

Министерство образования Российской Федерации  
—  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Б.А.Мартынов

## **ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГПУ  
2002

УДК 534 (075.8)

Мартынов Б.А. Теория колебаний Математические модели динамических систем: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. 56 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теория колебаний» учебного плана специальности 071500 «Радиофизика и электроника» (направление подготовки дипломированных специалистов 654200 «Радиотехника») и посвящено некоторым типовым моделям динамических систем, используемым в теории колебаний. Включенный в пособие материал отобран и расположен таким образом, чтобы, с одной стороны, охватить как можно большее число характерных моделей, о которых полезно знать всякому, изучающему теорию колебаний, а с другой – обойтись по возможности наиболее простыми с точки зрения применяемого математического аппарата примерами.

Предназначено студентам специальности 071500 «Радиофизика и электроника» радиофизического факультета

Ил. 30. Библиогр.: 30 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2002

# 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. Система. Элементы. Модель

В физике и других естественнонаучных дисциплинах, в природе, технике, экономике, медицине, прочих областях человеческой деятельности приходится иметь дело с теми или иными величинами, изменяющимися с течением времени. В радиоэлектронике, например, это могут быть электрический ток, напряжение, напряженности электрического и магнитного полей, другие электрические и магнитные величины.

Если некоторая действительная величина претерпевает изменения, направление которых не остается неизменным, то есть попеременно наблюдаются возрастание и убывание этой величины, то такие изменения принято называть колебаниями. Существуют закономерности, которые оказываются общими для колебаний различной природы. В этом смысле часто говорят об изоморфизме (одинаковости формы) самых разных колебательных явлений (механических, электромагнитных, химических, биологических, экономических и т.д.). Отмеченное обстоятельство лежит в основе теории колебаний – особой научной дисциплины с единым математическим аппаратом и универсальной терминологией.

Среди основных понятий теории колебаний к числу наиболее употребительных относятся система и элемент. Начальный этап теоретического исследования любой сколько-нибудь сложной реальной системы – приближенное представление ее в виде совокупности более простых составных частей, называемых по большей части элементами. Характер приближения (идеализации) зависит от того, какие свойства конкретной системы вызывают интерес. Важно, чтобы с точки зрения этих свойств совокупность идеализированных элементов была равноценна исходной системе и могла рассматриваться как ее модель, называемая в случае электрических и некоторых других систем эквивалентной схемой, или схемой замещения. Следует отметить, что при теоретическом рассмотрении термины «система» и «элемент» используются, как правило, по отношению к модели.

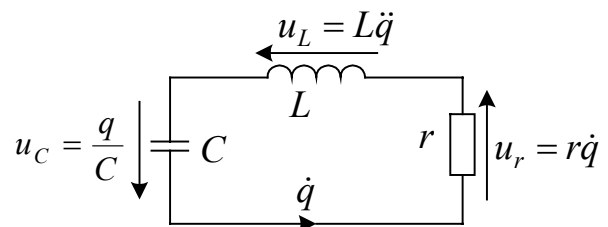


Рис.1

В качестве примера на рис.1 построена пригодная для не слишком высоких частот эквивалентная схема электрического колебательного контура,

состоящего из индуктивной катушки и конденсатора. В этой схеме идеализированными элементами  $L$  и  $C$  учитываются, соответственно, индуктивность катушки и емкость конденсатора, а идеализированный резистивный элемент  $r$  включен в схему для учета потерь энергии. Еще один пример – модель, построенная на рис.2 для механической системы, в состав которой входит пружина с коэффициентом упругости  $k$ , присоединенная одним концом к недеформируемому телу массы  $m$ . Другой конец пружины неподвижно закреплен, а перемещение тела считается возможным вдоль только одного

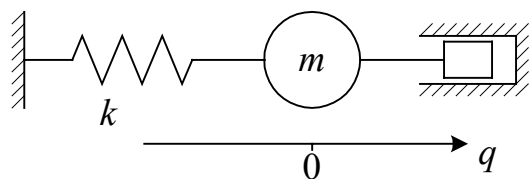


Рис.2

направления (координата  $q$ ). В относящуюся к этому случаю эквивалентную (расчетную) схему введено также (см. правую часть рис.2) специальное устройство, при помощи которого учитываются потери.

направления (координата  $q$ ). В относящуюся к этому случаю эквивалентную (расчетную) схему введено также (см. правую часть рис.2) специальное устройство, при помощи которого учитываются потери.

## 1.2. Динамическая система. Переменные состояния. Математическая модель

Под динамической системой понимается любой объект, состояние которого может изменяться с течением времени [3]. Один из простейших используемых в теории примеров механических динамических систем – материальная точка, способная перемещаться в трехмерном пространстве. Ее состояние задается шестью величинами. Три из этих величин являются декартовыми координатами  $x, y, z$ , три другие – соответствующими компонентами вектора скорости перемещения точки:  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ . Здесь и далее точка над символом означает производную по времени. Состояние  $LC$ -контура (рис.1) может быть однозначно определено посредством задания заряда  $q$ , запасенного в его емкости, и производной по времени  $\dot{q}$ , равной контурному току.

Зависящие в общем случае от времени величины, которыми задается состояние динамической системы, называют переменными состояниями или динамическими переменными [11]. При теоретическом исследовании любой динамической системы используют оператор, при помощи которого стремятся выяснить, как изменяется ее состояние с течением времени. Форма оператора может быть дифференциальной, интегральной или какой-либо другой. Далее речь пойдет только об операторах, представляемых в дифференциальной форме, то есть будут рассматриваться динамические системы, поведение которых определяется решениями дифференциальных уравнений. Выбором способа аналитического описания задается, как принято говорить, математическая модель динамической системы [3,11,20,21].

Например, для  $LC$ -контура (рис.1) можно записать дифференциальное уравнение, отвечающее математической модели линейного осциллятора:

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1)$$

где  $2\alpha = r/L$ ,  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ . Если предположить, что потери энергии в механической системе, представленной на рис.2, обусловлены силой вязкого трения  $F_{\text{тр}} = -v\dot{q}$ , и принять, что  $2\alpha = v/m$ , а  $\omega_0^2 = k/m$ , то дифференциальное уравнение этой системы также сводится к уравнению (1).

При  $\alpha = 0$ , то есть в отсутствие потерь, имеем частный случай (1), называемый уравнением гармонического осциллятора:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2)$$

### 1.3. Состояние равновесия. Движение. Колебания

Если с течением времени не изменяется ни одна из величин, которыми задается состояние динамической системы, то оно называется состоянием равновесия. Для электрической цепи состояние равновесия определяют как состояние, в котором все токи и напряжения в ней не зависят от времени. Состоянию равновесия линейного осциллятора отвечает, как видно из (1), не зависящее от времени решение  $q = 0$ ; при этом  $\dot{q}$  также равно нулю.

Движение – это изменение состояния динамической системы. Движение может быть колебательным. Считается, что отличительный признак колебаний – повторяющиеся изменения направления движения на противоположное направление. Однако провести резкую границу между колебательными и прочими движениями зачастую довольно сложно [16,17]. По этой причине, как правило, нецелесообразно особо выделять колебательные системы из более общей совокупности динамических систем.

В теории колебаний основной интерес представляет общий характер процесса, протекающего в динамической системе в течение некоторого, в том числе и сколь угодно большого, промежутка времени. Исходя из вида зависимости от времени величин, определяющих состояние системы, всевозможные колебательные процессы делят на детерминированные (периодические, почти периодические, непериодические) и случайные. Например, общее решение дифференциального уравнения (2)

$$q(t) = q(0)\cos\omega_0 t + [\dot{q}(0) / \omega_0] \sin \omega_0 t, \quad (3)$$

где  $q(0)$  и  $\dot{q}(0)$  – начальные значения величины  $q$  и ее производной по времени, соответствует гармоническим колебаниям, являющимся частной разновидностью периодических колебаний.

Для линейного осциллятора в случае, когда  $\alpha \neq 0$ , вытекающие из уравнения (1) зависимости  $q$  от времени  $t$  соответствуют непериодическим колебаниям. Если  $\alpha^2 \neq \omega_0^2$ , то

$$q(t) = [q(0) \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t) + \frac{\alpha q(0) + \dot{q}(0)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t)] \exp(-\alpha t). \quad (4)$$

Из последней формулы, в частности, следует, что первоначальные возмущения заряда  $q$  затухают, если  $\alpha$  положительно, и наоборот, нарастают при отрицательных  $\alpha$ , которые отвечают моделям линейных осцилляторов с так называемыми отрицательными трением и сопротивлением. Характер затухания (либо нарастания) в случаях  $\alpha^2 < \omega_0^2$  и  $\alpha^2 > \omega_0^2$  будет неодинаковым. Как нетрудно убедиться, если  $\alpha^2 < \omega_0^2$ , то множитель перед экспоненциальной функцией  $\exp(-\alpha t)$  в формуле (4) выражается линейной комбинацией тригонометрических функций  $\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t)$  и  $\sin(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} t)$ , благодаря чему в процессе затухания (при  $\alpha > 0$ ) или нарастания (при  $\alpha < 0$ ) величина  $q$  многократно изменяет знак. Поэтому, если  $\alpha^2 < \omega_0^2$ , то характер изменения первоначальных возмущений  $q$  во времени называют колебательным в отличие от отмечаемого в случае  $\alpha^2 > \omega_0^2$  так называемого аperiodического характера изменения. Из (4) видно также, что при  $\alpha^2 \ll \omega_0^2$  колебания линейного осциллятора весьма близки к гармоническим. Для таких колебаний часто используют термин «колебания с медленно меняющейся амплитудой».

#### 1.4. Классификация динамических систем

Существуют различные подходы к классификации динамических систем. Один из подходов основан на разделении всех динамических систем на линейные и нелинейные. Линейной считают такую систему, поведение которой можно описать при помощи линейных по отношению к искомым величинам дифференциальных уравнений. Под искомыми величинами понимают переменные состояния динамической системы (токи, заряды, напряжения, магнитные потоки, координаты, компоненты скоростей и т.д.). Эти величины не следует смешивать с параметрами элементов, образующих систему. Если упомянутые параметры с течением времени остаются неизменными, то это соответствует линейной системе с постоянными параметрами. Поведение таких систем описывается линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. В качестве примеров можно привести уравнения (1) и (2).

Линейные системы с переменными параметрами – это системы, содержащие элементы, параметры которых изменяются со временем, причем эти параметры являются функциями только времени и не зависят от искомым величин. Поведение таких систем может быть описано линейными по отношению к искомым величинам дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Эти системы называют также параметрическими [5,7,26].

Нелинейными называются системы, поведение которых не может быть описано линейными (по отношению к искомым величинам) дифференциальными уравнениями.

Всевозможные динамические системы также могут быть автономными и неавтономными. Автономной называют систему, свободную от внешнего воздействия, изменяющегося с течением времени. В дифференциальные уравнения, которыми описывается поведение автономных систем, время явно не входит, что является отличительным признаком математических моделей таких систем. Система называется неавтономной, если она либо подвергается действию внешних переменных сил, либо внешнее воздействие приводит к изменению во времени ее параметров (параметрическая система).

В теории колебаний заметное место занимает рассмотрение особого класса идеализированных систем, полная энергия которых с течением времени сохраняется неизменной без «подкачки» извне. Такие системы получили название консервативных. К их числу относится, в частности, упомянутый выше линейный осциллятор без потерь (гармонический осциллятор).

Еще один подход к классификации динамических систем связан с вопросом о том, насколько необходимо, чтобы в математической модели системы были учтены возможные изменения переменных состояния не только во времени, но и в пространстве. Модели, при построении которых приняты во внимание оба фактора (временной и пространственный) называются сплошными. Другое применяемое для них название – системы с распределенными параметрами. Поведение таких систем описывается уравнениями в частных производных, то есть уравнениями, содержащими производные искомым величин как по времени, так и по координатам.

Во многих случаях, особенно тогда, когда размеры изучаемого объекта существенно меньше длины волны колебаний, подлежащих исследованию, используются модели, составленные из дискретных (сосредоточенных) элементов. Иначе такие модели именуется системами с сосредоточенными параметрами. Математическое описание поведения этих систем проводится на основе обыкновенных дифференциальных уравнений, при помощи которых устанавливают зависимость динамических переменных от времени.

## 1.5. Число степеней свободы и порядок динамической системы

В последующем будут рассматриваться только те динамические системы, поведение которых может быть описано при помощи конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений, то есть речь будет идти о системах с сосредоточенными параметрами. Если математическая модель подобной системы сводится к одному дифференциальному уравнению, то порядок этого уравнения называют порядком динамической системы. Выше, как видно из уравнений (1) и (2), были приведены примеры систем второго порядка. В общем случае порядок системы с сосредоточенными параметрами равен порядку системы дифференциальных уравнений, которыми описывается ее поведение.

Наряду с порядком для таких систем в теории колебаний употребляется заимствованное из механики понятие «число степеней свободы». В механике числом степеней свободы называют минимальное число координат, которое необходимо зафиксировать, чтобы сделать движение системы невозможным. Применительно к электрическим цепям под этим термином понимается наименьшее число разрывов в электрической цепи, необходимое для того, чтобы стало невозможным какое-либо протекание токов в рассматриваемой системе [7]. В теории колебаний довольно часто приведенное выше традиционное толкование понятия числа степеней свободы заменяют формальным определением, по которому это число считается равным половине порядка динамической системы [5,11,18]. Результаты нахождения числа степеней свободы согласно упомянутым двум способам для одних систем могут совпадать, для других – различаться. В последнем случае число степеней свободы, вычисленное в соответствии с формальным определением, может оказаться полуцелым.

#### 1.6. Фазовые пространства динамических систем (общие положения)

Пусть поведение некоторой автономной динамической системы описывается произвольным, но конечным числом дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\dot{x}_s = f_s(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad s=1,2,\dots,n. \quad (5)$$

Если ввести в рассмотрение векторы-столбцы  $x$  и  $f$ , состоящие из  $n$  элементов  $x_s$  и  $f_s$  соответственно, то вместо системы скалярных уравнений (5) может быть записано равносильное ей векторное (матричное) уравнение

$$\dot{x} = f(x). \quad (6)$$



Предполагается, что для уравнения (6), как и для системы (5), выполнены условия теоремы существования и единственности решений и непрерывной зависимости решений от начальных значений.

Фазовым пространством динамической системы, математическая модель которой выражается посредством (6) или (5), называют область определения векторной функции  $f(x)$  (либо скалярных функций  $f_s$ ).

Таким образом, величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которыми задается состояние динамической системы, рассматриваются как координаты точки  $n$ -мерного фазового пространства, именуемого также пространством состояний. Сама точка при этом называется изображающей или представляющей. Изменению состояния системы во времени отвечает движение изображающей точки вдоль линии, называемой фазовой траекторией [24,25].

Согласно (6) и (5) каждой точке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  фазового пространства сопоставляется вектор с компонентами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , называемый обычно фазовой скоростью и определяющий скорость перемещения изображающей точки. В этом смысле фазовое пространство можно представить себе как бы заполненным движущейся средой, причем скорости частиц этой среды заданы уравнениями (5) либо (6). Тем самым динамической системе ставится в соответствие векторное поле, которое для автономной системы остается неизменным во времени.

Точки, в которых вектор фазовой скорости обращается в нуль, называются особыми. Им соответствуют состояния равновесия динамической системы. Следует отметить также, что замкнутые фазовые траектории, не проходящие через особые точки, отвечают периодическим движениям.

Рассмотрение траекторий в фазовом пространстве динамической системы позволяет получить представление о многих особенностях ее движений, не прибегая к анализу зависимостей решений исходных дифференциальных уравнений от времени. Это рассмотрение облегчает разграничение движений, соответствующих различным начальным значениям переменных состояния, и особенно удобно, если необходимо выяснить, как может повлиять на характер движения динамической системы изменение ее параметров.

Семейство различных фазовых траекторий динамической системы (получаемое при неизменных параметрах) называют фазовым портретом, или фазовой диаграммой.

