Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

М.Р. Бортковская Н.И. Лобкова

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ ИПМЭИТ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2023

УДК 51 (075.8)

Бортковская М.Р. **Учебное пособие по курсу «Математика» для студентов заочного отделения ИПМЭиТ**: Учебное пособие. / М.Р. Бортковская, Н.И. Лобкова. – СПб., 2023. – 138 с.

Учебное пособие для студентов-заочников содержит последовательное изложение разделов курса высшей математики *(Линейная Алгебра. Векторная Алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной)* для экономических направлений подготовки бакалавров. В пособии вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Доказательства большей части теорем опущены. При этом основное внимание уделено разъяснению сути (смысла) определений, правил, теорем, и их геометрической, физической и экономической интерпретации.

Пособие содержит набор задач и упражнений для самостоятельной работы, сформированных по темам разделов.

Учебное пособие может быть востребовано студентами старших курсов, магистрами, аспирантами для восстановления в памяти нужных понятий.

Библиогр.: 6 назв.

© Бортковская М.Р., Лобкова Н.И., 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие предназначено для студентов-заочников экономических направлений обучения, также может быть полезно студентам общетехнических направлений и преподавателям математики как источник типовых заданий.

Пособие содержит краткие теоретические сведения по основным разделам общего курса математики для первокурсников указанных направлений обучения и подборки заданий разного уровня сложности и назначения (тестовые задания, контрольные вопросы, задачи для контрольных работ) по каждому разделу. Для более подробного изучения теории читатели могут обратиться к учебникам [1], [2], а для ознакомления с задачами более разнообразного характера и более высокого уровня сложности – к задачникам [3], [4].

Авторы при составлении задач и написании теоретических параграфов каждого раздела пособия использовали не только указанную выше литературу, но и учебные пособия, созданные ранее (как и учебник [1]) на кафедре Высшей математики СПбПУ [5], [6].

Авторы выражают глубокую благодарность Юрию Алексеевичу Хватову, одному из авторов книг [5] и [6], многолетнему сотруднику кафедры Высшей математики СПбПУ и в течение долгого времени её заведующему, за большой вклад в разработку, редактирование и подготовку к печати данного пособия.

Раздел 1. **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение алгебры относится к глубокой древности. Ее задачи и методы создавались постепенно под влиянием нужд общественной деятельности в результате поисков общих приемов для решения однородных арифметических и геометрических задач. Уже в древнем Вавилоне (2-е тысячелетие до н. э.) решались задачи, содержащие уравнения первой и второй степени. Неизвестные величины в них трактовались как длина, ширина, высота, площадь и т. д. и обозначались словами из шумерского языка, вышедшего из употребления к концу 3-го тысячелетия до н. э. Буквенная символика в алгебре впервые появилась у александрийского математика Диофанта (3 век н. э.), но решающий шаг в этом направлении сделан французским математиком Ф. Виетом (1540–1603). Современная символика идет от Р. Декарта (1596–1650) и И. Ньютона (1642–1727).

До второй половины 19 века алгебра понималась как наука об алгебраических уравнениях различных степеней и системах таких уравнений. Во второй половине столетия в ней была выделена часть, названная линейной алгеброй, включающая в себя теорию систем линейных уравнений и связанную с ней теорию определителей и матриц.

Значение систем линейных уравнений объясняется не только тем, что они являются простейшими системами алгебраических уравнений, но и тем, что их решение составляет существенную часть решения различных практических задач. Матрицы и определители были введены в рассмотрение для решения и исследования систем линейных уравнений. Однако оказалось, что их роль этим не исчерпывается, и они стали предметом самостоятельного изучения. В наши дни теория матриц находит обширные применения в вычислительной математике, физике, экономике и других областях науки.

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Матрицы. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков. Системы линейных алгебраических уравнений.

2. Базисные понятия. Определитель. Матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, совместность и методы решения. *Модель межотраслевого баланса.

3. Основные задачи. Вычисление определителей 2-го, 3-го и высших порядков. Арифметические операции с матрицами. Вычисление обратной мат-рицы. Вычисление рангов матриц. Решение произвольных систем лннейных алгебраических уравнений. Теорема Крамера. Анализ совместности систем по теореме Кронекера -Капелли.

