А н д р и а нов Ю. А., А н д р и а н о в а Т.Н.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

Методическое пособие.

Оглавление.

§1. Линейное векторное пространство .... 2.
Базис и размерность. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Дополнение базиса пространства до базиса всего подпространства. Разложение пространства в прямую сумму подпространств.
§2. Линейные операторы .... 25.
Сопоставление оператору матрицы в различных базисах. Нахождение спектра оператора и его собственных векторов. Приведение матрицы оператора к канонической форме Жордана.
§3. Унитарное и евклидово пространства .... 60.
Ортогонализация линейно независимой системы векторов. Построение оператора, сопряженного данному. Приведение ортогональной и унитарной матриц к каноническому виду.

Введение.

Это пособие адресовано, в первую очередь, студентам младших курсов университетов. Существует довольно много учебников по линейной алгебре. Однако авторам неизвестны пособия по этому курсу, в которых подробно изложены основные методы решения задач. В то же время из-за малого количества часов, отводимых на линейную алгебру в общем курсе высшей математики, часть материала было бы удобно представить студентам для самостоятельного изучения. Данная работа, по мнению авторов, служит этой цели. Пособие содержит три параграфа. Каждый параграф состоит из теоретической части, где сформулированы без доказательства основные факты, и подробно рассмотренных примеров, иллюстрирующих основные методы решения задач.

В первом параграфе решаются задачи нахождения базиса и размерности линейного векторного пространства, исследования линейной зависимости системы векторов, дополнения базиса подпространства до базиса всего пространства, разложения пространства в прямую сумму подпространств. Основным методом при этом является метод Гаусса приведения матрицы к трапециевидной форме.

Во втором параграфе рассмотрены задачи теории линейных операторов в конечномерных пространствах. Показано, как оператору сопоставляется матрица в разных базисах, находится спектр оператора, его собственные векторы, решается вопрос о приведении матрицы оператора к канонической форме Жордана.

Третий параграф посвящен задачам, связанным с евклидовым и унитарным пространствами. На примерах показан метод ортогонализации линейно независимой системы векторов, метод построения оператора, сопряженного к заданному. Также разобрана задача о нахождении канонического вида ортогональной и унитарной матриц. Несколько задач §3 посвящены дифференцальному оператору

$$\phi = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right],$$

действующему в пространстве многочленов ограниченной степени и многочленам Лежандра. Тем самым оказываются связанными курс линейной алгебры и курс теории специальных функций.

§1 Линейное векторное пространство.

Определение 1.1. Множество V элементов $x,y,z,\cdots$ любой природы называется линейным векторным пространством над полем K, если выполнены следующие три требования :

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам x,y множества V ставится в соответствие третий элемент этого множества., называемый суммой элементов x и y и обозначаемый символом $z = x+y$

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу x множества V и любому элементу $\lambda \in K$ ставится в соответствие элемент u этого множества, называемый произведением элемента x на элемент λ и обозначаемый символом $u = \lambda x$.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам :

1. $x+y=y+x$ (коммутативность)
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность)
3. Существует нулевой элемент 0 такой, что $x+0=0+x=x$ (для любого x)
4. Для каждого элемента x существует противоположный элемент $x' \in V$ такой, что $x + x' = 0$
5. $1 \cdot x = x$, где 1 – еденица поля
6. $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \mu) \cdot x,\ \lambda, \mu \in K$.
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,\ \ \lambda, \mu \in K.$
8. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,\ \ \lambda \in K$.

Замечание 1. Элементы линейного векторного пространства часто называют векторами.

Замечание 2. Всюду в дальнейшем под полем K будем понимать поле C комплексных чисел или поле R вещественных чисел. Там, где какое-либо утверждение будет справедливо лишь для одного из этих полей, это будет оговорено особо.

Определение 1.2. Элементы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейного пространства V называются линейно зависимыми, если существуют числа

$a_1, a_2, ..., a_n$ из поля *K*, не равные одновременно нулю такие, что

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Определение 1.3. Элементы $v_1, v_2, ..., v_n$ линейного пространства *V* называются линейно независимыми, если из равенства

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

следует, что все числа $a_1, a_2, ..., a_n$ поля *K* равны нулю.

Определение 1.4. Совокупность линейно независимых элементов $v_1, v_2, ..., v_n$ пространства *V* называется *базисом* этого пространства, если для любого элемента *x* пространства *V* существуют числа $x_1, x_2, ..., x_n$ из поля *K* такие, что

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

При этом данное равенство называется разложением элемента *x* по базису $v_1, v_2, ..., v_n$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — координатами элемента *x* в базисе $v_1, v_2, ..., v_n$.

Справедливы следующие свойства базиса :

1. Каждый элемент *x* линейного пространства *V* может быть раз ложен по базису $v_1, v_2, ..., v_n$ единственным образом.
2. При сложении векторов их координаты складываются, при умножении вектора на число λ его координаты умножаются на это число λ.
3. Каждое векторное пространство над полем *K* -обязательно имеет базис.

Определение 1.5. Линейное векторное пространство *V* называется *n-мерным*, если в нем существует базис из *n* векторов. Число *n* при этом называется *размерностью пространства V*. Принято обозначение $n = \dim V$.

Определение 1.6. Линейное пространство *V* называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно независимых элементов.

Определение 1.7. Два произвольных линейных пространства V и V' над полем K называются изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие ϕ так, что при этом выполнены равенства

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$$

для всех x,y $\in$ V,

$$\phi(\lambda x)=\lambda\phi(x)$$

для всех $x \in V$ и A $\in K$. Справедлива следующая

Теорема 1.8. *Любые два n-мерные линейные пространства над обним и тем же полем изоморфны.* В частности, линейное пространство V размерности n над полем K изоморфно векторному пространству K^n, элементами которого являются столбцы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ где } x_i \in K, i=1,2,\cdots,n.$$

Этот изоморфизм строится следующим образом. В пространстве V выбираем любой базис $v_1, v_2, \dots, v_n$. Тогда произвольный элемент $x \in V$ единственным образом раскладывается по этому базису

$$x=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n.$$

Тогда вектору x сопоставляется столбец $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $x_i \in K, i=1,2,\dots n.$

из координат этого вектора.

Определение 1.9. Подмножество L линейного пространства V называется подпространством пространства V, если для любых двух элементов x,y из L их сумма принадлежит L и для любого числа $\lambda \in K$ элемент λx; тоже принадлежит L.

Замечание. Легко убедиться в том, что подпространство L пространства L само является линейным пространством.

Теорема 1.10. *V_1 и V_2 — два векторных пространства над полем К. Тогда*

1) $\dim V_1 < \dim V_2$
2) *Если* $\dim V_1 = \dim V_2$, *то* $V_1 = V_2$

Определение 1.11. Пусть $u_1, u_2, ..., u_k$ — совокупность некоторых элементов пространства V. Их линейной оболочкой $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ называется совокупность всевозможных линейных комбинаций с коэффициентами из поля K этих элементов $u_1, u_2, ..., u_k$

Замечание. Легко видеть, что $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ есть подпространство пространства V.

Сформулируем важную теорему о размерности линейной оболочки.

Теорема 1.12. *Размерность линейной оболочки $L(u_1, u_2, ..., u_k)$ элементов $u_1, u_2, ..., u_k$ равно, .максимальному числу линейно независимых элементов в совокупности $u_1, u_2, ..., u_k$*

Определение 1.13. Пусть L_1, L_2 — два подпространства линейного пространства V. Пересечением L_1 и L_2 назовем совокупность $L_1 \cap L_2$ элементов из V. которые принадлежат как L_1, так и L_2. Суммой L_1 и L_2 назовем совокупность $L_1 + L_2$ элементов из V вида $x + y$, где $x \in L_1$, а $y \in L_2$.

Справедливо следующее утверждение :

Теорема 1.14.

Сумма, размерностей произвольных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V равна сумме размерности пересечения этих подпространств и размерности суммы этих подпространств, то есть

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2).$$

Определение 1.15. Пусть V_1 и V_2 два подпространства пространства V. Будем говорить, что V раскладывается в прямую сумму подпространств V_1 и V_2 и писать $V = V_1 \otimes V_2$, если любой элемент x пространства V единственным образом представляется в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где x_1 принадлежит V_1, x_2 принадлежит V_2.

Имеет место следующая

Теорема 1.16. *Для того, чтобы n-мерное линейное пространство V раскладывалось в прямую сумму подпространств V_1* и *V_2, достаточно, чтобы пересечение V_1* и *V_2 содержало только нулевой элемент и и чтобы размерность V была равна сумме размерностей V_1* и *V_2.*

Задача 1. Проверить, что заданное множество V, в котором определены сумма любых двух элементов a и b и произведение любого элемента a на любое действительное число μ, образует линейное векторное пространство.

а) Множество всех векторов трехмерного пространства, являющихся линейными комбинациями заданных векторов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ *;* сумма $\overline{a}+\overline{b}$, произведение $\mu \cdot \overline{a}$.

б) Множество всех непрерывных функций $a = f(t),\ b = g(t)$, заданных на отрезке [0,1]; сумма $f(t) + g(t)$, произведение $\mu \cdot f(t)$.

в) Множество всех многочленов от одной переменной степени мень шей или равной n; сумма $a + b$, произведение $\mu \cdot a$.

г) Множество всех прямоугольных матриц $a = (a_{ik})$, $b = (b_{ik})$, $i = 1, 2, ...m; k = 1, 2, ... n$; сумма $(a_{ik} + b_{ik})$; произведение $(\mu \cdot a_{ik})$.

д) Множество всех решений X однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей А; сумма $X_1 + X_2$, произведение $\mu \cdot X$.

Решение

а) Проверим, что сумма двух линейных комбинаций векторов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ *с* действительными коэффициентами опять является линейной комбинацией векторов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$.

Пусть

$$\overline{a} = \mu_1\overline{x} + \mu_2\overline{y} + \mu_3\overline{z}$$
$$\overline{b} = \mu_1'\overline{x} + \mu_2'\overline{y} + \mu_3'\overline{z}.$$

Используя правила ассоциативности и коммутативности сложения векторов и дистрибутивность умножения их на вещественное число, получаем требуемое

$$\overline{a} + \overline{b} = (\mu_1\overline{x} + \mu_2\overline{y} + \mu_3\overline{z}) + (\mu_1'\overline{x} + \mu_2'\overline{y} + \mu_3'\overline{z}) =$$
$$= (\mu_1 + \mu_1')\overline{x} + (\mu_2 + \mu_2')\overline{y} + (\mu_3 + \mu_3')\overline{z}.$$

Проверим теперь, что произведение линейной комбинации векторов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ на число μ снова является линейной комбинацией. Используя дистрибутивность умножения векторов на число и правило $\mu(\mu' x) = (\mu\mu')x$, получаем требуемое :

$$\mu\overline{a} = \mu(\mu_1\overline{x} + \mu_2\overline{y} + \mu_3\overline{z}) = (\mu\mu_1)\overline{x} + (\mu\mu_2)\overline{y} + (\mu\mu_3)\overline{z}.$$

Выполнение остальных аксиом (из 1.1) следует из доказываемых в векторной алгебре свойств векторов. Таким образом $V = L(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ — подпространство пространства, всех трехмерных векторов.

б) Из курса математического анализа известно, что сумма и про изведение двух непрерывных функций являются непрерывными функ циями. Поэтому, если $a = f(t)$ и $b = g(t)$ принадлежат множеству V непрерывных функций, то $a+b \in V$. Кроме того, $g(t) = \mu = \text{const}$ $\forall t \in [0,1]$ является непрерывной функцией на [0,1], поэтому $\mu \cdot a \in V$. Справедливость остальных аксиом следует из свойств ассоциатив ности, коммутативности и дистрибутивности действий сложения и умножения действительных чисел.

в) Известно, что сумма двух многочленов $a = a(x)$, $b = b(x)$ от одной переменной x — это новый многочлен от x, коэффициент при x^k которого равен сумме коэффициентов при x^k у многочленов a и b. Поэтому степень суммы двух многочленов a и b из множества V не превосходит наибольшей из степеней многочленов a и b, то есть не превосходит числа n. Поэтому сумма двух многочленов из V принадлежит V.

Произведением числа μ из основного поля на многочлен

$$a(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

с коэффициентами из того же поля называется многочлен

$$\mu \cdot a(x) = \mu a_0 x^m + \mu a_1 x^{m-1} + \cdots + \mu a_m.$$

Видим, что степень многочлена $\mu \cdot a(x)$ или равна степени $a(x)$ (если $\mu \neq 0$), или не превосходит степени $a(x)$ (если $\mu = 0$). В обоих случаях степень многочлена $\mu \cdot a(x)$ не превосходит степени $a(x)$. Таким образом, если $a(x) \in V$, то $\mu \cdot a(x) \in V$.

Справедливость восьми аксиом (из 1.1) следует из ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности действий над числами.

Таким образом, V — линейное векторное пространство.

г) Из правил сложения двух матриц одинакового размера следует, что их сумма опять будет матрицей того же размера. Из правил умножения матрицы a на число μ следует, что матрица $\mu \cdot a$ — того же размера, что матрица a. Поэтому действия сложения и умножения на число не выводят нас за пределы множества V.

Справедливость восьми аксиом (из 1.1) следует из ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности действий сложения и умножения над числами.

Итак, V — линейное векторное пространство.

д) Известно, что система $AX = 0$ однородных линейных уравнений с матрицей A и столбцом неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ всегда имеет решение.

Пусть X_1, X_2 — два столбца с числовыми компонентами, являющиеся решениями системы $AX = 0$. Тогда их сумма $X_1 + X_2$ тоже будет решением системы $AX = 0$. Действительно,

$$A \cdot (X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0.$$

Произведение числа μ на столбец X_1 тоже будет решением. Действительно,

$$A \cdot (\mu X_1) = \mu A X_1 = 0.$$

Таким образом, сложение элементов из У и умножение их на число не выводят за пределы множества V.

Справедливость восьми аксиом (из 1.1) следует из ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности действий сложения и умножения чисел.

Итак, V — линейное векторное пространство.

Задача 2. Пусть V — векторное пространство, элементами которого являются матрицы-строки размера n.

Пусть A — матрица размерности m х n имеет трапециевидную форму

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

причем последние m — k строк - нулевые, а элементы $a_{11}, \dots a_{kk}$ — не равны нулю. Доказать, что матрицы-строки

$$A_1 = (a_{11}, \cdots, a_{1n}), \cdots, A_k = (0, 0, \cdots, 0, a_{kk}, \cdots, a_{kn})$$

— линейно независимые элементы пространства V.

Доказательство. Составим произвольную линейную комбинацию строк $A_1, A_2, \dots, A_k$ с коэффициентами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ - из основного поля Л" и приравняем ее к нулю :

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \cdots + \mu_k A_k = 0.$$

Нам надо проверить, что это равенство возможно только при $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$. Отсюда будет следовать по определению, что $A_1, A_2, \dots, A_k$- линейно независимы.

Выражение $\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \dots + \mu_k A_k$ левой части — это матрица-строка, имеющая вид

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \cdots + \mu_k A_k =$$
$$= (\mu_1 a_{11}; \mu_1 a_{12} + \mu_2 a_{22}; \cdots; \mu_1 a_{1n} + \mu_2 a_{2n} + \cdots + \mu_k a_{kn}).$$

По условию эта строка равна нулевому элементу пространства V, то есть строке

$$(0,0\dots,0).$$

Но мы знаем, что две матрицы равны тогда и только тогда, когда их соответствующие элементы равны. Отсюда получаем систему k линейных однородных .уравнений с неизвестными $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$

$$\begin{cases} \mu_1 a_{11} & = 0 \\ \mu_1 a_{12} + \mu_2 a_{22} & = 0 \\ \cdots & \cdots \\ \mu_1 a_{1k} + \mu_2 a_{2k} + \cdots + \mu_k a_{kk} & = 0. \end{cases}$$

отсюда в силу условий $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{kk} \neq 0$ получаем последовательно

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = 0$$

Следовательно, строки $A_1, A_2, \dots, A_k$ — линейно независимы.

Задача решена.

Задача 3. Исследовать на линейную зависимость систему векторов

1)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2) $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_3 = x^2$ на $(-\infty, +\infty)$.
3) $a_0 = 1$, $a_1 = \sin x$, $a_2 = \cos x$ на $[-\pi, \pi]$.

Решение. 1) Рассмотрим векторное пространство, элементами которого служат матрицы-столбцы длины три. Расположим столбцы a_1, a_2, a_3 в строки матрицы A.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

(см. предыдущую задачу). Стоящие справа от матрицы столбцы означают, что в первой строке стоит столбец a_1, во второй строке — a_2 , в третьей — a_3. Приведем матрицу A методом Гаусса к трапециевидной форме, действуя только строками. Первую строку оставим без изменений, вычтем первую строку из второй и третьей. Тогда получим матрицу

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - a_1. \end{array} \end{array}$$

В полученной матрице оставляем без изменений первые две строки. Вторую строку, умноженную на 3/5, вычтем из третьей. Тогда получим матрицу

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 - \frac{3}{5}a_2 - \frac{2}{5}a_1. \end{array} \end{array}$$

Видим, что вектор $a_3 - \frac{3}{5}a_2 - \frac{2}{5}a_1$ равен нулю, значит

$$a_3 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_1.$$

Кроме того, согласно предыдущей задаче, столбцы a_1 и $a_2 - a_1$ линейно независимы. Следовательно, линейно независимыми являются также a_1 и a_2. Действительно, составим линейную комбинацию векторов a_1 и a_2 с произвольным коэффициентами μ_1 и μ_2 и приравняем ее к нулю

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = 0.$$

Добавляя и вычитая a_1 с подходящим коэффициентом, получаем

$$(\mu_1 + \mu_2)a_1 + \mu_2(a_2 - a_1) = 0.$$

Но a_1 и a_2 — линейно независимы. Следовательно,

$$\mu_2 = \mu_1 + \mu_2 = 0.$$

Отсюда $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Линейная независимость a_1 и a_2 доказана.

Таков метод исследования на линейную зависимость столбцов или строк произвольной длины n. В данном конкретном примере $n = 3$ и мы можем для исследования линейной зависимости привлечь геометрические; соображения. Интерпретируем столбцы a_1, a_2, a_3 как радиус-векторы точек в пространстве. Известно, что три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Вычисляем

$$(\overline{a}_1 \times \overline{a}_2, \overline{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ компланарны, поэтому один из них выражается линейно через два других. Видим, кроме того, что координаты векторов $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ не пропорциональны. Значит, эти векторы не коллинеарны и, следовательно, линейно независимы.