### 1.7. Центр, фокус, узел, седло

На основании выражений (3, 4) для зависимостей  $q$  от  $t$  можно, вычислив предварительно производные по времени  $\dot{q}$ , построить на плоскости  $q, \dot{q}$  варианты фазовых портретов линейных осцилляторов (рис. 3–5), отвечающие различным способам выбора величин  $\alpha$  и  $\omega_0$ .

Для всех вариантов начало координат  $(0,0)$  является особой точкой, соответствующей состоянию равновесия осциллятора. В зависимости от характера фазовых траекторий в окрестности особой точки ее относят к тому или иному типу. Приводимые ниже примеры позволяют познакомиться с основными типами особых точек динамических систем 2-го порядка.

Для линейного осциллятора без потерь зависимости  $q$  и  $\dot{q}$  от времени

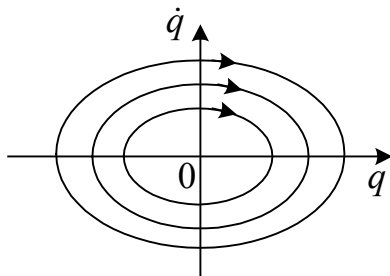


Рис.3

соответствуют гармоническим колебаниям, находящимся в квадратуре, ибо можно показать, используя (3), что  $\dot{q}(t)$  опережает по фазе  $q(t)$  на  $\pi/2$ . Согласно (3) при различных начальных условиях, получается семейство эллипсов, симметричных относительно осей  $q, \dot{q}$  (рис.3).

Начало координат, охватываемое континуумом замкнутых непересекающихся фазовых траекторий, является особой точкой типа центр.

Эта особая точка (состояние равновесия) устойчива по отношению к малым возмущениям, однако устойчивость в данном случае неасимптотическая, поскольку возмущения, хотя и не нарастают с течением времени, но и не стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к нулю.

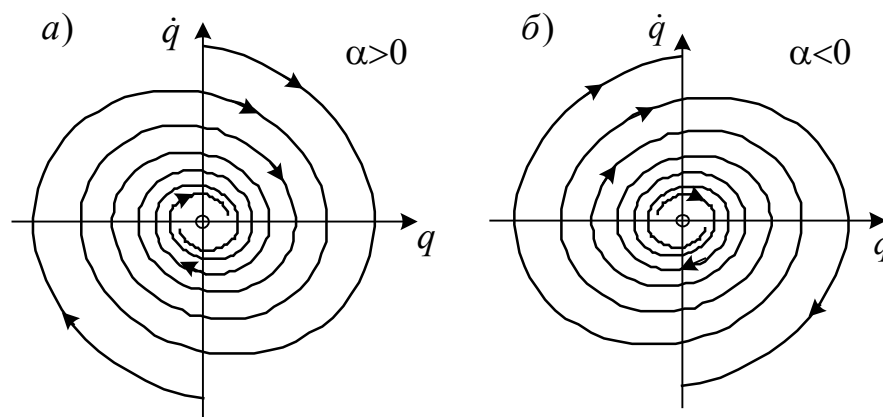


Рис.4

Стрелкой на каждой фазовой траектории отмечено направление движения изображающей точки при увеличении  $t$ .

В фазовых портретах линейного осциллятора, представленных на рис.4 для случая, когда  $\alpha^2 < \omega_0^2$ , начало координат  $(0,0)$  является особой точкой типа фокус (устойчивый – при  $\alpha > 0$  и неустойчивый – при  $\alpha < 0$ ).

Примеры фазовых портретов осциллятора при  $\alpha^2 > \omega_0^2$  приведены на рис.5,а и рис.5,б. На этих рисунках начало  $(0,0)$  – особая точка типа узел (устойчивый узел при  $\alpha > 0$ , неустойчивый – при  $\alpha < 0$ ).

По виду фазовых траекторий, образующих фазовый портрет, легко составить общее представление о характере зависимости от времени для переменных состояния динамической системы. В частности, несложно убедиться в том, что устойчивые фокус и узел относятся к числу асимптотически устойчивых особых точек.

Устойчивый фокус (рис.4,а) и устойчивый узел (рис.5,а) являются также разновидностями так называемых аттракторов – притягивающих объектов фазового пространства, к которым стремятся с ростом  $t$  изображающие точки по всем траекториям, расположенным в окрестности этих объектов [11]. Если  $t \rightarrow \infty$ , то при приближении к фокусу изображающие точки совершают вокруг него по близлежащим фазовым траекториям бесконечное число

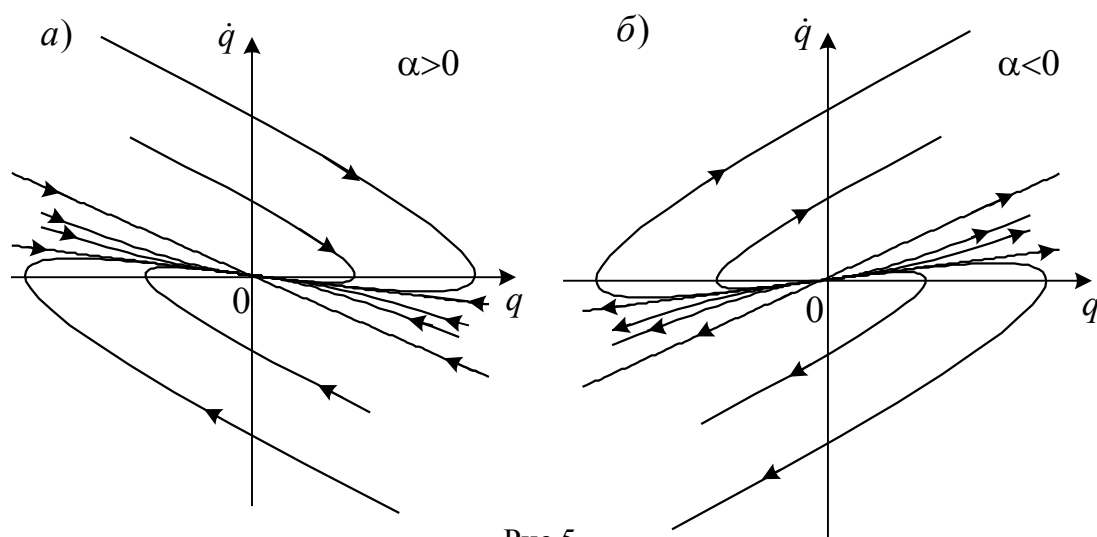


Рис.5

оборотов, что соответствует характеру изменения  $q$  и  $\dot{q}$ , названному выше колебательным. Иначе выглядит картина фазовых траекторий в окрестности узла: в этом случае все они при  $t \rightarrow \infty$  достигают узла в определенном направлении (апериодический характер изменения  $q$  и  $\dot{q}$  во времени).

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение:

$$\ddot{q} - h^2 q = 0, \tag{7}$$

общее решение которого имеет следующий вид:

$$q(t) = q(0)ch(ht) + [\dot{q}(0)/h]sh(ht). \tag{8}$$

Фазовый портрет линейной динамической системы (7) содержит кри-

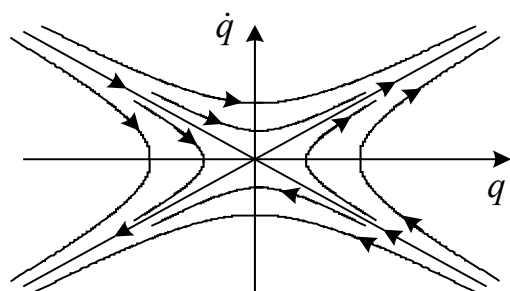


Рис.6

вые гиперболического типа (рис.6). В этом случае начало координат (0,0) – неустойчивая особая точка типа седло. К уравнению (7) и формуле (8) можно прийти, в частности, при приближенном рассмотрении эволюции малых отклонений маятника (см. далее рис.12) из верхнего положения равновесия.

## 2. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С ЕМКОСТЬЮ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ

### 2.1. Приведение уравнения контура с периодически изменяемой емкостью к уравнению Хилла

Предположим, что в колебательном контуре, представленном на рис.1, емкость  $C$  изменяется во времени, то есть динамическая система в целом является параметрической. Дифференциальное уравнение такого контура записывается аналогично (1):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \bar{\omega}^2(t)q = 0, \quad (9)$$

где  $\bar{\omega}^2(t) = \frac{1}{LC(t)}$ .

Вводя обозначение  $\omega^2(t) = \bar{\omega}^2(t) - \alpha^2$ , нетрудно преобразовать (9) к виду:

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)^2 q + \omega^2(t)q = 0. \quad (10)$$

Далее перейдем к вспомогательной переменной  $x$ , через которую заряд  $q$  выражается согласно формуле

$$q = x \exp(-\alpha t). \quad (11)$$

Дважды применяя равенство

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)[z \exp(-\alpha t)] = [\exp(-\alpha t)] \frac{dz}{dt},$$

можно после исключения экспоненциального множителя получить из (10) уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0, \quad (12)$$

называемое в том случае, если  $\omega^2(t)$  – периодическая функция времени  $t$ , уравнением Хилла.

## 2.2. Уравнение Матъе

Обратимся к частному случаю зависимости емкости  $C$  от времени. Пусть

$$\frac{1}{C(t)} = \frac{1}{C_0} (1 + m \cos \Omega t), \quad (13)$$

где  $m$  – положительная величина, меньшая единицы и называемая обычно коэффициентом модуляции. В этом случае

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + m \cos \Omega t) - \alpha^2$$

где  $\omega_0$  – резонансная частота колебательного контура при  $C = C_0$ , то есть в отсутствие модуляции (при  $m = 0$ ). Умножая (12) на  $4/\Omega^2$  и учитывая выражение для  $\omega^2(t)$ , введем нормированное (безразмерное) время  $\tau = \Omega t/2$  и безразмерные параметры

$$a = \frac{4}{\Omega^2} (\omega_0^2 - \alpha^2), \quad n = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} m. \quad (14)$$

В результате получим вместо (12) соотношение

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (a + 4n \cos 2\tau)x = 0, \quad (15)$$

называемое уравнением Матъе. Как следует из теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, общее решение уравнения (15) может быть представлено в форме

$$x = C_1 \exp(\lambda\tau) \Phi(\tau) + C_2 \exp(-\lambda\tau) \Phi(-\tau). \quad (16)$$

В приведенном выражении  $\lambda$  – некоторое, в общем случае комплексное, число, которое зависит от  $a$  и  $n$ ,  $\Phi(\tau)$  – функция, относительно которой известно, что она периодическая по  $\tau$  и имеет период  $\pi$  или  $2\pi$ ;  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Случаи, когда  $\lambda$  – чисто мнимая величина, соответствуют ненарастающим решениям уравнения (15), выражаемым либо периодическими, либо почти периодическими функциями  $\tau$ . Наоборот, при значениях  $a$  и  $n$ , для которых  $\text{Re}\lambda \neq 0$ , одно из слагаемых в (16) при  $\tau \rightarrow +\infty$  неограниченно растет, а другое стремится к нулю. Как показывают подробные исследования [30], плоскость  $a, n$  (рис.7) может быть разбита на две части, точкам одной из кото-

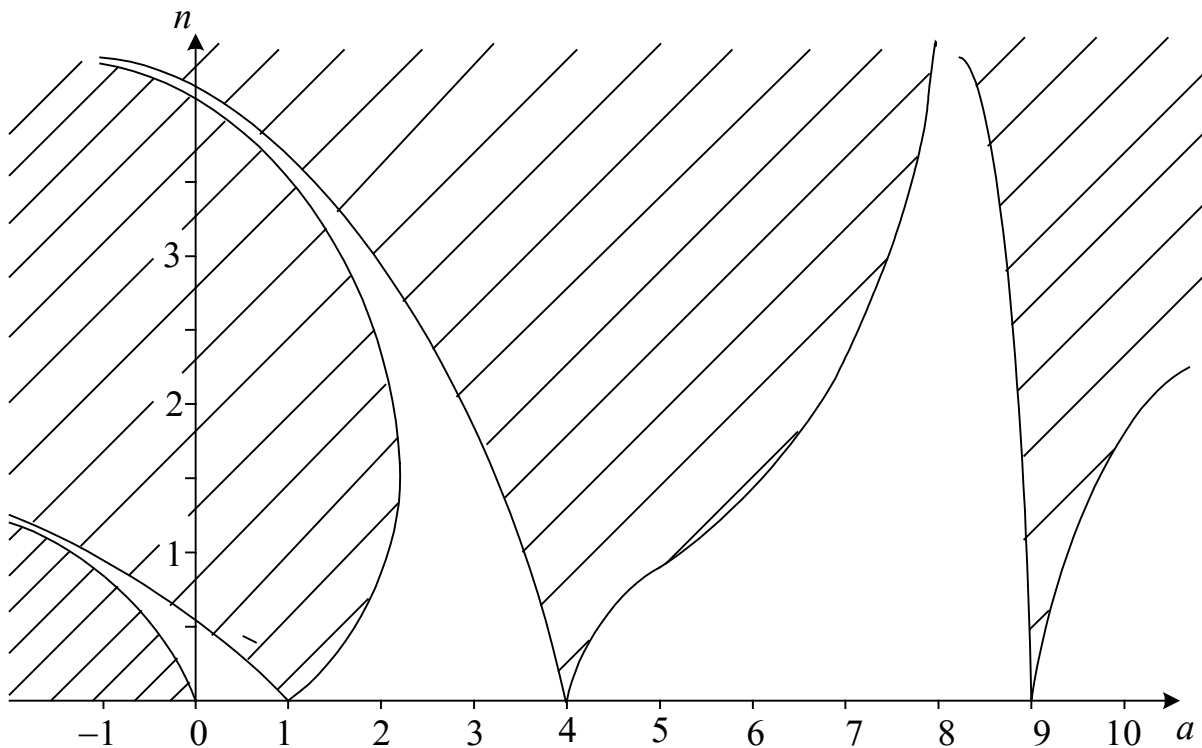


Рис.7

рых соответствуют вещественные  $\lambda$ , отличные от нуля (заштрихованная часть плоскости), а точкам другой – чисто мнимые  $\lambda$  (незаштрихованная часть плоскости, включая граничные кривые).

На граничных кривых решения (16) имеют период  $\pi$  или  $2\pi$  и выражаются через специальные периодические функции, называемые функциями Матье [15]. Диаграмму, представленную на рис.7, часто называют диаграммой Айнса-Стретта [23].

### 2.3. Условие параметрического возбуждения

Опираясь на общее решение уравнения Матъе, можно получить условие возникновения нарастающих по амплитуде колебаний в контуре, емкость которого изменяется согласно (13). Поскольку на основании (11)

$$q = x \exp(-2\alpha\tau/\Omega),$$

из последней формулы и (16) вытекает следующее неравенство

$$|\operatorname{Re}\lambda| > 2\alpha/\Omega, \quad (17)$$

выполнение которого необходимо для того, чтобы решение для заряда  $q$  было нарастающим. При этом условии энергия, которая поступает в контур от внешнего источника, изменяющего емкость, превышает энергию, рассеиваемую в сопротивлении потерь, благодаря чему контур с переменной емкостью ведет себя подобно линейному осциллятору с отрицательным сопротивлением.

К аналогичным выводам можно прийти для контура с неизменной емкостью, но меняющейся индуктивностью. Само явление компенсации потерь, которое может наблюдаться в динамической системе при изменении какого-либо из ее энергоемких параметров, получило название параметрической регенерации [17].

Неравенство (17), называемое условием параметрического возбуждения, справедливо в менее широких областях, чем те, что отвечают на диаграмме Айнса-Стретта нарастающему решению для  $x$ . Для контура с малыми потерями примерный вид областей параметрического возбуждения показан для  $\alpha \approx 0,001\Omega$  при  $a \approx 1$  и  $a \approx 4$  на рис.8 и рис.9, где эти области отмечены штриховкой (следует обратить внимание на то, что на рисунках используется разный масштаб). Граничной кривой заштрихованной области на рис.8 отвечает  $\lambda = -0,002$ , а на рис.9 –  $\lambda = 0,002$ .