Глава 1. **Матрицы и действия над ними**

§ 1. Линейные операции с матрицами и их свойства

Определение 1.1. Под числовой матрицей A понимается прямоугольная таблица, содержащая $m \times n$ действительных чисел, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Матрица A содержит m строк и n столбцов. Говорят, что она имеет *размер* $m \times n$, для неё принято также обозначение $A_{m \times n}$. Элементы матрицы A обозначают малыми латинскими буквами с двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, в которой находится элемент, а второй – номер столбца, так, например, элемент a_{ij} находится в i-ой строке и в j-ом столбце матрицы A.

Замечание 1.1. С помощью матриц удобно записывать различные наборы данных. Так, распределение населения по возрасту по трем регионам России приведено в виде таблицы (в % от общей численности населения в регионе).

Регион	Возраст ≤ 25 лет	25< возраст ≤ 60	Возраст>60
A	20	40	30
B	35	30	35
C	15	40	45

Эта таблица может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения населения по возрасту:

$$A = A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 \\ 35 & 30 & 35 \\ 15 & 40 & 45 \end{pmatrix}.$$

В этой записи, например, матричный элемент a_{13} показывает, каков процент пенсионеров в регионе А, а матричный элемент a_{13} − в регионе В.

Определение 1.2. Две матрицы A и B называются *равными*, если имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны, т. е.

$$A_{m\times n} = B_{k\times l} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k, \\ n = l, \\ a_{ij} = b_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m,\ \ j = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

При n = m матрица (1.1) называется *квадратной*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы равны нулю, кроме расположенных на
главной диагонали (т. е. кроме элементов a_{ii}, i=1, 2, …, n). *Единичные* матрицы – частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей или *нуль-матрицей*.

Пример 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Указать размер каждой матрицы; б) какие матрицы являются квадратными, диагональными?

►а) Размеры матриц: A – 3×3, B – 3×2, C – 2×2, D – 2×3; б) квадрат-ными являются матрицы A и C, а диагональной — только матрица A.◄

Определение 1.2. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой суть суммы соответствующих элементов матриц слагаемых, т. е.

$$c_{ii} = a_{ii} + b_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Принято обозначение $C = A + B$. Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},\ \text{то}\ C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти их сумму. ► $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & 2+2 & 3+3 & -2+4 \\ 3+4 & -3+3 & 2+2 & 0+1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.◄

Определение 1.3. Произведением матрицы A размера $m\times n$ на вещест-венное число λ называется матрица того же размера, обозначаемая λA, её элементы есть произведения соответствующих элементов матрицы A на это число λ. Таким образом,

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Дана матрица A из примера 1.2. Найти 3A.

$$\blacktriangleright\ 3A=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & -6\\ 9 & -9 & 6 & 0\end{pmatrix}.\ \blacktriangleleft$$

Определение 1.4. Операции сложения матриц и умножения матрицы на вещественное число называются линейными операциями с матрицами.

Свойства линейных операций над матрицами

1. $A + B = B + A$ – коммутативность (переместительный закон) сложения.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативность (сочетательный закон) сложения.
3. Для любой матрицы A существует единственная матрица, равная нуль-матрице O, такая что $A + O = A$.
4. Для любой матрицы A существует единственная матрица $(–A)$, называемая *противоположной*, такая что $A + (–A) = O$, где O – нуль-матрица.
5. $1\cdot A = A$.
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
8. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Замечание 1.2. Во всех перечисленных выше свойствах λ, μ – произвольные вещественные числа, а A, B, C, O – такие матрицы, для которых осуществимы указанные в этих свойствах операции. При этом все перечисленные выше равенства понимаются в том смысле, что если определена правая часть равенства, то определена и левая, и наоборот, при этом матрицы в левой и правой частях равенств равны между собой.

Замечание 1.3. Матрица $(– A)$ из свойства 4 равна $(– 1)A$.

Пример 1.4. Для матрицы A из примера 1.2 найти противоположную, а также проверить, что $2A+3A=5A$.

$$\blacktriangleright\ -A=(-1)A=(-1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix},$$

$$2A+3A=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -4\\ 6 & -6 & 4 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & -6\\ 9 & -9 & 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 10 & 15 & -10\\ 15 & -15 & 10 & 0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=5A.\ \blacktriangleleft$$

§ 2. Операция умножения матриц и её свойства

Для прямоугольных матриц A и B произведение существует, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B, т. е. если равны числа столбцов матрицы A и строк матрицы B.

Определение 2.1. *Произведением* матрицы A размера mxn на матрицу B размера kxn называется матрица C размера mxn, элемент которой c_{ij}, находящийся в i-ой строке и в j-ом столбце, равен сумме произведений, соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{\mu=1}^{k} a_{i\mu}b_{\mu j} \, .$$

Принято обозначение $C = AB$.

