

*На правах рукописи*

Абдаллах Аббас Галал

# Новая математическая модель динамики многороторных гиростатов

специальность 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

## АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2002

Работа выполнена на кафедре “Теоретическая механика”  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,  
Жилин Павел Андреевич

Официальные оппоненты — доктор технических наук,  
Вильчевский Никита Олегович  
— доктор физико-математических наук,  
Тихонов Алексей Александрович

Ведущая организация — Институт проблем машиноведения РАН

Защита диссертации состоится 12 февраля 2003 г. в 16.00 час. на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 по физико-математическим наукам по адресу: 195251. С.-Петербург, ул. Политехническая, 29, к.1, ауд.41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГПУ.

Автореферат разослан 24 декабря 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор биологических наук

А. В. Зинковский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы**

В диссертационной работе рассматривается задача о свободном вращательном движении гиростата. Актуальность темы диссертации обусловлена широким применением в технике различных гироскопических приборов. В частности, результаты исследования задачи о движении гиростата могут найти применение при стабилизации гироскопических платформ, при стабилизации и управлении движением искусственных спутников Земли, а также при расчете и проектировании различных гироскопических приборов. Задача о движении гиростата рассматривается в нелинейной постановке. Лишь в некоторых частных случаях задачи динамики твердого тела допускают простое аналитическое решение. Как правило, аналитическое решение построить не удается или оно имеет настолько сложный вид, что для практических целей оказывается непригодным. Известно, что численное решение задач динамики твердого тела может вызывать затруднения, возникающие из-за наличия полюсов. В связи с этим актуальной является задача выбора основных переменных, задающих вращательное движение твердого тела, и получения дифференциальных уравнений в наиболее удобной для численной реализации форме. При выборе основных переменных полезной оказывается любая информация о свойствах движения системы. Поэтому важное значение приобретает предварительное аналитическое исследование уравнений движения системы.

**Целью диссертационной работы** является вывод уравнений движения однороторного и многороторного гиростатов в векторной форме; выбор оптимальной формы представления тензора поворота несущего тела гиростата; построение аналитического решения задачи в случае свободного вращения и исследование свойств построенного решения; исследование асимптотических свойств движения гиростата в случае, когда ротор вращается двигателем ограниченной мощности.

**Метод исследования.** Получение дифференциальных уравнений движения осуществляется на основе фундаментальных законов механики с использованием аппарата прямого тензорного исчисления. В частных случаях при решении дифференциальных уравнений используются точные аналитические методы, а также асимптотические методы для построения приближенных решений. В более общих ситуациях, которые в некотором смысле типичны, используются численные методы. Кроме того, в работе широко используются компьютерные методы символьных вычислений.

**Научная новизна.** В диссертационной работе получены следующие новые результаты.

1. Получены уравнения движения однороторного гиростата в такой форме, что задача фактически сведена к определению движения вектора кинетического момента относительно несущего тела. В случае свободного движения построен интеграл энергии гиростата, зависящий только от единичного вектора, характеризующего движение вектора кинетического момента относительно несущего тела.
2. Рассмотрены три различные формы представления тензора поворота несущего тела гиростата. На основе анализа интеграла энергии, проведенного с помощью компьютерных методов символьных вычислений, найдены области параметров, при которых одна из рассмотренных форм представления тензора поворота будет наиболее удобна.
3. Построено точное решение задачи о свободном движении гиростата в квадратурах и исследованы периодические свойства построенного решения. На основании численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение гиростата, сделан вывод о том, что если ось собственного вращения несущего тела оказывается внутри годографа вектора кинетического момента гиростата, то угол собственного вращения — периодическая функция, а если ось собственного вращения несущего тела оказывается вне годографа вектора кинетического момента гиростата, то угол собственного вращения за время  $T$  увеличивается на  $2\pi$ .
4. Показано, что уравнения движения многороторного гиростата имеют точно такую же структуру, как и в случае однороторного гиростата. Отличие заключено только в параметрах, входящих в уравнения движения.
5. Рассмотрена задача о движении гиростата, на ротор которого действует момент двигателя ограниченной мощности. Исследованы асимптотические свойства решения при больших  $t$ . Доказано, что движение несущего тела стремится к вращению вокруг фиксированной оси, направление которой зависит от всех параметров задачи и начальных условий.
6. Получена система дифференциальных уравнений, приближенно описывающих движение гиростата, на ротор которого действует момент двигателя ограниченной мощности, при больших временах. В этом случае

коэффициенты системы зависят от времени, и она поддается только численному решению. На основании численного анализа доказана устойчивость движения.

**Достоверность полученных результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием точных аналитических решений дифференциальных уравнений и применением апробированных асимптотических методов.

**Практическая ценность.** Результаты работы могут использоваться при стабилизации гироскопических платформ и при стабилизации и управлении движением искусственных спутников, а также при расчете и проектировании различных гироскопических приборов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались: на международных конференциях XXIX, XXX Summer School “Advanced problems in Mechanics” С.-Пб., 2001, 2002 г., на семинарах кафедры теоретической механики (1999 – 2002 г.), а также на материалах V всероссийской конференции по проблемам науки и высшей школы “Фундаментальные исследования в технических университетах” СПбГТУ, 2001 г.

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в 3 работах. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и списка литературы. Изложена на 100 страницах, включая 37 рисунков. Список литературы содержит 108 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, приведено описание содержания работы и дан обзор литературы по рассматриваемой проблеме. Задачу о движении гиростата в простейшей постановке (движение свободного гиростата) и в более сложных постановках (движение гиростата в ньютоновском поле тяготения) исследовали многие авторы В. Вольтерра, Н. Е. Жуковский, Р. Граммель, М. Лагалли, А.И. Лурье, К. Магнус, П. А. Жилин, В. В. Румянцев, Л. М. Ковалева, А. П. Харламов, Э. И. Дружинин, В. Н. Скимель, А. А. Анчев, Г. В. Горр, А. С. Кельзон, Л. М. Малинин.

**В первой главе** Описываются основы математического аппарата, предназначенного для описания трехмерных вращений твердого тела, получаются

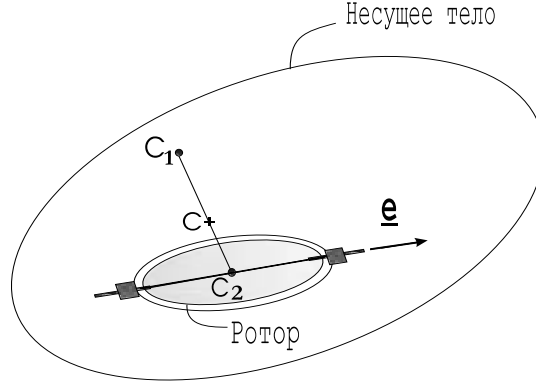


Рис. 1: Однороторный гиростат.

