. 1987. 296 с.

11. Жгутов В. М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». 2007. № 4. С.20-23.
12. Жгутов В. М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. М. : Изд-во РУДН, 2008. С. 341-346.
13. Жгутов В. М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. С. 110-131.
14. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». 2010. № 2. С. 53–59.
15. Абдикаримов Р. А., Ходжаев Д. А. Динамическая устойчивость вязкоупругих прямоугольных пластин с переменной жесткостью // II Всероссийские научные Зворыкинские чтения. Сб. тез. докладов, Муром, 5 февраля 2010 г. Муром, 2010. С. 657.
16. Абдикаримов Р. А. Алгоритмизация нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Проблемы информатики и энергетики. Ташкент, 2010. №1. С. 92-97.
17. Абдикаримов Р. А. Численное исследование нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью // Проблемы архитектуры и строительства. Самарканд, 2010. №1. С. 37-42.
18. Абдикаримов Р. А. Математическая модель нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью при различных граничных условиях // Проблемы архитектуры и строительства. Самарканд, 2010. №1. С. 44-47.
19. Abdikarimov R. A. Deterministic Simulations of Nonlinear Vibration of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, March/April 2010, Seismological Research Letters. Vol. 81, N.2. Pp.343.
20. Abdikarimov R. A., Khodzhaev D. A. Deterministic Calculation of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, March/April 2010, Seismological Research Letters. Vol. 81, N.2. Pp.343.
21. Верлань А. Ф., Абдикаримов Р. А. Математическое моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Материалы Международной научной конференции «Моделирование-2010», 12-14 мая 2010, Киев. Киев: Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины, 2010. Том 1. С. 80-84.
22. Абдикаримов Р. А. Нелинейные колебания вязкоупругих пластин с переменной жесткостью // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. Ташкент. 2010. № 4. С. 40-42.
23. Verlan A. F., Abdikarimov R. A. Mathematical and Computer Modeling of Some Problems of the Mechanics Resulted in the Integro-differential Equations // Proceedings of the International Conference "Integral Equations-2010" dedicated to 50 years of the Department of Numerical Mathematics, 25-27 August 2010, Lviv. Lviv : PAIS, 2010. Pp.169-172.
24. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. Санкт-Петербург, 2010. №6. С. 38 47.
25. Верлань А. Ф., Абдикаримов Р. А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. 2010. Т. 32. №2. С. 3-14.
26. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (ассиметричные случаи) // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8. С.47-55.
27. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М. : Наука, 1966. 432 с.
28. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. 1987. № 5 (51). С. 867-871.
29. Эшматов Х., Абдикаримов Р. А., Бобоназаров Ш. П. Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через нее жидкостью при различных граничных условиях // Проблемы механики. 1995. №1. С. 20-24.
30. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М. : Высшая школа, 1976. 276 с.

\* *Рустамхан Алимханович Абдикаримов, Ташкент, Узбекистан*  
 Тел. раб.: +998(71)234-66-41; эл. почта: [rabdikarimov@mail.ru](mailto:rabdikarimov@mail.ru)

\*\* *Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербурга, Россия*  
 Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: [abc\\_kitezh@mail.ru](mailto:abc_kitezh@mail.ru)

# Geometrically nonlinear mathematical simulation the viscoelastic gently sloping variable-thickness shells' dynamical steadiness

**R.A. Abdikarimov,**

Tashkent Finance Institute, Tashkent, Uzbekistan  
+998(71)234-66-41; e-mail: rabdikarimov@mail.ru

**V.M. Zhgoutov,**

"Architectural and Engineering Company Kitezh" LTd., Saint-Petersburg, Russia  
+7(812)378-20-83; e-mail: abc\_kitezh@mail.ru

## Key words

gently-sloping variable-thickness shell; viscoelasticity; dynamical steadiness

## Abstract

The problem of viscoelastic isotropic and orthotropic shells steadiness under the axial dynamic load was examined. The behavior of gently-sloping variable-thickness shells and plates under all these factors is not enough investigated and needs further inquiry.

Using the Bubnov-Galerkin method, the system of nonlinear ordinary integro-differential expressions in partial derivatives was obtained. The numerical method based on the quadrature rules was used for solving it.

The algorithm for the computer solving was obtained. The computer steadiness modeling of the analyzed shells was also held, under varying its physical, mechanical and geometrical parameters.