2) Рассмотрим векторное пространство, элементами которого служат многочлены степени, не превосходящей двух. Составим линейную комбинацию элементов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ с произвольными коэффициентами μ_1, μ_2, μ_3 и приравняем ее к нулю. Тогда получим квадратный трехчлен от x

$$\mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 x^2 = 0,$$

тождественно равный нулю. Равенство многочленов влечет равенство коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Следовательно, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ и элементы 1, x, x^2 линейно независимы на $(-\infty, \infty)$.

3) Рассмотрим векторное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на $[-\pi, \pi]$. Составим линейную комбинацию элементов $a_0 = 1$; $a_1 = \sin x$; $a_1 = \cos x$ с произвольными коэффициентами μ_0, μ_1, μ_2 и приравняем ее к нулевому элементу пространства V непрерывных функций на $[-\pi, \pi]$.

$$\mu_0 \cdot 1 + \mu_1 \sin x + \mu_2 \cos x = 0.$$

В правой части равенства стоит нулевая функция, то есть функция, равная нулю $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Проверим, что тождественное равенство левой и правой частей $\forall x \in [-\pi, \pi]$ возможно лишь при $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$

Допустим, что $\mu_1 \neq 0$. Воспользуемся тождеством

$$\mu_1 \sin x + \mu_2 \cos x = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \cdot \sin(x + \Theta),$$

где $\operatorname{tg}\Theta = \frac{\mu_2}{\mu_1}$. Тогда получаем

$$\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \cdot \sin(x + \Theta) = -\mu_0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Но графики левой и правой частей могут пересечься лишь в конечном числе точек интервала $[-\pi, \pi]$. Поэтому последнее равенство не может выполняться во всех точках интервала $[-\pi, \pi]$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_1 = 0$. Аналогично проверяем, что $\mu_2 = 0$. Следовательно, $\mu_3 = 0$.

Линейная независимость функций 1, sinx, cosx на $[-\pi, \pi]$ проверена.

Задача 4. Найти базис и размерность следующих линейных пространств :

1) пространство $V = P_n$ многочленов степени, $\leq$ n
2) пространство $V = M_{mn}$ прямоугольных матриц m x n.

Решение. Совокупность многочленов степени, не превосходящей п, с бинарной операцией сложения и умножения на число, образует линейное векторное пространство (см. задачу 1). Любой многочлен *p(x) c* комплексными коэффициентами степени, не превосходящей п, есть линейная комбинация многочленов

$$1, x, x^2, \cdots, x^n$$

с коэффициентами из поля *С*. Линейная независимость этих элементов проверяется аналогично пункту 2 предыдущей задачи.

Таким образом, элементы $1, x, x^2, ..., x^n$ составляют линейно независимую систему образующих пространства $V = P_n$, то есть являются базисом пространства *V*. Итак, $\dim V = n + 1$.

2) Множество всех прямоугольных матриц с комплексными коэффициентами размером га m х n с операциями сложения матриц и умножения матриц на числа является векторным пространством $V = M_{mn}$ над *С* (см. задачу 1). Найдем систему образующих пространства *V*. Рассмотрим матрицы E_{ij} размером m х n, у которой в i-ой строке и j-ом столбце стоит единица, а на остальных местах — нули. Любую матрицу $A = (a_{ij}) \in V$ можно записать в виде линейной комбинации матриц E_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, \ldots, n$ комплексными коэффициентами

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{mn}E_{mn}.$$

Таким образом, матрицы E_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, \ldots, n$ — образующие пространства *V*. Проверим их линейную независимость. Составим линейную комбинацию элементов E_{ij} *с* произвольными коэффициентами и приравняем ее к нулевому элементу

$$\mu_{11}E_{11} + \mu_{12}E_{12} + \ldots + \mu_{mn}E_{mn} = 0$$

В левой части этого равенства стоит матрица

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix},$$

а в правой части - нулевая матрица. Согласно определению, две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы. Следовательно, $\mu_{ij} = 0 \; \forall i, j$ и матрицы E_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ линейно независимы. Следовательно, они образуют базис пространства $V = M_{mn}$ и dimV = ran.

Задача 5. В векторном пространстве $V = R^4$ столбцов длины 4 с вещественными коэффициентами заданы столбцы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $V_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $V_2 = L(b_1, b_2, b_3)$.

I. Найти

1) базисы V_1 и V_2;
2) базис суммы $V_1 + V_2$ подпространств V_1 и V_2,
3) базис пересечения $V_1 \cap V_2$ подпространств V_1 и V_2

П. Дополнить

а) базис подпространства $V_1 \cap V_2$ до базиса подпространства V_1, до базиса подпространства V_2

б) базис подпространства $V_1 \cap V_2$ до базиса всего пространства V.

Найти подпространства L_1 и L_2 так, чтобы были выполнены равенства

$$V_1 = (V_1 \cap V_2) \oplus L_1$$
$$V_2 = (V \cap V_2) \oplus L_2$$

Решение.

I. 1) Найдем базис подпространства V_1: являющегося линейной оболочкой векторов a_1, a_2, a_3. Любой элемент из V_1 — это линейная комбинация элементов a_1, a_2, a_3 с вещественным коэффициентами. Элементы a_1, a_2, a_3 — система образующих подпространства V_1. Базис V_1 — это линейно независимая система образующих V_1. Можно охарактеризовать базис V_1 как минимальную (по числу векторов) систему образующих. Поэтому один из путей нахождения базиса V_1 — это постепенное выбрасывание из системы образующих V_1 тех образующих, которые линейно выражаются через оставшиеся, до тех пор, пока оставшиеся образующие будут линейно независимыми.

Для практической реализации этого плана используем метод Гаусса приведения матрицы к трапециевидной форме. Расположим векторы a_1, a_2, a_3 в строки матрицы, которую обозначим A.

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}$$

Стоящие справа от матрицы буквы a_1, a_2, a_3 обозначают, что в первой строке расположен вектор a_1, во второй — вектор a_2 и т.д.

Первую строку матрицы A оставляем без изменений. Из второй строки вычитаем первую строку, умноженную на 2. Тогда во второй строке будут стоять компоненты вектора $a_2 - 2a_1$. Из третьей строки матрицы A вычитаем первую строку, умноженную на -1. Тогда в третьей строке будут стоять компоненты вектора $a_3 - a_1$. Полученный результат запишем в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1. \end{array}$$

Видим, что полученная матрица имеет трапециевидную форму. Но мы уже знаем (задача 2), что ненулевые строки трапециевидной матрицы линейно независимы. Следовательно, столбцы a_1, $a_2 - 2a_1$, $a_3 - a_1$ линейно независимы. Но тогда исходные столбцы a_1, a_2, a_3 тоже независимы. Действительно, составим их линейную комбинацию и приравняем ее нулю (то есть к нулевому элементу пространства V).

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0.$$

Добавляя и вычитая к a_2 и a_3 необходимые кратные a_1, получаем

$$(\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)a_1 + \mu_2(a_2 - 2a_1) + \mu_3(a_3 - a_1) = 0.$$

Выше мы уже убедились в том. что a_1, $a_2 - 2a_1$, $a_3 - a_1$ линейно независимы. Поэтому из последнего равенства следует, что

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 = \mu_2 = \mu_3 = 0.$$

Окончательно, получаем,

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.$$

Итак, векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы. Кроме того, они являются образующими пространства V_1. Следовательно, a_1, a_2, a_3 — базис V_1.

Найдем базис подпространства V_2- Рассуждаем аналогично. Векторы b_1, b_2, b_3 — это система образующих $V_2 = L(b_1, b_2, b_3)$. Составим матрицу 5, строками которой являются столбцы b_1, b_2, b_3.

$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3. \end{array} \end{array}$$

Приводим матрицу B элементарными преобразованиям над строками к трапециевидной форме. Первую строку оставляем без изменений. От второй и третьей строк вычитаем первую строку. Получаем матрицу

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1. \end{array} \end{array}$$

В полученной матрице к третьей строке прибавляем вторую, умноженную на 2. Тогда имеем трапециевидную матрицу

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 + 2b_2 - 3b_1. \end{array} \end{array}$$

Следовательно, ее ненулевые строки линейно независимы (задача 2). Значит, векторы $b_1, b_2 - b_1, b_3 + 2b_2 - 3b_1$ линейно независимы. Проверим, что векторы b_1, b_2, b_3 тоже линейно независимы. Составим линейную комбинацию с неопределенными коэффициентами и приравняем ее к нулевому элементу

$$\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 = 0.$$

Добавляя и вычитая необходимые кратные векторов b_2 и b_3, получим

$$(\mu_1 + \mu_2 + 5\mu_3) b_1 + (\mu_2 - 2\mu_3)(b_2 - a_1) + \mu_3(b_3 + 2b_2 - 3b_1) = 0.$$

В силу линейной независимости векторов $b_1, b_2 - b_1, b_3 + 2b_2 - 3b_1$ из последнего равенства следует, что

$$\mu_3 = \mu_2 - 2\mu_3 = \mu_1 + \mu_2 + 5\mu_3 = 0.$$

Отсюда имеем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ - Значит, векторы b_1, b_2, b_3 линейно независимы и, следовательно, образуют базис V_2.

Итак, $\dim V_1 = \dim V_1 = 3$.

2) Найдем базис суммы V_1+V_2 подпространств V_1 и V_2. Элементами пространства V_1+V_2 являются элементы $\upsilon_1 + \upsilon_2$ где $\upsilon_1 \in V_1$, $\upsilon_2 \in V_2$.. Любой элемент $\upsilon_1 \in V$ является линейной комбинацией элементов a_1, a_2, a_3 любой элемент $\upsilon_2 \in V$ является линейной комбинацией элементов b_1, b_2, b_3 Следовательно, элемент $\upsilon_1 + \upsilon_2$ является линейной комбинацией элементов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Итак, $V_1 + V_2 \subseteq L(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$. Проверим обратное включение. Пусть $\upsilon \subseteq L(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$. Тогда,

$$v = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \nu_3 b_3 = v_1 + v_2,$$

Где $\upsilon = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 \in V_1$, $\upsilon_1 = \upsilon_1 b_1 + \upsilon_2 b_2 + \upsilon_3 b_3 \in V_2$. Итак,

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \subseteq V_1 + V_2.$$

Окончательно, получаем

$$V_1 + V_2 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3).$$

Следовательно, векторы $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ система образующих пространства V_1+V_2. Найдем базис V_1+V_2. Для этого составим матрицу M, строками которой являются $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{array}. \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$$

Приведем матрицу M к трапециевидной форме, действуя элементарными преобразованиями над строками.

Первую строку матрицы M оставляем без изменений. Из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2. Из оставшихся строк вычитаем первую строку. Тогда получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 \\ b_1 - a_1 \\ b_2 - a_1 \\ b_3 - a_1. \end{matrix}$$

Три первые строки полученной матрицы оставляем без изменений. Затем вычитаем из четвертой строки вторую, из пятой строки — вторую, умноженную на 2. Наконец, к шестой строке прибавляем вторую строку. Тогда получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 \\ b_1 - a_2 + a_1 \\ b_2 - 2a_2 + a_1 \\ b_3 + a_2 - 3a_1. \end{matrix}$$

В полученной матрице оставляем без изменений первые три строки. От четвертой строки отнимаем третью строку, от пятой строки отнимаем третью, умноженную на 2, и к шестой строке прибавляем третью, умноженную на 2. После этого переставляем местами четвертую и пятую строки. Тогда получим матрицу, приведенную к трапециевидной форме :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 \\ b_2 - 2a_3 - 2a_2 + 5a_1 \\ b_1 - a_3 - a_2 + 2a_1 \\ b_3 + 2a_3 + a_2 - 5a_1. \end{matrix}$$

Две последние строки полученной матрицы нулевые. Следовательно, векторы $b_1 - a_3 - a_2 + 2a_1$ и $b_3 + 2a_3 + a_2 - 5a_1$ равны нулю. Отсюда

$$(1.17) \qquad \begin{aligned} b_1 &= -2a_1 + a_2 + a_3 \\ b_3 &= 5a_1 - a_2 - 2a_3. \end{aligned}$$

Первые четыре строки полученной матрицы — ненулевые. Значит, векторы

$$a_1, a_2 - 2a_1, a_3 - a_1, b_2 - 2a_3 - 2a_2 + 5a_1$$

линейно независимы (см. задачу 2). Убедимся в том, что также и векторы

$$a_1, a_2, a_3, b_2$$

линейно независимы. Для этого поступаем так же, как в пункте 1) этой задачи. Составляем линейную комбинацию элементов a_1, a_2, a_3, b_2 с произвольными коэффициентами $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, приравниваем ее к нулю и убеждаемся в том, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Итак, пусть верно равенство

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 b_2 = 0.$$

Добавляя и вычитая необходимые кратные элементов a_1, a_2, a_3, получим

$$0 = (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)a_1 + (\mu_2 + 2\mu_4)(a_2 - 2a_1) + \\ + (\mu_3 + 2\mu_4)(a_3 - a_1) + \mu_4(b_2 - 2a_3 - 2a_2 + 5a_1)$$

Но элементы $a_1, a_2 - 2a_1, a_3 - a_1, b_2 - 2a_3 - 2a_2 + 5a_1$ линейно независимы. Следовательно.

$$\mu_4 = \mu_3 + 2\mu_4 = \mu_2 + 2\mu_4 = \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0.$$

Отсюда получаем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Итак, элементы a_1, a_2, a_3, b_2 образуют базис $V_1 + V_2$.

Кроме того, получаем, что $\dim(V_1 + V_2) = 4$ и $V = V_1 + V_2$ (по теореме 1.10).

3) Найдем базис пересечения $V_1 \cap V_2$ подпространств V_1 и V_2. По известной формуле (1.14)

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

Ранее были получены равенства

$$\dim V_1 = \dim V_2 = 3; \quad \dim(V_1 + V_2) = 4.$$

Поэтому $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$.

Для нахождения базиса $V_1 \cap V_2$ заметим прежде всего, что элемент x принадлежит $V_1 \cap V_2$ тогда и только тогда, когда $x \in V_1$ и $x \in V_2$ Это значит, что $x \in V_1 \cap V_2$ тогда и только тогда, когда

$$x = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \nu_3 b_3$$

для некоторых наборов чисел $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$,Последнее равенство равносильно тому, что

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 - \nu_1 b_1 - \nu_2 b_2 - \nu_3 b_3 = 0. \tag{1.18}$$

Мы сейчас опишем все наборы чисел μ_1, μ_2, μ_3 и $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$, для которых возможно это равенство. Тем самым будут описаны все элементы пересечения $V_1 \cap V_2$.

Подставим в равенстве (1.18) вместо b_1 и b_3 их выражения из равенства (1.17). Тогда получим

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 - \nu_1(-2a_1 + a_2 + a_3) - \nu_2 b_2 - \nu_3(5a_1 - a_2 - 2a_3) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, имеем

$$(\mu_1 + 2\nu_1 - 5\nu_3)a_1 + (\mu_2 - \nu_1 + \nu_3)a_2 + (\mu_3 - \nu_1 + 2\nu_3)a_3 - \nu_2 b_2 = 0.$$

Векторы a_1, a_2, a_3, b_2 образуют базис $V_1 + V_2$ (смотри 2) настоящей задачи). Поэтому равенство нулю их линейной комбинации возможно только при нулевых коэффициентах.

Следовательно, получили однородную линейную систему четырех уравнений с шестью неизвестными μ_1, μ_2, μ_3 и $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$

$$\begin{cases} \mu_1 + 2\nu_1 - 5\nu_3 & = 0 \\ \mu_2 - \nu_1 + \nu_3 & = 0 \\ \mu_3 - \nu_1 + 2\nu_3 & = 0 \\ \nu_2 & = 0 \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что $\upsilon_2 = 0$, $\mu_1 = -2\upsilon_1 + 5\upsilon_3, \mu_2 = \upsilon_1 - \upsilon_3, \mu_3 = \upsilon_1 - 2\upsilon_3$ и числа υ_1 и υ_3 — произвольные. Следовательно, вектор

$$x = (-2\nu_1 + 5\nu_3)a_1 + (\nu_1 - \nu_3)a_2 + (\nu_1 - 2\nu_3)a_3$$

принадлежит $V_1 \cap V_2$. Перепишем выражение для x по-другому :

$$x = \nu_1(-2a_1 + a_2 + a_3) + \nu_3(5a_1 - a_2 - 2a_3).$$

Мы видим, что два вектора

$$c_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$$
$$c_2 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$$

являются системой образующих для $V_1 \cap V_2$. Кроме того, вектора c_1 и c_2 линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

равен двум и остается применить задачу 2.

Итак, векторы $c_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$ и $c_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$ образуют базис пересечения $V_1 \cap V_2$.

Можно найти базис $V_1 \cap V_2$, исходя из представления элемента $x \in V_1 \cap V_2$ в виде

$$x = \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \nu_3 b_3. \tag{1.19}$$

Подставляя в (1.19) выражения (1.17) для b_1 и b_3 и вспоминая, что $\upsilon_2 = 0$, получаем

$$x = \nu_1(-2a_1 + a_2 + a_3) + \nu_3(5a_1 - a_2 - 2a_3) = \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2$$

с произвольными коэффициентами υ_1 и υ_2.

II. Для окончания решения задачи дополним сначала базис $V_1 \cap V_2$ до базиса V_1. С этой целью запишем матрицу коэффициентов разложения векторов c_1 и c_2 по базису a_1, a_2, a_3 пространства V_1 (см. теорему 1.8).

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Посмотрим теперь, какую строку надо приписать к этой матрице, чтобы получившаяся матрица имела ранг, равный трем.

Для простоты можно искать дополнительные векторы среди базисных векторов a_1, a_2, a_3. Если взять в качестве дополнительного вектора вектор a_1, то к указанной матрице надо приписать строку (1,0,0). Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный трем. Таким образом, векторы

$$c_1, c_2, a_1$$

- базисные векторы V_1 (они линейно независимы согласно задаче 2 и

$$\dim\mathcal{L}(c_1, c_2, a_1) = \dim V_1,$$

следовательно $V_1 = L(c_1, c_2, a_1)$ по теореме 1.10). Ясно также, что если взять в качестве $L_1 = L(a_1)$. то

$$V_1 = (V_1 \cap V_2) \dotplus L_1 \qquad \text{(см. 1.16)}.$$

Мы взяли вектор a_1 в качестве дополнительного вектора к векторам c_1 и c_2 до базиса всего V_1. Но с таким же успехом мы могли бы взять в качестве такого вектора любую линейную комбинацию

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3,$$

лишь бы строка ($\mu_1; \mu_2; \mu_3$) была линейно независима со строками (-2;1;1)и(5;-1;-2).

Дополним теперь векторы c_1 и c_2 до базиса V_2. Согласно равенству (1.19), любой элемент $x \in V_1 \cap V_2$ можно записать в виде

$$x = \nu_1 b_1 + \nu_3 b_3.$$

Таким образом, векторы b_1 и b_3 базисные вектора $V_1 \cap V_2$. Ясно, что если к ним добавить вектор b_2, то система векторов b_1, b_2, b_3 — базис всего V_2. В качестве L_2 можно взять линейную оболочку $L_1 = L(b_2)$ элемента b_2 (см. теорему 1.16).