специальные формулы для тензора поворота и угловой скорости твердого тела и даются основные теоремы, использованные в работе.

**Во второй главе** рассматривается движение свободного однороторного гиростата, состоящего из несущего тела и ротора (см. рис.1).

Введем обозначения:  $m$  — масса гиростата,  $m_1$  — масса несущего тела,  $m_2$  — масса ротора,  $c$  — центр масс гиростата,  $c_1$  — центр масс несущего тела,  $c_2$  — центр масс ротора, который вращается относительно несущего тела вокруг оси  $\underline{e}$ ,  $\underline{\tau}$  — вектор  $\underline{c_1c_2}$ ,  $\underline{\tau}_1$  — вектор  $\underline{cc_1}$ ,  $\underline{\tau}_2$  — вектор  $\underline{cc_2}$ ,  $\underline{v}_c$  — скорость центра масс гиростата.

Центральный тензор инерции несущего тела в отсчетном положении обозначим символом  $\underline{\Theta}_1$ , а центральный тензор инерции несущего тела в актуальном положении обозначим символом  $\underline{\Theta}_1^{(t)}$ . Связь между  $\underline{\Theta}_1$  и  $\underline{\Theta}_1^{(t)}$  дается формулой:

$$\underline{\Theta}_1^{(t)} = \underline{P}(t) \cdot \underline{\Theta}_1 \cdot \underline{P}^T(t), \quad (1)$$

где  $\underline{P}(t)$  — тензор поворота несущего тела. В полость вставлен ротор с центральным тензором инерции  $\underline{\Theta}_2$ , вычисленным относительно центра масс ротора. Чтобы вращение ротора не меняло распределения масс в гиростате, он должен быть трансверсально-изотропным, т.е. его тензор инерции должен иметь вид

$$\underline{\Theta}_2 = \lambda \underline{e} \otimes \underline{e} + \mu (\underline{E} - \underline{e} \otimes \underline{e}), \quad (2)$$

где  $\underline{e}$  — единичный вектор, который определяет ось изотропии ротора в отсчетном положении несущего тела,  $\lambda$  — осевой момент инерции и  $\mu$  — экваториальный момент инерции. Кроме того, центр масс ротора должен находиться на оси симметрии. В актуальном положении центральный тензор инерции ротора имеет вид, аналогично выражению (1):

$$\underline{\Theta}_2^{(t)} = \underline{P}_*(t) \cdot \underline{\Theta}_2 \cdot \underline{P}_*^T(t), \quad (3)$$

где  $\underline{P}_*(t)$  — тензор поворота ротора. Полный поворот ротора можно записать в следующем виде

$$\underline{P}_* = \underline{P} \cdot \underline{Q}(\beta \underline{e}), \quad (4)$$

где  $\beta(t)$  есть угол поворота ротора относительно несущего тела. Тогда согласно формуле сложения угловых скоростей.

$$\underline{\omega}_* = \underline{\omega} + \dot{\beta} \underline{P} \cdot \underline{e}, \quad (5)$$

где  $\underline{\omega}$  — вектор угловой скорости несущего тела,  $\underline{\omega}_*$  — вектор угловой скорости ротора.

### Вывод уравнений движения гиростата

Первый и второй законы динамики Эйлера для свободного гиростата имеют вид

$$\dot{\underline{K}}_1 = 0, \quad \dot{\underline{K}}_2 = 0 \implies \underline{K}_1 = const, \quad \underline{K}_2 = \underline{L}, \quad (6)$$

где  $\underline{L}$  — постоянный вектор, определяемый по начальным условиям.

Поскольку внешняя сила и внешний момент равны нулю. Здесь  $\underline{K}_1$  — количество движения системы,  $\underline{K}_2$  — кинетический момент гиростата, вычисленный относительно его центра масс.

Для ротора второй закон динамики Эйлера, записанный относительно его центра масс, имеет вид

$$\dot{\underline{K}}_2^{(c_2)} = \underline{M}_{ext}^* \quad (7)$$

где  $\underline{K}_2^{(c_2)}$  — кинетический момент ротора, вычисленный относительно его центра масс,  $\underline{M}_{ext}^*$  — момент, действующий на ротор со стороны несущего тела. Из первого уравнения системы (6) следует

$$\underline{v}_c = const. \quad (8)$$

Для кинетического момента гиростата можно записать выражение

$$\underline{K}_2 = \underline{\Theta}_1^{(t)} \cdot \underline{\omega} + \underline{\tau}_1 \times m_1(\underline{v}_c + \underline{\omega} \times \underline{\tau}_1) + \underline{\Theta}_2^{(t)} \cdot \underline{\omega}_* + \underline{\tau}_2 \times m_2(\underline{v}_c + \underline{\omega} \times \underline{\tau}_2). \quad (9)$$

С учетом введенных обозначений последнее уравнение в (6) принимает вид

$$\underline{P} \cdot \{(\underline{\Theta}_1 + \underline{\Theta}_2 + (m_1 \tau_1^2 + m_2 \tau_2^2) \underline{E} - (m_1 \tilde{\tau}_1 \otimes \tilde{\tau}_1 + m_2 \tilde{\tau}_2 \otimes \tilde{\tau}_2)) \cdot \underline{\Omega} + \lambda \dot{\beta} \underline{e}\} = \underline{L}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\tau}_1 = \tau_1(0)$ ,  $\tilde{\tau}_2 = \tau_2(0)$ ,  $\underline{\Omega} = \underline{P}^T \cdot \underline{\omega}$ .

Будем считать, что трение в подшипниках оси ротора отсутствует. Тогда

$$\underline{M}_{ext}^* \cdot (\underline{P} \cdot \underline{e}) = 0 \implies \dot{\underline{K}}_2^{(c_2)} \cdot (\underline{P} \cdot \underline{e}) = 0.$$

Тогда

$$(\underline{\Theta}_2^{(t)} \cdot \underline{\omega}_*) \cdot (\underline{P} \cdot \underline{e}) = 0.$$

После несложных преобразований этому уравнению можно придать вид

$$\dot{\beta} = \omega_0 - \underline{e} \cdot \underline{\Omega}, \quad (11)$$

где  $\omega_0$  — константа, определяемая из начальных условий.

Итак, задача свелась к интегрированию системы уравнений

$$\underline{\Omega} = \underline{\Theta}_*^{-1} \cdot \{l\underline{m} - \lambda\omega_0\underline{e}\}, \quad \dot{\beta} = \omega_0 - \underline{\Omega} \cdot \underline{e}; \quad \dot{\underline{P}} = \underline{P} \times \underline{\Omega}, \quad (12)$$

где  $\underline{\Theta}_* = \underline{\Theta}_1 + \underline{\Theta}_2 + (m_1\tau_1^2 + m_2\tau_2^2)\underline{E} - m_1\tilde{\tau}_1 \otimes \tilde{\tau}_1 - m_2\tilde{\tau}_2 \otimes \tilde{\tau}_2 - \lambda\underline{e} \otimes \underline{e}$ ,  
 $\underline{m} = \underline{P}^T \cdot \hat{\underline{L}}$ ,  $\hat{\underline{L}} = \underline{L}/l$ ,  $l = |\underline{L}|$ .