Рассмотрим частный случай произведения матриц. Пусть даны матрица-строка $A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \end{pmatrix}$ и матрица-столбец $B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Матрица C=AB имеет размер 1×1, причем её элемент

$$c_{11} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \text{ , или}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим частный случай произведения матриц.

Пример 2.1. Найти произведение матрицы-строки $A = (\sqrt{2} \;\; 0 \quad -3\,)$ на матрицу-столбец B= $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\blacktriangleright A = (\sqrt{2} \;\; 0 \quad -3\,)\; B \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 0\cdot\pi + (-3)\cdot 1) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Замечание 2.1. При умножении матриц обычно говорят, что элемент c_{ij} матрицы $C = AB$, находящийся в i-ой строке и в j-ом столбце является «произведением i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B».

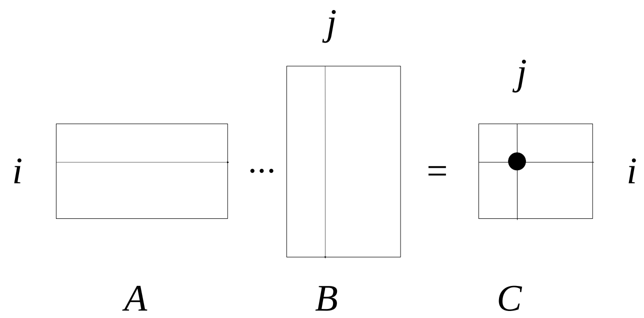


Рис. 2.1. К определению произведения матриц

Пример 2.2. Даны матрицы A, B из примера 2.1, а также матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, D=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Установить, для каких матриц определена операция умножения, и найти эти произведения.

►Имеем: $A_{1\times4}, B_{4\times1}, C_{2\times2}, D_{2\times2}, F_{2\times3}$. Сравнивая размеры данных матриц, убеждаемся, что определены следующие произведения: AB, BA, CD, DC, CF, DF. Произведение AB было найдено в примере 2.1.

$$BA = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\sqrt{2} \;\; 0 \;\; -3) \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} & \sqrt{2}\cdot 0 & \sqrt{2}\cdot(-3) \\ \pi\cdot\sqrt{2} & \pi\cdot 0 & \pi\cdot(-3) \\ 1\cdot\sqrt{2} & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3\sqrt{2} \\ \pi\sqrt{2} & 0 & -3\pi \\ \sqrt{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot1+4\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot4 \\ 5\cdot1+3\cdot3 & 5\cdot2+3\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$CF = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot0 \\ 3\cdot1+4\cdot3 & 3\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot(-1)+4\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 15 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение DF найдите самостоятельно. ◄

Замечание 2.2. Как видно из примера 2.2, при перестановке матриц результат умножения может получиться различным (сравните AB и BA, CD и DC). Кроме того, легко заметить, что хотя определено произведение CF, произведение FC не определено. В общем случае свойство коммутативности при умножении матриц не имеет места.

Определение 2.2. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *коммутирующими*.

Чтобы матрицы были коммутирующими, необходимо, чтобы они были квадратными матрицами одинакового порядка, однако, как показывают приведённые выше примеры, это условие не является достаточным, так матрицы C и D из примера 2.2 не коммутируют.

Пример 2.3. Показать, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ коммутируют.

$$► AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot0+2\cdot6 & 1\cdot4+2\cdot6 \\ 3\cdot0+4\cdot6 & 3\cdot4+4\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 36 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4\cdot4 \\ 6\cdot1+6\cdot3 & 6\cdot2+6\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 36 \end{pmatrix}.$$

т. е. $AB = BA$, значит, матрицы A и B коммутируют.◄

Свойства действия умножения матриц

$(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность умножения).

$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

$(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B$.

$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

Все перечисленные свойства трактуются таким образом, что если одна из частей равенства имеет смысл, то имеет смысл и другая, и они равны.

Замечание 2.3. Для квадратных матриц можно определить возведение в степень с натуральным показателем, сведя это действие к произведению равных матриц.

§ 3. Операция транспонирования матриц и её свойства

Определение 3.1. Если в матрице A размера mxn заменить строки на столбцы, то получится матрица размера nxm, называемая *транспонированной* по отношению к матрице A.

Транспонированная матрица обозначается A^T, таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^T.

► Имеем $A^T=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$. ◄

Диагональная матрица совпадает со своей транспонированной. Для двух матриц A и A^T всегда определена операция умножения.