Дополним теперь базис c_1 и c_2 пространства $V_1 \cap V_2$ до базиса всего пространства V. Для этого вспомним, что $V_1 + V_2 = V$ и базисом V являются, следовательно, вектора a_1, a_2, a_3, b_2. Но мы уже знаем, что вектора a_1, a_2, a_3 (это базис V) порождают то же пространство, что и c_1, c_2, c_3 (мы дополнили базис $V_1 \cap V_2$ элементом a_1 до базиса V_1). Поэтому вектора a_1 и b_2 дополняют векторы c_1 и c_2 до базиса всего пространства V.

Задача полностью решена.

§2 **Линейные операторы.**

Определение 2.1 Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства, размерности которых соответственно равны n и m.

Правило ϕ, согласно которому любому элементу x из V_1 ставится в соответствие единственный элемент y из V_2, называется оператором, действующим из V_1 в V_2. Принято это обстоятельство записывать следующим образом :

$$y = \phi(x).$$

Пишут также

$$\phi : V_1 \longrightarrow V_2.$$

Определение 2.2. Оператор $\phi \ : V_1 \to V_2$, называется линейным, если для любых элементов υ_1, υ_1' принадлежащих пространству V_1 и любого числа $\lambda \in K$ справедливы следующие равенства :

$$1)\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_1')$$
$$2)\phi(\lambda v_1) = \lambda\phi(v_1)$$

Определение 2.3. Образом линейного оператора $\phi : V_1 \to V_2$ называется множество всех элементов y из пространства V_2, представимых в виде

$$y = \phi(x).$$

Образ линейного оператора ϕ обозначается imϕ.

Определение 2.4. Ядром линейного оператора $\phi : V_1 \to V_2$ называется множество всех элементов x. принадлежащих V_1, для которых

$$\phi(x) = 0.$$

Ядро линейного оператора ϕ обозначается символом ker ϕ.

Пусть заданы два линейных пространства V_1 и V_2 и $\phi \ : V_1 \to V_2$ — линейный оператор. Пусть dim $V_1 = n$ *и* dim $V_2 = m$. Пусть, кроме того, в линейном пространстве V_1 задан базис $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$,а в линейном пространство V_1 задан базис $u_1, u_2, ..., u_m$. Разложим векторы $\phi(\upsilon_1), \phi(\upsilon_2), ..., \phi(\upsilon_n)$ как элементы пространства V_2 по базису $u_1, u_2, ..., u_m$:

$$\begin{aligned}\phi(v_1) &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{m1}u_m \\ \phi(v_2) &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{m2}u_m \\ &\ldots \\ \phi(v_n) &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{mn}u_m\end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу

$$A_\phi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.5. Матрица A_ϕ называется матрицей оператора ϕ в указанных базисах.

Определение 2.6. Пусть ϕ и φ — линейные операторы, действующие из линейного пространства V_1 в линейное пространство V_2. Суммой этих операторов назовем линейный оператор $\phi + \varphi$, определяемый равенством

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(X) + \psi(y)$$

Произведением линейного оператора ϕ на скаляр λ назовем линейный оператор $\lambda\,\phi$. определяемый равенством

$$(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(X)),$$

для любого x из V_1.

Назовем нулевым оператор, обозначаемый символом 0 и отображающий все элементы из V_1 в нулевой элемент пространства V_2

$$0(x) = 0.$$

Для каждого оператора ϕ определен оператор $-\phi$:

$$(-\phi(x) = (-1)\phi(x).$$

Легко проверить, что множество *L(V1,V2)* всех линейных операторов, действующих из V_1 в V_2 с введеным и операциями сложения и умножения, есть линейное пространство.

В дальнейшем мы рассматриваем пространство L(V, V), где *V* — некоторое линейное пространство над полем *К*.

Определение 2.7. Назовем тождественным (или единичным) оператор *E* такой, что

$$E(x) = x,$$

для любого *x* из пространства V.

Определим произведение операторов ϕ и φ следующим образом

$$(\phi\psi)(x) = \phi(X)(\psi(x)),$$

для любого *x* из пространства *V*.

Определение 2.8. Линейный оператор φ, принадлежащий пространству L(V, V), называется обратным для оператора ϕ из L(V, V), если

$$\phi\psi = \psi\phi = E.$$

Принято писать при этом $\varphi = \phi^{-1}$.

Для того, чтобы для линейного оператора ϕ существовал обратный оператор ϕ^{-1}, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\ker\phi = 0$$

или, что равносильно, $\mathrm{im}\,\phi = V$.

Множество *L(V, V)*, с введенными на нем операциями сложения и умножения операторов, образует кольцо (коммутативное) с единицей.

Пусть ϕ — линейный оператор из *L(V, V)*, A_ϕ — его матрица в некотором базисе $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ пространства *V*, *x* — произвольный элемент пространства *V*. Разложим *x* по базису $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда $\phi(x)$ имеет в базисе $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ координаты $b_1, b_2, ..., b_n$:

(2.9)
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B = A_\phi X.$$

Можно показать, что введенные действия с линейными операторами соответствуют тем же действиям с их матрицами, т.е. сумма операторов соответствует сумма их матриц, произведению — произведение матриц, единичному оператору соответствует единичная матрица, а нулевому оператору нулевая матрица. Наличие указанного соответствия между элементами *L(V, V)* и элементами кольца $M_n(K)$ всех квадратных матриц с коэффициентами из поля *K* характеризуют словами : кольцо *L(V, V)* изоморфно кольцу $M_n(K)$. Пусть в пространстве *V* размерности *n* заданы два базиса : $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ который мы будем называть старым базисом, и $\upsilon_1', \upsilon_2', ..., \upsilon_n'$ который мы будем называть новым базисом. Разложим элементы нового базиса $\upsilon_1', \upsilon_2', ..., \upsilon_n'$, по старому базису $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$:

(2.10)
$$\begin{aligned} v_1' &= t_{11}v_1 + t_{21}v_2 + \cdots + t_{m1}v_n \\ v_1' &= t_{12}v_1 + t_{22}v_2 + \cdots + t_{m2}v_n \\ &\dots \\ v_1' &= t_{1n}v_1 + t_{2n}v_2 + \cdots + t_{nn}v_n \end{aligned}$$

Обозначим
$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обращаем внимание читателя на то, что коэффициенты разложения (2.10) помещены в столбцы матрицы *T*.

Так построенная матрица T называется матрицей перехода от старого базиса к новому.

Матрица T — всегда невырожденная, то есть $\det T \neq 0$.

Пусть x — произвольный вектор из V. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбец координат x в старом базисе, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ - столбец координат x в новом базисе. Тогда

$$X = TX'. \tag{2.11}$$

Рассмотрим оператор $\phi \in L(V. V)$, которому в старом базисе соответствует матрица A_ϕ, а в новом матрица A'_ϕ. Тогда

$$A'_\phi = T^{-1} A_\phi T; \quad A_\phi = T A'_\phi T^{-1}. \tag{2.12}$$

Определение 2.13. Пусть A, B — две матрицы, принадлежащие $M_n(K)$ такие, что существует невырожденная матрица Т, принадлежащая $M_n(K)$. так что выполнено равенство

$$A = T^{-1} BT.$$

Тогда A и B называются подобными матрицами. Таким образом, на основании (2.12). матрицы оператора в разных базисах являются подобными.

Определение 2.14. Пусть в линейном пространстве V задан линейный оператор ϕ, принадлежащий множеству $L(V, V)$ и пусть для некоторого числа $\lambda \in K$ существует ненулевой вектор x из V такой, что

$$\phi(x) = \lambda x.$$

Тогда число λ называется собственным числом оператора ϕ, а вектор x — собственным вектором этого оператора, соответствующим собственному числу λ. Совокупность всех собственных чисел оператора ϕ называется спектром оператора ϕ.

Задача нахождения спектра оператора ϕ и его собственных векторов решается следующим образом. Выбираем произвольный базис $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ пространства V, строим матрицу A_ϕ оператора ϕ в этом базисе. Равенству $\phi(x) = \lambda x$ из определения (2.14) соответствует матричное равенство

$$A_\phi X = \lambda \cdot X, \tag{2.15}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец координат x в выбранном базисе.

Равенство (2.15) представляет собой систему линейных однородных уравнений

$$(A_\phi - \lambda E)X = 0. \tag{2.16}$$

В этой системе мы пока не знаем ни числа λ, ни столбца X. Однако известно, что такая система имеет нетривиальное решение только в случае

$$\det(A_\phi - \lambda E) = 0. \tag{2.17}$$

Многочлен

$$f(t) = \det(A_\phi - tE)$$

называется характеристическим многочленом матрицы A_ϕ. Таким образом, если число $\lambda \in K$ является собственным числом оператора ϕ, то λ является корнем характеристического многочлена матрицы A_ϕ. Обратное, вообще говоря, неверно (смотри задачу 5 §2). Для того, чтобы корень λ характеристического многочлена $f(t)$ был собственным числом оператора ϕ, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \in K$.

Вернемся к задаче нахождения собственных векторов оператора ϕ. Подставляем найденные собственные числа оператора ϕ в систему (2.16). Нетривиальное решение этой системы — это координаты искомых собственных векторов в базисе $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$. Фундаментальная система решений этой системы — это базис пространства собственных векторов.

Замечание. Можно показать, что подобные матрицы имеют равные характеристические многочлены. Таким образом, все матрицы оператора ϕ в различных базисах имеют одинаковый характеристический многочлен, который называется характеристическим многочленом оператора ϕ.

Определение 2.18 Пусть оператор ϕ, принадлежащий *L(V, V)*, dimV= *n*, имеет *n* различных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Такой оператор называется оператором простой структуры. Собственные векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$ соответствующие различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, являются линейно независимыми. Возьмем в качестве базиса пространства *V* векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$. Тогда матрица оператора ϕ в этом базисе будет иметь диагональную форму :

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Приведение матрицы оператора к канонической форме Жордана, построение базиса Жордана.

Пусть ϕ — оператор, действующий в пространстве *V* над полем *C,* dimV = *n*, *f(t)* — характеристический многочлен оператора ϕ, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ — все различные корни многочлена *f(t)*, то есть собственные числа оператора ϕ.

Имеем разложение многочлена *f(t)* на множители над полем комплексных чисел

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot (t - \lambda_2)^{k_2} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s}.$$

Здесь k_i —кратность корня $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, s)$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$.

Как уже известно, в частном случае, когда все k_i (i= 1,2, $\cdots$, s) равны единице, в пространство V имеется базис из собственных векторов оператора ϕ, и матрица оператора ϕ в этом базисе имеет диагональный вид (2.19).

В этом параграфе мы рассмотрим общий случай произвольных кратностей $k_1, \cdots, k_s$.

Обозначим X_i - - пространство собственных векторов, соответствующих собственному числу λ_i. Решая соответствующую систему линейных уравнений (2.16). мы легко можем найти базис X_i. Можно доказать, что всегда имеет место неравенство $\dim X_i \le k_i$.

1) если окажется, что $\forall i = 1, 2, \cdots, s \quad \dim X_i = k_i$,то в пространстве V существует базис из собственных векторов (полученный объединением базисов всех X_i), и оператор ϕ — оператор простой структуры. Его матрица A_ϕ в этом базисе

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_2 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_s & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_s \end{pmatrix}$$

3) Допустим теперь, что для каких-то i имеем $\dim X_i \le k_i$.. Это значит, что $\dim \ker(\phi - \lambda_i \varepsilon) < k_i$. Для всех таких i поступают следующим образом. Пусть i = 1. Решая соответствующие системы линейных уравнений, находим последовательно базисы подпространств

$$X_1 = X_{11} = \ker(\phi - \lambda_i \varepsilon), X_{12} = \ker(\phi - \lambda_i \varepsilon)^2, \cdots, X_{1m} = \ker(\phi - \lambda_i \varepsilon)^m \tag{2.20}$$

Все эти подпространства вложены друг в друга и их размерности не уменьшаются. При этом последнее подпространство X_{1m} определено условием (для него первого выполнено) $\dim X_{1m} = k_1$. Всегда будет получаться $m \le k_1$.

В подпространство X_{1m} выбираем максимально возможное число линейно независимых над $X_{1,m-1}$ элементов, $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \cdots, a_{t_m}^{(m)}$. Их число $t_m = \dim X_{1m} - \dim X_{1,m-1}$ и никакая их нетривиальная линейная комбинация не принадлежит $X_{1,m-1}$. На каждый из элементов $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \cdots, a_{t_m}^{(m)}$. натягиваем башни : это означает, что, исходя из элемента $a_i^{(m)}$.строим элементы $(i=1,2,\dots,s)$

$$a_i^{(m)} = a_{i,m}^{(m)}, a_{i,m-1}^{(m)} = \left(\phi - \lambda_1 \varepsilon\right) a_{i,m}^{(m)},$$

$$a_{i,m-2}^{(m)} = \left(\phi - \lambda_1 \varepsilon\right) a_{i,m-1}^{(m)}, \cdots, a_{i,1}^{(m)} = \left(\phi - \lambda_1 \varepsilon\right) a_{i,2}^{(m)} \quad i = 1, 2, \cdots, t_m$$

Число элементов в каждой такой "башне" равно m. Говорят, что высота каждой такой "башни" равна m. Получили t_m "башен" высоты m.

Дальше действуем индуктивно.

В подпространстве $X_{1,m-1}$ дополняем элементы

$$a_{1,m-1}^{(m)}, a_{2,m-1}^{(m)}, \cdots, a_{t_m,m-1}^{(m)}$$

элементами $a_1^{(m-1)}, a_2^{(m-1)}, \cdots, a_{t_{m-1}}^{(m-1)}$ до базиса $X_{1,m-1}$ над $X_{1,m-2}$. Это значит, что их общее число равно $\dim X_{1,m-1} - \dim X_{1,m-2}$ и никакая их линейная комбинация не лежит в $\dim X_{1,m-2}$. На каждый из построенных элементов $a_1^{(m-1)}, a_2^{(m-1)}, \cdots, a_{t_{m-1}}^{(m-1)}$ натягиваем башню, то есть образуем элементы

$$a_i^{(m-1)} = a_{i,m-1}^{(m-1)}, a_{i,m-2}^{(m-1)} = \left(\phi - \lambda_1 \varepsilon\right) a_{i,m-1}^{(m-1)},$$

$$a_{i,1}^{(m)} = \left(\phi - \lambda_1 \varepsilon\right) a_{i,2}^{(m-1)} \quad i = 1, 2, \cdots, t_{m-1}$$

В дополнение к уже имеющимся t_m башням высоты m получили t_{m-1} башню высоты m-1.

В подпространстве $X_{1,m-2}$ дополняем элементы

$$a_{1,m-2}^{(m)}, a_{2,m-2}^{(m)}, \cdots, a_{t_m,m-2}^{(m)}; a_{1,m-2}^{(m-1)}, a_{2,m-2}^{(m-1)}, \cdots, a_{t_{m-1},m-2}^{(m-1)}$$

элементами $a_1^{(m-2)}, a_2^{(m-2)}, \cdots, a_{t_{m-2}}^{(m-2)}$ базиса $X_{1,m-2}$ над $X_{1,m-3}$. Это значит, что их общее число равно $\dim X_{1,m-2} - \dim X_{1,m-3}$ и никакая их линейная комбинация не лежит в $X_{1,m-3}$. На каждый из вновь построенных элементов натягиваем башню и т.д.

Процесс заканчивается дополнением элементов

$$a_{1,1}^{(m)}, a_{2,1}^{(m)}, \cdots, a_{t_m,1}^{(m)}; a_{1,2}^{(2)}, a_{2,2}^{(2)}, \cdots, a_{t_2,2}^{(2)}$$

до базиса всего X_1. Получаем элементы $a_{1,1}^{(1)}, \cdots, a_{t_1,1}^{(1)}$.

Выпишем теперь в одну строку последовательно элементы сначала первой башни высоты m, затем второй башни высоты m и т.д., к ним припишем последовательно элементы сначала первой башни высоты m — 1, затем второй башни высоты m — 1 и т.д. Наконец, к ним припишем элементы башен высоты 1, то есть элементы $a_{1,1}^{(1)}, \cdots, a_{t_1,1}^{(1)}$ Так выписанные элементы в указанном порядке образуют так называемый базис Жордана пространства X_1. Матрица оператора ϕ, суженного на X_1. в этом базисе является клеточно-диагональной матрицей $k_1 \times k_1$. У этой матрицы столько же клеток, сколько башен имеется в базисе Жордана, их число равно размерности пространства собственных векторов, соответствующих λ_1. Размерность каждой клетки равна высоте соответствующей башни. И, наконец, каждая клетка размерности r имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Базис Жордана всего пространства V получается объединением базисов Жордана всех подпространств $X_1, X_2, \dots, X_S$.

Задача 1. Пусть V - пространство строк длины три, $K = C$. Заданы операторы $\phi : V \to V, \varphi : V \to V, \theta : V \to V$ следующими формулами

$$\begin{aligned}
&\phi(x) = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3),\\
&\psi(x) = (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2),\\
&\Theta(x) = (x_2^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3),
\end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$.

Выяснить, какие из указанных операторов являются линейными.

Решение. Пусть $x' = (x_1', x_2', x_3') \in V$, $\lambda \in C$. Проверим выполнение условий определения 2.2 для операторов ϕ, φ, θ:

$$\begin{aligned}
&\phi(x + x') = \phi(x) + \phi(x')\\
&\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)\\
&\psi(x + x') = \psi(x) + \psi(x')\\
&\psi(\lambda x) \neq \lambda\psi(x)\\
&\Theta(x + x') \neq \Theta(x) + \Theta(x').
\end{aligned}$$

Таким образом видно, что оператор является линейным, а операторы φ и θ таковыми не являются.

Задача 2. Пусть V пространство строк длины три, $K = C$. Заданы операторы $\phi : V \to V, \varphi : V \to V$ следующими формулами

$$\begin{aligned}
&\phi(x) = (x_1 + x_2, x_3, x_2 - x_3),\\
&\psi(x) = (2x_2, x_3, x_1),
\end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$.

Найти $(2\psi - 3\phi^2)(x)$.

Решение. Для вычисления значения указанного оператора воспользуемся определениями действий с операторами 2.6 и 2.7 :

$$\begin{aligned}
&(2\psi - 3\phi^2)(x) = 2\psi(x) - 3\phi(\phi(x)) =\\
&= (x_2 - 3x_1 - 3x_3, 5x_3 - 3x_2, 2x_1 + 3x_2 - 6x_3).
\end{aligned}$$

Проверьте самостоятельно, что тот же результат получится, если для решения этой задачи воспользоваться замечанием 2.9.