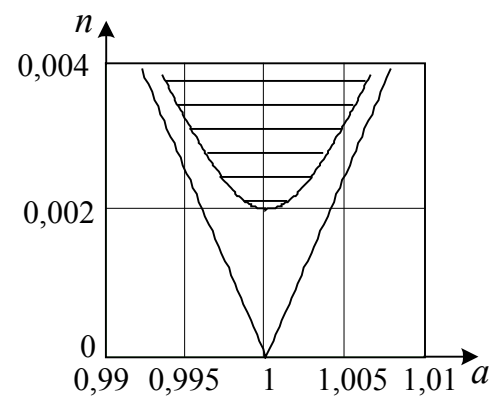


Рис.8

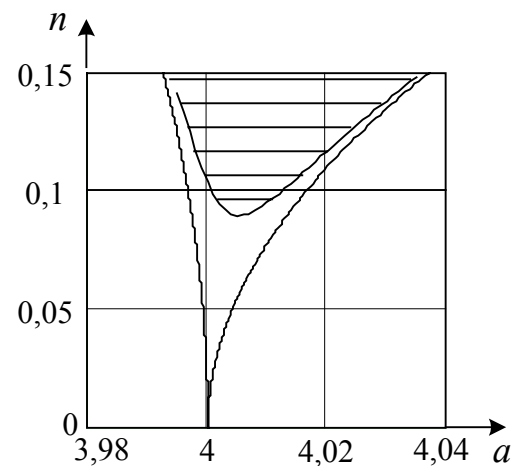


Рис.9

В частном случае, когда коэффициент модуляции  $m$  может считаться малым, а частота  $\Omega$  – близкой к  $2\omega_0$ , условие параметрического возбуждения нетрудно получить непосредственно при помощи метода медленно меняющихся амплитуд, процедура применения которого описана в приложении I.

Для этого перейдем сначала к форме дифференциального уравнения, отличной от (15). Полагая, что  $\alpha \ll \omega_0$  и  $\Omega/2 = \omega_0 + \delta\omega$ , где  $|\delta\omega| \ll \omega_0$ , можем с точностью до величин порядка  $\alpha$  и  $\delta\omega$  записать:

$$a = 1 - 2\nu,$$

где  $\nu = \delta\omega/\omega_0$  – малая по сравнению с единицей относительная расстройка.

С учетом принятых приближений заменим уравнение (15) равносильной системой двух уравнений первого порядка

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \quad (18)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = (2\nu - 1 - 4n \cos 2\tau)x_1. \quad (19)$$

Умножая (19) на  $j = \sqrt{-1}$ , вычитая полученный результат из (18) и вводя вспомогательную комплексную переменную

$$y = x_1 - jx_2,$$

придем к специальной форме дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} - jy = j(2n \cos 2\tau - \nu)(y + y^*), \quad (20)$$

при получении которой учтено, в частности, что

$$x = x_1 = \operatorname{Re} y = (y + y^*)/2.$$

Зависимость вспомогательной переменной  $y$  от безразмерного времени  $\tau$  ищется далее в виде

$$y(\tau) = A(\tau) \exp(j\tau), \quad (21)$$

где  $A(\tau)$  – медленно меняющаяся комплексная амплитуда.

Умножая (20) на  $\exp(-j\tau)$  и учитывая (21), получим



$$\frac{dA}{d\tau} = j[n \exp(j2\tau) + n \exp(-j2\tau) - \nu][A + A^* \exp(-j2\tau)] \quad (22)$$

Перемножая скобки в правой части (22) и отбрасывая согласно процедуре метода медленно меняющихся амплитуд быстро осциллирующие члены в окончательном выражении, приходим к следующему укороченному уравнению

$$\frac{dA}{d\tau} = j(nA^* - \nu A). \quad (23)$$

Выражая затем комплексную амплитуду  $A$  через вещественную ( $A_1$ ) и мнимую ( $A_2$ ) части:

$$A = A_1 + jA_2,$$

заменяем (23) системой двух вещественных укороченных уравнений:

$$\frac{dA_1}{d\tau} = (n + \nu)A_2, \quad (24)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = (n - \nu)A_1. \quad (25)$$

Характеристическое уравнение системы (24, 25) сводится к равенству

$$\lambda^2 = n^2 - \nu^2, \quad (26)$$

откуда следует, что при малых  $n$  и при параметре  $a$ , близком к единице, нарастающему решению уравнения Матье отвечает условие  $n > |\nu|$ , приводимое к виду  $1 - 2n < a < 1 + 2n$  (см. также приложение II).

При принятых выше допущениях величина  $\Omega/2$  близка к  $\omega_0$ , так что параметр  $n$ , учитывая (14), можно считать равным  $m/4$ . Как и в общем случае, для того чтобы амплитуда колебаний заряда  $q$  нарастала с течением времени, необходимо выполнение условия (17). С учетом упомянутых допущений и (26) это условие преобразуется в следующее неравенство:

$$m > \frac{4}{\omega_0} \sqrt{\alpha^2 + (\delta\omega)^2}.$$

Необходимо, однако, отметить, что ответ на вопрос о том, какой режим может установиться вследствие параметрического возбуждения в практической конструкции, требует учета факторов, ограничивающих амплитуду

колебаний, чего не сделано в рассмотренной выше идеализированной линейной модели. Следует указать также на возможность использования параметрической регенерации (в отсутствие параметрического возбуждения) для усиления слабых сигналов.

### 3. СИСТЕМА ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И МАЯТНИК

#### 3.1 Уравнение схемы фазовой автоматической подстройки частоты с однозвенным сглаживающим $RC$ -фильтром

Основное назначение схемы, приведенной на рис. 10, состоит в синхронизации подстраиваемого по частоте генератора гармонических колебаний (ПГ), гармоническим напряжением  $u_s$  внешнего источника.

Записывая выходное напряжение подстраиваемого генератора как

$$u = U \cos \psi(t),$$

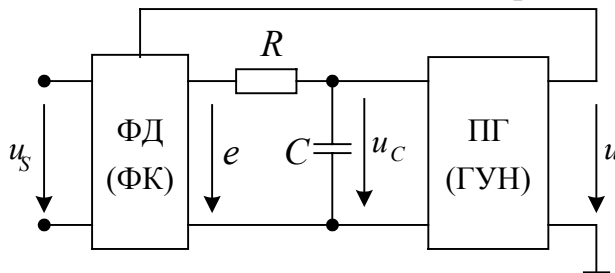


Рис.10

будем в последующем предполагать, что равная мгновенной частоте  $\omega$  производная по времени от фазы  $\psi$  линейно зависит от управляющего напряжения  $u_c$ , подаваемого с выхода  $RC$ -фильтра:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega = \omega_0 - Su_c. \quad (27)$$

Здесь  $\omega_0$  – частота автоколебаний ПГ при нулевом управляющем напряжении, а величина  $S$  считается далее положительной. Аналогично для внешнего синхронизирующего напряжения  $u_s = U_s \cos \psi_s(t)$ . Тогда

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \omega_s. \quad (28)$$

На входе  $RC$ -фильтра действует выходное напряжение фазового дискриминатора (ФД), зависящее от текущего рассогласования фаз  $\psi$  и  $\psi_s$  и называемое сигналом ошибки. На один из входов ФД подается внешнее синхронизирующее напряжение, на другой – напряжение с выхода ПГ. Устройство ФД, называемое также фазовым компаратором (ФК), таково, что сигнал ошибки  $e$  оказывается периодической функцией сдвига фаз  $\varphi = \psi - \psi_s$  с периодом  $2\pi$ .

Обычно

$$e = E F(\varphi), \quad (29)$$

где  $E$  – наибольшее значение сигнала ошибки, а  $F(\varphi)$  – периодическая функция, минимальное и максимальное значения которой равны, соответственно,  $-1$  и  $+1$ . Типичные дискриминационные характеристики  $F(\varphi)$  – синусоидальная и треугольная – приведены на рис. 11.

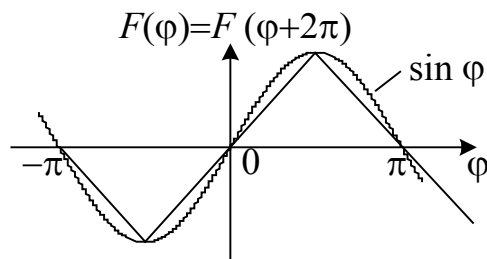


Рис.11

Если сдвиг фаз  $\varphi$  не изменяется во времени, то колебания подстраиваемого автогенератора (для него используют также обозначение ГУН – генератор, управляемый напряжением) синхронны колебаниям внешнего источника, а частота  $\omega$  равняется  $\omega_s$ . В противном случае в схеме реализуется асинхронный режим.

Как следует из (27) и (28),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \omega_s - S u_C. \quad (30)$$

С другой стороны, напряжение на сопротивлении  $R$  равно

$$RC \frac{du_C}{dt} = e - u_C. \quad (31)$$

Исключая из (30) и (31) напряжение  $u_C$ , получим с учетом (29) уравнение

$$RC \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \omega_s - SEF(\varphi). \quad (32)$$

Вводя безразмерные время  $\tau = t \sqrt{\frac{SE}{RC}}$ , параметры  $\gamma = \frac{\omega_0 - \omega_s}{SE}$ ,  $\delta = \frac{1}{2\sqrt{SERC}}$  и переходя к производным  $\varphi'$  и  $\varphi''$  по  $\tau$ , можно привести уравнение (32) к следующему виду:

$$\varphi'' + 2\delta\varphi' + F(\varphi) = \gamma. \quad (33)$$

Подобным образом можно записать уравнения ряда электромеханических систем, к числу которых относится, например, генератор переменного тока, работающий в общую сеть параллельно с другими машинами [1].

### 3.2. Уравнение движения маятника

Обратимся теперь к классической модели математического маятника, дополненной учетом потерь и внешних воздействий. Невесомый недеформируемый стержень с закрепленной на одном из его концов точечной массой  $m$  может поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси  $C$ , расположенной на расстоянии  $l$  от центра тяжести (рис.12). Обозначим через  $f_g, f_r$  и  $f_e$  определяемые относительно оси  $C$  моменты сил веса, трения и момент прочих (внешних) сил соответственно, а через  $J$  – момент инерции ( $J = ml^2$ ). Тогда дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг оси  $C$  можно представить в следующем виде:

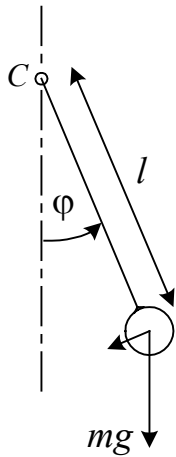


Рис.12

При выбранном способе отсчета угла  $\phi$  отклонения маятника от вертикали

$$J\ddot{\phi} = f_g + f_r + f_e. \quad (34)$$

$$f_g = -mgl \sin\phi. \quad (35)$$

Предполагая трение вязким, будем считать также, что момент сил трения

$$f_r = -R\dot{\phi}, \quad (36)$$

где  $R$  – положительный коэффициент.

Поделив (34) на  $J$  и учитывая (35,36), получим уравнение

$$\ddot{\phi} + 2\alpha\dot{\phi} + \omega_0^2 \sin\phi = \varepsilon, \quad (37)$$

где  $2\alpha = \frac{R}{J}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $\varepsilon = \frac{f_e}{J}$ .

Переходя далее к производным по безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$ , можно привести уравнение движения маятника к форме, аналогичной той, которая использована выше при записи дифференциального уравнения системы фазовой автоподстройки частоты:

$$\phi'' + 2\delta\phi' + \sin\phi = \gamma, \quad (38)$$

где  $\delta = \frac{\alpha}{\omega_0}$ ,  $\gamma = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2}$ ,  $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau}$ .

К такому же, как и (38), виду можно привести дифференциальное уравнение резистивной модели джозефсоновского перехода. В последнем случае переменная  $\varphi$  имеет смысл разности фаз волновых функций совокупностей куперовских пар двух находящихся в электрическом контакте сверхпроводящих образцов [13].

### 3.3. Фазовый портрет свободного от внешних воздействий маятника без трения

В отсутствие трения ( $\delta = 0$ ) маятник может рассматриваться как одна из разновидностей консервативного нелинейного осциллятора. Если же вообще кроме гравитационной никакие другие силы могут не учитываться, то уравнение (38) принимает вид

$$\varphi'' + \sin \varphi = 0. \quad (39)$$

Уравнению (39) равносильна следующая система уравнений первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega, \quad \frac{d\Omega}{d\tau} = -\sin \varphi, \quad (40)$$

так что в последующем состояние маятника будет характеризоваться наряду с углом отклонения  $\varphi$  также (нормированной к  $\omega_0$ ) угловой скоростью  $\Omega$ .

В качестве фазового пространства рассматриваемой динамической системы первоначально выберем плоскость  $\varphi, \Omega$ .

Поделив второе из уравнений системы (40) на первое, получим так называемое дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = -\frac{\sin \varphi}{\Omega}. \quad (41)$$

Точки  $(\varphi^0, \Omega^0)$ , в которых числитель и знаменатель правой части (41) одновременно обращаются в нуль, являются особыми точками этого уравнения и фазового портрета маятника.

Как видно из (41),

$$\varphi^0 = p\pi, \quad p=0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \Omega^0=0,$$

что соответствует нижнему (при четных  $p$ ) и верхнему (при нечетных  $p$ ) положениям равновесия (см. рис.12).

Интегрируя (41), предварительно умножив его на  $2\Omega d\varphi$ , имеем

$$\Omega^2 - \Omega^2(0) = 2\cos \varphi - 2\cos \varphi(0), \quad (42)$$

где  $\varphi(0), \Omega(0)$  – начальные значения используемых переменных состояния.

Из (42) вытекает соотношение

$$\Omega^2 + 2(1 - \cos \varphi) = \Omega^2(0) + 2[1 - \cos \varphi(0)], \quad (43)$$

которое легко также получить на основании закона сохранения энергии. Иными словами, к (43) можно прийти, если, учитывая отсутствие потерь, приравнять полную энергию системы в произвольный момент времени сумме кинетической и потенциальной энергий в начальный момент  $\tau = 0$ . Введя неотрицательный параметр

$$k = \sqrt{\frac{\Omega^2(0)}{4} + \sin^2 \frac{\varphi(0)}{2}}, \quad (44)$$

зависящий от энергии маятника, получим из (43) формулу

$$\Omega = \pm 2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad (45)$$

удобную для расчетов, связанных с построением фазовых траекторий.

При  $k = 0$  равенство (45) удовлетворяется только в том случае, если  $\Omega = 0$ , а  $\varphi$  равняется четному числу  $\pi$ , то есть маятник находится в нижнем положении равновесия.

Для  $0 < k < 1$  расчеты приводят к замкнутым фазовым траекториям, охватывающим точки с координатами  $\varphi^0 = 2\pi q, q = 0, \pm 1, \pm 2; \Omega^0 = 0$  (рис.13).