Замечание 3.1. Для операции транспонирования матриц справедливы следующие соотношения:

1. $(A^T)^T = A$. **2**. $(A+B)^T = A^T+B^T$. **3**. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$. **4**. $(AB)^T = B^TA^T$.

§ 4. Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы к главе 1 по темам *«Линейные операции с матрицами. Умножение матриц»*

1) Укажите элемент a_{25}^T матрицы A^T, транспонированной по отношению к матрице $A=\begin{pmatrix} 7 & -14 & 21 & -28 \\ 14 & -27 & 41 & -57 \\ 35 & -69 & 104 & -141 \\ -7 & 13 & -20 & 29 \\ -21 & 40 & -61 & 86 \end{pmatrix}$.

2) Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{32} матрицы C=A^2.

3) Решить систему, где X, $У$, B – квадратные матрицы одного порядка n:

$\begin{cases} X-4Y=3B \\ 3X-2Y=4B \end{cases}$. В ответе укажите также решение этой системы, полагая B=E.

Ответы: 1) a_{25}^T=40; 2) c_{32} = –19; 3) Общее решение: $X = B$, Y = – 0.5B;

частный случай: $X=E_n; Y=-0{,}5E_n= \\ = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0{,}5 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Глава 2. Определители квадратных матриц

§ 1. Определители 2-го порядка

Определение 1.1. Пусть дана квадратная матрица 2-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A (или определителем A), называется число $a_1b_2 - a_2b_1$, которое принято обозначать одним из символов: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\det A$, $|A|$, Δ. Итак, по определению,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1.1)$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются элементами определителя; a_1, b_2 образуют *главную диагональ* определителя, а b_1, a_2 – *побочную диагональ*, следовательно, определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях.

Здесь в матрице 2-го порядка для обозначения элементов использованы разные буквы a и b для элементов разных столбцов вместо второго индекса. Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами* определителя; a_1, b_2 образуют *главную диагональ* определителя, а b_1, a_2 – *побочную диагональ*, следовательно, определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях.

Пример 1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

► $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = -11.$ ◄

Свойства определителей 2-го порядка

Свойство 1. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Свойство 2. Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей. Так,

$$\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1'+b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. При замене строк столбцами определитель не изменяется:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 1.1. Благодаря свойству 4 все свойства определителя, справедливые для его строк, будут справедливы и для его столбцов.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы 2-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Например,

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Определитель не изменяется при элементарных преобразованиях второго типа над его строками (столбцами). Например,

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 1.2. Все свойства определителей 2-го порядка доказываются с помощью определения 1.1. Но не все они являются независимыми. Так, свойства 6 –7 следуют из свойств 1–5. Первые пять свойств далее будем называть основными.

§ 2. Определитель 3-го порядка и его свойства

Определение 2.1. Пусть дана квадратная матрица 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Определителем 3-го порядка, соответствующим матрице A (или определителем A) называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

которое обозначается одним из следующих символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \det A, |A|,\ \Delta_3,\ \Delta.$$

Таким образом, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (2.2)$$

Элементы матрицы (2.1) называются также элементами ее определителя $\det A$. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* этого определителя а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – его *побочную диагональ*.

Правило Саррюса. Определитель 3-го порядка равен сумме произведений его элементов, находящихся на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали, минус сумма произведений элементов, находящихся на побочной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали (рис. 2.1а, б).

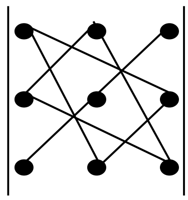


Рис. 2.1а

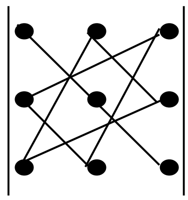


Рис. 2.1б

Пример 2.1. Вычислить по правилу Саррюса определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

$$► \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 4\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot 0\cdot 4 -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 5 = 0 + 16 - 15 - 0 - 2 - 10 = -11. ◄$$

Сгруппировав слагаемые в правой части (2.2), это равенство, с учётом (1.1), можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2.3)$$

Для исследования свойств определителя 3-го порядка введём новые понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы A.

Определение 2.2. Минором M_{ik} (дополнительным минором элемента a_{ik}) квадратной матрицы 3-го порядка (2.1) называется определитель матрицы 2-го порядка, полученной из матрицы (2.1) путем вычёркивания её i-ой строки и k-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ik}.

Например, $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Используя три последних равенства, (2.3) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}. \qquad (2.4)$$

Определение 2.3. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} матрицы A называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \qquad (2.5)$$

Так, $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}$,. $A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31}$.