Задача 3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$), образ и ядро оператора проектирования на плоскость

$$\alpha : x - \sqrt{3}y = 0.$$

Решение. В качество пространства *V* возьмем R^3, *К* = *R*. Введем в R^3 базис из трех векторов υ_1,υ_2 и υ_3, причем в качестве υ_1 и υ_2 возьмем два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости α, а в качестве υ_3 — нормаль к этой плоскости. Тогда υ_3 в базисе $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ будет иметь координаты $(1, -\sqrt{3}, 0)$, т.е. $\upsilon_3 = \bar{i} - \sqrt{3}\bar{j}$.

Заметим, что плоскость α содержит ось О*z*, следовательно, в качестве υ_2 можно взять орт $\bar{k}$. В качестве вектора υ_1 можно взять любой вектор, неколлинеарный $\bar{k}$ и ортогональный вектору нормали к плоскости α, т.е. к вектору υ_3. Таким вектором будет, например, вектор $\upsilon_1 = \sqrt{3}\bar{j} + \bar{i}$. Векторы $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3$ образуют базис пространства R^3, который будем называть "новым", в отличие от "старого" базиса $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$. Любой вектор $\bar{r} \in R^3$ может быть разложен по "новому" базису :

$$\bar{r} = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3.$$

Пусть $\rho : R^3 \to R^3$ — оператор проектирования на плоскость *a*. Тогда он действует по формуле[1]

$$\rho\bar{r} = r_1 v_1 + r_2 v_2.$$

Для нахождения матрицы P_ρ оператора ρ в "старом" базисе найдем сначала, в соответствии с 2.12, матрицу P'_ρ оператора ρ в "новом" базисе, матрицу *T* перехода от "старого" базиса к "новому" и ей обратную матрицу T^{-1}.

Приступим к нахождению матрицы P'_ρ. Для этой цели (см. 2.5) вычислим значения оператора ρ на базисных векторах $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3$ Имеем

$$\rho v_1 = v_1; \rho v_2 = v_2; \rho v_3 = 0,$$

$$P'_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем разложения векторов "нового" базиса по "старому" базису :

$$v_1 = \sqrt{3}\bar{i} + \bar{j}$$
$$v_2 = \bar{k}$$
$$v_3 = \bar{i} - \sqrt{3}\bar{j}$$

Тогда

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{см.}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\rho = TP'_\rho T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем теперь $\ker\rho$. Для этого решаем матричное уравнение

$$P_\rho X = 0,$$

сводящееся к системе линейных однородных уравнений с матрицей коэффициентов P_ρ :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $x_2 = -\sqrt{3}x_1,\ x_3 = 0,$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Базис $\ker\rho$ состоит из одного вектора

$$v = \bar{i} - \sqrt{3}\bar{j}.$$

который является нормалью к плоскости α. $\mathrm{im}\rho$ — это сама плоскость α. В качестве базиса $\mathrm{im}\rho$ можно взять, например, линейно независимые векторы

$$v_1 = \sqrt{3}\bar{i} + \bar{j} \text{ и } v_2 = \bar{k}.$$

Задача 4. Пусть V — пространство многочленов P степени, $\leq n$ с вещественными коэффициентами, $K = R$.

$$\phi : V \longrightarrow V, \quad \phi(P) = \frac{d^2 P}{dx^2} + P.$$

Найти матрицу оператора ϕ *в* базисе $\{1, x, \cdots, x^n\}$, найти его собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

Решение. Для построения матрицы A_ϕ оператора ϕ в указанном базисе, найдем в соответствии с 2.5 разложения векторов $\phi(1), \phi(x), ..., \phi(x^n)$ по базису $\{1, x, \cdots, x^n\}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= \frac{d^2(1)}{dx^2} + 1 = 1 \\
\phi(x) &= \frac{d^2(x)}{dx^2} + x = x \\
\phi(x^n) &= \frac{d^2(x^n)}{dx^2} + x^n = n(n-1)x^{n-2} + x^n,
\end{aligned}$$

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы A_ϕ стоят единицы, выше главной диагонали находится диагональ, состоящая из нулей, а на следующей стоят ненулевые элементы, причем в k-ой строке стоит число $k(k-1)$.

Для нахождения собственных чисел оператора ϕ решим алгебраическое уравнение $\det(A_\phi - \lambda E) = 0$ (см. 2.17). Имеем

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(1-\lambda)^{n+1} = 0$, $\lambda = 1$ — корень кратности (n + 1). Видим, что $\lambda = 1$ — вещественное число, т.е. собственное число матрицы A_ϕ является собственным числом оператора ϕ.

Найдем собственные векторы оператора ϕ, соответствующие найденному собственному числу $\lambda = 1$. Для этого решаем систему линейных однородных уравнений (2.16) при $\lambda = 1$.

$$A_\phi - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Две последние строчки матрицы состоят из нулей. Решая систему уравнений методом Гаусса, получаем

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = x_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственному числу $\lambda = 1$ соответствуют два линейно независимых собственных вектора с координатами

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. в пространстве многочленов степени, $\leq n$ собственными векторами оператора ϕ, соответствующими собственному числу $\lambda = 1$, являются два многочлена

$$P_1 = x^{n-1} \text{ и } P_2 = x^n.$$

Задача 5. В вещественном пространстве R^2 задан оператор ρ поворота на угол θ. Доказать, что в этом пространстве оператор ρ не имеет собственных чисел.

Решение. Составим матрицу оператора ρ в стандартном базисе $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ пространства R^2. Для этого (см. 2.5) зададим значения оператора ρ на базисных векторах

$$\rho(\bar{i}) = \bar{i}\cos\Theta + \bar{j}\sin\Theta, \rho(\bar{j}) = -\bar{i}\sin\Theta + \bar{j}\cos\Theta.$$

Тогда

$$P_\rho = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix},$$

где P_p — матрица оператора p.

Для нахождения собственных чисел оператора ρ решаем уравнение (см. 2.17) :

$$\det(P_\rho - \lambda E) = 0.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Мы видим, что матрица P_ρ имеет два комплексно сопряженных собственных числа

$$\lambda_1 = \cos\Theta + i\sin\Theta, \lambda_2 = \cos\Theta - i\sin\Theta.$$

Известно, что любая матрица имеет собственные числа, которые являются собственными числами соответствующего оператора только тогда, когда они принадлежат основному полю *K*. В данном случае λ_1 и λ_2 не принадлежат полю *R* вещественных чисел, т.е. не являются собственными числами оператора ρ. Таким образом доказано, что оператор ρ не имеет собственных чисел.

Задача 6. Найти жорданову форму матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. В качестве векторного пространства рассмотрим векторное пространство $V = C^3$ всех столбцов длины 3 с комплексными компонентами. В пространстве V действует оператор $\phi : V \to V$, определенный по формуле $\phi(X) = A \cdot X$, $X \in V$, A — данная матрица. Тогда A можно рассматривать как матриц оператора ϕ в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\phi(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 5e_1 + 6e_2 + 4e_3$$

$$\phi(e_2) = Ae_2 = -3e_1 - 4e_2 - 4e_3$$

$$\phi(e_3) = Ae_3 = 2e_1 + 4e_2 + 5e_3.$$

Мы видим, что столбцы данной матрицы A состоят из коэффициентов разложения векторов $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ по базису e_1, e_2, e_3. Следовательно, по определению A — матрица оператора ϕ в базисе e_1, e_2, e_3.

Ищем собственные числа оператора ϕ :

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-l & 4 \\ 4 & -4 & 5-l \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) - 96 + 8(4+\lambda) + 16(5-\lambda) + 18(5-\lambda) =$$

$$= -(\lambda+4)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) + 106 - 26\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda - 4\lambda^2 + 40\lambda - 100 + 106 - 26\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3.$$

Видим, что собственные числа оператора ϕ — простые и, следовательно, ϕ — оператор простой структуры.

В базисе из собственных векторов оператор ϕ имеет диагональную матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

В данном примере не требуется находить сам базис из собственных векторов. Мы, однако, покажем, как это сделать.

Ищем все собственные векторы, соответствующие числу $\lambda_1 = 1$. Для этого решаем систему линейных уравнений

$$A \cdot X = \lambda_1 \cdot X, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ — столбец неизвестных.}$$

Матрица этой однородной системы равна

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение проводим методом Гаусса, приводя матрицу системы элементарными преобразованиями к трапециевидной форме.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{cases} x_1 & = x_3 \\ x_2 & = 2x_3 \end{cases}.$$

Следовательно, все собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$. имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и получаются из одного вектора $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ умножением на произвольное число x_3. Обращаясь к геометрической интерпретации столбцов как радиус-векторов, исходящих из общего начала координат, мы видим, что все собственные векторы, соответствующие числу $\lambda_1 = 1$, лежат на прямой, проходящей через начало координат параллельно вектору $X_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Мы можем сказать так же, что размерность подпространства собственных векторов, соответствующих числу $\lambda_1 = 1$, равна единице, и вектор $a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ является базисом этого подпространства.

Аналогично находим все собственные векторы, соответствующие $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$.

$\lambda_2 = 2$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\6 & -6 & 4\\4 & -4 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\0 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2. \end{cases}$$

Все собственные числа, соответствующие $\lambda_2 = 2$, имеют вид

$$\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\0\end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, базис подпространства собственных векторов, соответствующих числу $\lambda_2 = 2$, состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2.$

$\lambda_3 = 3.$

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}x_3 & = x_1 \\ x_2 & = x_3 \end{cases}.$$

Все собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_3 = 3$, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Базис пространства собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda_3 = 3$, состоит из одного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a_3.$

Таким образом, собственные векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют новый базис пространства V. Матрица T перехода от старого базиса к новому равна

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим, наконец, равенство $J = T^{-1}AT$. Это последнее равенство равносильно, очевидно,равенству

$$TJ = AT,$$

в справедливости которого мы сейчас убедимся.

$$TJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AT = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуемое равенство $TJ = AT$ проверено. Задача 6 решена.

Задача 7. Найти жорданову форму J матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

и матрицу T так, чтобы $J = T^{-1}AT$

Решение. В качестве векторного пространства $V = C^3$ рассмотрим векторное пространство всех столбцов длины три с комплексными компонентами. В пространстве V рассмотрим оператор $\phi : V \to V$, действующий по формуле

$$\phi(X) = A \cdot X, X \in V, A \text{ — данная матрица.}$$

Тогда матрица A является матрицей оператора ϕ в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Проверьте это самостоятельно аналогично тому, как это сделано в задаче 6 !

Ищем собственные числа матрицы A

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(7-\lambda 0)(19+\lambda)(13-\lambda) - 1440 - 1440 - 72(-19-\lambda) +$$

$$+ 240(7-\lambda) + 120(13-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -\lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1;$$

Найдем все собственные векторы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ соответствующие собственному числу λ = 1, кратность которого равна двум. Поступаем так же, как и в задаче 6.

$$\lambda = 1. \quad \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2x_2 - x_3.$

Получим, что все собственные вектора, соответствующие числу $\lambda=1$, имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Все эти векторы суть линейные комбинации двух векторов $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ которые линейно независимы. Следовательно, векторы a_1 и a_2 образуют базис подпространства собственных векторов, соответствующих числу λ = 1. Видим, что размерность этого подпространства равна двум и совпадает с кратностью числа $\lambda=1$ как корня характеристического многочлена.

$$\lambda = -1. \quad \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{5}{6}x_3 \end{cases}.$$

Аналогично получаем, что любой собственный вектор, соответствующий собственному числу λ = -1, имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{5}{6}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

И получается умножение вектора $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ на произвольное число.

Весь базис пространства можно получить, взяв собственные векторы a_1, a_2, a_3. В этом базисе матрица оператора ϕ имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, чтобы найти матрицу оператора ϕ в базисе a_1, a_2, a_3 надо записать вектор $\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3)$ в в базисе a_1, a_2, a_3. Но векторы a_1, a_2, a_3 — собственные, поэтому

$$\begin{aligned} \phi(a_1) &= a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ \phi(a_2) &= a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \\ \phi(a_3) &= a_3 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 \end{aligned}$$

Теперь коэффициенты первого из этих равенств помещаем в первый столбец, коэффициенты второго равенства — во второй, а третьего -— в третий. Тогда получаем матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В качестве проверки проведенных вычислений найдем матрицу T перехода от базиса еье2,вз к базису Жордана e_1, e_2, e_3 проверим равенство $J = T^{-1}AT$. Имеем

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$TJ = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AT = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Правильность решения проверена.

Задача 8. Найти жорданову форму J матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

и матрицу T так, чтобы $J = T^{-1}AT$.

Решение. В качестве векторного пространства V возьмем векторное пространство всех столбцов длины три с комплексными компонентами. В пространстве V рассмотрим оператор $\phi : V \to V$, действующий по формуле $\phi(X) = A \cdot X,\ X \in V$. Тогда матрица A является матрицей оператора ϕ в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(Проверьте это самостоятельно !)

Ищем собг'гвенпые числа матрицы -4

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda - 1)^4.$$

Итак, $\lambda = 1$ собственное число оператора ϕ кратности 4.

Найдем все собственные векторы $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ оператора ϕ, соответствующие числу $\lambda = 1$ (см. 2.16 и решение задачи 6).

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 & = 3x_4 \\ x_2 & = x_4 \end{cases}; \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_4 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что любой собственный вектор есть линейная комбинация двух векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые линейно независимы. Следовательно, размерность подпространства X собственных векторов, соответствующих числу $\lambda = 1$ равна двум и меньше, чем кратность числа $\lambda = 1$ как корня характеристического многочлена, равная четырем. Поэтому базис Жордана будет содержать не только собственные вектора оператора ϕ.

Согласно изложенным выше указаниям по построению базиса Жордана (2.19 и ниже) , находим базисы подпространств

$$\ker(\phi - \epsilon), \ker(\phi - \epsilon)^2, \ker(\phi - \epsilon)^3, \ker(\phi - \epsilon)^4.$$

Базис: пространства, собственных векторов состоит из двух векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем базис подпространства $\ker(\phi-\varepsilon)^2$. Для этого вычисляем матрицу $(A-E)^2$ и находим все столбцы, которые при умножении на эту матрицу обращаются в нулевой столбец.

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса решаем систему линейных однородных уравнений с матрицей $\ker(\phi-\varepsilon)^2$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad x_1 = -3x_2 + 6x_4.$$

Получаем, что подпространство $\ker(\phi-\varepsilon)^2$ состоит из всех столбцов

Видим, что векторы

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 + 6x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

являются базисом подпространства $\ker(\phi-\varepsilon)^2$.

Найдем базис подпространства $\ker(\phi-\varepsilon)^2$.

$$(A-E)^3 = (A-E)^2(A-E) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что оператор $\ker(\phi-\varepsilon)^3$ — нулевой, следовательно, он деревodит любой элемент из V в нулевой элемент. Поэтому $\ker(\phi-\varepsilon)^2 = V = C^4$ и в качестве базиса пространства $\ker(\phi-\varepsilon)^3$ могут быть взяты столбцы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дополним базис пространства $\ker(\phi-\varepsilon)^2$ до базиса $\ker(\phi-\varepsilon)^3$. С этой целью составим матрицу, строками которой являются b_1, b_2, b_3

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и посмотрим, какой из столбцов e_1, e_2, e_3, e_4 надо приписать к этой матрице в качестве четвертой строки, чтобы ранг полученной матрицы был равен четырем. Видим, что таким столбцом является, например, e_1 (выбор здесь неоднозначен !) Итак, столбец e_1 лежит в $\ker(\phi-\varepsilon)^3$, но не лежит в $\ker(\phi-\varepsilon)^2$. Натягиваем башню на элемент e_1, то есть строим последовательность элементов

$$e_1, (\phi-\epsilon)e_1, (\phi-\epsilon)^2 e_1.$$

Обозначим для удобства элементы башни буквами c_1, c_2, c_3

$$c_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = (\phi-\epsilon)c_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = (\phi-\epsilon)c_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выясним теперь, существуют ли элементы, лежащие в $\ker(\phi-\varepsilon)^2$, но не лежащие в $\ker(\phi-\varepsilon)$. Сравнивая размерности этих подпространств ($\dim\ker(\phi-\varepsilon)^2 = 3$, $\dim\ \ker(\phi-\varepsilon) = 2$). видим, что такие элементы существуют и к $\ker(\phi-\varepsilon)$ надо добавить всего один элемент, чтобы получить $\dim\ker(\phi-\varepsilon)^2$. Один такой элемент мы уже знаем — это c_2. Действительно.

$$(\phi-\epsilon)^2 c_2 = (\phi-\epsilon)^2 c_2 = 0,$$

однако

$$(\phi-\epsilon) c_2 = (\phi-\epsilon)^2 c_1 = c_3 \neq 0,$$

и $c_3 \in \ker(\phi-\varepsilon)$. Итак, других элементов в $\ker(\phi-\varepsilon)^2$, линейно независимых с c_2 над $\ker(\phi-\varepsilon)$, не существует.

Таким образом, башен высоты ровно два не существует и мы переходим к нахождению башен высоты 1.

Процесс повторяется. Мы уже знаем, что $\dim\ \ker(\phi-\varepsilon) = 2$ и элементы

$$a_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

образуют базис $\ker(\phi-\varepsilon)$. Один элемент из $\ker(\phi-\varepsilon)$ мы знаем — это $c_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\end{pmatrix}$ Ясно, что два элемента c_3 и a_1 образуют базис подпространства $\ker(\phi-\varepsilon)$. Обозначим для удобства $c_4 = a_1$. На c_4 натянута башня высоты 1. Базис Жордана образован четырьмя векторами

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

Удобно представлять себе векторы Жордана расположенными так, как показано на следующем рисунке :

$$\begin{array}{cccc} c_1 & * & & \\ c_1 & * & & \\ c_1 & * & * & c_4 \end{array}$$

Векторы c_1, c_2, c_3 образуют башню высоты три. На первом, самом нижнем "этаже", находятся два вектора c_3 и c_4, что соответствует тому, что эти два вектора образуют базис $\ker(\phi - \varepsilon)$. На "втором этаже" находится один вектор c_2, что соответствует тому, что в $\ker(\phi - \varepsilon)^2$ существует только один вектор, линейно независимый над $\ker(\phi - \varepsilon)$. И, наконец, на верхнем "третьем этаже" располагается один вектор c_1, что соответствует тому, что имеется один вектор, именно c_1, лежащий в $\ker(\phi - \varepsilon)^3$ и линейно независимый над $\ker(\phi - \varepsilon)^2$.

Найдем матрицу оператора ϕ в базисе Жордана c_1, c_2, c_3, c_4. Для этого вычислим $\phi(c_1), \phi(c_2), \phi(c_3), \phi(c_4)$.