Поскольку тензор  $\underline{\Theta}_*$  — симметричный, его можно представить в виде спектрального разложения

$$\underline{\Theta}_* = \theta_1\underline{d}_1 \otimes \underline{d}_1 + \theta_2\underline{d}_2 \otimes \underline{d}_2 + \theta_3\underline{d}_3 \otimes \underline{d}_3, \quad (13)$$

где  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$  — собственные векторы этого тензора. Доказано, что интеграл энергии имеет вид

$$\underline{\Omega} \cdot \underline{\Theta}_* \cdot \underline{\Omega} = h, \quad (14)$$

где  $h$  — константа, определяемая из начальных условий.

### Представление тензора поворота несущего тела

Согласно теореме Жилина, тензор поворота может быть представлен в виде

$$\underline{P} = \underline{Q}(\psi\hat{\underline{L}}) \cdot \underline{Q}(\theta\underline{n}) \cdot \underline{Q}(\phi\underline{d}_k), \quad \underline{n} = \hat{\underline{L}} \times \underline{d}_k / |\hat{\underline{L}} \times \underline{d}_k|. \quad (15)$$

Вектор  $\underline{m}$  принимает вид

$$\underline{m} = \underline{Q}^T(\phi\underline{d}_k) \cdot \underline{Q}^T(\theta\underline{n}) \cdot \hat{\underline{L}}, \quad (16)$$

где  $\underline{d}_k$  один из векторов  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ .

Введем следующий критерий выбора вектора  $\underline{d}_k$ :

$$\forall t \quad 0 < \underline{m}(t) \cdot \underline{d}_k < 1. \quad (17)$$

В этом случае угол  $(\alpha - \theta)$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\underline{d}_k$  и  $\hat{\underline{L}}$ , будет изменяться в пределах  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Определим при каком соотношении параметров в качестве вектора  $\underline{d}_k$  удобно выбрать вектор  $\underline{d}_3$  или  $(-\underline{d}_3)$ . Представим векторы  $\underline{m}$  и  $\underline{e}$  в виде разложения по базису  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ :

$$\underline{m} = x_m\underline{d}_1 + y_m\underline{d}_2 + z_m\underline{d}_3, \quad \underline{e} = e_1\underline{d}_1 + e_2\underline{d}_2 + e_3\underline{d}_3. \quad (18)$$



Тогда интеграл энергии (14), записанный в координатной форме, примет вид

$$\frac{1}{\theta_1}x_m^2 + \frac{1}{\theta_2}y_m^2 + \frac{1}{\theta_3}z_m^2 - \frac{2\lambda\omega_0e_1}{l\theta_1}x_m - \frac{2\lambda\omega_0e_2}{l\theta_2}y_m - \frac{2\lambda\omega_0e_3}{l\theta_3}z_m = \frac{h}{l^2} - \frac{\lambda^2\omega_0^2}{l^2}\left(\frac{e_1^2}{\theta_1} + \frac{e_2^2}{\theta_2} + \frac{e_3^2}{\theta_3}\right) \quad (19)$$

Так как вектор  $\underline{m}$  — единичный, его координаты связаны соотношением

$$x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 1. \quad (20)$$

Таким образом, годограф вектора  $\underline{m}$  — это пересечение эллипсоида (19) и единичной сферы (20).

С помощью уравнения (20) исключим  $z_m^2$  из уравнения (19). В результате уравнение (19) примет вид

$$\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_3}\right)(x_m - x_0)^2 + \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_3}\right)(y_m - y_0)^2 = \frac{2\lambda\omega_0e_3}{l\theta_3}z_m + s_3, \quad (21)$$

где

$$x_0 = \frac{\lambda\omega_0e_1\theta_3}{l(\theta_3 - \theta_1)}, \quad y_0 = \frac{\lambda\omega_0e_2\theta_3}{l(\theta_3 - \theta_2)}, \quad s_3 = \frac{h}{l^2} - \frac{1}{\theta_3} + \frac{\lambda^2\omega_0^2}{l^2}\left(\frac{e_1^2}{\theta_3 - \theta_1} + \frac{e_2^2}{\theta_3 - \theta_2} - \frac{e_3^2}{\theta_3}\right).$$

Для определенности будем считать:  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ ,  $\omega_0 > 0$ ,  $\underline{e} \cdot \underline{d}_1 \geq 0$ ,  $\underline{e} \cdot \underline{d}_3 \geq 0$ . Система уравнений (20), (21) эквивалентна системе (20), (19). Поэтому пересечения эллипсоида (19) со сферой (20) и пересечение параболоида (21) со сферой (20) совпадают. Рисунки 5.а, 5.б, 5.в слева демонстрируют различные положения параболоида (21) относительно сферы (20), а справа сечения параболоида и сферы с плоскостью  $z_m = 0$ . На рис. 5.а изображен случай, когда годограф вектора  $\underline{m}$  расположен выше экватора, то есть выполняется условие  $\underline{d}_3 \cdot \underline{m} > 0$  и в качестве вектора  $\underline{d}_k$  следует выбрать вектор  $\underline{d}_3$ . На рис. 5.б изображен случай, когда годограф вектора  $\underline{m}$  расположен ниже экватора то есть выполняется условие  $\underline{d}_3 \cdot \underline{m} < 0$  и в качестве вектора  $\underline{d}_k$  следует выбрать вектор  $(-\underline{d}_3)$ . На рис. 5.в изображены случаи когда годограф вектора  $\underline{m}$  пересекает экватор и располагается в обеих частях сферы.