Пример 2.2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A_{32} и M_{23}.

►По определению 2.2 имеем $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-4=-1$, а в силу (2.5) и определения 2.2 приходим к соотношению:

$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-(4+3)=-7.$◄

Заменяя в (2.4) миноры на алгебраические дополнения, в соответствии с определением 2.3 получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \qquad (2.6)$$

Каждое из равенств (2.3), (2.4), (2.6) называется разложением $\det A$ по элементам его первой строки.

Теорема 2.1 (теорема о разложении определителя по элементам какой-либо его строки или столбца). Определитель квадратной матрицы A 3-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Пример 2.3. Используя разложение определителя по строке или столбцу, вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

►Выберем строку или столбец, где есть нули. Используя теорему 2.1, разложим данный определитель, например, по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=$$

$= -2(1-8) + 0 -3(4 + 3) = 14 - 21= - 7.$◄

Свойства определителей 3-го порядка

Свойство 1. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Свойство 2. Определитель, в котором все элементы одной из строк (одного из столбцов) являются суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, например, $\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя.

Свойство 4. При транспонировании квадратной матрицы 3-го порядка её определитель остается неизменным.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы 3-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке местами двух любых строк или двух любых столбцов определителя его величина меняет знак.

Свойство 7. Определитель не изменяется при элементарных преобразованиях второго типа над его строками (столбцами).

Свойство 8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 8 также называется теоремой аннулирования.

Применение свойств существенно упрощает вычисление определителя.

Пример 2.4. Используя свойства определителя, вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

►Используя свойство 7, выполним следующие преобразования.

1) Ко второй строке прибавим первую, а из третьей вычтем первую строку, умноженную на 4, величина определителя при этом не меняется:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 26 & -13 \end{vmatrix}.$$

2) Из второй строки вынесем общий множитель (–5), а из третьей вынесем множитель 13: $\Delta = -65 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, поскольку получился определитель с одинаковыми строками.◄

§ 3. Определители высших порядков. Понятие определителя *n*-го порядка

Обобщим рассуждения предыдущего параграфа на случай любого натурального *n*. Определители 2-го, 3-го порядков введены как числовые функции, ставящие в соответствие некоторое число квадратным матрицам 2-го и 3-го порядков. Эти функции обладают пятью основными свойствами (св. 1–5 из § 2), из них следуют свойства 6, 7 (см. § 2).

Рассуждая индуктивно, предположим, что введено понятие определителя для квадратной матрицы k-го порядка, $k \le n - 1$, как функции, ставящей в соответствие этой матрице вещественное число, вышеупомянутыми пятью основными свойствами (а также свойствами 6, 7, следующими из них).

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Если из матрицы (3.1) удалить элементы i-ой строки и j-го столбца, j, i =1, 2, …, n, то получим квадратную матрицу ($n - 1$)-го порядка, существование определителя у которой предположено выше. По аналогии с определением 2.3 назовем этот определитель минором (дополнительным минором) элемента a_{ij} матрицы A, находящегося на пересечении i-ой строки и j-го столбца. Минор элемента a_{ij} будем обозначать M_{ij} , а произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ будем называть алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначать A_{ij}.

Определение 3.1. Определителем n-го порядка, соответствующим матрице из (3.1), называется число, равное $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}$ и обозначаемое одним из символов: $\det A,\ \Delta,\ \Delta_n,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Итак, по определению

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}\,. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. При $n = 3$ формула (3.2) совпадает с равенством (2.7) для определителя 3-го порядка, а при $n = 2$ из (3.2) после некоторых преобразований можно получить равенство (2.3) для определителя 2-го порядка. Итак, формула (3.2) (и, следовательно, определение 3.1) обобщает на случай произвольного натурального n закономерности, вытекающие из способа построения определителей 2-го и 3-го порядков.

Свойства определителя n-го порядка аналогичны свойствам определителей 2-го и 3-го порядков из § 2, п. 2˚, 3˚.

Для определителя n-го порядка справедливы также теоремы, аналогичные теореме 2.1 и свойству 8 для определителя 3-го порядка (§ 2, п. 3).

Теорема 3.1 (*теорема о разложении определителя n-го порядка по элементам какого-либо столбца или строки*). Определитель матрицы A из (3.1) равен сумме произведений элементов его любого столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.

Теорема 3.2 (*теорема аннулирования*). Сумма произведений элементов какого-либо столбца (или строки) матрицы A из (3.1) на алгебраические дополнения к элементам другого столбца (или строки) равна нулю.