Имеем $(\phi - \varepsilon)c_1 = c_2$, следовательно, $\phi(c_1) - c_2 = c_2$, откуда находим

$$\phi(c_1) = c_1 + c_2.$$

Аналогично, $(\phi - \varepsilon)c_2 = c_3$, значит, $\phi(c_2) - c_2 = c_3$, откуда

$$\phi(c_2) = c_2 + c_3.$$

И, наконец, $(\phi - \varepsilon)c_3 = 0$, откуда получаем

$$\phi(c_3) = c_3.$$

Запишем подробно полученные разложения :

$$\begin{aligned}
\phi(c_1) &= 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 + 0 \cdot c_4 \\
\phi(c_2) &= 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 0 \cdot c_4 \\
\phi(c_3) &= 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 0 \cdot c_4 \\
\phi(c_4) &= 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 + 1 \cdot c_4.
\end{aligned}$$

Следовательно, матрица оператора ϕ в базисе c_1, c_2, c_3, c_4 имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный результат. Для этого найдем матрицу T перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3, e_4 новому базису c_1, c_2, c_3, c_4

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим равенство $J = T^{-1}AT$, что равносильно $TJ = AT$.

$$TJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка закончена. Задача полностью решена.

Задача 9. Линейное преобразование ϕ пространства C^4 в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти базис f_1, f_2, f_3, f_4 котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму J и найти эту жорданову форму.

Решение. Ищем собственные числа оператора ϕ.

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13-\lambda & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11-\lambda & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -9 & 5 & \lambda-2 \\ 7 & -13-\lambda & 8 & 0 \\ 8 & -17 & 11-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -11 & 6 \\ 7 & -13-\lambda & 8 \\ 8 & -17 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4) = (\lambda-2)^3(\lambda-1).$$

Получили два собственных числа : $\lambda_1 = 1$ кратности один и $\lambda_2 = 2$ кратности три.

Найдем собственные векторы, соответствующие числу $\lambda_1 = 1$. Для этого решаем методом Гаусса систему линейных однородных уравнений $(A - E)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -14 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 10 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 & = 3x_4 \\ x_2 & = 6x_4 \\ x_3 & = 7x_4 \end{cases}.$$

Все собственные вектора, соответствующие числу $\lambda_1 = 1$, имеют вид

$$X = x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базис пространства собственных векторов, соответствующих числу $\lambda_1 = 1$, состоит из одного вектора

$$f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем все собственные вектора, соответствующие собственному числу $\lambda_2 = 2$. Для этого решаем методом Гаусса систему линейных однородных уравнений $(A - 2E)X = 0$.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что любой собственный вектор *X*, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 2$, является линейной комбинацией двух векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которые линейно независимый, следовательно, образуют базис пространства собственных векторов, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 2$. Замечаем, кроме того, что число элементов в этом базисе меньше кратности числа $\lambda_2 = 2$ как корня характеристического многочлена (которая равна трем). Таким образом, в пространстве $V = C^4$ нет базиса из собственных векторов нашего оператора ϕ. Оператор ϕ не является оператором простой структуры.

Найдем теперь базис пространства $\ker(\phi - 2\varepsilon)^2$. Для этого решаем методом Гаусса систему линейных однородных уравнений

$$(A - 2E)^2 X = 0.$$

Базисом пространства $\ker(\phi-2\varepsilon)^2$ являются столбцы

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

и dim $\ker(\phi-2\varepsilon)^2 = 3$. Итак, размерность пространства $\ker(\phi-2\varepsilon)^2$ совпадает с кратностью $\lambda_2 = 2$ как корня характеристического многочлена. Приступаем к построению башен Жордана. Для этого найдем столбец, принадлежащий $\ker(\phi-2\varepsilon)^2$ и не принадлежащий $\ker(\phi-2\varepsilon)$. Это можно легко сделать, так как базисы обоих подпространств уже найдены. Мы видим, что $a_2 = b_3$ и $b_1 + b_2 = a_1$. Элемент b_1 принадлежит $\ker(\phi-2\varepsilon)^2$ и не принадлежащий $\ker(\phi-2\varepsilon)$ (если $b_1 \in \ker(\phi-2\varepsilon)$, то $b_2 = a_1 - b_1 \in \ker(\phi-2\varepsilon)$ и мы получаем $\ker(\phi-2\varepsilon) = \ker(\phi-2\varepsilon)^2$, что невозможно). На элемент b_1 натягиваем башню $: b_1, (\phi-2\varepsilon)b_1$. Обозначим

$$f_2 = b_1,$$

$$f_3 = (\phi - \epsilon)b_1; \quad f_3 = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дополним теперь элемент $f_3 \in \ker(\phi-2\varepsilon)$ до базиса всего пространства $\ker(\phi-2\varepsilon)$. Для этого заметим, что $f_3 = -a_1$. Поэтому базисом пространства $\ker(\phi-2\varepsilon)$ являются., например, элементы f_3 и f_4. На f_4 натянута башня высоты один.

Базис Жордана состоит из построенных столбцов

$$f_1, f_2, f_3, f_4.$$

Найдем матрицу оператора ϕ в этом базисе. Для этого вычислим элементы $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3), \phi(f_3)$. f_1 - собственный вектор оператора ϕ, соответствующий числу $\lambda = 1$. поэтом

(1) $$\phi(f_1) = 1 \cdot f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4.$$

Чтобы найти , $\phi(f_1)$ надо вспомнить, как определялись элементы башни, натянутой на f_2. Мы полагаем $(\phi-\varepsilon)f_2=f_3$ Отсюда $\phi(f_2)-2f_2=f_3$ и, следовательно, получаем искомое равенство

(2) $$\phi(f_2) = 2f_2 + f_3 = 0 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4.$$

Для вычисления $\phi(f_3)$ мы замечаем, что f_3 — собственный вектор ϕ, поэтому

(3) $$\phi(f_3) = 2f_3 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 + 0 \cdot f_4.$$

Аналогично, f_4 — собственный вектор оператора ϕ, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 2$, поэтому

(4) $$\phi(f_4) = 2f_4 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4.$$

Равенства (1), (2), (3), (4) позволяют выписать матрицу J оператора ϕ в базисе Жордана f_1, f_2, f_3, f_4

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица J — это жорданова форма матрицы А. Мы видим, что матрица J — это блочно-диагональная матрица. Квадратные блоки, стоящие по диагонали, называются "клетками Жордана". Их число равно размерности пространства собственных векторов. Число строк (и столбцов) каждого блока равно высоте соответствующей башни Жордана. Так, блок (1) соответствует башне высоты один, натянутой на собственный вектор f_1. Блок

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует башне высоты два, натянутой на векторы f_2 и f_3. Блок (2) соответствует башне высоты один, натянутой на собственный вектор f_4.

Удобно представлять себе расположение базисных векторов f_1, f_2, f_3, f_4 в виде следующей схемы

$$\begin{array}{ccc} & f_2 & \\ & * & \\ * & * & * \\ f_1 & f_3 & f_4 \end{array}$$

Здесь векторы f_1, f_2, f_3 расположены на "первом этаже", что соответствует тому, что они принадлежат $\ker(\phi - \lambda_i \varepsilon)$ при i = 1,2. Вектор f_2 расположен на "втором этаже", что соответствует тому, что $f_2 \in \ker(\phi - 2\varepsilon)^2$ и f_2 не принадлежат $\ker(\phi - 2\varepsilon)$.

Проверим наши вычисления. Для этого найдем матрицу T перехода от базиса e_1, e_2, e_3, e_4 к базису f_1, f_2, f_3, f_4 и убедимся в справедливости равенства

$$J = T^{-1}AT.$$

Столбцами матрицы T являются столбцы f_1, f_2, f_3, f_4. Поэтому

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки равенства $J = T^{-1}AT$ достаточно вычислить матрицы TJ и AT и убедится в том, что они равны.

$$TJ = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & -2 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AT = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & -2 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $TJ = AT$. Задача полностью решена.

§3 **Унитарное и евклидово пространства.**

Определение 3.1. Линейное пространство V над полем комплексных чисел C называется унитарным (или комплексным евклидовым), если выполнены следующие два требования :

1. Имеется правило, посредством которого двум элементам x, y этого пространства ставится в соответствие комплексное число, на зываемое их скалярным произведением и обозначаемое символом (x,y).
2. Это правило подчинено следующим аксиомам :

   1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$
   2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
   3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
   4) (x,x) — есть вещественное неотрицательное число, равное нулю лишь при условии $x = 0$.

Из аксиом 1-3 следует, что

$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$;

$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

Аналогично определяется понятие евклидова пространства.

Определение 3.2. Линейное пространство V над полем R вещественных чисел называется евклидовым, если выполнены следующие два требования :

1. Имеется правило, которое двум элементам x, y этого пространства ставит в соответствие вещественное число, называемое их скалярным произведением и обозначаемое символом (x, y).
2. Это правило подчинено следующим аксиомам :

   1) $(x,y) = (y,x)$
   2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
   3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
   4) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Определение 3.3. Два элемента x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Пусть далее V -— унитарное пространство. Для любых двух элементов x и у этого пространства имеет место следующее неравенство :

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)\cdot(y,y), \tag{3.4}$$

называемое неравенством Коши-Буняковского. Аналогичное неравенство справедливо также и для евклидова пространства V.

Определение 3.5. Линейное пространство V над полем K называется нормированным, если выполнены следующие два требования :

1. Имеется правило, согласно которому любому элементу x этого пространства ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой этого элемента, и обозначаемое символом $\|x\|$.
2. Указанное правило удовлетворяет трем аксиомам :

   1) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

   2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x,y\|$, где $\lambda \in K$ произвольное число, x — любой элемент из V.

   3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых двух элементов х и у из У (неравенство треугольника).

Пусть V — унитарное пространство со скалярным произведением (x,y), $x,y \in V$. Пространство V можно сделать нормированным, если положить

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}. \tag{3.6}$$

Можно показать, что при таком определении будут выполнены аксиомы 1-3.

Замечание 1. Аналогичным образом вводится норма и в евклидовом пространстве V.

Определение 3.7. Будем говорить, что m элементов унитарного (или евклидова) пространства V образуют ортонормированную систему элементов этого пространства, если

1) любые два элемента e_i и e_j при $i \neq j$ ортогональны, т.е. $(e_i, e_j) = 0$ и

2) норма любого элемента этой системы равна 1, т.е. $\|e_i\| = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$.

Можно показать, что элементы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, удовлетворящие условиям 1, 2 линейно независимы.

Пусть далее $f_1, f_2, \ldots, f_m$ линейно независимых элементов унитарного (или евклидова) пространства V. Существует алгоритм, позволяющий по этим элементам сконструировать ортогональную систему элементов $g_1, g_2, \ldots, g_m$ пространства V: полагаем $g_1 = f_1$. Если уже построены $g_1, g_2, \ldots, g_k$, все ортогональные между собой, $g_{k+1} = f_{k+1} - \mu_1 g_1 - \mu_2 g_2 - \cdots - \mu_k g_k$ и коэффициенты $\mu_1, \cdots, \mu_k$ находим из условий

$$(g_{k+1}, g_1) = (g_{k+1}, g_2) = \cdots = (g_{k+1}, g_k) = 0.$$

Этот алгоритм обычно называется процессом ортогонализации линейно независимых элементов $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Пусть в n-мерном унитарном (или евклидовом) пространстве V задан произвольный базис $\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n$. Применив к нему процесс ортогонализации и нормировав полученный базис, мы всегда можем образовать ортонормированный базис $e_1, e_2, \cdots, e_n$ пространства V.

Пусть вектор x имеет в этом базисе координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, а вектор y — координаты $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ т.е.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n.$$

Тогда

1) $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ и

2) $x_i = (x, e_i)$ для любого $i = 1, 2, \cdots, n$.

Отсюда следует, что

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{3.9}$$

Таким образом, свойства произвольного ортонормированного базиса унитарного (евклидова) пространства аналогичны свойствам декартова прямоугольного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Определение 3.10. Совокупность F всех элементов унитарного (евклидова) пространства V, ортогональных к любому элементу x подпространстве G этого пространства, называется ортогональным дополнением подпространства G. Можно доказать, что всякое унитарное (евклидово) пространство V раскладывается в прямую сумму любого своего подпространства G и его ортогонального дополнения F, т.е.

$$V = G \oplus F. \tag{3.11}$$

Определение 3.12. Два унитарных (евклидовых) пространства V и V' называются изометричными, если существует отображение такое, что $\phi : V \to V'$ — изоморфизм векторных пространств V и V и, во-вторых, для любых x и y выполнено равенство $(x,y)_V = (\phi(x), \phi(y))_{V'}$ Отображение ϕ с указанными свойствами называется изометрией. Имеет место следующая

Теорема 3.13. *Dec унитарные, (евклидовы) пространства одной и той Dice размерности изометричны.*

Определение 3.14. Пусть V унитарное или евклидово пространство. Оператор ϕ^* из $L(V,V)$ называется сопряженным к линейному оператору $\phi \in L(V,V)$, если для любых элементов x и y из V выполнено соотношение

$$(\phi(x), y) = (x, \phi^*(y)).$$

Легко проверить, что так определенный оператор ϕ^* сам является линейным оператором. Имеют место следующие свойства сопряженных операторов :

1. Каждый линейный оператор ϕ имеет единственный сопряженный. Пусть оператору ϕ в некотором ортонормированном базисе соответствует матрица A_ϕ. Тогда оператору ϕ^* в том же базисе будет соответствовать матрица $\bar{A}^T$.

2. $E^* = E$, E — тождественный оператор.

3.

$$(\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^*. \tag{3.15}$$

4. $(\lambda\phi)^* = \overline{\lambda}\phi^*$, $\phi \in L(V,V)$ (В случае евклидова пространства $(\lambda\phi)^* = \lambda\phi^*$).

5. $(\phi^*)^* = \phi$.

6. $(\phi\psi)^* = \psi^*\phi^*$.

Определение 3.16. Линейный оператор ϕ из $L(V,V)$ называется самосопряженным, если справедливо равенство

$$\phi^* = \phi.$$

Свойства самосопряженного оператора :

1. Матрица A самосопряженного оператора ϕ в ортонормированном базисе удовлетворяет соотношению $A_\phi^T = \overline{A}_\phi$.
2. Если ϕ — самосопряженный оператор, то для любого элемента $x \in V$ скалярное произведение $(\phi(x), x)$ — вещественное число.
3. Собственные числа самосопряженного оператора вещественны.
4. Собственные векторы, отвечающие различным собственным числам самосопряженного оператора, ортогональны. (3.17)

Кроме того, справедлива следующая

Теорема 3.18. *Пусть ϕ самосопряженный оператор, а M и m — точные верхняя и нижняя границы функции $(\phi(x), x)$ на множестве $\|x\| = 1$. Эти числа представляют собой наибольшее и наименьшее собственные числа оператора ϕ.*

Пусть V — унитарное пространство.

Определение 3.19. Линейный оператор ϕ из $L(V,V)$ называется унитарным, если для любых элементов x и y из V справедливо соотношение

$$(\phi(x), \phi(y)) = (x, y).$$

Замечание 2. Если V - евклидово пространство, то оператор ϕ, определенный равенством $(\phi(x), \phi(y)) = (x, y)$, называется ортогональным.

Замечание 3. Из определения (3.19) и формулы (3.6) следует, что для унитарного (ортогонального) оператора ϕ имеет место равенство $\|\phi(x)\| = \|x\|$ для любого вектора $x \in V$. Если λ — собственное число унитарного оператора ϕ, то $|\lambda| = 1$ (в случае ортогонального оператора $\lambda = \pm 1$).

Имеет место следующая

Теорема 3.20 *Для того, чтобы линейный оператор ϕ был унитарным (ортогональным), необходимо и достаточно, чтобы $\phi^* = \phi^{-1}$.*

Определение 3.21. Квадратная матрица U с комплексными элементами называется унитарной, если выполняется соотношение

$$U^*U = UU^* = E,$$

где U^* — эрмитово сопряженная матрица, т.е. $U^* = \bar{U}^T$

Определение 3.22. Квадратная матрица U с вещественными элементами называется ортогональной, если

$$U^TU = UU^T = E.$$

Пусть в унитарном (евклидовом) пространстве выбран и зафиксирован ортонормированный базис $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Тогда матрица A_ϕ унитарного ортогонального оператора ϕ в этом базисе будет унитарной (соответственно, ортогональной). Обратно, любая унитарная (ортогональная) матрица $U = (u_{ij})$ задает унитарный (соответственно, ортогональный) оператор ϕ. Этот оператор определен своим действием на элементы выбранного базиса. Именно,

$$\phi(e_i) = u_{1i}e_1 + u_{2i}e_2 + \cdots + u_{ni}e_n,$$

где $u_{1i}, u_{2i}, \cdots, u_{ni}$ - элементы i-го столбца матрицы U.

Задача 1. Пусть $V = P_4$ - пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степень которых не превосходит четырех (см. задачу 4 §1). Определим скалярное произведение многочленов *f(x)* и *g(x)* формулой

$$(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(g)dx \tag{3.23}$$

К базису 1, x, x^2, x^3, x^4 пространства V применить процесс ортогонализации. Проверить, что полученные при этом многочлены отличаются от соответствующих многочленов Лежандра лишь постоянными множителями (многочленами Лежандра называются следующие Многочлены $l_0(x) = 1,\ l_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right]$, k=1,2,3,$\cdots$. Они используются, например, при решении задач математической физики).

Решение. Вычислим многочлены Лежандра $l_k(x)$, k = 0,1,2,3,4.

$$l_0(x) = 1$$
$$l_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2 - 1) = x$$
$$l_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}[(x^2-1)^2] = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$l_3(x) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3] = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x$$
$$l_4(x) = \frac{1}{2^4 4!}\frac{d^4}{dx^4}[(x^2-1)^4] = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.$$

Применим теперь процесс ортогонализации к базисным векторам $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = x^3, f_5 = x^4$, пространства V. Воспользуемся формулами (3.8). Они позволяют последовательно находить векторы $g_1, g_2, \cdots, g_5$ нового базиса пространства V, которые будут ортогональны между собой. Тогда $g_1 = f_1 = 1$. Найдем $g_2 = f_2 - \mu g_1$ где число μ определяется из условия $(g_1, g_2) = 0$. Подставляя сюда выражение для g_2 и пользуясь линейностью скалярного произведения, получим

$$0 = (g_2, g_1) = (f_2, g_1) - \mu(g_1, g_1).$$

Следовательно, $\mu = \dfrac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$ Вычислим $(f_2, g_1) = \int\limits_{-1}^{1} x dx = 0$. Итак, $\mu = 0$ и $g_2 = f_2 = x$.