Каждая из таких траекторий отвечает периодическим колебаниям ма-

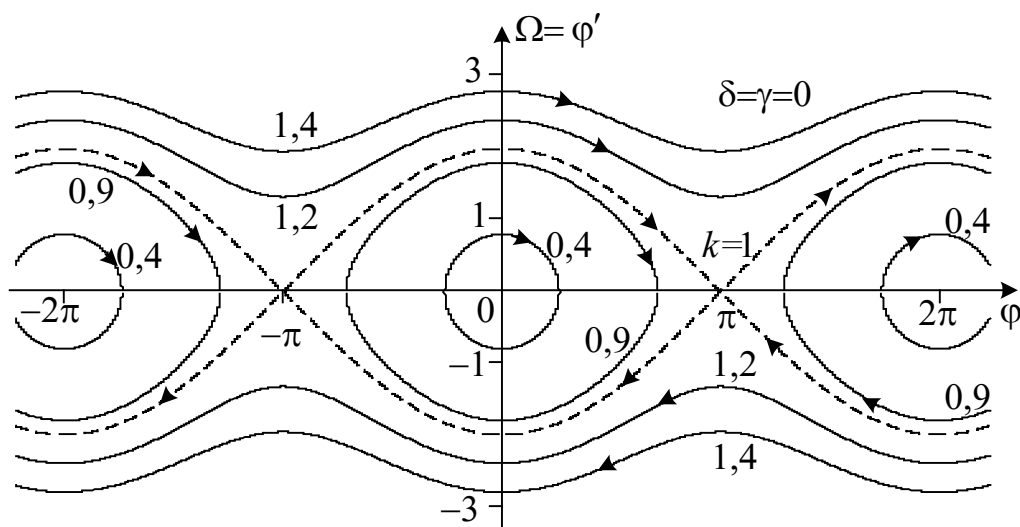


Рис.13

маятника относительно нижнего положения равновесия, которому в отсутствие потерь, как видно из рис. 13, соответствует особая точка типа центр.

Если определяемый согласно (44)  $k$  много меньше единицы, то амплитуда колебаний маятника мала и (45) в первом приближении преобразуется в уравнение окружностей радиуса  $2k$  :

$$\Omega^2 + (\varphi - 2\pi q)^2 = (2k)^2 .$$

При этом, поскольку  $\alpha = \varepsilon = 0$  , равенство (37) сводится к уравнению гармонического осциллятора, который имеет период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

не зависящий от амплитуды. Известное еще Галилею свойство независимости периода малых колебаний маятника от амплитуды называют изохронностью. Если амплитуда колебаний маятника не мала, то они неизохронны, причем их период неограниченно растет при приближении параметра  $k$  к единице.

Если  $k$  не может считаться много меньшим единицы, то форма зависимости от времени для  $\varphi$  существенно отличается от синусоидальной. Для обозначения последнего свойства используется термин «ангармоничность».

Любая из траекторий на фазовой плоскости, для которых  $k > 1$ , незамкнутая, что означает периодическое вращательное движение маятника в неизменном направлении, зависящем от знака  $\Omega$ . При этом период, то есть время, за которое совершается один оборот, тем меньше, чем больше  $k$  по сравнению с единицей. При  $k=1$ , как следует из (45),

$$\Omega = \pm 2 \cos \frac{\varphi}{2} .$$

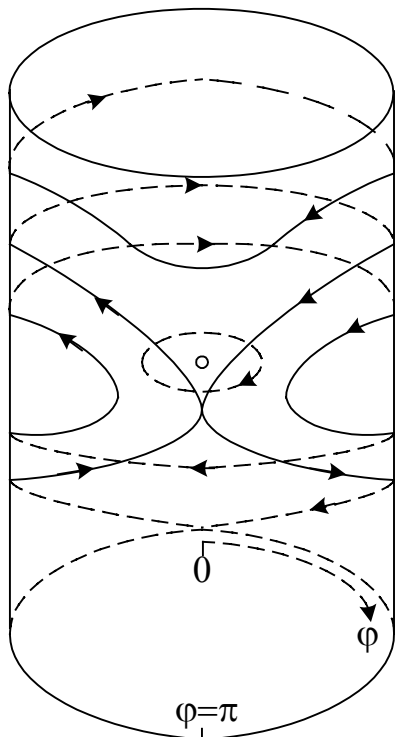


Рис.14

Последнему случаю отвечает сепаратриса (разделяющая кривая), показанная на рис. 13 штриховой линией. Она состоит из дуг, границами которых являются особые точки типа седло, соответствующие верхнему положению равновесия маятника (см. также полученный при помощи (8) рис. 6).

Необходимо отметить, что наряду с фазовой плоскостью имеются и другие варианты выбора фазового пространства для маятника.. Например, представленный на рис. 14 цилиндр, используемый тогда, когда нужно обеспечить вза-

имно однозначное соответствие между положениями маятника и точками его фазового портрета. Нетрудно видеть, что любая из вертикальных полос шириной  $2\pi$ , выделяемых из фазовой плоскости (рис.13) может в этом случае рассматриваться как развертка цилиндрической поверхности. Видно также, что при представлении фазового портрета маятника без трения на цилиндрической поверхности сепаратриса сводится к двум идущим вокруг цилиндра петлям, которые начинаются и заканчиваются в общем седле. Вращательным движениям в этом случае отвечают охватывающие цилиндр замкнутые периодические траектории.

Полученное выше соотношение (45) удобно использовать при нахождении зависимостей  $\varphi$  и  $\Omega$  от времени. Подстановка  $\Omega$  из (45) в первое из уравнений (40) позволяет свести его к квадратуре

$$\tau = \pm \int_{\varphi(0)}^{\varphi} \frac{d\theta}{2\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (46)$$

Интеграл в правой части (46) в общем случае через элементарные функции не выражается. Исключение составляет частный случай  $k = 1$ , отвечающий сепаратрисе. Для него, если принять, что  $\varphi(0)=0$ ,

$$\tau = \pm \operatorname{Arth} \left( \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

так что угол отклонения

$$\varphi = \pm 2 \arcsin (\operatorname{th} \tau),$$

а нормированная угловая скорость

$$\Omega = \varphi' = \pm 2 \operatorname{sch} \tau. \quad (47)$$

Построенный на рис. 15 согласно (47) одиночный импульс иногда называют солитоном, усматривая в нем аналогию с уединенными волнами, которые могут возбуждаться в некоторых видах нелинейных сред [9,11,27,28].

Обращаясь к фазовому портрету, заметим, что в разобранным частном случае  $k = 1$  при изменении  $\tau$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  изображающая точка перемещается по дуге сепаратрисы от седла к седлу.

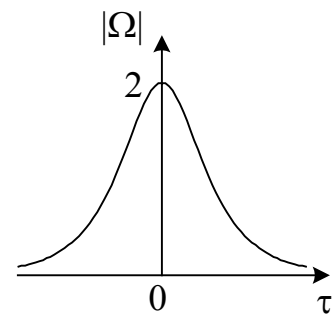


Рис.15



Если параметр  $k$  не совпадает с единицей, но принимает близкое к ней значение, то зависимость  $\Omega$  от времени представляет собой периодическую последовательность «солитоноподобных» импульсов.

### 3.4. Фазовые портреты маятника с потерями и системы ФАПЧ

Будем исходить из полученного для системы фазовой автоматической подстройки частоты (ФАПЧ) уравнения (33), в котором постоянный параметр  $\delta > 0$  и которое при  $F(\varphi) = \sin \varphi$  совпадает по форме с уравнением движения маятника с потерями. Величина  $\gamma$  также считается далее неизменной во времени и может отличаться от нуля. Для маятника последнее означает, что он находится под действием постоянного вращающего момента, обусловленного внешними силами.

Заменим (33) равносильной этому уравнению системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega, \quad (48)$$

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \gamma - F(\varphi) - 2\delta\Omega, \quad (49)$$

при помощи которых нетрудно получить дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{\gamma - F(\varphi)}{\Omega} - 2\delta. \quad (50)$$

Поиск особых точек приводит к  $\Omega^0 = 0$  и уравнению

$$F(\varphi^0) = \gamma,$$

имеющему решения только тогда, когда  $|\gamma| \leq 1$ . В противном случае у системы (48,49) отсутствуют равновесные решения и особых точек в фазовых портретах маятника и системы ФАПЧ нет.

Если  $|\gamma| > 1$ , то для любых начальных условий при  $\tau \rightarrow +\infty$  зависимость  $\Omega$  от времени приближается к периодической функции, соответствующей стационарному вращению маятника или установившемуся асинхронному режиму (режиму биений) системы ФАПЧ. Фазовый портрет на цилиндрической поверхности в таком случае содержит охватывающую цилиндр замкнутую траекторию, к которой при  $\tau \rightarrow +\infty$  стремятся изображающие точки по всем прочим траекториям. Из сказанного должно быть ясно, почему упомянутую

замкнутую фазовую кривую, вблизи которой нет других замкнутых траекторий называют предельным циклом (в данном случае это устойчивый предельный цикл) и аттрактором.

При  $|\gamma| \gg 1$  можно получить для предельного цикла приближенное аналитическое выражение. Рассматривая для определенности маятник, отметим, что при сколь угодно большом значении  $|\gamma|$  стационарное движение ничтожно мало отличается от вращения с постоянной угловой скоростью, нормированное значение которой, как проверяется при помощи (49), можно считать равным

$$\Omega_0 = 0,5\gamma/\delta .$$

При умеренных, хотя и значительно превосходящих единицу, значениях  $|\gamma|$  угловая скорость  $\Omega$  в процессе стационарного вращения маятника претерпевает небольшие изменения, что может быть учтено посредством введения малой поправки  $\Delta$ , зависящей от времени:

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta . \quad (51)$$

Подставляя  $\Omega$  из (51) в (50) и полагая, что в правой части получившегося соотношения допустимо считать  $\Delta$  равной нулю, придем к уравнению

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = -\frac{F(\varphi)}{\Omega_0} . \quad (52)$$

Учитывая, что для маятника  $F(\varphi) = \sin\varphi$ , и предполагая также, что результат усреднения поправки  $\Delta$  за один оборот, то есть при изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , может считаться пренебрежимо малым, получим после интегрирования (52)

$$\Delta(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\Omega_0} .$$

На рис.16 приведен фазовый портрет маятника, полученный путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (48,49) при  $\delta = 0,2$ ,  $\gamma = 1,2$ . Устойчивому предельному циклу на этом рисунке отвечает штрих-пунктирная линия. Для системы ФАПЧ при тех же  $\delta$  и  $\gamma$  и синусоидальной дискриминационной характеристике  $F(\varphi)$  получается такая же картина.

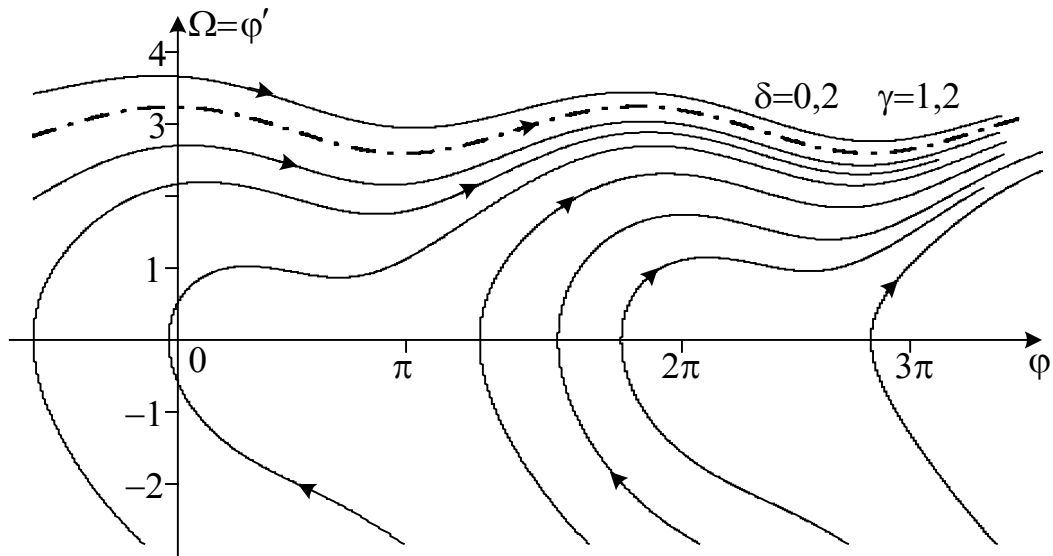


Рис.16

Если  $|\gamma| < 1$ , то как фазовый портрет маятника, так и фазовый портрет системы ФАПЧ содержат особые точки, соответствующие двум различным состояниям равновесия. Из предыдущего ясно, что в случае системы ФАПЧ равновесному решению уравнений (48,49) отвечает синхронный режим. Как можно показать [5], состояние равновесия, для которого производная по аргументу  $F'(\varphi^0)$  положительна, устойчиво (в малом) и притом, поскольку  $\delta > 0$ , асимптотически устойчиво. Для другого состояния равновесия  $F'(\varphi^0) < 0$ , и потому оно неустойчиво (в фазовых портретах ему отвечает седловая особая точка). Нахождение равновесных значений угла отклонения маятника и анализ их устойчивости удобно проводить при помощи формулы

$$\cos \varphi^0 = \mp \sqrt{1 - \gamma^2}.$$

Здесь верхний знак (минус) относится к тому из двух положений равновесия (покоя), которое расположено выше и в силу отрицательности  $\cos \varphi^0$  неустойчиво, а знак «плюс» – к нижнему (устойчивому) положению равновесия.

Как показывает детальное рассмотрение [5], при значениях модуля  $\gamma$ , меньших единицы и превышающих некоторое положительное число  $\gamma_0$ , в фазовых портретах маятника и системы ФАПЧ имеются и особые точки и предельные циклы.

Например, для  $F(\varphi) = \sin \varphi$  при  $\delta = 0,2$  и  $\gamma = 0,9$  фазовый портрет (рис.17) содержит наряду с устойчивым предельным циклом еще один аттрактор, область притяжения которого, отмеченная на рисунке штриховкой, ограничена двумя дугами сепаратрисы, входящими в седловую особую точку.

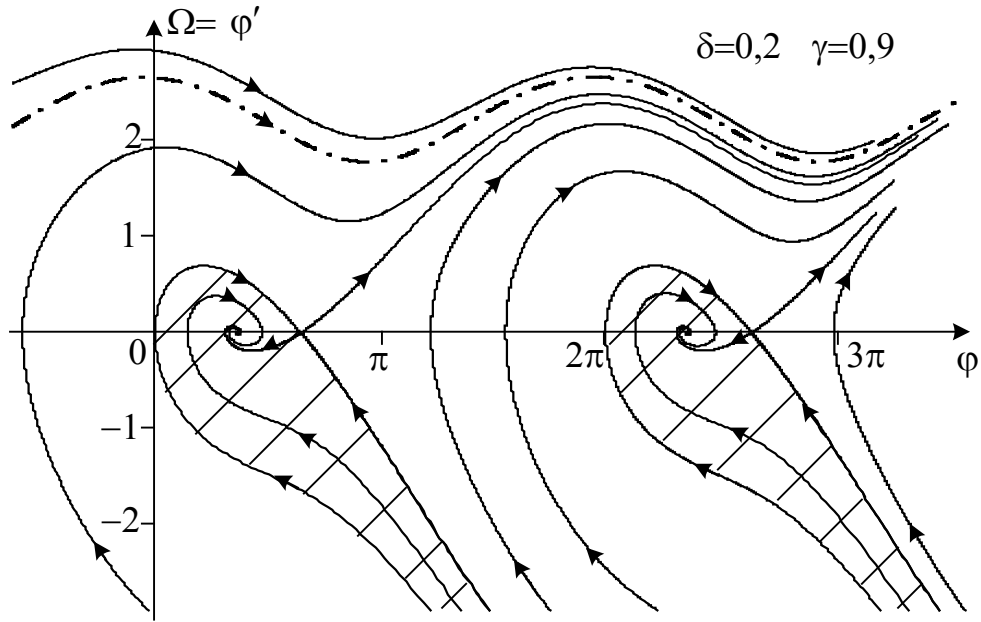


Рис.17

По всем фазовым траекториям, начинающимся в упомянутой области, изображающие точки при  $\tau \rightarrow +\infty$  стремятся к устойчивой особой точке, совершая вокруг нее бесконечное число оборотов, то есть этим аттрактором является устойчивый фокус. Незаштрихованная часть фазового портрета относится к области (бассейну) притяжения предельного цикла, так что для рассматриваемой системы при  $\gamma_0 < |\gamma| < 1$  вид стационарного решения зависит от начальных условий. При значениях  $\gamma$ , лежащих в интервале  $[-\gamma_0, \gamma_0]$ , фазовые портреты не содержат предельных циклов. Для системы ФАПЧ, например, это означает, что она находится в так называемой полосе захвата, ибо независимо от начальных условий с течением времени всегда устанавливается синхронный режим.