Примеры вычисления определителей *n*-го порядка

Пример 3.1. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -3 & 0\\ -2 & 4 & 0 & 6\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$.

►Вынесем последовательно из 3-ей строки общий множитель 2 и из последнего столбца – общий множитель 3, по свойству 3 имеем:

$$\Delta=2\cdot 3\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Пользуясь теоремой 3.1, разложим полученный определитель по элементам последней строки:

$$\Delta = 6\left(3\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}\right)=-18\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Вычислив определители 3-го порядка, например, по правилу Саррюса, в результате получим

$$\Delta=-18(3+6-4)+6(-3+4+4+6)=-24. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Вычислить определитель 4-го порядка от треугольной матрицы (*треугольный определитель*):

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 2 & 11\\ 0 & 0 & -6 & 12\\ 0 & 0 & 0 & -30\end{vmatrix}.$$

►Разложим определитель по элементам 1-го столбца (теорема 3.1):

$$\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}5 & 2 & 11\\ 0 & -6 & 12\\ 0 & 0 & -30\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель также разложим по элементам 1-го столбца (теорема 2.1) и вычислим полученный определитель 2-го порядка:

$$\Delta=1\cdot 5\cdot\begin{vmatrix}-6 & 12\\ 0 & -30\end{vmatrix}=5\cdot(-6)\cdot(-30)=900. \blacktriangleleft$$

Показанное на примере свойство треугольного определителя 4-го порядка можно доказать [13] для определителя n-го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

В примере 3.2 рассмотрен треугольный определитель. Как было показано, он равен произведению элементов, находящихся на главной диагонали. При вычислении определителей высших порядков удобно с помощью свойств определителя привести его к определителю от треугольной матрицы.

Пример 3.3. Вычислить определитель из примера 3.1, приведя его к определителю от треугольной матрицы.

►Вычтем из второй строки определителя первую строку, к третьей отроке прибавим первую строку, умноженную на 2, а из последней – строки вычтем первую, умноженную на 3. Определитель при этом не изменится.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{vmatrix}.$$

Из третьей строки вынесем общий множитель 2, а из четвёртой строки вынесем множитель 3, после чего переставим местами вторую и третью строки, при этом определитель изменит знак:

$$\Delta = -6\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Из последней строки вычтем вторую, а из третьей строки вычтем вторую строку, умноженную на 3, после этого вынесем из последней строки общий множитель (-4) и переставим две последние строки, получим:

$$\Delta = -24\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -21 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить определитель от треугольной матрицы, осталось к последней строке прибавить третью, умноженную на 11:

$$\Delta = -24\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -24\,.$$ ◄

Теорема 3.3. Если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то $\det(A\cdot B) = \det A\cdot\det B$. Убедитесь в этом для матриц 3-го порядка.

§ 4. Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы к гл. 2. *Вычисление определителей*

4) Найдите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 23 \\ -3 & -90 \end{pmatrix}$.

5) Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

6) Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Ответы: 4) –111; **5)** a_{12} = 120; **6) а)** 74; **в)** 900.

Глава 3. Обратная матрица. Ранг матрицы

§ 1. Понятие обратной матрицы. Существование и единственность обратной матрицы. Присоединенная матрица

Определение 1.1. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Квадратная матрица B называется *обратной* для матрицы A, если $AB = BA = E$.

Для матрицы, обратной к матрице A, принято обозначение A^{-1}.

Определение 1.2. Квадратная матрица A называется невырожденной (*неособенной*), если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется вырожденной (*особенной*).

Теорема 1.1 (*о существовании и единственности обратной матрицы*). Всякая невырожденная квадратная матрица A n-го порядка имеет единственную об-
ратную матрицу A^{-1}, для которой справедливо равенство

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Определение 1.3. Матрица $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ из правой части соотношения (1.1), называется *присоединённой* по отношению к матрице A и обозначается $\tilde{A}$.

Формулу (1.1) можно переписать в виде: $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}$.

Замечание 1.1. Любой элемент $\tilde{a}_{ij}$ матрицы $\tilde{A}$ – это алгебраическое дополнение элемента a_{ji} (обратите внимание на индексы). Поэтому присоединенную матрицу $\tilde{A}$ можно получить из матрицы A так: заменить в матрице A каждый элемент его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать полученную матрицу (или совершить те же действия с матрицей A в обратном порядке).

Замечание 1.2. Вырожденная матрица не имеет обратной.