Найдем g_3. По формулам (3.8) ищем элемент g_3 в виде $g_3 = f_3 - \mu_1 g_1 - \mu_2 g_2$, где числа μ_1 и μ_2 находим из условий $(g_3, g_1) = (g_3, g_2) = 0$, выражающих требование ортогональности g_3, g_1 и g_3, g_2. Подставляя вместо g_3 его выражение, получаем

$\mu_1 = \dfrac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} = \dfrac{1}{3}$, $\mu_2 = \dfrac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} = 0$, Окончательно, $g_3 = x^2 - \dfrac{1}{3}$ и $\|g_3\|^2 = \dfrac{8}{45}$.

Найдем элемент g_4. По формулам (3.8) ищем его в виде $g_4 = f_4 - \mu_1 g_1 - \mu_2 g_2 - \mu_3 g_3$ неопределенными коэффициентами μ_1, μ_2, μ_3. Из условий ортогональности $g_4, g_1; g_4, g_2; g_4, g_3$ получаем уравнения

$$(f_4, g_1) = \mu_1 \|g_1\|^2; (f_4, g_2) = \mu_2 \|g_2\|^2; (f_4, g_3) = \mu_3 \|g_3\|^2.$$

Скалярные произведения (f_4, g_i), $i = 1, 2, 3$, вычисляем по формуле (3.23). Окончательно получаем $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \dfrac{3}{5}$, $\mu_3 = 0$, $g_4 = x^3 - \dfrac{3}{5} x$ и $\|g_4\| = \dfrac{8}{175}$

Аналогичным образом получаем $g_4 = f_4 - \mu_1 g_1 - \mu_2 g_2 - \mu_3 g_3 - \mu_4 g_4$. Числа μ_i находим из уравнений $(f_5, g_5) = \mu_i \|g_i\|^2$, $i = 1, 2, 3, 4$. Вычисляя соответствующие интегралы, имеем $\mu_1 = \dfrac{1}{5}$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = \dfrac{6}{7}$, $\mu_4 = 0$; следовательно, $g_5 = x^4 - \dfrac{6}{7} x^2 + \dfrac{3}{35}$.

Сравнивая полученные многочлены с многочленами Лежандра, видим, что $l_0(x) = g_1(x)$, $l_1(x) = g_2(x)$, $l_2(x) = \dfrac{3}{2} g_3(x)$, $l_3(x) = \dfrac{5}{2} g_4(x)$, $l_4(x) = \dfrac{35}{8} g_5(x)$ Задача решена.

Задача 2. В пространстве $V = P_3$ многочленов от одной переменной *x с* вещественными коэффициентами степени, не превосходящей трех, задано скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x) dx. \tag{3.23}$$

В евклидовом пространстве *V* рассмотрим оператор ϕ, действующий по формуле

$$\phi(f) = \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{df}{dx} \right].$$

1) Доказать, что ϕ — самосопряженный оператор.

2) Найти спектр оператора ϕ: доказать, что ϕ — оператор простой структуры.

Решение. 1) Согласно (3.17). для проверки самосопряженности ϕ необходимо и достаточно составить матрицу оператора ϕ в ортонормированием базисе и убедиться в том, что она симметрична.

В предыдущей задаче был найден ортогональный базис g_1, g_2, g_3, g_4 пространства V. Нормируем элементы g_i, $i = 1,2,3,4.$. Элементы $e_i = \frac{g_i}{\|g_i\|}$, $i = 1,2,3,4$ образуют ортонормированный базис V.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x; e_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3}); e_4 = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(x^3 - \frac{3}{5}x).$$

Применяя к полиномам e_i, $i = 1,2,3,4$ оператор ϕ, убеждаемся в том, что матрица, A_ϕ оператора ϕ в этом базисе является диагональной

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

A_ϕ — симметрична, поэтому, по (3.17), ϕ — самосопряженный оператор.

2) Согласно (2.19), числа $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = -2;\ \lambda_3 = -6;\ \lambda_4 = 12$ являются собственными числами оператора ϕ. Все они различны и их число равно dimV. Поэтому, согласно (2.18), ϕ — оператор простой структуры. Векторы e_1, e_2, e_3, e_4 являются собственными векторами оператора ϕ, соответствующими собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Замечание 1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0. \tag{3.24}$$

Его можно переписать в виде $\phi(y) + \lambda y = 0$. Предыдущие рассуждения показывают, что полиномы e_1, e_2, e_3, e_4 являются решениями уравнения (3.14), так как e_i — собственный вектор оператора ϕ, соответствующий $(-\lambda_i)$, $\phi(e_i)+\lambda e_i = 0$. Вместе с ними являются решениями и полиномы Лежандра. которые, согласно предыдущей задаче, отличаются от соответствующих лишь постоянным множителем.

Замечание 2. Тот факт, что оператор ϕ — самосопряженный, можно проверить также другим способом. Именно, применяя формулу интегрирования по частям, непосредственно убеждаемся в справедливости равенства

$$(y_1, \phi(y_2)) = (\phi(y_1), y_2).$$

Подробнее об операторе ϕ, полиномах Лежандра и других специальных функциях см. В.И. Смирнов "Курс высшей математики" и А.К. Пономаренко "Специальные функции". Задача решена.

Задача 3. Пусть $V = R^3$ — пространство столбцов длины три с вещественными коэффициентами. Скалярное произведение введено по формуле

$$(X, Y) = X^T Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Интерпретируем V как трехмерное вещественное пространство. В пространстве V рассмотрим оператор ϕ поворота на угол α вокруг некоторой оси l, проходящей через начало координат. Найти оператор ϕ^*, сопряженный к оператору ϕ.

Решение. Выберем базис f_1, f_2, f_3 пространства V следующим образом. В качестве f_3 возьмем вектор единичной длины, идущий по оси l. Векторы f_1, f_2 возьмем ортогональными друг Другу и лежащими в плоскости, перпендикулярной к l и так, чтобы f_1, f_2, f_3 образовывали правую тройку. Получили ортонормированный базис. Оператор ϕ имеет в базисе f_1, f_2, f_3 матрицу

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, согласно (3.15). оператор ϕ^* имеет матрицу А.Т, транспонированную к матрице A_ϕ

$$A_\phi^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что матрица A_ϕ - это матрица оператора поворота вокруг оси l на угол ($-\alpha$). Таким образом, ϕ^* — это оператор поворота на угол α вокруг оси l. Задача решена.

Задача 4. Ортогональное преобразование $\phi: R^3 \to R^3$ задано в базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Найти канонический вид B матрицы A и ортогональную матрицу Q так, чтобы $B = Q^{-1}AQ$.

Решение.

1) Ищем собственные числа матрицы A.

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-\lambda & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\frac{3}{4}-\lambda)^2(\frac{1}{2}-\lambda) + \frac{3}{16} + \frac{6}{16}(\frac{3}{4}-\lambda) + \frac{6}{16}(\frac{3}{4}-\lambda) - \frac{1}{16}(\frac{1}{2}-\lambda) =$$

$$= (\frac{9}{16} - \frac{3}{2}\lambda + \lambda^2)(\frac{1}{2}-\lambda) + \frac{3}{16} + \frac{36}{64} - \frac{12}{16}\lambda - \frac{1}{32} + \frac{1}{16}\lambda =$$

$$= \frac{9}{32} - \frac{9}{16}\lambda - \frac{3}{4}\lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{23}{32} - \frac{11}{16}\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = -(\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda + 1) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

Собственными числами матрицы A являются числа

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Видим, что модули всех собственных чисел (как вещественных, так и комплексных) ортогональной матрицы A равны единице.

2) Рассмотрим векторное пространство $V = R^3$ всех столбцов длины 3 с вещественными коэффициентами. В пространстве V рассмотрим оператор $\phi: V \to V$, который задается равенством $\phi(x) = A \cdot X$.

В базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

оператор ϕ имеет матрицу A.

По определению V — векторное пространство над полем вещественных чисел, поэтому не все собственные числа матрицы A являются собственными числами оператора ϕ. Именно, $\lambda_1 = 1$ является собственным числом оператора ϕ, а $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ не являются собственными числами оператора ϕ. Причиной этому служит то обстоятельство, что умножение вещественного столбца на комплексное число дает столбец с комплексными компонентами, то есть выводит за пределы пространства $V = R^3$.

Найдем подпространство всех собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda_1 = 1$. Для этого решаем методом Гаусса систему линейных однородных уравнений $(A - E)X = 0$. Фундаментальная система решений этой системы дает нам базис искомого подпространства.

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} \\ 1 & -1 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_3 & = 0 \\ x_1 & = x_2 \end{cases}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итак, мы можем представлять себе подпространство собственных векторов, соответствующих числу $\lambda_1 = 1$, как совокупность радиус-векторов всех точек, лежащих на прямой, проходящей через начало с направляющим вектором

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось выше, собственные числа $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ являются собственными числами оператора ϕ нашего вещественного пространства $V = R^3$. Заметим, что если в качестве основного векторного пространства взять V= C^3 и определить в нем оператор $\tilde{\phi}: \tilde{V} \to \tilde{V}$ той же самой формулой $\tilde{\phi}(X) = A \cdot X$, то числа λ_2, λ_3 уже будут собственными числами оператора $\tilde{\phi}$. Это замечание мы сейчас используем для решения нашей изначальной задачи.
Поступим следующим образом. В пространстве V найдем вектор Z, который является базисным вектором пространства собственных векторов оператора $\tilde{\phi}$, соответствующих собственному числу $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ Элемент $Z \in \tilde{V}$ - это столбец длины три с комплексными компонентами. Разделяя в них вещественные и мнимые части, получаем равенство

$$Z = X_2 + iX_3,$$

где i — мнимая единица, X_2 и X_3 - столбцы с вещественными компонентами. Рассмотрим теперь линейную оболочку $L = L(X_2, X_3)$ векторов X_2 и X_3 в пространстве V, которую геометрически можно представить себе как плоскость, проходящую через начало координат O параллельно векторам X_2 и X_3.

Мы проверим, что, во-первых, плоскость L ортогональна вектору X_1 и, во-вторых, L является инвариантным подпространством относительно оператора ϕ. Подвергнем, если это окажется нужным, векторы X_2 и X_3 процессу ортогонализации. Полученные два вектора Y_2 и Y_3 занумеруем так. чтобы тройка векторов X_1, Y_2 и Y_3 была правой. Нормируем векторы X_1, Y_2 и Y_3

$$f_1 = \frac{1}{||X_1||} X_1; f_2 = \frac{1}{||Y_2||} Y_2; f_1 = \frac{1}{||Y_3||} Y_3.$$

Векторы f_1, f_2, f_3 образуют, очевидно, новый ортонормированный базис пространства V (старый базис — это векторы e_1, e_2, e_3). Наконец, мы проверим, что матрица оператора ϕ в базисе f_1, f_2, f_3 имеет требуемый канонический вид.

Приступаем к реализации предложенного плана. Найдем ненулевой вектор $Z \in C^3$, удовлетворяющей равенству

$$A \cdot Z = \lambda_2 Z.$$

Для этого решаем методом Гаусса систему линейных однородных уравнений с комплексными коэффициентами .

$$(A-\lambda_2 E)Z =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}i \\ 1 & 1-2\sqrt{3}i & \sqrt{6} \\ 1-2\sqrt{3}i & 1 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}i \\ 0 & 2-2\sqrt{3}i & \sqrt{6}+\sqrt{2}i \\ 0 & 2-2\sqrt{3}i & \sqrt{6}+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}i \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $z_1 = z_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ z_2 = -z_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i$, и произвольный собственный вектор оператор $\tilde{\phi}$, соответствующий , имеет вид $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} i.$$

Имеем

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ X_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что каждый из полученных векторов X_2 и X_3. ортогонален вектору X_1 — так как равны нулю скалярные произведения

$$(X_1, X_2) = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$

$$(X_1, X_3) = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 0 = 0.$$

Итак, $L = L(X_2, X_3)$ ортогонально X_1. Кроме того, пространство L инвариантно относительно действия оператора ϕ. Действительно, распишем подробно равенство

$$A \cdot Z = \lambda_2 Z.$$

$$A(X_2 + iX_3) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)(X_2 + iX_3)$$
$$AX_2 + iAX_3 = (\frac{1}{2} X_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} X_3) + i(\frac{\sqrt{3}}{2} X_2 + \frac{1}{2} X_3).$$

Приравнивая в последнем равенстве действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{aligned} AX_2 &= \frac{1}{2} X_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} X_3 \\ AX_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} X_2 + \frac{1}{2} X_3. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Мы видим, что векторы $\phi(X_2) = A \cdot X_2$ и $\phi(X_3) = A \cdot X_3$, принадлежат линейной оболочке L векторов X_2 и X_3. По определению это означает инвариантность L относительно ϕ.

Наконец, мы можем убедиться в том, что X_2 и X_3 — взаимно ортогональные вектора. Действительно,

$$(X_2, X_3) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 1 = 0$$
$$||X_2|| = 1, ||X_3|| = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1.$$

Проверим, что векторы

$$f_1 = \frac{1}{||X_1||} X_1, f_2 = X_2, f_3 = X_3$$

образуют правую тройку векторов. Для этого вычислим их смешанное произведение $(f_1 \times f_2, f_3)$ убедимся, что оно положительно.

$$(X_1 \times X_2, X_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 1.$$

Найдем матрицу $B = B_\phi$ оператора ϕ в базисе f_1, f_2, f_3. Для этого вычислим $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$

Вектор $f_1 = \frac{1}{\|X_1\|} X_1$ является собственным вектором оператора ϕ, соответствующим числу $\lambda_1 = 1$. Поэтому

$$\phi(f_1) = 1 \cdot f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_3.$$

Векторы $\phi(f_2)$ и $\phi(f_3)$ вычислены нами ранее в равенствах (3.25).

$$\phi(f_2) = \frac{1}{2} f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_3 = 0 \cdot f_1 + \frac{1}{2} f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} f_3$$

$$\phi(f_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_2 = 0 \cdot f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2 + \frac{1}{2} f_3.$$

Поэтому матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что оператор ϕ осуществляет вращение на угол $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ пространства $V = R^3$ вокруг оси, проходящей через начало координат с направляющим вектором f_1.

Проверим теперь наши вычисления, найдя ортогональную матрицу Q так, чтобы

$$B = Q^{-1} A Q.$$

В качестве матрицы Q берем матрицу перехода T от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к ортонормированному базису f_1, f_2, f_3.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

T — ортогональная матрица, так как ее столбцы попарно ортогональны и их нормы равны единице. T является матрицей оператора вращения, который правую тройку e_1, e_2, e_3 переводит в правую тройку f_1, f_2, f_3, совмещая при этом e_i с f_i (i = 1, 2, 3). Проверим равенство $B = T^{-1}AT$.

$$T \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot T = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Видим, что матрицы TB и AT равны, следовательно $B = T^{-1}AT$. Задача полностью решена.

Задача 5. Для данной унитарной матрицы

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

найти диагональную матрицу B и унитарную матрицу Q такие, что

$$B = Q^{-1}AQ.$$

Решение. Для решения задачи введем в рассмотрение векторное пространство $V = C^3$ и оператор $\phi : V \to V$, заданный формулой

$$\phi(X) = A \cdot X.$$

Тогда данная матрица A будет являться матрицей оператора ϕ в базисе e_1, e_2, e_3 (проверьте самостоятельно так же, как в задаче 4 §3). Оператор ϕ унитарный, так как A унитарная матрица. Согласно (3.17), в пространстве V существует ортонормированный базис f_1, f_2, f_3 из собственных векторов оператора ϕ. Тогда ϕ — оператор простой структуры и его матрица B в базисе f_1, f_2, f_3 — это диагональная матрица с собственными числами на диагонали (2.19). Кроме того, пусть T — матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3. Тогда матрицы A и B связаны, как известно, соотношением (2.12)

$$B = T^{-1}AT.$$

Таким образом, в качестве матрицы Q, требуемой в условии задачи, надо взять матрицу T.

Проведем теперь вычисления, реализующие этот план решения задачи.

Найдем собственные числа матрицы A

$$\begin{vmatrix} \frac{4+3i}{9} - \lambda & \frac{4}{9}i & \frac{-6-2i}{9} \\ -\frac{4}{9}i & \frac{4-3i}{9} - \lambda & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1}{9} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Получили, что $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = i$ — три различные собственные числа матрицы A. Они же являются собственными числами нашего унитарного оператора ϕ (2.15). В полном согласии с теорией (см. замечание 3 §3), модули всех собственных чисел равны единице.

Найдем собственные векторы оператора ϕ. Для этого для каждого λ_i (i = 1,2,3) решаем систему однородных линейных уравнений $(A-\lambda_i E)Z=0$. Их фундаментальные системы решений дадут нам линейно независимые (над C) собственные вектора оператора ϕ.

$\lambda = 1.$

$$A - E = \begin{pmatrix} \frac{-5+3i}{9} & \frac{4}{9}i & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4}{9}i & \frac{-5-3i}{9} & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -5+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & -5-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3-5i}{4} & \frac{6-2i}{4} \\ 0 & -\frac{9}{2}i & -9i \\ 0 & -9 & -18 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = -2iz_3; z_2 = -2z_3; \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = z_3 \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, столбец $Z_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ является базисным столбцом пространства собственных векторов, соответствующих $\lambda_1 = 1$

$\lambda = i.$

$$A - iE = \begin{pmatrix} \frac{4-6i}{9} & \frac{4}{9}i & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4}{9}i & \frac{4-12i}{9} & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1-9i}{9} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4i & 4-12i & -2-6i \\ 4-6i & 4i & -6-2i \\ 6+2i & -2-6i & 1-9i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3+i & \frac{3-i}{2} \\ 0 & -18+18i & -9+9i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = iz_3; z_2 = -\frac{1}{2}z_3;$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_3 \\ -\frac{1}{2}z_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{z_3}{2} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Столбец $Z_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ является базисным столбцом пространства

собственных векторов, соответствующих $\lambda_2 = i$

$\lambda = -i.$

$$A + iE = \begin{pmatrix} \frac{4+12i}{9} & \frac{4}{9}i & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4}{9}i & \frac{4+6i}{9} & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1+9i}{9} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4i & 4+6i & -2-6i \\ 4+12i & 4i & -6-2i \\ 6+2i & -2-6i & 1+9i \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-6+4i}{4} & \frac{6-2i}{4} \\ 0 & -18+18i & -18-18i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$z_1 = -\frac{i}{2}z_3;\, z_2 = z_3;$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}z_3 \\ z_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{z_3}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Столбец $Z_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ является базисным столбцом пространства

собственных векторов, соответствующих $\lambda_2 = -i$.