При любых  $\gamma$ , рассматривая фазовые портреты маятника и системы ФАПЧ при все больших и больших  $\delta$ , нетрудно убедиться в существовании такого граничного значения  $\delta_c$ , что при  $\delta > \delta_c$  поведение фазовых траекторий в окрестности устойчивой особой точки соответствует устойчивому узлу [5].

Анализ стационарных режимов при различных  $\gamma$  позволяет получить информацию о том, как зависит от  $\gamma$  подстраивающее действие системы ФАПЧ, количественно характеризуемое величиной

$$\bar{\Omega} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{\gamma}{|\gamma|}. \quad (53)$$

Здесь  $T_0$  – зависящий от  $\gamma$  безразмерный (нормированный) временной интервал, в течение которого в стационарном асинхронном режиме разность фаз  $\varphi$

колебаний подстраиваемого генератора (ПГ) и внешнего синхронизирующего напряжения изменяется на  $2\pi$ . В синхронном режиме  $\bar{\Omega} = 0$ .

Соответствующий график приведен на рис.18. На графике отмечены полоса захвата, где упомянутая разность фаз не зависит от времени, и зоны гистерезиса при  $\gamma_0 < |\gamma| < 1$ , в которых в зависимости от предыстории возможны как синхронный, так и асинхронный режимы. Входящую в (53) величину  $T_0$  можно трактовать также как время, за которое маятник при стационарном вращении совершает один оборот. В этом случае  $\bar{\Omega}$  имеет смысл средней нормированной угловой скорости вращения.

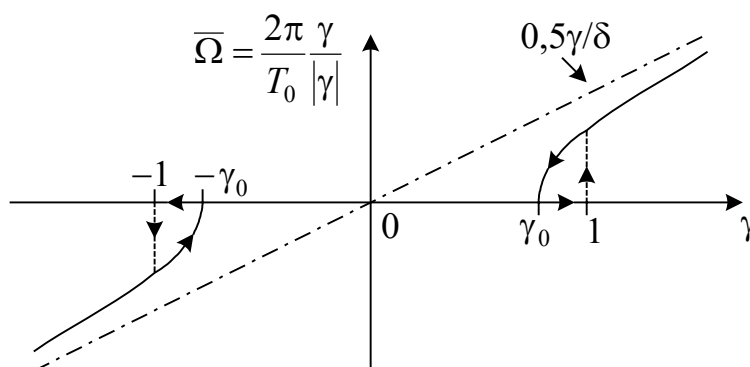


Рис.18

### 3.5. Маятник с колеблющейся точкой подвеса

Предположим, что точка подвеса  $C$  маятника, изображенного на рис.12, перемещается вдоль вертикальной оси, совершая гармонические колебания малой амплитуды  $b$  относительно среднего положения  $C_0$ , так что

$$y_C = y_{C_0} + b \cos \omega_C t.$$

Соответствующее этому перемещению ускорение

$$\ddot{y}_C = -\omega_C^2 b \cos \omega_C t \quad (54)$$

входит в выражение для силы инерции переносного движения маятника, которая равна  $m\ddot{y}_C$  и которую нужно добавить к силе веса  $mg$  при составлении уравнения, подобного (34).

В отсутствие вкладов других сил исходным является равенство

$$ml^2\ddot{\phi} = -m(g + \ddot{y}_C)l \sin \phi.$$

Поделив его на  $0,25m\omega_C^2 l^2$  и учитывая (54), приходим к следующему уравнению движения

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left( \frac{4\omega_0^2}{\omega_C^2} - 4n \cos 2\tau \right) \sin \varphi = 0, \quad (55)$$

где  $\tau = 0,5\omega_C t$  – нормированное (безразмерное) время,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , а  $n = \frac{b}{l}$  и предполагается много меньшим единицы.

Как при  $n = 0$  (неподвижная ось подвеса), так и при  $n$  отличном от нуля у уравнения (55) имеются решения, не зависящие от времени и отвечающие либо нижнему ( $\varphi^0 = 0$ ), либо верхнему ( $\varphi^0 = \pi$ ) положениям маятника.

Малые по амплитуде вертикальные перемещения оси подвеса могут, с одной стороны, привести при соответствующих условиях к поперечным качаниям маятника около положения  $\varphi^0 = 0$ , а с другой стороны, при достаточно большой частоте  $\omega_C$  обеспечить устойчивость верхнего положения.

Проиллюстрируем сначала возможность возбуждения качаний маятника вокруг нижнего положения. Полагая, что  $|\varphi| \ll 1$ , подставим в (55) вместо  $\sin\varphi$  первые два члена его степенного разложения. Вводя обозначение

$$a = \frac{4\omega_0^2}{\omega_C^2},$$

имеем соотношение

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (a - 4n \cos 2\tau) \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0, \quad (56)$$

сводящееся, если пренебречь  $\varphi^3/6$  по сравнению с  $\varphi$ , к уравнению Матье.

Пусть частота  $\omega_C$  близка к  $2\omega_0$ , то есть  $\omega_C/2 = \omega_0 + \delta\omega$ , где  $|\delta\omega| \ll \omega_0$ , и для параметра  $a$  можно воспользоваться следующим приближенным выражением через относительную расстройку  $\nu = \delta\omega/\omega_0$ :

$$a = 1 - 2\nu.$$

Заменим уравнение (56) системой двух уравнений первого порядка, не удерживая при этом слагаемые более высокого порядка малости, чем  $\varphi^3/6$ :

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Omega, \quad (57)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = (4n \cos 2\tau + 2\nu - 1)\varphi + \frac{\varphi^3}{6} + \dots \quad (58)$$

Вычитая уравнение (58), умноженное на  $j$ , из (57) и вводя вспомогательную комплексную переменную

$$y = \varphi - j\Omega,$$

после ряда тождественных преобразований получим

$$\frac{dy}{d\tau} - jy = -j[(2n \cos 2\tau + \nu)(y + y^{\bullet}) + \frac{1}{24} \operatorname{Re}(y^3 + 3y^2 y^{\bullet})]. \quad (59)$$

В соответствии с процедурой метода ММА после умножения (59) на  $\exp(-j\tau)$  выразим переменную  $y$ , как  $y = A \exp(j\tau)$ , и отбросим из правой части быстро осциллирующие слагаемые.

В результате придем к комплексному укороченному уравнению

$$\frac{dA}{d\tau} = -j(nA^{\bullet} + \nu A) + \frac{1}{16} |A|^2 A,$$

из которого получаются два вещественных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= (\nu - n)A_2 + \frac{1}{16} |A|^2 A_1, \\ \frac{dA_2}{d\tau} &= -(\nu + n)A_1 + \frac{1}{16} |A|^2 A_2, \end{aligned}$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – вещественная и мнимая части  $A$ , соответственно.

Из последних уравнений вытекают соотношения для не зависящих от времени и считающихся отличными от нуля значений  $A_1^0$ ,  $A_2^0$ ,  $|A^0|$ :

$$\begin{aligned} |A^0|^2 A_1^0 &= 16(n - \nu)A_2^0, \\ |A^0|^2 A_2^0 &= 16(n + \nu)A_1^0. \end{aligned}$$

Эти два равенства позволяют, в частности, получить следующее выражение для стационарной амплитуды качаний маятника около нижнего положения, возникающих из-за колебаний точки подвеса:

$$|A^0| = \sqrt{(A_1^0)^2 + (A_2^0)^2} = 4\sqrt{n^2 - \nu^2}. \quad (60)$$

Выражение (60) приводит к отличным от нуля вещественным значениям при  $n > |\nu|$ , что совпадает с условием нарастания решения уравнения Матье для малого  $n$  и близкого к единице параметра  $a$ . Последнее означает,

что в отсутствие трения неравенство  $n > |v|$  является условием возбуждения малых нарастающих по амплитуде качаний маятника около нижнего положения. Вывод этого условия опирается на переход от рассмотрения исходной нелинейной динамической системы к исследованию линеаризованной, в данном случае параметрической, системы, описываемой уравнением Матье. Основанный на таком переходе прием, при помощи которого выясняют отдельные свойства нелинейных систем, называется параметрическим приближением.

Одна из особенностей рассматриваемой задачи состоит в том, что нелинейность ограничивает рост амплитуды возникающих параметрических колебаний уровнем, определяемым равенством (60).

Воспользуемся параметрическим приближением также для получения условия устойчивости (в малом) решения уравнения (55), соответствующего верхнему положению маятника. С этой целью зададим

$$\varphi = \pi + \theta,$$

где  $\theta$  – возмущение, достаточно малое для того, чтобы была допустима процедура линеаризации, приводящая при гармонических колебаниях точки подвеса к уравнению Матье

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (a + 4n \cos 2\tau)\theta = 0. \quad (61)$$

В данном случае  $a = -\frac{4\omega_0^2}{\omega_c^2}$  – отрицательный параметр, значение ко-

торого можно регулировать путем изменения частоты  $\omega_c$ , благодаря чему удается подбирать сочетания  $a$  и  $n$ , соответствующие ненарастающим решениям уравнения (61).

Как следует из рассмотрения, проведенного для  $a < 0$  и малых  $n$  (см. приложение II), границе между расположенными на диаграмме Айнса-Стретта (рис.7) областями нарастающих и ненарастающих решений уравнения Матье, отвечает приближенное соотношение (II.3), согласно которому условием устойчивости исследуемого решения  $\varphi^0 = \pi$  уравнения (55) является неравенство  $a > -2n^2$ . Учитывая выражения для  $a$ ,  $n$  и  $\omega_0$ , последнее неравенство в рассматриваемом случае можно преобразовать к виду

$$\omega_c^2 b^2 > 2gl.$$



Если выполнение этого неравенства обеспечено, то маятник может при должных начальных условиях стать обращенным, оставаясь сколь угодно долго в верхнем, а не в нижнем положении.

Более подробная информация о специфических свойствах маятника с колеблющейся точкой подвеса (его называют еще маятником Капицы) содержится в [2,4,12,22].

## 4.ОДНОКОНТУРНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

### 4.1. LC–генератор на двухполюснике с отрицательным сопротивлением

Анализ многих конкретных реализаций LC–автогенераторов часто проводится на основе эквивалентной схемы (рис.19), в состав которой входят

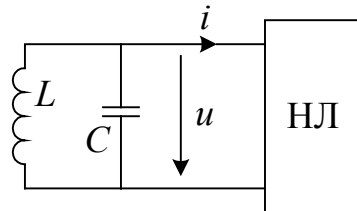


Рис.19

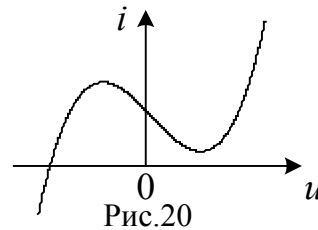


Рис.20

идеальный параллельный контур с резонансной частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  и нелинейный безынерционный двухполюсник НЛ с *N*-образной вольтамперной характеристикой (рис.20), содержащей наряду с восходящими ветвями падающий участок (участок отрицательного сопротивления).

Запишем систему дифференциальных уравнений, пригодную для описания процессов в этой схеме. Учтем, что напряжение *u* на индуктивности следующим образом выражается через ее потокосцепление (полный магнитный поток)  $\psi$ :

$$u = \frac{d\psi}{dt} . \quad (62)$$

С другой стороны, по первому закону Кирхгофа для суммы токов, протекающих через элементы схемы:

$$C \frac{du}{dt} + \frac{\psi}{L} + i(u) = 0. \quad (63)$$

Подставляя в последнее уравнение *u*, выраженное через  $\psi$  согласно (62), заменим систему (62,63) одним дифференциальным уравнением второго порядка. При этом будет также предполагаться, что для вольтамперной ха-

рактеристики нелинейного двухполосника допустима аппроксимация полиномом третьей степени вида

$$i(u) = i_0 - gu + hu^3,$$

где  $g, h$  – положительные коэффициенты.

При такой аппроксимации участку отрицательного сопротивления отвечает интервал напряжений, в котором  $-\sqrt{\frac{g}{3h}} < u < \sqrt{\frac{g}{3h}}$ . После ряда тождественных преобразований получим вместо (62,63) соотношение

$$LC \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \psi + Li_0 + \left[ h \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 - g \right] L \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

которому можно придать форму уравнения Рэля [11,26,29]:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \varepsilon \left[ \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 - 1 \right] \frac{dz}{d\tau} + z = 0, \quad (64)$$

где  $\tau = \omega_0 t$  – нормированное (безразмерное) время,  $\varepsilon = g\omega_0 L$  – безразмерный постоянный параметр, а безразмерная переменная  $z = \omega_0 (\psi + Li_0) \sqrt{\frac{h}{g}}$ .

Дифференцируя (64) по  $\tau$  и переходя от  $z$  к переменной  $x = \sqrt{3} \frac{dz}{d\tau} = u \sqrt{\frac{3h}{g}}$ , которая представляет собой напряжение  $u$ , нормированное к полуширине участка отрицательного сопротивления, придем к уравнению

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \varepsilon (x^2 - 1) \frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad (65)$$

полученному Ван дер Полем в 20-е годы XX века для  $LC$ -автогенератора на трехэлектродной лампе при аппроксимации ее характеристики кубическим полиномом [9,11,26].

Учитывая положительность  $\varepsilon$ , отметим, что, если  $|x| \ll 1$ , то мы имеем дело с моделью линейного осциллятора с отрицательным затуханием. При этом, как следует из приведенных в параграфе 1.3 рассуждений, зависимость  $x$  от времени носит колебательный характер, если  $\varepsilon < 2$ , и апериодический –, если  $\varepsilon > 2$ . Как будет видно из дальнейшего, величина  $\varepsilon$  может сказываться на форме колебаний осциллятора Ван дер Поля не только при малых  $|x|$ .

## 4.2. Релаксационные колебания осциллятора Ван дер Поля

Основное назначение  $LC$ -автогенераторов – получение колебаний, которые мало отличались бы по форме от гармонических (синусоидальных). Тогда в случае одноконтурного генератора частота автоколебаний в первом приближении оказывается равной резонансной частоте колебательного контура  $\omega_0$  и в соответствии с формулой Томсона зависит только от индуктивности и емкости, то есть лишь от энергоемких параметров. Вообще, применительно к различным схемам генераторов автоколебания, на значении периода которых не сказываются никакие другие факторы кроме параметров энергоемких элементов, принято называть томсоновскими. Сами генераторы при этом называются автоколебательными системами томсоновского типа.

Колебания, период которых существенно зависит не только от энергоемких параметров схемы, но также, например, и от характеристики нелинейного элемента, называют релаксационными. Их форма обычно далека от синусоидальной.

В зависимости от подбора параметров одна и та же автоколебательная система, в том числе и схема, представленная на рис.19, может оказаться либо томсоновским, либо релаксационным генератором. Для того чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, обратимся к уравнению Ван дер Поля. Предположим сначала, что безразмерный параметр  $\varepsilon$  выбран много большим единицы.

Заменим (65) равносильной ему системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon \left( y - \frac{x^3}{3} + x \right), \quad (66)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{x}{\varepsilon} \quad (67)$$

и выясним, какими характерными чертами обладает при больших  $\varepsilon$  фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля, построенный на плоскости  $x, y$ .

Введя в рассмотрение малый параметр  $\mu = \varepsilon^{-2}$  и поделив (67) на (66), запишем равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu x}{(x^3 / 3) - x - y}, \quad (68)$$

которым всюду, за исключением особой точки  $(0,0)$ , определяется наклон касательной к фазовой траектории.