Таким образом,  $\underline{d}_3$  или  $(-\underline{d}_3)$  удобно выбрать в качестве вектора  $\underline{d}_k$  в том случае, если годограф вектора  $\underline{m}$  не пересекает экватор сферы, т.е. когда сечения поверхностей (20) и (21) с плоскостью  $z_m = 0$  не имеет общих точек (см. рис.5.а, 5.б). Найдем условия, при которых эллипс

$$\frac{1}{\theta_1}x_m^2 + \frac{1}{\theta_2}y_m^2 - \frac{2\lambda\omega_0e_1}{l\theta_1}x_m - \frac{2\lambda\omega_0e_2}{l\theta_2}y_m = \frac{h}{l^2} - \frac{\lambda^2\omega_0^2}{l^2}\left(\frac{e_1^2}{\theta_1} + \frac{e_2^2}{\theta_2} + \frac{e_3^2}{\theta_3}\right) \quad (22)$$

и окружность

$$x_m^2 + y_m^2 = 1 \quad (23)$$

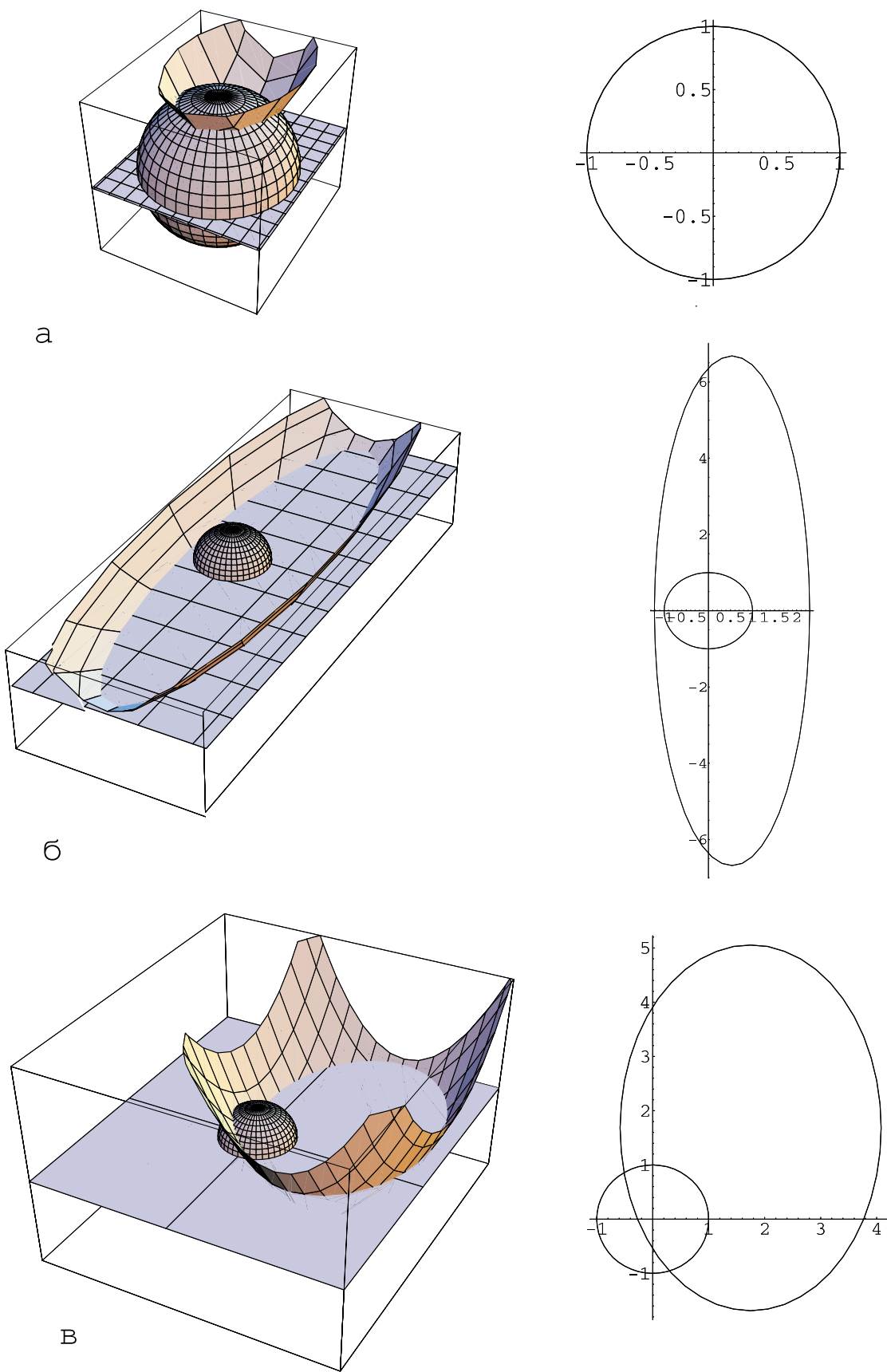


Рис. 2: различные положения параболоида (21) относительно сферы (20), и их сечения с плоскостью  $z_m = 0$ .

не имеют общих точек.

С помощью системы компьютерный алгебры доказано, что эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_z < 0, \quad \delta_z < 0, \tag{24} \\ \sigma_z &= (a^2 + b^2 - c^2)^3 + 2(a^2 + b^2 - c^2)^2(c + 2)^2 + \\ &+ (a^2 + b^2 - c^2)(c + 2)\{(c + 2)^3 - 18\} - a^3\{2(c + 2)^3 - 27a^2\}, \\ \delta_z &= -(2q(q - a) + b^2 + 2c), \quad a = \frac{2\lambda\omega_0\theta_2 e_1}{l(\theta_2 - \theta_1)}, \quad b = \frac{2\lambda\omega_0\theta_1 e_2}{l(\theta_2 - \theta_1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \left\{ \frac{1}{\theta_2} - \frac{h}{l^2} + \frac{\lambda^2\omega_0^2}{l^2} \underline{e} \cdot \underline{\Theta}^{-1} \cdot \underline{e} \right\} / \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right), \\ q &= \frac{\{(c + 2)^3 + 9a^2\}(a^2 + b^2 - c^2) + (c + 2)\{(a^2 + b^2 - c^2) - 6a^2(c + 2)^2\}}{a(27a^2 - 4(c + 2)^3)}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что при выполнении условий (24) в качестве вектора  $\underline{d}_k$  следует выбрать вектор  $\pm \underline{d}_3$ .

Условия, при которых в качестве вектора  $\underline{d}_k$  следует выбрать вектор  $\pm \underline{d}_1$  имеют вид:

$$\sigma_x < 0, \quad \delta_x < 0, \tag{25}$$

где выражения для  $\sigma_x$  и  $\delta_x$  получаются из выражений (24) для  $\sigma_z$  и  $\delta_z$  путем замены  $z \longleftrightarrow x, e_3 \longleftrightarrow e_1, \theta_3 \longleftrightarrow \theta_1$ . Условия, при которых в качестве вектора  $\underline{d}_k$  следует выбрать вектор  $\pm \underline{d}_2$  выглядят так:

$$\sigma_y < 0, \quad \delta_y < 0, \tag{26}$$

где выражения для  $\sigma_y$  и  $\delta_y$  получаются из выражений (24) для  $\sigma_z$  и  $\delta_z$  путем замены  $z \longleftrightarrow y, e_3 \longleftrightarrow e_2, \theta_3 \longleftrightarrow \theta_2$ . Если среди векторов  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$  найдется один, удовлетворяющий условию (17), то именно этот вектор и следует выбрать в качестве вектора  $\underline{d}_k$ . Если условию (17) будут удовлетворять два или три вектора  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$ , то в качестве вектора  $\underline{d}_k$  можно выбрать любой из них. Возможна ситуация, когда ни один из векторов  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$  не удовлетворяет условию (17). В этом случае конец вектора перемещается по всей поверхности единичной сферы и в этом случае ни один из векторов  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$  не является предпочтительным и в качестве вектора  $\underline{d}_k$  можно выбирать любой из них. Выбор в качестве вектора  $\underline{d}_k$  какого-либо вектора, отличного от векторов  $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3$  приводит к более сложным уравнениям и поэтому не рассматривается.