В полном согласии с теорией (3.17), собственные векторы Z_1, Z_2, Z_3, соответствующие различным собственным числам ($\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$ соответственно), ортогональны. Действительно,

$$(Z_1, Z_2) = (-2i)(-2i) + (-2)(-1) + 1 \cdot 2 = -4 + 4 = 0$$
$$(Z_1, Z_3) = (-2i) \cdot i + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 - 4 + 2 = 0$$
$$(Z_2, Z_3) = (2i) \cdot i + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = -2 - 2 + 4 = 0.$$

При вычислении скалярных произведений в унитарном пространстве C^3 мы пользуемся формулами (3.9).

Нормируем векторы Z_1, Z_2, используя формулы (3.8)

$$\|Z_1\| = \sqrt{(Z_1, Z_1)} = \sqrt{(-2i) \cdot 2i + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\|Z_2\| = \sqrt{(Z_2, Z_2)} = \sqrt{(2i)(-2i) + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\|Z_3\| = \sqrt{(Z_3, Z_3)} = \sqrt{(-i)i + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$f_1 = \frac{1}{\|Z_1\|} Z_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$f_2 = \frac{1}{\|Z_2\|} Z_2 = \begin{pmatrix} \frac{2i}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$f_3 = \frac{1}{\|Z_3\|} Z_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица T перехода от старого ортонормированного базиса к e_1, e_2, e_3 новому ортонормированному базису f_1, f_2, f_3 имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Столбцами матрицы T служат попарно взаимно ортогональные столбцы f_1, f_2, f_3, нормы которых равны единице. Следовательно, матрица Т — унитарная.

Матрица оператора ϕ в базисе f_1, f_2, f_3 имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

как это уже отмечалось в начале решения.

Для проверки правильности наших вычислений достаточно убедится в справедливости равенства

$$B = T^{-1} A T.$$

Для этого достаточно проверить равенство $TB = AT$. Имеем

$$T \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

$$A \cdot T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -18i & -18 & 9 \\ -18 & -9i & -18i \\ 9 & 18i & -18i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}i & -\frac{2}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}i \end{pmatrix}$$

Итак, $TB = AT$; то есть $B = T^{-1}AT$.

Задача решена полностью.

Задача 6. Пусть $x = x_1\upsilon_1 + \cdots + x_n\upsilon_n$, $y = y_1\upsilon_1 + \cdots + y_n\upsilon_n$ — разложения элементов *x, y* унитарного пространства *V* по базису $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$. Тогда верна формула

$$(x, y) = X^T U \bar{Y},$$

где $X^T = (x_1, \cdots, x_n)$, $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\mathrm{U}=(\upsilon_1, \cdots, \upsilon_n)$ — матрица Грама базиса $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ и черта над элементом означает взятие комплексного сопряжения (свойство 1 матрицы Грама).

Решение. Пользуемся свойствами 1), 2), 3) определения 3.1. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
(x, y) &= (x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y) = x_1 (v_1, y) + \cdots + x_n (v_n, y) = \\
&= x_1 \overline{(y, v_1)} + \cdots + x_n \overline{(y, v_n)} = \\
&= x_1 \bar{y}_1 \overline{(v_1, v_1)} + x_1 \bar{y}_2 \overline{(v_2, v_1)} + \cdots + x_1 \bar{y}_n \overline{(v_n, v_n)} + \cdots + \\
& x_n \bar{y}_1 \overline{(v_1, v_n)} + x_n \bar{y}_2 \overline{(v_2, v_n)} + \cdots + x_n \bar{y}_n \overline{(v_n, v_n)} = \\
&= x_1 \bar{y}_1 (v_1, v_1) + x_1 \bar{y}_2 (v_1, v_2) + \cdots + x_1 \bar{y}_n (v_1, v_n) + \cdots + \\
&+ x_n \bar{y}_1 (v_n, v_1) + x_n \bar{y}_2 (v_n, v_2) + \cdots + x_n \bar{y}_n (v_n, v_n) = \\
&= X^T U \bar{Y}.
\end{aligned}$$

Задача решена.

Задача 7.

1) Доказать, что элементы $x_1, x_2, \cdots, x_n$ унитарного пространства *V* линейно зависимы тогда и только тогда, когда определитель их матрицы Грама равен нулю, т.е. $\det U(x_1, \cdots, x_n) = 0$.

2) При *n* = 2 и *V* = R^2 $U(x_1, x_2)$ - это квадрат площади параллелограмма, натянутого на векторы x_1, x_2 при *n* = 3 и *V* = $R^3 U(x_1, x_2, x_3)$ квадрат объема параллелепипеда, натянутого на векторы x_1, x_2, x_3.

Решение. Для доказательства утверждений 1) и 2) задачи 7 выведем удобное для дальнейшего представление матрицы Грама элементов $x_1, x_2, \cdots, x_3$.

Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V и

$$x_i = x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + \cdots + x_{in}e_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Тогда $(x_i, x_j) = x_{i1}\overline{x}_{j1} + x_{i2}\overline{x}_{j2} + \cdots + x_{in}\overline{x}_{jn}$ (i=1,2,⋯,n) и, перемножая матрицы, убеждаемся в справедливости следующего равенства :

$$U(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \dots & (x_n, x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} & \dots & \bar{x}_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{x}_{1n} & \dots & \bar{x}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим первый сомножитель в правой части последнего равенства буквой А:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $U(x_1, \cdots, x_n) = A \cdot \overline{A}^T$.

Переходим к доказательству утверждения 1).

Из курса алгебры известно, что определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей. Следовательно,

$$\det U(x_1, \cdots, x_n) = \det A \cdot \det \bar{A}^T = \det A \cdot \det \bar{A} = |\det A|^2.$$

Кроме того, из курса алгебры известно, что элементы $x_1, x_2, \cdots, x_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда detA = 0. Но равенство detA = 0 равносильно равенству $\det U(x_1, \cdots, x_n) = 0$. Следовательно, утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2).

Случай n = 2. Из курса алгебры и аналитической геометрии известно, что абсолютная величина определителя detA равна площади S параллелограмма, натянутого на векторы x_1, x_2. Отсюда

$$\det U(x_1, \cdots, x_n) = |\det A|^2 = S^2.$$

Случай n = 3. Из курса аналитической геометрии известно, что абсолютная величина определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

равна объему V параллелепипеда, натянутого на векторы x_1, x_2, x_3 (и с точностью до знака совпадает со смешанным произведением трех векторов x_1, x_2, x_3. Отсюда $\det U = \det A^2 = V^2$.

Задача решена.

Задача 8. Доказать утверждение замечания 2 §3. **Доказательство.** По условию имеем $(\phi(x), y) = (x, \phi^*(y))$ для всех $x, y \in V$. Тогда, в обозначениях замечания 3.16, получаем тождество $(AX)^T U\overline{Y} = X^T U\overline{BY}$. Раскроем скобки в левой части этого тождества, используя свойство $(AX)^T = X^T A^T$. Тогда можем записать матричное тождество

$$X^T A^T U\bar{Y} = X^T U\bar{B}\bar{Y}$$

для всех матриц-столбцов X и $У$.

Из курса алгебры известно, что если матричное равенство $ZM_1 = ZM_2$ выполнено для всех возможных матриц-строк Z, то $M_1 = M_2$. Поэтому из тождества $A^T X^T U\overline{Y} = X^T U\overline{BY}$ следует

$$A^T U = U\bar{B}.$$

Отсюда получаем требуемое соотношение $\overline{B} = U^{-1} A^T U$.

Доказательство для случая евклидова пространства проводится аналогично. Задача решена.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. В линейном пространстве V ($\dim V = 4$) задан базис $\{\upsilon_k\}_{k=1}^{4}$ заданы координаты векторов $a_i, b_j (i, j = 1,2,3)$.

1) Найти базисы подпространств $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $V_1 = L(b_1, b_2, b_3)$, $T = V_1 + V_2$, $S = V_1 \cap V_2$.

2) Дополнить базис S до базиса V_1 до базиса V_2.

3) Убедиться в справедливости равенства

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim T + \dim S.$$

4) Найти подпространства L_1 и L_2 так, чтобы были выполнены равенства

$$V_1 = S \oplus L_1,$$
$$V_2 = S \oplus L_2.$$

Варианты

1.
$a_1 = (\ 1\ {-1}\ \ 2\ \ 0)^T$
$a_2 = (\ 0\ \ 1\ {-1}\ \ 1)^T$
$a_3 = (\ 1\ \ 1\ \ 1\ {-1})^T$
$b_1 = (\ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$
$b_2 = (\ 1\ \ 2\ {-1}\ {-1})^T$
$b_3 = (\ 1\ {-2}\ \ 2\ \ 2)^T$

2.
$a_1 = (\ 1\ \ 1\ {-3}\ {-2})^T$
$a_2 = ({-3}\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$
$a_3 = (\ 1\ \ 1\ {-2}\ \ 0)^T$
$b_1 = ({-1}\ \ 1\ \ 1\ {-1})^T$
$b_2 = (\ 0\ {-1}\ {-1}\ \ 3)^T$
$b_3 = (\ 1\ \ 1\ \ 1\ {-5})^T$

3.
$a_1 = ({-3}\ \ 3\ \ 1\ \ 0)^T$
$a_2 = (\ 4\ \ 1\ \ 1\ {-3})^T$
$a_3 = (\ 2\ {-7}\ {-3}\ \ 3)^T$
$b_1 = (\ 3\ \ 7\ \ 4\ {-5})^T$
$b_2 = (\ 2\ \ 3\ \ 2\ {-2})^T$
$b_3 = (\ 1\ {-1}\ \ 0\ \ 1)^T$

4.
$a_1 = (\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$
$a_2 = (\ 2\ {-1}\ \ 1\ \ 1)^T$
$a_3 = ({-1}\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T$
$b_1 = (\ 0\ \ 1\ {-1}\ {-1})^T$
$b_2 = (\ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2)^T$
$b_3 = (\ 5\ {-2}\ \ 1\ \ 1)^T$

5.
$a_1 = (\ 1\ \ 0\ \ 2\ {-1})^T$
$a_2 = ({-3}\ \ 1\ \ 0\ \ 2)^T$
$a_3 = (\ 2\ {-1}\ \ 1\ \ 0)^T$
$b_1 = (\ 2\ {-1}\ \ 4\ \ 1)^T$
$b_2 = ({-3}\ \ 4\ \ 4\ \ 3)^T$
$b_3 = (\ 1\ \ 2\ \ 0\ {-1})^T$

6.
$a_1 = (\ 4\ \ 2\ {-1}\ {-2})^T$
$a_2 = (\ 1\ {-1}\ {-3}\ \ 3)^T$
$a_3 = (\ 2\ \ 4\ \ 5\ {-8})^T$
$b_1 = (\ 1\ \ 3\ {-1}\ {-1})^T$
$b_2 = (\ 4\ \ 6\ \ 1\ {-6})^T$
$b_3 = (\ 2\ \ 0\ \ 3\ {-4})^T$

7. $a_1 = (2\ \text{-}1\ \ 0\ \ 1)^T$
$a_2 = (\text{-}1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$
$a_3 = (1\ \ 0\ \text{-}1\ \ 1)^T$
$b_1 = (1\ \text{-}1\ \ 0\ \ 1)^T$
$b_2 = (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3)^T$
$b_3 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 4)^T$

8. $a_1 = (\text{-}1\ \ 1\ \text{-}1\ \ 0)^T$
$a_2 = (5\ \ 1\ \ 1\ \text{-}3)^T$
$a_3 = (3\ \ 3\ \text{-}1\ \text{-}3)^T$
$b_1 = (0\ \ 3\ \ 2\ \ 3)^T$
$b_2 = (\text{-}1\ \ 1\ \ 0\ \ 2)^T$
$b_3 = (2\ \ 10\ \ 3\ \ 5)^T$

9. $a_1 = (\text{-}1\ \ 7\ \ 3\ \ 2)^T$
$a_2 = (\text{-}1\ \ 3\ \ 2\ \ 1)^T$
$a_3 = (\text{-}3\ \ 5\ \ 5\ \ 2)^T$
$b_1 = (\text{-}1\ \ 5\ \ 2\ \ 2)^T$
$b_2 = (1\ \ 3\ \text{-}1\ \ 1)^T$
$b_3 = (3\ \ 1\ \text{-}4\ \ 0)^T$

10. $a_1 = (2\ \ 1\ \text{-}1\ \ 1)^T$
$a_2 = (1\ \text{-}1\ \ 2\ \ 4)^T$
$a_3 = (\text{-}1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$
$b_1 = (\text{-}2\ \ 2\ \ 0\ \ 1)^T$
$b_2 = (\text{-}1\ \ 1\ \ 2\ \ 5)^T$
$b_3 = (1\ \ 2\ \text{-}3\ \text{-}2)^T$

11. $a_1 = (4\ \ 7\ \ 3\ \ 1)^T$
$a_2 = (2\ \ 2\ \text{-}3\ \ 2)^T$
$a_3 = (2\ \ 3\ \ 0\ \ 1)^T$
$b_1 = (1\ \ 2\ \text{-}2\ \ 3)^T$
$b_2 = (2\ \ 3\ \text{-}1\ \ 0)^T$
$b_3 = (2\ \ 1\ \ 2\ \text{-}2)^T$

12. $a_1 = (2\ \ 8\ \text{-}1\ \ 2)^T$
$a_2 = (\text{-}4\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T$
$a_3 = (\text{-}1\ \ 5\ \ 1\ \ 3)^T$
$b_1 = (1\ \ 5\ \ 2\ \text{-}1)^T$
$b_2 = (2\ \ 4\ \ 0\ \text{-}1)^T$
$b_3 = (\text{-}5\ \text{-}1\ \ 6\ \ 1)^T$

13. $a_1 = (1\ \text{-}1\ \ 1\ \text{-}1)^T$
$a_2 = (\text{-}1\ \text{-}1\ \ 3\ \ 2)^T$
$a_3 = (2\ \ 0\ \text{-}1\ \ 0)^T$
$b_1 = (\text{-}3\ \text{-}3\ \ 5\ \ 0)^T$
$b_2 = (\text{-}2\ \text{-}2\ \ 4\ \ 1)^T$
$b_3 = (5\ \text{-}5\ \ 7\ \ 1)^T$

14. $a_1 = (2\ \ 2\ \ 1\ \ 2)^T$
$a_2 = (1\ \ 3\ \text{-}3\ \ 3)^T$
$a_3 = (5\ \ 7\ \text{-}1\ \ 7)^T$
$b_1 = (5\ \text{-}1\ \ 2\ \ 1)^T$
$b_2 = (0\ \ 4\ \text{-}1\ \ 1)^T$
$b_3 = (1\ \ 1\ \ 0\ \ 3)^T$

15. $a_1 = (4\ \text{-}1\ \ 2\ \ 4)^T$
$a_2 = (1\ \text{-}2\ \ 0\ \ 3)^T$
$a_3 = (1\ \ 5\ \ 2\ \text{-}5)^T$
$b_1 = (3\ \ 4\ \ 3\ \text{-}2)^T$
$b_2 = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T$
$b_3 = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 2)^T$

16. $a_1 = (3\ \text{-}1\ \ 2\ \ 2)^T$
$a_2 = (2\ \text{-}3\ \ 1\ \ 2)^T$
$a_3 = (1\ \ 2\ \ 1\ \text{-}1)^T$
$b_1 = (2\ \ 3\ \text{-}1\ \ 1)^T$
$b_2 = (5\ \text{-}1\ \ 4\ \ 2)^T$
$b_3 = (1\ \text{-}1\ \ 0\ \ 1)^T$

17. $a_1 = (\text{-}4\ \ 1\ \text{-}1\ \ 7)^T$
$a_2 = (\text{-}1\ \ 4\ \ 2\ \ 1)^T$

18. $a_1 = (\text{-}2\ \ 5\ \ 1\ \ 1)^T$
$a_2 = (1\ \ 2\ \ 1\ \text{-}2)^T$

$a_3 = (-2\ \ 3\ \ 1\ \ 3)^T$
$b_1 = (-1\ \ 8\ \ 2\ \ 2)^T$
$b_2 = (\ 2\ \ 1\ -1\ \ 1)^T$
$b_3 = (\ 0\ \ 1\ \ 3\ -2)^T$

$a_3 = (\ 1\ -1\ \ 0\ -1)^T$
$b_1 = (\ 1\ \ 1\ \ 4\ \ 5)^T$
$b_2 = (-1\ \ 5\ \ 2\ \ 1)^T$
$b_3 = (\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$

19. $a_1 = (\ 1\ \ 1\ \ 3\ -1)^T$
$a_2 = (\ 3\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$
$a_3 = (-1\ \ 2\ \ 0\ \ 1)^T$
$b_1 = (\ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 1)^T$
$b_2 = (\ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 1)^T$
$b_3 = (\ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 1)^T$

20. $a_1 = (\ 4\ \ 1\ -3\ \ 5)^T$
$a_2 = (\ 0\ \ 3\ \ 1\ \ 2)^T$
$a_3 = (\ 4\ -5\ -5\ \ 1)^T$
$b_1 = (\ 2\ -1\ \ 4\ \ 1)^T$
$b_2 = (\ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 3)^T$
$b_3 = (\ 2\ \ 0\ -2\ \ 1)^T$

21. $a_1 = (\ 1\ \ 3\ -2\ \ 2)^T$
$a_2 = (-3\ -1\ \ 3\ \ 1)^T$
$a_3 = (-5\ \ 1\ \ 4\ \ 4)^T$
$b_1 = (-1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$
$b_2 = (-3\ \ 5\ \ 4\ \ 3)^T$
$b_3 = (-2\ \ 0\ \ 1\ \ 2)^T$

22. $a_1 = (\ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$
$a_2 = (\ 1\ -1\ \ 2\ \ 1)^T$
$a_3 = (\ 1\ -1\ \ 1\ -1)^T$
$b_1 = (-2\ \ 2\ -3\ \ 2)^T$
$b_2 = (\ 3\ -1\ \ 4\ \ 3)^T$
$b_3 = (\ 1\ -1\ \ 2\ \ 3)^T$

23. $a_1 = (\ 1\ -6\ \ 2\ \ 5)^T$
$a_2 = (\ 5\ -2\ \ 6\ -1)^T$
$a_3 = (\ 3\ -4\ \ 4\ -3)^T$
$b_1 = (\ 1\ -1\ -1\ \ 1)^T$
$b_2 = (-1\ \ 1\ -1\ \ 1)^T$
$b_3 = (-1\ -1\ \ 1\ \ 1)^T$

24. $a_1 = (\ 5\ \ 8\ \ 7\ \ 0)^T$
$a_2 = (\ 3\ \ 5\ \ 5\ -1)^T$
$a_3 = (\ 1\ \ 2\ \ 3\ -2)^T$
$b_1 = (\ 5\ \ 1\ \ 3\ -1)^T$
$b_2 = (-1\ \ 5\ \ 1\ \ 3)^T$
$b_3 = (\ 7\ \ 4\ \ 5\ \ 0)^T$

25. $a_1 = (\ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2)^T$
$a_2 = (\ 1\ \ 1\ -1\ \ 2)^T$
$a_3 = (-2\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$
$b_1 = (\ 3\ \ 0\ \ 6\ \ 1)^T$
$b_2 = (\ 4\ \ 1\ -3\ \ 3)^T$
$b_3 = (\ 2\ -1\ \ 3\ \ 0)^T$

Задача 2. Дан базис линейного пространства V — $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{3}$. Заданы разложения векторов $\upsilon'_j,\ j=1,2,3$ по базису $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{3}$, задан X — столбец координат вектора x в базисе $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{3}$.