При помощи (68), носящего название дифференциального уравнения фазовых траекторий, удобно находить изоклины – линии равного наклона касательных. В число изоклин входят, в частности, ветви кубической параболы

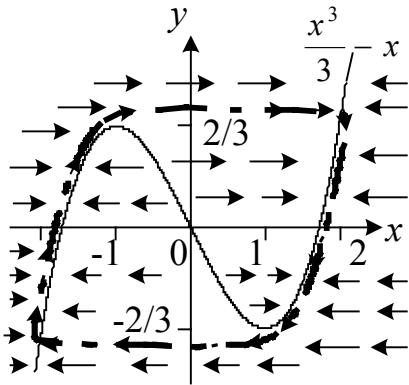


Рис.21

$(x^3/3) - x$ , относящиеся к положительным и отрицательным  $x$ . Для того чтобы удостовериться в этом, отметим, что на всем протяжении параболы  $(x^3/3) - x$ , специально построенной на плоскости  $x, y$  (рис.21), знаменатель выражения в правой части (68) равен нулю, то есть вычисляемые для фазовых траекторий производные  $\frac{dy}{dx}$  во всех точках параболы кроме начала координат бесконечно велики. Сказанное означает, что фазовые траектории должны

пересекать упомянутые ветви кубической параболы строго по вертикали. Если поинтересоваться, как с ростом  $\tau$  движутся изображающие точки по фазовым траекториям, то, учитывая положительность  $\epsilon$ , нетрудно убедиться в том, что согласно (67) пересечения параболы происходят для  $x > 0$  в направлении сверху вниз ( $\frac{dy}{d\tau} < 0$ ), а для  $x < 0$  – в направлении снизу вверх ( $\frac{dy}{d\tau} > 0$ ).

Благодаря малости параметра  $\mu$  можно, опираясь на (68), утверждать, что, исключив из плоскости  $x, y$  кубическую параболу  $(x^3/3) - x$  и ее малую (порядка  $1/\epsilon$ ) окрестность, мы получим область с приблизительно горизонтальным направлением фазовых траекторий. Для определения того, в какую сторону по любой из траекторий в этой области перемещается с течением времени изображающая точка, следует воспользоваться уравнением (66), что позволяет осуществить приближенное построение фазового портрета осциллятора Ван дер Поля при  $\epsilon \gg 1$  (рис.21).

Основывая анализ фазового портрета на приведенных выше уравнениях (66,67), нетрудно прийти к выводу, что к числу возможных движений изображающей точки кроме быстрого перемещения по практически горизонтальным участкам фазовых траекторий относится медленное движение вдоль восходящих (при  $|x| > 1$ ) участков кубической параболы, не выходящее за пределы малой ее окрестности. На рис.21 толстой штрихпунктирной линией показана фазовая траектория, соответствующая автоколебаниям, кото-

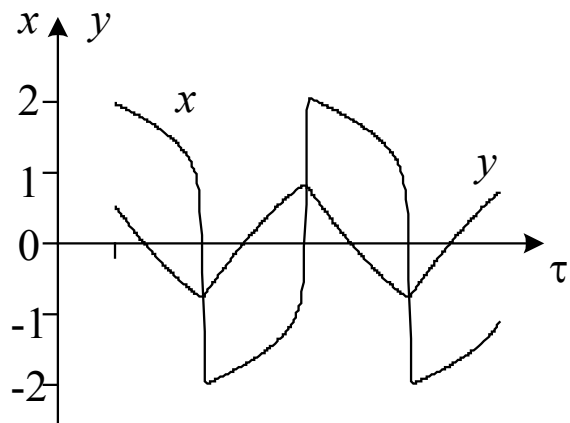


Рис.22

рые для любых начальных значений  $x$  и  $y$  установятся в системе при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Эта содержащая участки медленного и быстрого движений замкнутая кривая представляет собой устойчивый предельный цикл (аттрактор) осциллятора Ван дер Поля при  $\varepsilon \gg 1$ .

Выясним далее характер зависимости  $x$  от  $\tau$ . Применяя приближенный подход, пренебрежем временем быстрого движения и подставим  $(x^3/3) - x$  вместо  $y$  в (67). Интегрируя получившееся уравнение, придем к следующей связи между  $\tau$  и  $x$  в областях медленных движений:

$$\frac{\tau - \tau_0}{\varepsilon} = \ln \frac{x}{x_0} + \frac{x_0^2 - x^2}{2}, \quad (69)$$

где  $x_0$  – значение  $x$  в момент времени  $\tau_0$ . При помощи (69) могут быть построены зависимости  $x$  и  $y$  от  $\tau$  (рис.22).

Полагая в (69)  $x_0 = 2$  и  $x = 1$ , можно, используя  $\tau - \tau_0 = 0,81\varepsilon$  в качестве оценки нормированного полупериода колебаний, получить, что ненормированный период  $T = 1,62gL$ . Видно, что при  $\varepsilon \gg 1$  на период колебаний непосредственно влияют как один из энергоемких параметров (индуктивность  $L$ ), так и максимальное значение модуля крутизны падающего участка вольтамперной характеристики нелинейного элемента. Таким образом, при  $\varepsilon \gg 1$  осциллятор Ван дер Поля является релаксационным генератором, что подтверждается также несинусоидальным характером зависимостей от времени для  $x$  и  $y$ .

### 4.3. Квазилинейный осциллятор Ван дер Поля

Нелинейное уравнение (65) при  $\varepsilon = 0$  превращается в уравнение гармонического осциллятора (линейного осциллятора без потерь). Предположим теперь, что положительный параметр  $\varepsilon$  в (65) отличен от нуля, но мал, например,  $\varepsilon \ll 1$ . В этом случае динамическая система, описываемая уравнением (65), близка к линейной и консервативной. Ее можно назвать квазилинейной и квазиконсервативной. К числу эффективных методов анализа таких систем относится описанный в приложении I метод медленно меняющихся амплитуд (ММА), который и применяется далее для выяснения характерных свойств квазилинейного осциллятора Ван дер Поля.

В качестве первого шага заменим (65) следующей равносильной ему системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon \left( x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right) + x_2, \quad (70)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1. \quad (71)$$

Вычитая уравнение (71), предварительно умноженное на  $j$ , из (70), вводя в рассмотрение вспомогательную комплексную переменную

$$y = x_1 - jx_2$$

и учитывая, что

$$x_1 = \operatorname{Re} y = \frac{y + y^{\bullet}}{2}, \quad (72)$$

придем к уравнению

$$\frac{dy}{d\tau} - jy = \varepsilon \left[ \frac{y + y^{\bullet}}{2} - \frac{(y + y^{\bullet})^3}{24} \right], \quad (73)$$

которое является исходным при проведении последующих преобразований.

Умножая (73) на  $\exp(-j\tau)$ , полагая

$$y(\tau) = A(\tau) \exp(j\tau) \quad (74)$$

и выполняя тождественные преобразования, получим равенство

$$\frac{dA}{d\tau} = \varepsilon \exp(-j\tau) \operatorname{Re} \left[ \left( A - \frac{1}{4} A^2 A^{\bullet} \right) \exp(j\tau) - \frac{1}{12} A^3 \exp(j3\tau) \right], \quad (75)$$

показывающее, в частности, что для комплексной амплитуды  $A$  в силу малости  $\varepsilon$  возможны только медленные изменения во времени.

Отбрасывая в соответствии с процедурой метода ММА быстро осциллирующие члены суммы, к которой сводится выражение в правой части (75), запишем комплексное укороченное уравнение

$$\frac{dA}{d\tau} = \varepsilon \left( 1 - \frac{|A|^2}{4} \right) \frac{A}{2}. \quad (76)$$

Из него можно получить систему двух вещественных укороченных уравнений для модуля  $a$  и аргумента  $\theta$  комплексной амплитуды  $A$ . Умножая с этой целью (76) на  $\exp(-j\theta)$ , полагая

$$A = a \exp(j\theta) \quad (77)$$

и разделяя вещественную и мнимую части, приходим при  $a \neq 0$  к уравнениям

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) \frac{a}{2}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (78)$$

первому из которых удовлетворяет решение

$$a(\tau) = 2 \left\{ 1 + [4a^{-2}(0) - 1] \exp(-\varepsilon\tau) \right\}^{-1/2}, \quad (79)$$

где  $a(0)$  – начальное (при  $\tau = 0$ ) значение амплитуды  $a$ . Согласно второму из уравнений (78) аргумент  $\theta$  остается неизменным во времени и равным своему начальному значению.

Принимая во внимание, что

$$x_1 = \operatorname{Re} y = a(\tau) \cos(\tau + \theta), \quad x_2 = -\operatorname{Im} y = -a(\tau) \sin(\tau + \theta),$$

можно, используя формулу (79), построить на плоскости  $x_1, x_2$  фазовые траектории для произвольных начальных условий. Пример такого построения

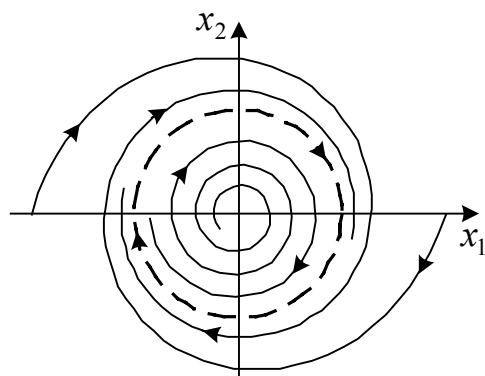


Рис.23

приведен на рис.23, где изображен фазовый портрет квазилинейного осциллятора Ван дер Поля. Состояние равновесия, которым оказывается в данном случае начало координат, представляется особой точкой типа неустойчивый фокус. Штриховой линией на рисунке показан устойчивый предельный цикл (аттрактор), получающийся при малых положительных  $\varepsilon$ . Ему отвечает установившийся режим гармонических колебаний со стационарной амплитудой  $a_0 = 2$  и периодом по  $\tau$ ,

равным  $2\pi$ . Для ненормированного времени период установившихся колебаний выражается формулой Томсона  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ , так что квазилинейный осциллятор Ван дер Поля является типичной автоколебательной системой томсоновского типа.

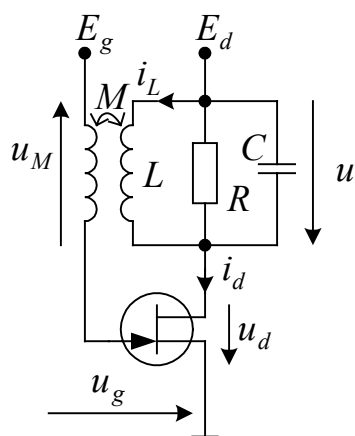


Рис.24

#### 4.4 О других схемах одноконтурных генераторов

В учебной литературе рассмотрение автоколебательных систем, встречающихся в радиоэлектронике, довольно часто начинается с транзисторно-

го (в старых изданиях лампового) генератора с индуктивной (трансформаторной) обратной связью, называемого схемой Мейснера. Вариант такой схемы на полевом транзисторе приведен на рис.24.

В последующем считается, что ток стока  $i_d$  выражается однозначной функцией напряжений  $u_g$  и  $u_d$  и что ток затвора пренебрежимо мал. Как видно из дальнейшего, при этих предположениях система уравнений, которыми описываются процессы в рассматриваемой схеме, может быть представлена в форме системы (62,63).

Прежде всего, очевидно, что если обозначить через  $\psi$  потокосцепление контурной катушки  $L$ , то связь между  $\psi$  и напряжением на контуре  $u$  совпадает с (62).

Поскольку ток затвора полагается отсутствующим, то

$$\psi = Li_L, \quad (80)$$

откуда следует, что

$$u = L \frac{di_L}{dt}. \quad (81)$$

В то же время для напряжения  $u_M$  на зажимах катушки обратной связи, включенной в цепь затвора, имеем:

$$u_M = M \frac{di_L}{dt}. \quad (82)$$

Из (81,82) вытекает, что в данном случае

$$u_M = \frac{M}{L} u.$$

Тогда напряжение между затвором и истоком

$$u_g = E_g + u_M = E_g + \frac{M}{L} u.$$

Учитывая это, а также то, что

$$u_d = E_d - u,$$

можно прийти к выводу, что при фиксированных  $E_g$ ,  $E_d$ ,  $M$  и  $L$  ток стока  $i_d$  оказывается однозначной функцией одной переменной величины  $u$ .

Введем следующее обозначение для разности между током через резистивный элемент  $R$  и током стока:

$$i(u) = \frac{u}{R} - i_d(u). \quad (83)$$

Приравняем в соответствии с первым законом Кирхгофа ток стока сумме токов через параллельно соединенные элементы  $L$ ,  $C$  и  $R$ . Выражая в этом равенстве ток через емкость как  $C \frac{du}{dt}$ , ток  $i_L$  через индуктивность согласно (80) и, принимая во внимание (83), придем к соотношению (63).



При помощи приведенных выше уравнений можно показать, что автоколебания в схеме, представленной на рис.24, возбуждятся, если

$$\frac{M}{L} g_{21} > \frac{1}{R} + g_{22}, \quad (84)$$

где  $g_{21}$ ,  $g_{22}$  – определенные при  $u_g = E_g$  и  $u_d = E_d$  дифференциальные (малосигнальные) параметры полевого транзистора ( $g_{21}, g_{22} > 0$ ).

При выполнении соотношения (84), называемого условием самовозбуждения, данный вариант схемы Мейснера подобен с точки зрения зависимости напряжения  $u$  от времени рассмотренному ранее  $LC$ -генератору на двухполюснике с отрицательным сопротивлением (рис.19). При этом предполагается, что вид функций  $i(u)$  одинаков для обеих схем.

Кроме двухполюсников с  $N$ -образной вольтамперной характеристикой (рис.20) в схемах автогенераторов могут использоваться и другие двухполюсные активные элементы. Возможно применение двухполюсников, у которых вольтамперная характеристика имеет  $S$ -образную форму (рис.25).

Приведенная в качестве примера на рис.26 автоколебательная схема на подобном двухполюснике представляет собой дуальный аналог рассмотренной выше схемы на двухполюснике  $N$ -типа (рис.19).

Если обозначить через  $q$  заряд емкости  $C$ , то дифференциальные урав-

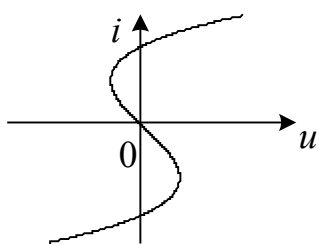


Рис.25

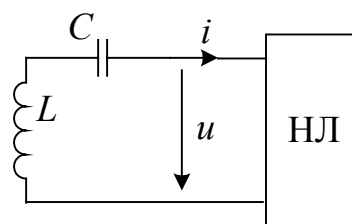


Рис.26

нения схемы с двухполюсником  $S$ -типа

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + u(i) = 0$$

можно получить либо непосредственно, основываясь на теории цепей, либо преобразуя уравнения (62,63) путем замены  $u$  на  $i$ ,  $i$  на  $u$ ,  $C$  на  $L$ ,  $L$  на  $C$  и  $\psi$  на  $q$ . Благодаря дуальности многие результаты анализа одной из схем могут использоваться при рассмотрении другой.

В частности, при аппроксимации функции  $u(i)$ , соответствующей характеристике  $S$ -типа, кубическим полиномом без квадратичного члена из последней системы двух дифференциальных уравнений первого порядка нетрудно получить уравнения Рэля и Ван дер Поля.

Приведенные на рис.19,24,26 схемы являются, по-видимому, наиболее просто анализируемыми моделями одноконтурных  $LC$ -генераторов. Из моделей, не рассматриваемых в данном пособии, заслуживают упоминания трехточечные схемы Хартли (генератор с автотрансформаторной обратной свя-

зью) и Колпитца (генератор с емкостной обратной связью), а также различные модификации схем  $LC$ -генераторов с автоматическим смещением.

## 5. НЕАВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА

### 5.1. Приведение уравнения контура с нелинейной индуктивностью к уравнению Дуффинга

К колебательному контуру (рис.27), состоящему из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, через резистор  $R$  подключен источник переменной ЭДС  $e$ . Предположим, что нелинейная связь между потокосцеплением  $\psi$  и током  $i$ , протекающим через

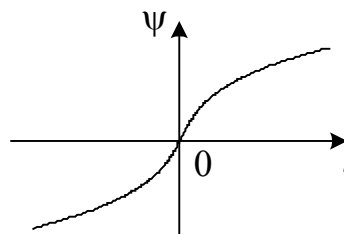


Рис.28

катушку, определяется в первом приближении основной кривой намагничивания материала сердечника (рис.28), а потери энергии в конденсаторе и катушке учтены (путем пересчета) в сопротивлении  $R$ .