### Аналитическое решение задачи

При построении аналитического решения не принципиально, какой из векторов  $\underline{d}_k$  выбрать для представления тензора поворота. Будем считать  $\underline{d}_k = \underline{d}_3$ .

Подставляя  $\underline{d}_k = \underline{d}_3$  в уравнение (15), и используя первое уравнение (12) получаем

$$\dot{\Phi} \underline{d}_3 + \frac{\dot{\Theta}}{\sin \Theta} \underline{d}_3 \times \underline{m} = \dot{\psi} \underline{m} - l \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{m} + \lambda \omega_0 \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{e}, \quad (27)$$

где  $\Phi = \xi - \phi$ ,  $\Theta = \alpha - \theta$ , углы  $\alpha$  и  $\xi$  определяют направление вектора  $\underline{\hat{L}}$ :  $\underline{\hat{L}} = \sin \alpha \cos \xi \underline{d}_1 + \sin \alpha \sin \xi \underline{d}_2 + \cos \alpha \underline{d}_3$ .

Из уравнений (14), и (27), получим

$$\dot{\psi} = \lambda \omega_0 \underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{m} + \dot{\Phi} \underline{d}_3 \cdot \underline{m} + \frac{h}{l} - \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{l} \underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{e}. \quad (28)$$

Из уравнения (18), следует

$$\underline{m} = \sin \Theta \cos \Phi \underline{d}_1 + \sin \Theta \sin \Phi \underline{d}_2 + \cos \Theta \underline{d}_3. \quad (29)$$

Подставив в уравнение (27) выражение (29), исключив  $\dot{\psi}$  с помощью выражения (28), и спроектировав полученное уравнение на оси  $\underline{d}_3$ ,  $\underline{d}_3 \times \underline{m}$  получим систему уравнений для определения углов  $\Phi$  и  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} & \dot{\Theta} \sin \Phi + \left( \lambda \omega_0 \left( \frac{e_1}{\theta_1} \sin \Theta \cos \Phi + \frac{e_2}{\theta_2} \sin \Theta \sin \Phi + \frac{e_3}{\theta_3} \cos \Theta \right) + \dot{\Phi} \cos \Theta + \right. \\ & \left. + \frac{h}{l} - \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{l} \left( \frac{e_1^2}{\theta_1} + \frac{e_2^2}{\theta_2} + \frac{e_3^2}{\theta_3} \right) \right) \sin \Theta \cos \Phi = \frac{1}{\theta_1} (l \sin \Theta \cos \Phi - \lambda \omega_0 e_1), \\ & \dot{\Theta} = l \left( \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \sin \Theta \sin \Phi \cos \Phi + \lambda \omega_0 \left( \frac{e_2}{\theta_2} \cos \Phi - \frac{e_1}{\theta_1} \sin \Phi \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Воспользовавшись выражениями (18) и (29) придадим уравнению (21) следующий вид:

$$\frac{1}{a^2} (\sin \Theta \cos \Phi - E_1)^2 + \frac{1}{b^2} (\sin \Theta \sin \Phi - E_2)^2 = \frac{1}{a^2 b^2} \left( \frac{1}{E_3} \cos \Theta + s_3 \right), \quad (31)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_3}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_3}}, \quad E_1 = \frac{\lambda \omega_0 e_1}{l(1 - \frac{\theta_1}{\theta_2})}, \quad E_2 = \frac{\lambda \omega_0 e_2}{l(1 - \frac{\theta_2}{\theta_3})}, \quad E_3 = \frac{1}{2\lambda \omega_0 e_3}.$$

Замена переменных:  $E_1 + a u \cos \gamma = \sin \Theta \cos \Phi$ ,  $E_2 + b u \sin \gamma = \sin \Theta \sin \Phi$ ; приводит систему уравнений (30), (31) к виду

$$\dot{u} = \frac{\lambda \omega_0}{C} \left( \frac{e_1}{\theta_1} B - \frac{e_2}{\theta_2} A \right) + \frac{lAB}{C} \left( \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right), \quad A^2 + B^2 + ((abu)^2 - s_3)^2 = 1, \quad (32)$$

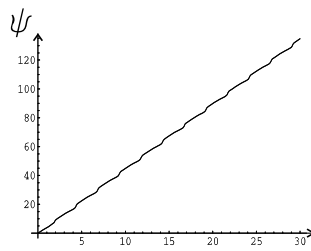
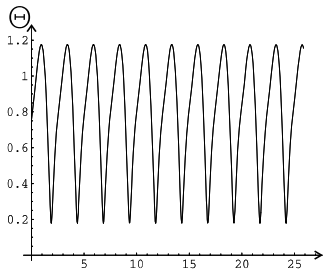
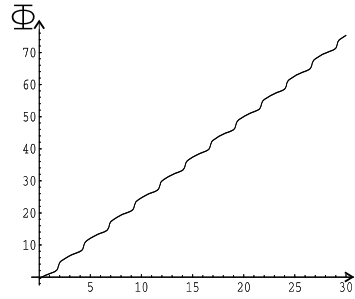
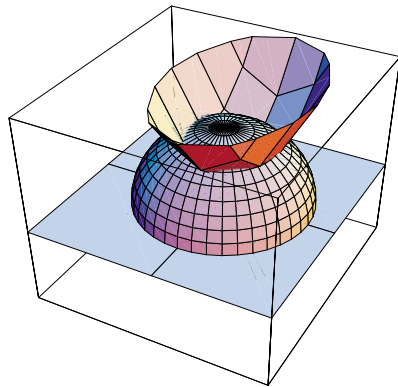


Рис. 3:

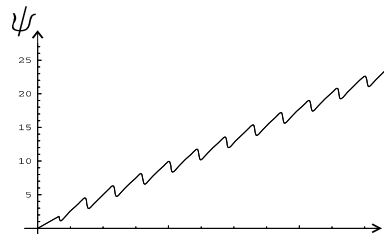
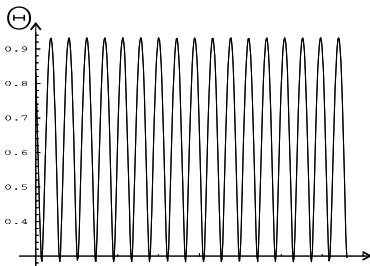
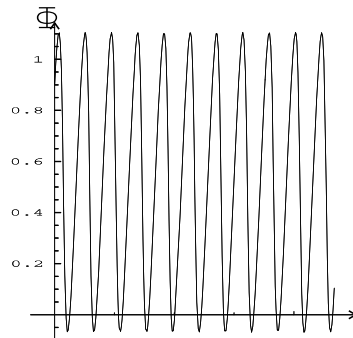
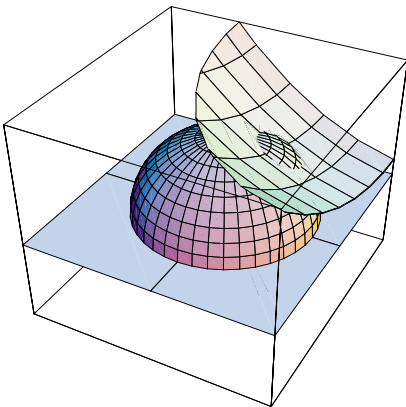