Пример 1.1. Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

►$\det A = -5\neq 0\Rightarrow$ матрица A неособенная и имеет обратную. Вычислим алгебраические дополнения её элементов.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}=3,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=2,\ A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&2\\3&0\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}=1,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&3\\1&1\end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\-1&3\end{vmatrix}=3.$$

Обратной матрицей является матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&2&-6\\1&-1&-2\\-4&-1&3\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку. Покажем, например, что $A^{-1}A=E$.

$$A^{-1}A=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&2&-6\\1&-1&-2\\-4&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&0\\1&1&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3-2-6&0+6-6&6+0-6\\1+1-2&0-3-2&2+0-2\\-4+1+3&0-3+3&-8+0+3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.◄$$

Свойства обратной матрицы

1) $\det A^{-1}/\det A$.

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3) $(A^{-1})^{-1}=A$.

4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$.

§ 2. Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы

Определение 2.1. *Минором* M_k матрицы A размера $m \times n$ ($k \le \min(m, n)$) называется определитель k-го порядка, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении любых её k строк с любыми k столбцами.

Пример 2.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Определить число её миноров 2-го порядка и найти какой-нибудь один из них.

►Очевидно, в соответствии с определением 5.1, данная матрица A мо-жет иметь несколько миноров данного порядка. Число N миноров второго порядка M_2 равно $N = N_1N_2$, где N_1 – число способов, которыми можно выбрать 2 строки из трёх, а N_2 – число способов, которыми можно выбрать 2 столбца из четырёх. Поскольку $N_1 = 3$, $N_1 = 6$, то $N = 18$. Одним из миноров M_2 будет, например, определитель $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении её первой и второй строк с третьим и четвёртым столбцами. ◄

Определение 2.2. *Базисным минором* матрицы A размера $m \times n$ называется любой её минор порядка r ($r \le \min(m, n)$), если он отличен от нуля, а все миноры порядка $(r+1)$ либо равны нулю, либо не существуют. Порядок базисного минора называется *рангом матрицы A*, а её строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются *базисными.*

Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.

Для ранга матрицы A приняты обозначения: $\text{rang}A$, $r(A)$. Ранг матрицы, имеющей только одну строку, равен 1.

Пример 2.2. Найти ранг матрицы A из примера 2.1.

►Ранг матрицы A равен 3, так как у нее есть минор $M_3 \ne 0$,

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \ne 0,$$

а миноров 4-го порядка она не имеет. ◄

Пример 2.3. Найти rang A, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

► $\exists M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \ne 0 \Rightarrow \text{rang}A \ge 2.$ Данная матрица имеет только один минор третьего порядка, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang}\, A = 2 \cdot$ ◄

Определение 2.3. Матрица называется ступенчатой, если для неё выполняются следующие условия:

если какая-либо строка данной матрицы состоит из нулей, то и все последующие строки также состоят из нулей;

если a_{ik} – первый ненулевой элемент i –той строки, а $a_{i+1,m}$ – первый ненулевой элемент $(i+1)$ – й строки, то $m > k$.

Матрица из одной строки считается по определению ступенчатой.

Теорема 2.1. Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Пример 2.4. Найти rang$A$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

►Матрица A – ступенчатая (см. определение 2.3), у нее три ненулевые строки, поэтому её ранг, в силу теоремы 2.1, равен 3. ◄

Определение 2.3. Элементарными преобразованиями строк матрицы называют следующие действия:

1-й тип преобразований– перестановка местами двух любых её строк;

2-й тип преобразований – сложение соответствующих элементов двух любых её строк, все элементы, одной из которых предварительно умножены на одно и то же число.

В результате этих действий сама матрица, конечно, изменяется.

Теорема 2.2. Любую матрицу A конечным числом элементарных преобразований первого и второго типов можно преобразовать в матрицу.

Можно доказать, что при элементарных преобразованиях строк ранг матрицы не изменяется, т. е. ранг полученной матрицы равен рангу исходной. Это утверждение вместе с теоремой 2.1 положено в основу вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований, при этом матрицу A преобразуют к ступенчатой форме A_1. Такая операция всегда возможна согласно теореме 2.2. Ранг A_1 определяется по теореме 2.1, а ранг матрицы A получают из равенства
rang$A$ = rangA_1.

Пример 2.5. Привести к ступенчатому виду матрицу $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 8\\ -1 & 3 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right)$.