В последующем используется довольно грубая аппроксимация функции  $i(\psi)$  кубическим полиномом:

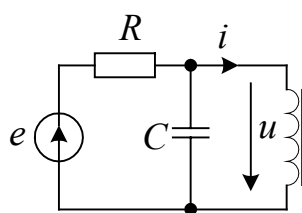


Рис.27

$$i(\psi) = \frac{\psi}{L_0} \left( 1 + \frac{\psi^2}{\psi_0^2} \right), \quad (85)$$

где  $L_0$  – индуктивность катушки, отвечающая начальному (при потокосцеплениях, близких к нулю) участку основной кривой намагничивания.

При таком способе аппроксимации система, в которой  $\psi^2$  в процессе колебаний остается существенно меньшим, чем  $\psi_0^2$ , близка к линейной.

Принимая во внимание, что сумма токов через конденсатор  $C$  и катушку равняется току через резистор, можем записать

$$C \frac{du}{dt} + i(\psi) = \frac{e - u}{R}. \quad (86)$$

Выражая в (86) напряжение  $u$  на зажимах катушки через производную по времени от потокосцепления  $\psi$  согласно (62) и используя (85), имеем

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega_0^2 \left( 1 + \frac{\psi^2}{\psi_0^2} \right) \psi = 2\alpha \left( e - \frac{d\psi}{dt} \right). \quad (87)$$

Здесь  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$  – резонансная частота контура в случае колебаний ничтожно

малой амплитуды,  $\alpha = \frac{1}{2RC}$  – показатель затухания, считающийся доста-

точно малым по сравнению с  $\omega_0$  для того, чтобы система в целом могла быть отнесена к квазиконсервативным.

Полагая для определенности, что  $\psi_0 > 0$ , переходя к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  и вводя другие нормированные величины, преобразуем (87) в уравнение одной из разновидностей осциллятора Дуффинга

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx}{d\tau} + x + x^3 = \gamma(\tau), \quad (88)$$

где  $x = \psi/\psi_0$  – нормированное потокосцепление,  $\delta = \alpha/\omega_0$  – малый безразмерный параметр, которым учитываются потери,  $\gamma(\tau) = \frac{L_0 e(t)}{R\psi_0}$  – функция, вид которой определяется зависимостью от времени для ЭДС  $e$ .

Дальнейшее рассмотрение ограничено случаем гармонической ЭДС  $e = E \cos \omega t$  при частоте  $\omega$  близкой к  $\omega_0$ . Тогда

$$\gamma(\tau) = \varepsilon \cos \Omega \tau, \quad (89)$$

где  $\varepsilon = \frac{L_0 E}{R\psi_0}$ , а нормированная частота

$$\Omega = \omega/\omega_0 = 1 + \nu, \quad (90)$$

причем модуль нормированной расстройки  $\nu$  много меньше единицы, ибо  $\omega$  близка к  $\omega_0$ .

В качестве условия последующего применения метода ММА отметим, что рассматриваемый осциллятор Дуффинга – квазилинейная и квазиконсервативная система. Сказанное означает, в частности, ряд допущений, важнейшие из которых касаются порядков малости величин, входящих в уравнение

(88). Например, нормированное потокосцепление  $x$  предполагается настолько малым (по сравнению с единицей), чтобы  $x^3$  можно было считать величиной более высокого порядка малости. Кроме того, величинами более высокого, чем  $x$ , порядка малости предполагаются содержащееся в левой части (88) слагаемое  $2\delta \frac{dx}{d\tau}$  и безразмерная амплитуда колебаний внешнего источника  $\varepsilon$ , а значит, и  $\gamma(\tau)$ .

## 5.2. Получение укороченных уравнений

Перейдем от (88) к равносильной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \quad (91)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = \gamma - 2\delta x_2 - x_1 - x_1^3. \quad (92)$$

Вычитая из (91) произведение (92) на  $j$  и вводя комплексную переменную  $y = x_1 - jx_2$ , получим, учитывая (89), уравнение, правая часть которого представляет собой величину более высокого порядка малости, чем  $y$ :

$$\frac{dy}{d\tau} - jy = j \frac{(y + y^*)^3}{8} - j\varepsilon \cos \Omega\tau - \delta(y - y^*). \quad (93)$$

Умножая (93) на  $\exp(-j\Omega\tau)$ , подставляя в него  $y = A \exp(j\Omega\tau)$  и принимая во внимание (90), приходим к равенству

$$\frac{dA}{d\tau} + jvA = j \exp(-j\Omega\tau) \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{4} A^3 \exp(j3\Omega\tau) + \left( \frac{3}{4} A^2 A^* - \varepsilon + j2\delta A \right) \exp(j\Omega\tau) \right],$$

из которого после отбрасывания быстро осциллирующих членов выводится комплексное укороченное уравнение

$$\frac{dA}{d\tau} = \left( j \frac{3}{8} |A|^2 - jv - \delta \right) A - j \frac{\varepsilon}{2}. \quad (94)$$

Представляя согласно (77) комплексную амплитуду  $A$  в (94) в показательной форме через модуль  $a$  и аргумент  $\theta$  с последующим умножением полученного из (94) соотношения на  $\exp(-j\theta)$  приходим после разделения вещественных и мнимых слагаемых к следующей системе укороченных уравнений:

$$\frac{da}{d\tau} = P(a, \theta), \quad (95)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = Q(a, \theta), \quad (96)$$

где

$$P(a, \theta) = -a\delta - \frac{\varepsilon}{2} \sin \theta, \quad (97)$$

$$Q(a, \theta) = \frac{3}{8} a^2 - \nu - \frac{\varepsilon}{2a} \cos \theta. \quad (98)$$

### 5.3. Соотношения для стационарных решений

На основании предыдущего рассмотрения

$$x = x_1 = \operatorname{Re} y = \operatorname{Re}[A(\tau) \exp(j\Omega\tau) = a(\tau) \cos[\Omega\tau + \theta(\tau)],$$

откуда ясно, что решения полученных выше укороченных уравнений, не зависящие от времени, отвечают установившемуся режиму гармонических колебаний с частотой внешнего источника.

Полагая в (95, 96) амплитуду и начальную фазу  $\theta$  равными постоянным величинам  $a_0$  и  $\theta_0$  соответственно, и учитывая (97, 98), приходим к системе уравнений

$$a_0 \delta = -\frac{\varepsilon}{2} \sin \theta_0, \quad (99)$$

$$\frac{3}{8} a_0^2 - \nu = \frac{\varepsilon}{2a_0} \cos \theta_0, \quad (100)$$

опираясь на которые можно, в частности, выяснить характер зависимостей стационарной амплитуды  $a_0$  от относительной расстройки  $\nu$  при различных нормированных величинах  $\varepsilon$  и  $\delta$ .

Подставляя, например, в (100) выражение для  $\cos \theta_0$ , найденное из (99), получим удобную для вычислений формулу

$$\nu_{1,2} = \frac{3}{8} a_0^2 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4a_0^2} - \delta^2}, \quad (101)$$

позволяющую сначала установить зависимость  $\nu$  от  $a_0$ , а затем перейти к обратной функции  $a_0(\nu)$ .

При анализе упомянутых зависимостей может потребоваться производная

$$\frac{d\nu}{da_0} = \frac{3}{4} a_0 \mp \frac{\varepsilon^2}{4a_0^3} \left( \frac{\varepsilon^2}{4a_0^2} - \delta^2 \right)^{-1/2}. \quad (102)$$

Исключая из равенств (101, 102) нормированную амплитуду внешнего источника  $\varepsilon$ , запишем используемое ниже вспомогательное соотношение:

$$\delta^2 + \left( \frac{3}{8} a_0^2 - \nu \right) \left( \frac{9}{8} a_0^2 - \nu \right) = \left( \frac{3}{8} a_0^2 - \nu \right) a_0 \frac{d\nu}{da_0}. \quad (103)$$

### 5.4. Устойчивость стационарных решений и резонансные кривые

Для ответа на вопрос о том, при каком условии найденное из (99, 100) стационарное решение укороченных уравнений устойчиво, целесообразно прибегнуть к использованию признаков устойчивости, сформулированных в приложении III. Требующиеся при этом частные производные функций  $P(a, \theta)$  и  $Q(a, \theta)$ , определяемые исходя из (97, 98) с учетом (99, 100), сводятся к выражениям

$$Q'_\theta = P'_a = -\delta, \quad P'_\theta = \left( \nu - \frac{3}{8} a_0^2 \right) a_0, \quad Q'_a = \frac{9}{8} a_0 - \frac{\nu}{a_0},$$

подстановка которых в (III.4, III.5) показывает, что неравенство (III.4) в данном случае выполняется всегда, а неравенство (III.5) преобразуется к виду:

$$\delta^2 + \left( \frac{3}{8} a_0^2 - \nu \right) \left( \frac{9}{8} a_0^2 - \nu \right) > 0. \quad (104)$$

Принимая во внимание вспомогательное соотношение (103), приведем условие устойчивости (104) к форме, более удобной для последующего применения:

$$\left( \frac{3}{8} a_0^2 - \nu \right) \frac{d\nu}{da_0} > 0. \quad (105)$$

Определяемая при помощи (101) зависимость стационарной амплитуды  $a_0$  от относительной расстройки  $\nu$  носит резонансный характер, причем максимальная амплитуда  $a_{0res} = \frac{\varepsilon}{2\delta}$  достигается при  $\nu_{res} = \frac{3}{8} a_{0res}^2$ , откуда видно, что резонансная частота рассматриваемой разновидности осциллятора Дуффинга растет при увеличении амплитуды  $\varepsilon$ . В отличие от линейного осциллятора в этом случае от амплитуды внешнего источника зависит также и форма резонансной кривой.

В справедливости последнего утверждения можно убедиться, анализируя ход ветвей зависимости  $\nu(a_0)$ , соответствующих разным знакам перед радикалом в (101). В то время как при нижнем знаке величина  $\nu$  монотонно растет с увеличением  $a_0$  для любых  $\varepsilon$ , при верхнем знаке (плюсе) –  $\nu$  с ростом  $a_0$  монотонно убывает для  $\varepsilon < \hat{\varepsilon} = \frac{16}{3\sqrt{3}} (\sqrt{\delta})^3$ , а при  $\varepsilon > \hat{\varepsilon}$  изменяется немонотонно (рис.29).

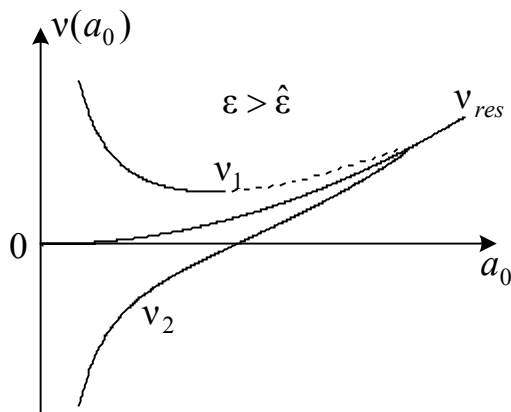


Рис.29

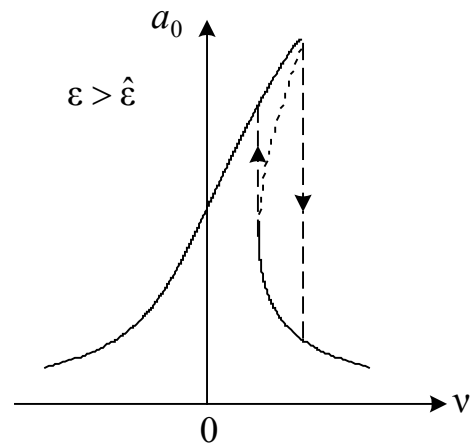


Рис.30

Сравнивая ветви зависимости  $v(a_0)$  с построенным на рис.29 графиком функции  $v_{res} = \frac{3}{8} a_0^2$ , можно на основании условия (105) сделать вывод о неустойчивости решений, которые отвечают участку, отмеченному пунктиром, и о гистерезисе, наблюдаемом в зависимости  $a_0(v)$  для  $\varepsilon > \hat{\varepsilon}$  при плавном изменении  $v$  (рис.30). На границах области гистерезиса имеют место скачки амплитуды  $a_0$  (их направления указаны на рисунке); правый скачок наблюдается при монотонном возрастании  $v$ , левый – при монотонном убывании  $v$ .

### 5.5. О субгармонических, супергармонических и дробных резонансах

Не ограничиваясь далее только малыми амплитудами  $\varepsilon$ , отметим, что осциллятор Дуффинга интересен как нелинейная система, в частности, тем, что помимо рассмотренного выше резонанса при частоте внешней силы  $\omega$ , близкой к  $\omega_0$ , у него возможны резонансы при других соотношениях между  $\omega$  и  $\omega_0$ .

При частотах  $\omega$ , приблизительно втрое больших, чем  $\omega_0$ , в некоторой области значений амплитуд  $\varepsilon$  реализуется установившийся режим, в котором заметный вклад в спектр колебаний дает гармоника с частотой  $\omega/3$ . Это пример субгармонического резонанса. При  $\omega \approx \omega_0/3$  в спектре установившихся колебаний существенной может оказаться третья гармоника частоты внешней силы, что является примером супергармонического резонанса.

Возможны другие субгармонические и супергармонические резонансы, а также называемые иногда дробными резонансы при более сложных рациональных соотношениях между  $\omega$  и частотами возникающих гармоник.

Наконец, при достаточно больших амплитудах внешнего периодического (в том числе гармонического) воздействия на осциллятор Дуффинга может реализоваться режим хаотических колебаний, спектр которых при

экспериментальном или численном исследовании оказывается сплошным [8,11,21].

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I. О процедуре метода медленно меняющихся амплитуд

#### I.1. Составление укороченных уравнений

Данное приложение посвящено одному, давно ставшему классическим, приближенному методу анализа динамических систем, близких к линейным консервативным и называемых также квазилинейными и квазиконсервативными. Речь пойдет о методе медленно меняющихся амплитуд (именуемом для краткости методом ММА и называемом также методом усреднения), причем будут рассмотрены только основные черты одного из вариантов этого метода без оценки погрешности приближения и надлежащего математического обоснования.

Дальнейшее изложение основывается на том, что дифференциальные уравнения квазилинейной и квазиконсервативной системы  $n$ -го порядка, как правило, могут быть представлены в следующей специальной форме [7]:

$$\frac{dy_k}{d\tau} - j\Omega_k y_k = \varepsilon \Phi_k(y_1, y_2, \dots, y_n; \tau), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (I.1)$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – вспомогательные комплексные величины, через которые переменные состояния исходной динамической системы выражаются посредством линейных комбинаций, функции  $\Phi_k$  (в общем случае нелинейные) считаются ограниченными при любом фиксированном  $\tau$ ,  $\varepsilon$  – малый (обычно положительный) параметр, так что правые части уравнений (I.1) малы по сравнению с  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

При  $\varepsilon=0$  из (I.1) получаются линейные дифференциальные уравнения с решениями вида

$$y_k(\tau) = y_k(0) \exp(j\Omega_k \tau), \quad (I.2)$$

линейные комбинации которых суть не что иное, как характерные для линейной консервативной системы суперпозиции гармонических колебаний с частотами  $\Omega_k$ .

Считая  $\varepsilon$  отличным от нуля, перейдем от  $y_k$  к новым комплексным переменным  $A_k$ , положив по аналогии с (I.2)

$$y_k = A_k \exp(j\Omega_k \tau). \quad (I.3)$$



Тогда вместо (I.1) можно записать

$$\frac{dA_k}{d\tau} = \varepsilon F_k(A_1, A_2, \dots, A_n; \tau), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{I.4})$$

где  $F_k(A_1, A_2, \dots, A_n; \tau) = \exp(-\Omega_k \tau) \Phi_k(A_1 \exp(j\Omega_1 \tau), \dots, A_n \exp(j\Omega_n \tau); \tau)$  – ограниченные при фиксированных  $\tau$  функции.