Рис. 4:

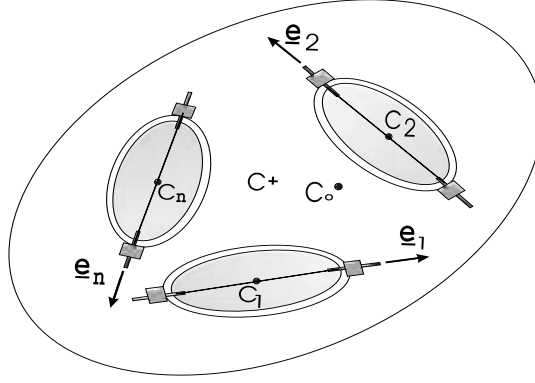


Рис. 5: Мультироторный гироскоп.

где  $A = (E_1 + au \cos \gamma)$ ,  $B = (E_2 + bu \sin \gamma)$ ,  $C = 2a^2b^2E_3u$ .

Можно показать, что задача сводится к решению дифференциального уравнения относительно  $\gamma$ :

$$\dot{\gamma} = f(\sin \gamma, \cos \gamma). \quad (33)$$

Уравнение (33) допускает точное решение в квадратурах. Это решение имеет достаточно сложный вид. Однако, оно позволяет доказать периодичность решения:

$$u(t + T) = u(t), \gamma(t + T) = \gamma(t) + 2\pi, \psi(t + T) = \psi(t) + 2\pi, \theta(t + T) = \theta(t),$$

$$\phi(t + T) = \phi(t) + 2\pi, \quad \text{или} \quad \phi(t + T) = \phi(t).$$

Если ось  $\underline{d}_3$  находится внутри годографа вектора  $\underline{m}$ , то в этом случае выполняется равенство  $\phi(t + T) = \phi(t) + 2\pi$  а когда ось  $\underline{d}_3$  находится вне годографа вектора  $\underline{m}$ , то выполняется равенство  $\phi(t + T) = \phi(t)$ . Рисунки 3, 4 показывают сечения параболоида (21) с единичной сферой (20) и графики функций  $\Phi, \Theta, \psi$ .

**В третьей главе** рассматривается движение свободного мультироторного гироскопа, состоящего из несущего тела и  $n$  роторов — рис.5.

Введем обозначения:  $m$  — масса гироскопа,  $m_0$  — масса несущего тела,  $m_i$  — масса  $i$ -го ротора,  $c$  — центр масс гироскопа,  $c_0$  — центр масс несущего тела,  $c_i$  — центр масс  $i$ -го ротора, который вращается относительно несущего тела вокруг оси  $\underline{e}_i$ ,  $\underline{\tau}_0$  — вектор  $\underline{cc}_0$ ,  $\underline{\tau}_i$  — вектор  $\underline{cc}_i$ ,  $\underline{v}_{c_0}$  — скорость точки  $c_0$ ,  $\underline{v}_{c_i}$  — скорость точки  $c_i$ ,  $\underline{v}_c$  — скорость точки  $c$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Преобразования, аналогичные тем, которые были сделаны во второй главе, позволили свести задачу к интегрированию системы уравнений

$$\underline{\Omega} = \underline{\Theta}_*^{-1} \cdot \{ \underline{P}^T \cdot \underline{L} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i \underline{e}_i \}, \quad \dot{\beta}_i = \nu_i - \underline{\Omega} \cdot \underline{e}_i; \quad \underline{\dot{P}} = \underline{P} \times \underline{\Omega}, \quad (34)$$

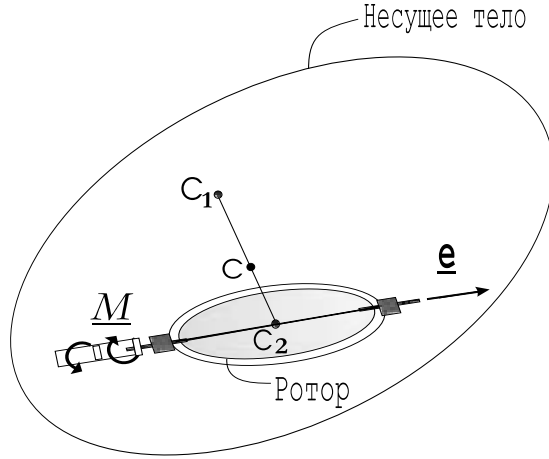


Рис. 6: однороторный гиростат при наличии внутреннего двигателя ограниченной мощности

где  $\underline{\underline{\Theta}}_* = \underline{\underline{\Theta}}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{\Theta}}_i + (m_0\tau_0^2 + \sum_{i=1}^n m_i\tau_i^2)\underline{\underline{E}} - m_0\tilde{\tau}_0 \otimes \tilde{\tau}_0 - \sum_{i=1}^n m_i\tilde{\tau}_i \otimes \tilde{\tau}_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_i$ ,  $\nu_i$  — константы, определяемые из начальных условий,  $\beta_i(t)$  — угол поворота  $i$ -го ротора относительно несущего тела,  $\underline{\underline{\Theta}}_0$  — центральный тензор инерции несущего тела в отсчетном положении,  $\underline{\underline{\Theta}}_i$  — центральный тензор инерции  $i$ -го ротора в отсчетном положении,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\lambda_i$  — осевой момент инерции  $i$ -го ротора,  $\tilde{\tau}_0 = \tau_0(0)$ ,  $\tilde{\tau}_i = \tau_i(0)$ ,  $\underline{\underline{\Omega}}, \underline{\underline{\omega}}$  — правый и левый вектор угловой скорости несущего тела,  $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{\omega}}$ ,  $\underline{\underline{L}}$  — постоянный вектор, определяемый по начальным условиям.

Система уравнений (34) имеет точно такую же структуру, как и в случае однороторного гиростата. Отличаются только входящие в уравнения постоянные параметры.