1) Доказать, что система векторов $\{\upsilon'_i\}_{i=1}^{3}$ является базисом пространства V. Записать матрицу преобразования координат

при переходе от старого базиса $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{3}$ к новому базису $\{\upsilon_i'\}_{i=1}^{3}$.

2) Найти разложение вектора x по новому базису $\{\upsilon_i'\}_{i=1}^{3}$. Записать X' — столбец координат вектора x в базисе $\{\upsilon_i'\}_{i=1}^{3}$.

Варианты

1. $\bar v_1' = \bar v_1 + 7\bar v_2 - 9v_3$
$\bar v_2' = \bar v_1 + 6\bar v_2 - 8v_3$
$\bar v_3' = -\bar v_1 - 5\bar v_2 + 6v_3$
$X = (2\ \ 8\ {-7})^T$

2. $\bar v_1' = 8\bar v_1 - 4\bar v_2 + 3v_3$
$\bar v_1' = \bar v_1 - \bar v_2 + v_3$
$\bar v_1' = 5\bar v_1 - 2\bar v_2 + v_3$
$X = (-8\ \ 1\ \ 2)^T$

3. $\bar v_1' = -3\bar v_1 + 4\bar v_2 + 2v_3$
$\bar v_2' = -\bar v_1 + \bar v_2 + v_3$
$\bar v_3' = 7\bar v_1 - 8\bar v_2 - 5v_3$
$X = (-4\ \ 6\ \ 3)^T$

4. $\bar v_1' = 11\bar v_1 - 13\bar v_2 + 5v_3$
$\bar v_1' = -4\bar v_1 + 5\bar v_2 - 2v_3$
$\bar v_1' = -8\bar v_1 + 9\bar v_2 - 3v_3$
$X = (-15\ 16\ \ 4)^T$

5. $\bar v_1' = 6\bar v_1 - 2\bar v_2 + 9v_3$
$\bar v_2' = -4\bar v_1 + \bar v_2 - 5v_3$
$\bar v_3' = 5\bar v_1 - 2\bar v_2 + 8v_3$
$X = (-10\ \ 2\ {-9})^T$

6. $\bar v_1' = 3\bar v_1 - \bar v_2 + 2v_3$
$\bar v_1' = 8\bar v_1 - 4\bar v_2 + 5v_3$
$\bar v_1' = -5\bar v_1 + 2\bar v_2 - 3v_3$
$X = (10\ \ 6\ {-5})^T$

7. $\bar v_1' = \bar v_1 - 3\bar v_2 - v_3$
$\bar v_2' = \bar v_1 + 4\bar v_2 + 2v_3$
$\bar v_3' = \bar v_1 - 5\bar v_2 - 2v_3$
$X = (-10\ 14\ \ 3)^T$

8. $\bar v_1' = -2\bar v_1 + 5\bar v_2 - 11v_3$
$\bar v_1' = 3\bar v_1 - 7\bar v_2 + 16v_3$
$\bar v_1' = -\bar v_1 + 3\bar v_2 - 7v_3$
$X = (4\ {-5}\ 10)^T$

9. $\bar v_1' = 5\bar v_1 - 6\bar v_2 + 4v_3$
$\bar v_2' = -6\bar v_1 + 8\bar v_2 - 5v_3$
$\bar v_3' = -2\bar v_1 + \bar v_2 - v_3$
$X = (7\ {-9}\ \ 5)^T$

10. $\bar v_1' = 7\bar v_1 - 5\bar v_2 - 3v_3$
$\bar v_1' = -4\bar v_1 + 3\bar v_2 + 2v_3$
$\bar v_1' = 3\bar v_1 - 2\bar v_2 - 2v_3$
$X = (11\ {-8}\ {-1})^T$

11. $\bar v_1' = 8\bar v_1 - 3\bar v_2 + v_3$
$\bar v_2' = -5\bar v_1 + \bar v_2 - v_3$
$\bar v_3' = 7\bar v_1 - 2\bar v_2 + v_3$
$X = (10\ {-3}\ \ 1)^T$

12. $\bar v_1' = 5\bar v_1 + 2\bar v_2 + 2v_3$
$\bar v_1' = \bar v_1 - \bar v_2 + v_3$
$\bar v_1' = 3\bar v_1 + 2\bar v_2 + v_3$
$X = (9\ 10\ \ 1)^T$

13. $\bar v_1' = 2\bar v_1 + 4\bar v_2 + v_3$
$\bar v_2' = 5\bar v_1 + 9\bar v_2 + 3v_3$

14. $\bar v_1' = -7\bar v_1 - 4\bar v_2 + v_3$
$\bar v_1' = 12\bar v_1 + 8\bar v_2 - 3v_3$

$\bar{v}_3' = 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 2v_3$
$X = (6 \;\; 9 \;\; 5)^T$

$\bar{v}_1' = 5\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 - v_3$
$X = (6 \;\; 2 \;\; 1)^T$

15. $\bar{v}_1' = 2\bar{v}_1 - 6\bar{v}_2 - 5v_3$
$\bar{v}_2' = -3\bar{v}_1 + 8\bar{v}_2 + 7v_3$
$\bar{v}_3' = -\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 + 4v_3$
$X = (-2 \;\; 11 \;\; 9)^T$

16. $\bar{v}_1' = \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - v_3$
$\bar{v}_1' = \bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 - 2v_3$
$\bar{v}_1' = 2\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 4v_3$
$X = (8 \;\; 6 \;\; 1)^T$

17. $\bar{v}_1' = 4\bar{v}_1 + 4\bar{v}_2 - 3v_3$
$\bar{v}_2' = 5\bar{v}_1 + 7\bar{v}_2 - 4v_3$
$\bar{v}_3' = \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - v_3$
$X = (8 \;\; 7 \; -6)^T$

18. $\bar{v}_1' = 3\bar{v}_1 + 4\bar{v}_2 - 5v_3$
$\bar{v}_1' = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - 2v_3$
$\bar{v}_1' = 3\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 - 6v_3$
$X = (6 \;\; 4 \; -7)^T$

19. $\bar{v}_1' = 3\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 + 4v_3$
$\bar{v}_2' = 2\bar{v}_1 + 7\bar{v}_2 + 4v_3$
$\bar{v}_3' = \bar{v}_1 + 6\bar{v}_2 + 3v_3$
$X = (2 \;\; 9 \;\; 5)^T$

20. $\bar{v}_1' = -2\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + 3v_3$
$\bar{v}_1' = -6\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 7v_3$
$\bar{v}_1' = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 - 2v_3$
$X = (4 \; -9 \;\; 8)^T$

21. $\bar{v}_1' = 3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + 4v_3$
$\bar{v}_2' = 7\bar{v}_1 - 4\bar{v}_2 + 11v_3$
$\bar{v}_3' = -\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - v_3$
$X = (7 \; -5 \;\; 8)^T$

22. $\bar{v}_1' = -7\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + 9v_3$
$\bar{v}_1' = 3\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - 4v_3$
$\bar{v}_1' = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - 2v_3$
$X = (6 \;\; 5 \; -3)^T$

23. $\bar{v}_1' = -\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 2v_3$
$\bar{v}_2' = -\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 5v_3$
$\bar{v}_3' = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + v_3$
$X = (9 \;\; 7 \;\; 5)^T$

24. $\bar{v}_1' = 5\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + 4v_3$
$\bar{v}_1' = 8\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + 7v_3$
$\bar{v}_1' = 4\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 4v_3$
$X = (9 \;\; 3 \;\; 7)^T$

25. $\bar{v}_1' = -\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + v_3$
$\bar{v}_2' = 2\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 + 2v_3$
$\bar{v}_3' = \bar{v}_1 + 4\bar{v}_2 + 2v_3$
$X = (-1 \;\; 7 \;\; 5)^T$

Задача 3. В линейном пространстве V (dimV == 4) задан линейный оператор $\phi : V \to V$; $\{\upsilon_i\}_{i=1}^3$ и $\{\upsilon_i'\}_{i=1}^3$ — соответственно старый и новый базисы пространства V.

Известны разложения векторов $\upsilon_j'(j = 1,2,3)$ по базису $\{\upsilon_i\}_{i=1}^3$

(см. задачу 2) и A_ϕ — матрица оператора, ϕ в базисе $\{\upsilon_i\}_{i=1}^3$.
Найти:

1) A'_ϕ — матрицу оператора ϕ в базисе $\{\upsilon'_i\}_{i=1}^3$.

2) Проверить выполнение равенства $A_\phi T = TA'_\phi$, где T — матрица преобразования координат при переходе от старого базиса $\{\upsilon_i\}_{i=1}^3$ к новому базису $\{\upsilon'_i\}_{i=1}^3$.

Варианты

1. $A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & -10 & -7 \end{pmatrix}$.   2. $A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 3 & 6 & 4 \\ -5 & -8 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $A_\phi = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ 3 & -3 & 10 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.   4. $A_\phi = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ -8 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.   6. $A_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 11 \\ 3 & -4 & -9 \\ -1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.

7. $A_\phi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -10 \\ 13 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.   8. $A_\phi = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -4 & -9 & -3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $A_\phi = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.   10. $A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 4 & 10 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 3 & 5 & -6 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.   12. $A_\phi = \begin{pmatrix} 8 & 11 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

13. $A_\phi = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 5 & -4 & 13 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $A_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -5 & 9 & 6 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

15. $A_\phi = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 16. $A_\phi = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 5 \\ -9 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $A_\phi = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. 18. $A_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -3 & 7 & 1 \\ 2 & -11 & -4 \end{pmatrix}$

19. $A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ -6 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$. 20. $A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

21. $A_\phi = \begin{pmatrix} 9 & 9 & -3 \\ 6 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. 22. $A_\phi = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & -10 & -2 \end{pmatrix}$.

23. $A_\phi = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 11 \\ 5 & -10 & 6 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $A_\phi = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$.

25. $A_\phi = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 5 & 10 & -6 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Задан оператор $\phi : R^3 \to R^3$.

1) Доказать его линейность.

2) Найти матрицу оператора ϕ в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

3) Найти imϕ и ker ϕ.

4) Имеет ли оператор ϕ простую структуру ? Если да - указать базис, в котором матрица оператора ϕ имеет диагональный вид. Найти матрицу преобразования координат и сделать проверку.

Варианты

1) ϕ — оператор проецирования на ось $x = 0, y + z = 0$.
2) ϕ — оператор проецирования на плоскость $x - z = 0$.
3) ϕ — оператор зеркального отражения относительно плоскости $y — z = 0$.
4) ϕ — оператор поворота на угол π вокруг оси $y = 0$, $x + z = 0$.
5) ϕ — оператор проецирования на ось $x — y = 0, z = 0$.
6) ϕ — оператор проецирования на плоскость $y - z == 0$.
7) ϕ — оператор зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$.
8) ϕ — оператор поворота на угол π вокруг оси $x = 0, y - z = 0$.
9) ϕ — оператор проецирования на ось $y = 0, x – z = 0$.
10) ϕ — оператор проецирования на плоскость $x + y = 0$.
11) ϕ — оператор зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$.
12) ϕ — оператор поворота на угол π вокруг оси $x + y = 0, z = 0$.
13) ϕ—оператор проецирования на ось $x = 0, y - z = 0$.
14) ϕ —оператор проецирования на плоскость $x — y = 0$.
15) ϕ—оператор зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$.
16) ϕ — оператор поворота па угол π вокруг оси $x — z = 0, y = 0$
17) ϕ — оператор проецирования на ось $x + y = 0, z = 0$.
18) ϕ —оператор проецирования на плоскость $x + z = 0$.
19) ϕ — оператор зеркального отражения относительно плоско $x — y = 0$.
20) ϕ — оператор поворота на угол π вокруг оси ось $x = 0, y + z = 0$.
21) ϕ— оператор проецирования на ось $x + z = 0, y = 0$.
22) ϕ — оператор проецирования на плоскость $y + z = 0$.
23) ϕ— оператор зеркального отражения относительно плоско $x — z = 0$.

24) ϕ — оператор поворота на угол тг вокруг оси $x - y = 0, z = 0$.

25) ϕ — оператор проецирования на ось $x = 0,\ 2y + z = 0$.

Задача 5. Пусть $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{4}$ базис линейного пространства $\phi: V \to V$ и $\varphi: V \to V$ заданы своими матрицами в базисе $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{4}$, F_ϕ и P_φ соответственно.

1) Показать, что оператор ϕ — это оператор простой структуры. Найти базис пространства V, в котором матрица этого оператора имеет диагональную форму. Найти матрицу преобразования координат и сделать проверку.

2) Показать, что оператор ϕ не имеет простой структуры. Найти базис пространства V, в котором матрица оператора ϕ имеет каноническую форму Жордана. Найти матрицу преобразования координат и сделать проверку.

Варианты

$$1.\ F_\phi = \begin{pmatrix} 12 & 12 & -9 & 3 \\ -10 & -14 & 15 & -5 \\ 12 & 24 & -12 & 6 \\ 4 & 8 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & -7 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & -7 & 3 \\ -5 & 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.\ F_\phi = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 9 \\ -9 & -4 & -6 & -21 \\ -18 & -18 & 2 & -24 \\ 9 & 9 & 3 & 20 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.\ F_\phi = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -1 \\ -6 & 6 & -8 & 2 \\ -12 & 8 & -14 & 4 \\ 9 & -6 & 12 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -13 & -2 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 8 & 3 & 0 & -4 \\ 6 & 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$4.\ F_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -9 & -3 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 11 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. $F_\phi = \begin{pmatrix} 16 & 9 & -18 & -18 \\ -6 & 1 & 12 & 12 \\ -9 & -9 & 25 & 18 \\ 9 & 9 & -18 & -11 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -1 & 9 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \\ 4 & 5 & -14 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$

6. $F_\phi = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 & 3 \\ -23 & -9 & -8 & -7 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -10 & -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

7. $F_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & 12 & 11 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 11 & -9 \\ -2 & -7 & -13 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$

8. $F_\phi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & -8 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ -7 & -7 & -13 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$

9. $F_\phi = \begin{pmatrix} 29 & -60 & 30 & -90 \\ 6 & -13 & 6 & -18 \\ 6 & -12 & 5 & -18 \\ 6 & -12 & 6 & -19 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ -6 & -7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

10. $F_\phi = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 3 & -5 \\ -4 & 12 & -6 & 4 \\ 4 & 20 & -4 & 10 \\ 12 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ -6 & 11 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

11. $F_\phi = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 15 & 6 \\ -8 & 10 & 10 & 4 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \\ -16 & 12 & 20 & 12 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -11 & -4 \\ -1 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$

12. $F_\phi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -8 & -4 \\ 4 & 1 & -16 & 4 \\ 3 & 3 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -10 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

13. $F_\phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & 3 & 9 \\ 20 & 10 & 3 & 15 \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 3 & -8 \\ -4 & -5 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

14. $F_\phi = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -18 & 6 & 12 \\ 16 & -6 & 2 & 4 \\ -8 & -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 & -4 \\ -3 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -2 \\ -6 & -3 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $F_\phi = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 18 & 12 \\ 2 & 7 & -6 & -4 \\ -2 & -2 & 11 & 4 \\ 2 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & -13 & 5 & 2 \\ 11 & -9 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

16. $F_\phi = \begin{pmatrix} -24 & -15 & -10 & -5 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & -4 & 5 \\ 25 & 20 & 15 & 1 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

17. $F_\phi = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 9 & 3 \\ 24 & 18 & -24 & -8 \\ 21 & 14 & -19 & -7 \\ -33 & -22 & 33 & 13 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 & 5 \\ 4 & 10 & 2 & 2 \\ -3 & -10 & 11 & -6 \\ -9 & -11 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. $F_\phi = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 & -3 \\ 5 & -4 & 1 & -9 \\ -4 & 2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $P_\phi = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $F_\phi = \begin{pmatrix} -10 & 6 & -3 & 3 \\ 24 & 0 & 4 & -4 \\ -42 & 14 & 1 & 7 \\ 12 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & -7 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

20. $F_\phi = \begin{pmatrix} 6 & -25 & -5 & 20 \\ 30 & -64 & -15 & -45 \\ -20 & 15 & 6 & 5 \\ -30 & 65 & 15 & 46 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \\ -4 & 3 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$

21. $F_\phi = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -3 & -12 \\ 4 & -12 & 2 & 8 \\ 8 & -12 & -2 & 16 \\ 10 & -15 & 5 & 14 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 15 & -51 & -3 & 51 \\ 7 & -25 & -2 & 25 \\ -4 & 13 & 2 & -10 \\ 2 & -8 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

22. $F_\phi = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & -3 \\ -3 & 14 & 3 & -2 \\ -4 & 9 & 12 & -3 \\ -9 & 21 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & 1 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$

23. $F_\phi = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ -6 & 9 & -15 & -21 \\ -4 & 6 & -10 & -14 \\ 10 & -15 & 25 & 35 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & -8 \\ -4 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

24. $F_\phi = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 & 0 \\ -8 & 11 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & -6 \\ -16 & 4 & 4 & 11 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 & -3 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ -11 & -6 & -15 & 1 \\ -3 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

25. $F_\phi = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 & -7 \\ -6 & 4 & 10 & -14 \\ -9 & 6 & 15 & -21 \\ -12 & 8 & 20 & -29 \end{pmatrix}, \quad P_\phi = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Задача 6. В евклидовом пространстве R^4 заданы 4 вектора $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ своими разложениями по стандартному базису $\{e_i\}_{i=1}^4$.

Пусть $L = L(\upsilon_1, \upsilon_2)$.

Найти F — ортогональное дополнение к L, указать его ортонормированный базис и дополнить этот базис до ортонормированного базиса пространства R^4.

Варианты

Векторы $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ совпадают с векторами a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно из задачи 1.

Использованная литература

1. *Ильин В.А. Поздняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.:Наука, 1978.
2. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике, типовые расчеты. М.: Высшая школа, 1994.
3. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.:Физматгиз, 1963.
4. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.:Наука,1984.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.:Физматгиз, 1962.
6. *Смирное В.И.* Курс высшей математики. М.:Наука, 1974.
7. *Суэтлин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука,1976.
8. *Тихомиров С,Р.* Сборник задач по линейной алгебре (Банк вариантов). Ч. I, П.СПб.: СПбГТУ, 1994, 1995.