В силу малости  $\varepsilon$  из (I.4) следует, что коэффициенты  $A_k$  изменяются с течением времени медленно. Поэтому их принято называть медленно меняющимися амплитудами.

Неотъемлемым элементом описываемой процедуры метода ММА является разбиение каждой функции  $F_k$  на две части, для одной из которых, обозначаемой далее как  $M_k(A_1, A_2, \dots, A_n; \tau)$ , характерна медленность изменения во времени, а другая –  $F_k^{(1)}(A_1, A_2, \dots, A_n; \tau)$  – представляет собой состоящую из «быстро осциллирующих» слагаемых функцию без постоянной составляющей. Последнее означает, что  $\int_0^\tau F_k^{(1)}(A_1, A_2, \dots, A_n; \tau) d\tau$  – ограниченная функция от  $\tau$  при любых  $\tau > 0$  (при интегрировании величины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  считаются постоянными) [7].

Строгие обоснования [7,19] показывают, что при малом  $\varepsilon$  допустимо и не приводит к большим погрешностям отбрасывание из (I.4) членов  $\varepsilon F_k^{(1)}$ . В таком приближении, когда оставляемые медленно меняющиеся члены  $\varepsilon M_k$  имеют тот же порядок малости, что и отбрасываемые быстро осциллирующие, заключается основная особенность метода ММА. В результате получается система укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{dA_k}{d\tau} = \varepsilon M_k(A_1, A_2, \dots, A_n; \tau).$$

Примечание. Нетрудно показать, что можно проводить переход от  $y_k$  к  $A_k$  при помощи видоизмененной по сравнению с (I.3) формулы

$$y_k = A_k \exp(j\omega_k t)$$

где  $\omega_k$  отличается от  $\Omega_k$  на малую величину порядка  $\varepsilon$ . Такая модификация метода ММА во многих случаях целесообразна.

## I.2. Специальная форма дифференциальных уравнений динамической системы, близкой к линейной консервативной

Пусть анализ поведения динамической системы  $n$ -го порядка (в общем случае неавтономной) основывается на дифференциальных уравнениях первого порядка, разрешенных относительно производных

$$\frac{dx_s}{d\tau} = f_s(x_1, x_2, \dots, x_n; \tau), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (I.5)$$

либо на матричном уравнении

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau), \quad (I.6)$$

где  $x$  и  $f$  – соответствующие векторы-столбцы.

Для автономной системы явная зависимость от  $\tau$  в правых частях уравнений отсутствует. Тогда (I.5) и (I.6) сводятся к уравнениям вида (5) и (6), соответственно.

Рассматриваемая динамическая система считается далее близкой к линейной системе с постоянными параметрами, что, в частности, означает возможность выделения в правой части (I.6) малого слагаемого, при помощи которого учитывались бы нелинейный характер ее зависимости от  $x$  и малые изменения параметров во времени. При таком предположении вместо (I.6) можно записать:

$$\frac{dx}{d\tau} = Hx + \varepsilon\Psi(x, \tau) + \psi(\tau), \quad (I.7)$$

где  $H$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка, элементы которой не зависят ни от  $x$ , ни от  $\tau$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\Psi(x, \tau), \psi(\tau)$  – векторы-столбцы, каждый из которых состоит из  $n$  элементов, считающихся ограниченными функциями при любом фиксированном  $\tau$ .

Обозначая через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  собственные числа (корни) матрицы  $H$ , предположим, что они простые, ибо это всегда может быть обеспечено в силу определенного произвола, допустимого при выделении малой компоненты  $\varepsilon\Psi(x, \tau)$ . Предполагая, что матрица  $H$  в общем случае недиагональная, воспользуемся линейным алгебраическим преобразованием для перехода от (I.7) к уравнению с линейной компонентой, содержащей в качестве множителя вместо  $H$  диагональную матрицу  $\Lambda$ , элементами которой являются  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Как следует из линейной алгебры, благодаря не кратности корней матрицы  $H$  существует такая неособая квадратная матрица  $n$ -го порядка  $D$ , что

$$DHD^{-1} = \Lambda. \quad (I.8)$$

Умножая (I.7) слева на матрицу  $D$ , вводя обозначения

$$y = Dx, \quad \Phi = D\Psi, \quad \varphi = D\psi$$

и учитывая (I.8), приходим к матричному уравнению

$$\frac{dy}{d\tau} - \Lambda y = \varepsilon\Phi(y, \tau) + \varphi(\tau),$$

которому равносильна следующая система скалярных уравнений

$$\frac{dy_k}{d\tau} - \lambda_k y_k = \varepsilon\Phi_k(y_1, y_2, \dots, y_n; \tau) + \varphi_k(\tau), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку рассматриваемая динамическая система предполагается близкой к линейной консервативной, то как можно показать (см. также пре-

дыдущий пункт), величины  $\lambda_k$  должны быть либо чисто мнимыми числами ( $\lambda_k = j\Omega_k$ ), либо комплексными числами с малыми (порядка  $\varepsilon$ ) вещественными частями. Обозначив в последнем случае вещественную часть  $\lambda_k$  через  $\sigma_k$ , а мнимую – через  $\Omega_k$ , можно отнести произведение  $\sigma_k y_k$  к малой компоненте  $\varepsilon\Phi_k$ . В итоге получим специальную форму уравнений

$$\frac{dy_k}{d\tau} - j\Omega_k y_k = \varepsilon\Phi_k(y_1, y_2, \dots, y_n; \tau) + \varphi_k(\tau), \quad k=1, 2, \dots, n,$$

отличающуюся от (I.1) наличием слагаемых  $\varphi_k(\tau)$  в правых частях. Если понадобится, то можно видоизменить процедуру метода ММА таким образом, чтобы учесть эти слагаемые (их называют свободными членами) [7].

Изложенный выше подход к получению специальной формы дифференциальных уравнений квазилинейной и квазиконсервативной системы опирается на использование линейных алгебраических преобразований, что, как видно из конкретных примеров, может оказаться удобным. Другой подход, основанный на применении интегрального преобразования Лапласа, обстоятельно разобран в [7].

## II. Границы областей нарастающих решений уравнения Матье при малых значениях параметра $n$

Для нахождения уравнений кривых, разграничивающих области нарастающих и ненарастающих решений в нижней части диаграммы Айнса-Стретта (рис.7), можно воспользоваться методом малого параметра. Этот метод, предложенный А.Пуанкаре в XIX веке для решения ряда задач небесной механики, в настоящее время применяется как в теории колебаний, так и в других научных дисциплинах.

Предполагая параметр  $n$  в уравнении (15) малым, представим  $x$  и  $a$  в виде рядов по степеням  $n$

$$x(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} x_s(\tau)n^s, \quad a = \sum_{s=0}^{\infty} a_s n^s. \quad (\text{II.1})$$

Здесь постоянные коэффициенты  $a_s$  и функции  $x_s(\tau)$  должны быть определены так, чтобы согласно теории уравнения Матье функция  $x(\tau)$  была решением этого уравнения с периодом  $\pi$  или  $2\pi$  и притом таким решением, которое сводилось бы к  $\cos k\tau$  или  $\sin k\tau$  при  $n \rightarrow 0$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

Подставляя разложения (II.1) в уравнение (15) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $n$ , получим систему уравнений, из которых приведем далее только первые три:

$$x_0'' + a_0 x_0 = 0, \quad (\text{II.2.0})$$

$$x_1'' + a_0 x_1 = -a_1 x_0 - 4x_0 \cos 2\tau, \quad (\text{II.2.1})$$

$$x_2'' + a_0 x_2 = -a_2 x_0 - a_1 x_1 - 4x_1 \cos 2\tau. \quad (\text{II.2.2})$$

Каждая функция  $x_s(\tau)$  должна, как вытекает из сказанного выше, иметь период  $\pi$  или  $2\pi$ . Поэтому из уравнения (II.2.0) следует, что  $a_0 = k^2$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Из того же уравнения, в частности, получаем  $x_0 = \cos k\tau$ .

Принимая во внимание, что при  $k = 0$  коэффициент  $a_0 = 0$ , а  $x_0 = 1$ , из (II.2.1) имеем

$$x_1'' = -a_1 - 4 \cos 2\tau.$$

В последнем соотношении коэффициент  $a_1$  должен равняться нулю, в противном случае нарушается условие периодичности  $x_1(\tau)$ . С учетом этого

$$x_1 = \cos 2\tau + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Уравнение (II.2.2) дает

$$x_2'' = -a_2 - 2 - 2 \cos 4\tau - 4C \cos 2\tau.$$

Поскольку для периодичности  $x_2$  должно быть  $a_2 = -2$ , получается следующее приближенное уравнение левой граничной кривой на рис. 7

$$a = -2n^2 \quad (\text{II.3})$$

Действуя аналогично для  $k = 1, 2$  и т. д., избавляясь всякий раз от непериодических членов, можно вывести приближенные уравнения других граничных кривых при малых  $n$ .

Например, для двух кривых, соответствующих  $k = 1$ ,

$$a = 1 \pm 2|n|, \quad (\text{II.4})$$

что согласуется с результатом, получаемым при помощи метода ММА.

### III. О признаках устойчивости стационарных решений

Анализ некоторых квазилинейных квазиконсервативных систем второго порядка, находящихся под переменным внешним воздействием, может привести к укороченным уравнениям вида:

$$\frac{da}{d\tau} = P(a, \theta), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = Q(a, \theta), \quad (\text{III.1})$$

где  $a$  и  $\theta$  – вещественные переменные, представляющие собой модуль и аргумент комплексной амплитуды, которая либо медленно меняется с течением времени, либо остается неизменной;  $P(a, \theta)$ ,  $Q(a, \theta)$  – вещественные функции  $a$  и  $\theta$ , в общем случае нелинейные и тождественно не равные нулю.

Условимся называть стационарными обозначаемые далее как  $a_0$ ,  $\theta_0$  решения уравнений (III.1), не зависящие от времени  $\tau$ . Поиск этих решений проводится при помощи уравнений

$$P(a_0, \theta_0) = 0, \quad Q(a_0, \theta_0) = 0. \quad (\text{III.2})$$

Необходимым условием реализации стационарных решений, если они имеются, является их устойчивость по отношению к малым возмущениям.

С целью получения ответа на вопрос, устойчиво (в малом) или неустойчиво некоторое решение  $a_0, \theta_0$ , воспользуемся стандартной процедурой линеаризации.

Для этого положим в (III.1)

$$a = a_0 + \Delta a, \quad \theta = \theta_0 + \Delta \theta,$$

где  $\Delta a, \Delta \theta$  – вещественные функции  $\tau$ , которые описывают отклонения  $a$  и  $\theta$  от стационарных значений и считаются малыми по крайней мере для достаточно малых  $\tau$ . Отбрасывая в разложениях функций в правых частях уравнений (III.1) величины, порядок малости которых выше, чем у  $\Delta a$  и  $\Delta \theta$ , и принимая во внимание (III.2), в первом приближении имеем

$$\frac{d\Delta a}{d\tau} = P'_a \Delta a + P'_\theta \Delta \theta, \quad \frac{d\Delta \theta}{d\tau} = Q'_a \Delta a + Q'_\theta \Delta \theta, \quad (\text{III.3})$$

где частные производные от  $P$  и  $Q$  по  $a$  и  $\theta$  вычисляются в точке  $(a_0, \theta_0)$ .

Как следует из теории дифференциальных уравнений, общее решение полученной системы линейных уравнений первого приближения с течением времени стремится к нулю тогда и только тогда, когда отрицательны вещественные части корней  $\lambda_1, \lambda_2$  ее характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (P'_a + Q'_\theta)\lambda + P'_a Q'_\theta - P'_\theta Q'_a = 0.$$

Записывая выражения для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  или используя теорему Гурвица [6], нетрудно показать, что вещественные части обоих корней отрицательны лишь в том случае, если одновременно справедливы два неравенства:

$$P'_a + Q'_\theta < 0, \quad (\text{III.4})$$

$$P'_a Q'_\theta - P'_\theta Q'_a > 0. \quad (\text{III.5})$$

На основании выводов, вытекающих из работ А.М.Ляпунова по общей теории устойчивости движения [14,24], можно утверждать, что эти неравенства являются признаками асимптотической устойчивости стационарного решения  $a_0, \theta_0$  укороченных уравнений (III.1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.; Наука, 1981. 568 с.
2. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 394 с.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
4. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ, 1951, т.21, С.558-607.
5. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.

6. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов.радио, 1975. 320 с.
7. Конторович М.И. Нелинейные колебания в радиотехнике. М.: Сов.радио, 1973. 320 с.
8. Крюков Б.И., Середович Г.И. О «странном» поведении решений уравнения Дуффинга. // ДАН СССР. 1981. т.258, № 2, С.311-314.
9. Кулаков А.В., Румянцев А.А. Введение в физику нелинейных процессов. М.: Наука, 1988. 160 с.
10. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1988. 192 с.
11. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 416 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
13. Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 196 с.
14. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 356 с.
15. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953. 320 с.
16. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 424 с.
17. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
18. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 392 с.
19. Митропольский Ю.А., Хома Г.П. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. Киев: Наук. Думка, 1983 216 с.
20. Неймарк Ю.И. Простые математические модели. // Природа, 1991, № 11, С. 9-18.
21. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
22. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.
23. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 288 с.
24. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 332 с.
25. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947. 296 с.
26. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
27. Рэбби К. Солитоны. // УФН, 1980, т.130, № 2, С. 329-356.
28. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов.радио, 1977. 368 с.
29. Стретт Д.В. (Рэлей) Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. 456 с.
30. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ</b> .....	3
1.1. Система. Элементы. Модель .....	3
1.2. Динамическая система. Переменные состояния. Математическая модель .....	4
1.3. Состояние равновесия. Движение. Колебания .....	5
1.4. Классификация динамических систем .....	6
1.5. Число степеней свободы и порядок динамической системы .....	7
1.7. Центр, фокус, узел, седло .....	9
<b>2. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С ЕМКОСТЬЮ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ</b> .....	12
2.1. Приведение уравнения контура с периодически изменяемой емкостью к уравнению Хилла .....	12
2.2. Уравнение Матье .....	13
2.3. Условие параметрического возбуждения .....	15
<b>3. СИСТЕМА ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И МАЯТНИК</b> .....	18
3.1. Уравнение схемы фазовой автоматической подстройки частоты с однозвенным сглаживающим RC-фильтром .....	18
3.2. Уравнение движения маятника .....	20
3.3. Фазовый портрет свободного от внешних воздействий маятника без трения .....	21
3.4. Фазовые портреты маятника с потерями и системы ФАПЧ .....	25
3.5. Маятник с колеблющейся точкой подвеса .....	29
<b>4. ОДНОКОНТУРНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ</b> .....	33
4.1. LC-генератор на двухполюснике с отрицательным сопротивлением .....	33
4.2. Релаксационные колебания осциллятора Ван дер Поля .....	35
4.3. Квазилинейный осциллятор Ван дер Поля .....	37
4.4. О других схемах одноконтурных генераторов .....	39
<b>5. НЕАВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА</b> .....	42
5.1. Приведение уравнения контура с нелинейной индуктивностью к уравнению Дуффинга .....	42
5.2. Получение укороченных уравнений .....	44
5.3. Соотношения для стационарных решений .....	45
5.4. Устойчивость стационарных решений и резонансные кривые .....	45
5.5. О субгармонических, супергармонических и дробных резонансах .....	47
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	48
I. О процедуре метода медленно меняющихся амплитуд .....	48
II. Границы областей нарастающих решений уравнения Матье при малых значениях параметра $n$ .....	51
III. О признаках устойчивости стационарных решений .....	52
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	53