**В четвертой главе** рассмотрен однороторный гиростат в котором на ротор действует момент двигателя ограниченной мощности (см. рис.6). Внешние по отношению к гиростату силы и моменты отсутствуют. Момент двигателя  $\underline{\underline{M}}$  является внутренним по отношению к гиростату. Этот момент имеет вид

$$\underline{\underline{M}} = -M(\dot{\beta} - \omega_*)\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{e}}, \quad (35)$$

где  $M$  — произвольная положительная константа,  $\underline{\underline{e}}$  — единичный вектор направленный по оси вращения ротора в отсчетном положении,  $\omega_*$  — произвольная константа,  $\underline{\underline{P}}$  — тензор поворота несущего тела,  $\beta$  — угол поворота ротора относительно несущего тела.

В системе отсчета, связанной с центром масс уравнения гиростата приводятся к виду

$$\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\theta}}_*^{-1} \cdot \{\underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{L}} - \lambda\dot{\beta}\underline{\underline{e}}\}, \quad \{\dot{\beta} + \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}\} = -M(\dot{\beta} - \omega_*), \quad (36)$$

где  $\underline{\theta}_*$  — тензор инерции гиростата,  $\underline{L}$  — постоянный вектор, определяемый по начальным условиям.

Введя обозначения  $l = |\underline{L}|$ ,  $\underline{m} = \underline{P}^T \cdot \hat{\underline{L}}$ , где  $\hat{\underline{L}} = \underline{L}/|\underline{L}|$ , перепишем уравнение (36) в форме

$$\underline{\Omega} = \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \{l\underline{m} - \lambda\dot{\beta}\underline{e}\}, \quad \{\dot{\beta} + \underline{e} \cdot \underline{\Omega}\} = -M(\dot{\beta} - \omega_*). \quad (37)$$

Для того, чтобы система (37) стала замкнутой ее следует дополнить кинематическим соотношением

$$\dot{\underline{m}} = -\underline{\Omega} \times \underline{m}. \quad (38)$$

Соотношение (38) доказывается следующим образом

$$\underline{P} \cdot \underline{m} = \hat{\underline{L}} \implies \dot{\underline{P}} \cdot \underline{m} + \underline{P} \cdot \dot{\underline{m}} = 0 \implies \underline{P} \cdot (\underline{\Omega} \times \underline{m} + \dot{\underline{m}}) = 0 \implies \dot{\underline{m}} + \underline{\Omega} \times \underline{m} = 0.$$

Поставив (38) в (37), получим

$$\begin{cases} \dot{\underline{m}} = -\{\underline{\theta}_*^{-1} \cdot (l\underline{m} - \lambda\omega\underline{e})\} \times \underline{m}, \\ \dot{\omega} + \underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \{l\dot{\underline{m}} - \lambda\dot{\omega}\underline{e}\} = -M(\omega - \omega_*); \end{cases} \quad (39)$$

где  $\omega = \dot{\beta}$ . Итак, задача свелась к интегрированию системы уравнений (39).

Интегрируя второе уравнение (39), получаем

$$\omega - \omega_* = Ce^{-\widetilde{M}t} + \underline{e}^* \cdot \underline{m} - \widetilde{M}e^{-\widetilde{M}t} \int (\underline{e}^* \cdot \underline{m}) e^{\widetilde{M}t} dt, \quad C = const, \quad (40)$$

где  $\widetilde{M} = M/(1 - \lambda\underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{e})$ ,  $\underline{e}^* = -l\underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} / (1 - \lambda\underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{e})$ . С помощью системы компьютерной алгебры доказано, что  $(1 - \lambda\underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{e}) > 0$ . Следовательно

$$|\omega - \omega_*| \leq |C|e^{-\widetilde{M}t} + |\underline{e}^*| + \widetilde{M}e^{-\widetilde{M}t} \int |\underline{e}^*| e^{\widetilde{M}t} dt = |C|e^{-\widetilde{M}t} + |\underline{e}^*| + |\underline{e}^*| \leq |C| + 2|\underline{e}^*|.$$

Доказано, что  $\omega$  — ограничена. Из системы уравнений (39), получим

$$\int_0^t (\omega - \omega_*)^2 dt = -\frac{1}{\widetilde{M}} \left( \frac{l^2 \underline{m} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{m}}{2\lambda(1 - \lambda\underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{e})} + \frac{\omega^2}{2} + \omega_*(\underline{e}^* \cdot \underline{m} - \omega + \omega_*) \right).$$

Последнее равенство означает, что левая часть — ограничена. Следовательно  $\omega \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \omega_*$ . Используя уравнения (39), можно получить, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{m} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \underline{m} = const, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{e}_1 \cdot \underline{m} = const. \quad (41)$$

где  $\underline{e}_1 = \underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} / |\underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1}|$ .

Поскольку  $|\underline{m}| = 1$ , из соотношений (41) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{m} = const. \quad (42)$$



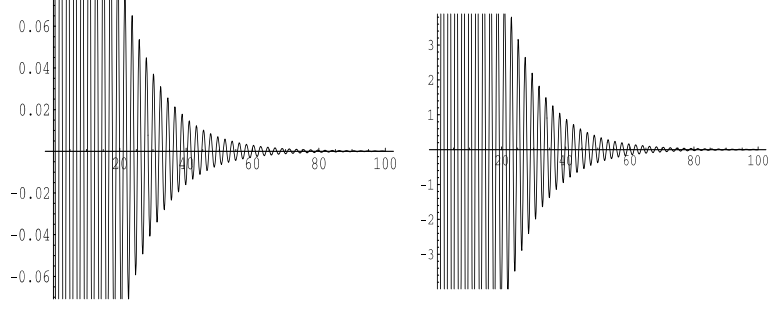


Рис. 7: Проекция вектора  $\tilde{\gamma}$

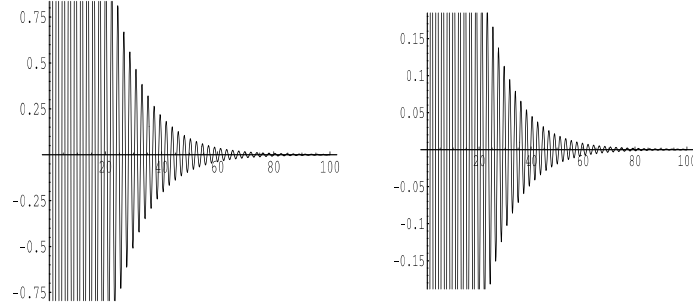


Рис. 8:  $\dot{\beta}_*, \gamma_3$

Подставим тензор поворота несущего тела  $\underline{\underline{P}}$  в виде

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}(\psi \hat{\underline{L}}) \cdot \underline{\underline{P}}_0.$$

Так как  $\underline{m} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \hat{\underline{L}} = \underline{\underline{P}}_0^T \cdot \hat{\underline{L}}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{m} = const$ , то  $\underline{\underline{P}}_0 = const$ .