## References

1. Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustoychivost uprugikh sistem* [Dynamical steadiness of elastic systems]. Moscow: Gostekhizdat. 1956. 600 p.
2. Volmir A. S. *Ustoychivost deformiruemykh sistem* [Steadiness of deformable systems]. Moscow : Nauka. 1967. 984 p.
3. Amiro I. Ya. i dr. *Kolebaniya rebristyx obolochek vrashcheniya* [Oscillations of ribbed shells of revolution]. Kiev : Naukova Dumka. 1988. 172 p.
4. Amiro I. Ya., Zarutskiy V. A. *Prikladnaya mekhanika*. 1983. vol. 19. No. 11. Pp. 3-20.
5. Rzhantsyn A. R. *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow : Nauka, 1968. 416 p.
6. Badalov F. B., Eshmatov KH., Tangirov A. E. *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*. No. 9. 1989. Pp. 19-21.
7. Eshmatov KH. *Integralnyy metod matematicheskogo modelirovaniya zadach dinamiki vyzkouprugikh sistem* [Integral method of mathematical simulation in problems of viscoelastic system dynamics]: theses. Kiev, 1991. 337 p.
8. Badalov F. B., Eshmatov KH., Akbarov U. Y. *Trudy 15-y Vsesoyuznoy konferentsii po teorii plastin i obolochek* [Proceedings: 15<sup>th</sup> USSR conference on theory of plates and shells]. Kazan, 1990. Pp. 372-378.
9. Eshmatov Kh., Yusupov M. *Izvestiya AN UzSSR. Ser.tekhn. nauk*. 1987. No. 4. p. 44-47.
10. Bogdanovich A. E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of dynamics of cylindrical composite shell]. Riga : Zinatne. 1987. 296 p.
11. Zhgoutov V. M. *Izv. Orlovskogo gos. tekhn. un-ta*. Ser. «Stroitelstvo, transport». 2007. No. 4. Pp. 20-23.
12. Zhgoutov V. M. *Inzhenernye sistemy – 2008: Vserossiyskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya: Trudy konferentsii* [Engineering systems-2008: Proceedings]. Moscow : IZD-VO RUDN, 2008. Pp. 341-346.
13. Zhgoutov V. M. *Sbornik dokladov VII Mezhdunarodnoy konferentsii po problemam prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte 23-24 aprelya 2008 goda* [VII International conference on problems of materials and structures strength in transport industry: Proceedings]. Saint-Petersburg, 2008. Pp. 110-131.
14. Zhgoutov V. M. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». 2010.No. 2. Pp. 53-59.
15. Abdikarimov R. A., KHodzhaev D. A. *II Vserossiyskie nauchnye Zvorykinskie chteniya. Sb. tez. dokladov* [II Russian Scientific Zvorykin Readings: Proceedings]. Murom, 2010. P. 657.
16. Abdikarimov R. A. *Problemy informatiki i energetiki*. Tashkent, 2010. No. 1. Pp. 92-97.
17. Abdikarimov R. A. *Problemy arkhitektury i stroitelstva*. Samarkand, 2010. No. 1. Pp. 37-42.
18. Abdikarimov R. A. *Problemy arkhitektury i stroitelstva*. Samarkand, 2010. No. 1. Pp. 44-47.
19. Abdikarimov R. A. *Seismological Research Letters*. Vol. 81, N.2. Pp.343.

20. Verlan A. F., Abdikarimov R. A. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Modelirovanie-2010»* [International conference "Modelling-2010": Proceedings]. Kiev., 2010. Vol. 1. Pp. 80-84.
21. Abdikarimov R. A. *Doklady Akademii Nauk Respubliki Uzbekistan*. Tashkent. 2010. No. 4. p. 40-42.
22. Verlan A. F., Abdikarimov R. A. *Proceedings of the International Conference "Integral Equations-2010" dedicated to 50 years of the Department of Numerical Mathematics, 25-27 August 2010, Lviv*. Lviv : PAIS, 2010. Pp. 169-172.
23. Abdikarimov R. A., ZHgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. Saint-Petersburg, 2010. No. 6. p. 38 47.
24. Verlan A. F., Abdikarimov R. A., Eshmatov Kh. *Elektronnoe modelirovanie*. 2010. vol. 32. No. 2. p. 3-14.
25. Abdikarimov R. A., ZHgutov V. M. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No. 8. p.47-55.
26. Mikhlin S. G. *CHislennaya realizatsiya variatsionnykh metodov* [Numerical realization of variation methods]. Moscow : Nauka, 1966. 432 p.
27. Badalov F. B., Eshmatov KH., Yusupov M. *PMM*. 1987. No. 5 (51). Pp. 867-871.
28. Eshmatov KH., Abdikarimov R. A., Bobonazarov SH. P. *Problemy mekhaniki*. 1995. No. 1. Pp. 20-24.
29. Koltunov M. A. *Polzuchest i relaksatsiya* [Creep and relaxation]. Moscow : Vysshaya shkola, 1976. 276 p.

**Full text of this article in Russian: pp. 12-22**