Левый и правый вектор скорости несущего тела имеют вид

$$\underline{\omega} = \dot{\psi} \hat{\underline{L}} + \underline{\underline{P}}(\psi \hat{\underline{L}}) \cdot \underline{\omega}_0, \quad \underline{\Omega} = \dot{\psi} \underline{m} + \underline{\Omega}_0.$$

Из первого уравнения (37) следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\Omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi} \underline{m} = const. \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi} = const. \quad (43)$$

Введем обозначения

$$\underline{\underline{P}}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\underline{P}}(t), \quad \underline{m}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{m}(t), \quad \underline{\Omega}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\Omega}(t), \quad \dot{\psi}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t).$$

Тогда при больших  $t$  будем искать решение в виде

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = \omega_* + \dot{\beta}_*(t), & \dot{\psi}(t) = \dot{\psi}_\infty + \dot{\psi}_*(t) \\ \underline{m}(t) = \underline{m}_\infty + \underline{m}_*(t), & \underline{\Omega}(t) = \underline{\Omega}_\infty + \underline{\Omega}_*(t) \end{cases} \quad (44)$$

где  $\dot{\beta}_*, \dot{\psi}_*, |\underline{m}_*|, |\underline{\Omega}_*|$  много меньше чем  $\omega_*, \dot{\psi}_\infty, |\underline{m}_\infty|, |\underline{\Omega}_\infty|$  соответственно.

Подставим выражения (44) в выражения (37) получим систему уравнений для определения величин  $\dot{\beta}_*$ ,  $\dot{\psi}_*$ ,  $\underline{m}_*$ ,  $\underline{\Omega}_*$ ;

$$\underline{\Omega}_* = \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \{l\underline{m}_* - \lambda\dot{\beta}_*\underline{e}\}, \quad \{\dot{\beta}_* + \underline{e} \cdot \underline{\Omega}_*\} = -M\dot{\beta}_*. \quad (45)$$

При больших  $t$  можно представить тензор поворота несущего тела  $\underline{P}$  в виде  $\underline{P} = \underline{P}_\infty \cdot \underline{P}(\underline{\gamma})$ ,  $|\underline{\gamma}|$  — малая величина. Так как

$$\underline{P}(\underline{\gamma}) = \underline{E} + \underline{\gamma} \times \underline{E}. \quad (46)$$

Правый вектор угловой скорости несущего тела  $\underline{\Omega}$  вычисляется так

$$\underline{\Omega} = \underline{P}^T \cdot \underline{\omega} = \underline{\Omega}_\infty + \underline{\Omega}_\infty \times \underline{\gamma} + \dot{\underline{\gamma}} \quad (47)$$

Подставив (44) в (47) получим

$$\underline{\Omega}_* = \underline{\Omega}_\infty \times \underline{\gamma} + \dot{\underline{\gamma}}. \quad (48)$$

Вектор  $\underline{m}$  вычисляется так

$$\underline{m} = \underline{P}^T \cdot \hat{\underline{L}} = (\underline{P}_\infty \cdot \underline{P}(\underline{\gamma}))^T \cdot \hat{\underline{L}} = \underline{P}^T(\underline{\gamma}) \cdot \underline{P}_\infty^T \cdot \hat{\underline{L}} = (\underline{E} - \underline{\gamma} \times \underline{E}) \cdot \underline{m}_\infty.$$

Таким образом

$$\underline{m} = \underline{m}_\infty + \underline{m}_\infty \times \underline{\gamma}. \quad (49)$$

После подстановки выражения (44) в (49), получим

$$\underline{m}_* = \underline{m}_\infty \times \underline{\gamma}. \quad (50)$$

Согласно (43),

$$\underline{\Omega}_\infty = \dot{\psi}_\infty \underline{m}_\infty. \quad (51)$$

Подставив (48) и (50) в (45) получим:

$$\begin{cases} \underline{\Omega}_\infty \times \underline{\gamma} + \dot{\underline{\gamma}} = \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \{l\underline{m}_\infty \times \underline{\gamma} - \lambda\dot{\beta}_*\underline{e}\}, \\ \{\dot{\beta}_* + \underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot (l\underline{m}_\infty \times \underline{\gamma} - \lambda\dot{\beta}_*\underline{e})\} = -M\dot{\beta}_*. \end{cases} \quad (52)$$

Уравнения (52) — это система четырех скалярных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Введя обозначения  $\underline{\gamma} = \gamma_3 \underline{m}_\infty + \tilde{\underline{\gamma}}$ ,  $\tilde{\underline{\gamma}} \cdot \underline{m}_\infty = 0$ , можно показать, что система (52) может быть приведена к системе трех скалярных дифференциальных уравнений первого порядка и одному независимому уравнению.

$$\begin{cases} \dot{\psi}_\infty \underline{m}_\infty \times \tilde{\underline{\gamma}} + \dot{\tilde{\underline{\gamma}}} = (\underline{E} - \underline{m}_\infty \otimes \underline{m}_\infty) \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \{l\underline{m}_\infty \times \tilde{\underline{\gamma}} - \lambda\dot{\beta}_*\underline{e}\} \\ \{\dot{\beta}_* + \underline{e} \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot (l\underline{m}_\infty \times \tilde{\underline{\gamma}} - \lambda\dot{\beta}_*\underline{e})\} = -M\dot{\beta}_* \end{cases}, \quad (53)$$

$$\dot{\gamma}_3 = \underline{m}_\infty \cdot \underline{\theta}_*^{-1} \cdot \{l\underline{m}_\infty \times \tilde{\underline{\gamma}} - \lambda \dot{\underline{\beta}}_* \underline{e}\}. \quad (54)$$

Решение системы (53) ищется в виде  $\dot{\underline{\beta}}_* = B e^{\delta t}$ ,  $\tilde{\underline{\gamma}} = \underline{\Gamma} e^{\delta t}$ . Численный анализ показывает, что при любых параметрах  $Re \delta < 0$ . На рисунках 7, 8 показаны графики проекций вектора  $\tilde{\underline{\gamma}}$ , и функций  $\dot{\underline{\beta}}_*$ ,  $\gamma_3$ .

**Заключение** содержит формулировку основных положений, выносимых на защиту.

### **Основные результаты опубликованы в следующих работах:**

1. *Галал А. А.* Свободное вращение мультироторного гиростата // материалах V всероссийской конференции по проблемам науки и высшей школы “Фундаментальные исследования в технических университетах” 8 – 9 июня 2001 года. Изд. СПбГТУ. С-Пб. 2001. С. 79–80.
2. *Galal A. A.* Free rotation of one-rotor gyrostat // XXIX Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg (Repino) June 21 – 30, 2001. P. 263 – 271.
3. *Galal A. A., Ivanova E. A.* Motion of one-rotor gyrostat under the action of internal moment // XXX Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. St.Petersburg (Repino) June 27 - July 6, 2002. Book of Abstracts. P. 44.