►Выполним элементарные преобразования над матрицей $\boldsymbol{A^*}$:

1) к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой строки и из элементов 3-ей строки вычтем элементы 1-ой строки, в результате $\boldsymbol{A^*}$ преобразуется к виду: $A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -4\end{array}\right)$;

2) переставим вторую и третью строку: $A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 3 & 2 & 3\end{array}\right)$;

3) из последней строки полученной матрицы вычтем вторую строку, умноженную на 3, получим: $A^*\to A_1^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 5 & 15\end{array}\right)$.

Ранг этой матрицы равен 3.◄

Пример 2.6. Методом элементарных преобразований найти rang$A$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

►Выполним следующие элементарные преобразования:

1) переставим первую и вторую строки, после чего из четвёртой строки вычтем первую, а из второй – первую, умноженную на 2, получим
$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$
2) переставим вторую и третью строки, затем из третьей строки вычтем вторую, умноженную на 2, в полученной матрице переставим третью и четвёртую строки: $A\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix};$
3) из четвёртой строки вычтем третью, умноженную на 2,
$$A\to A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку A_1 – ступенчатая матрица, имеющая три ненулевых строки, то по теореме 5.1 rangA_1 = 3. Но тогда и rang$A$ = rang A_1 = 3.◄

§ 3. Линейная зависимость независимость системы матриц-строк (столбцов). Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Любую такую матрицу можно считать образованной из системы m матриц-строк длины n или из системы n матриц-столбцов длины m. Элементы системы матриц-строк или матриц столбцов будем называть *арифметическими векторами* или *векторами* и обозначать $\vec{x}$. Для элемента системы матриц-строк $\vec{x}_i=(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}),\ i=1,2,...,n.$ Для элемента системы матриц-столбцов $\vec{x}_j=(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})^T,\ j=1,2,...,m.$ Введем для этих систем понятия линейной зависимости и независимости.

Определение 3.1. *Линейной комбинацией* k матриц-строк (столбцов) называется строка (столбец), равная сумме произведений данных матриц-строк на произвольные вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Для линейной комбинации k матриц-строк $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ можно записать равенство:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{x}. \qquad (3.1)$$

Теорема 3.1. (*теорема о базисном миноре*). Любая строка (столбец) прямоугольной матрицы A является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).

§ 4. Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы к главе 3 по темам *«Обратная матрица. Ранг матрицы»*

7) При каком значении α матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной матрицы?

8) Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ найдите обратную матрицу A^{-1}.

9) Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответы: 7) $\alpha = 0{,}8$; **8)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix}$; **9)** $\mathrm{rang}A=2$.

Глава 4. Общая теория линейных систем

§ 1. Линейные системы. Основные понятия

1°. Основные понятия. Равносильные системы.

Определение 1.1. Система линейных алгебраических уравнений (или система линейных уравнений) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.1)$$

при этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ – *коэффициентами при неизвестных* или *коэффициентами системы*, причем индекс i означает номер уравнения в системе (1.1), а индекс k – номер неизвестного. Величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами*. Иногда систему (1.1) будем называть *линейной системой*.

Сопоставим системе (1.1) следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A – это матрица коэффициентов системы (матрица системы (1.1)), матрица X называется столбцом неизвестных, а матрица B – столбцом свободных членов. Вычислим произведение матриц A и X:

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Элементы столбца из правой части (1.2) – левые части уравнений си-стемы (1.1). Используя определение равенства двух матриц (определение 1.1, гл. 1), перепишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменяя в последнем соотношении его левую часть в силу (1.2) на AX, а правую – на B, приходим к соотношению

$$AX = B. \qquad (1.3)$$

Равенство (1.3) называется матричным уравнением, соответствующим системе (1.1). Решением матричного уравнения (1.3) называется столбец X, при подстановке в это уравнение обращающий его в матричное тождество.

Замечание 1.1. При условиях $m = n$ и $\det A \neq 0$, решение матричного уравнения (1.3) – это матрица $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A.

Если $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, то систему (1.1) называют квадратной. При $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ система (1.1) называется *однородной*, в *противном случае – неоднородной.*

Например, $\begin{cases} 3x-4y=5, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ – неоднородная квадратная линейная система из двух уравнений с двумя неизвестными x и y.

Определение 1.2. *Решением системы* (1.1) называется такой упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, который при подстановке в систему (1.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ превращает её в систему верных тождеств:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\ldots+a_{mn}\alpha_n=b_m. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Решение системы (1.1) принято обозначать следующим образом: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Определение 1.3. Система (1.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае. Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение и *неопределённой* в противном случае.

Пример 1.1. Система $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ имеет единственное решение $x=1$, $y=1$, поэтому является совместной определённой системой.

Пример 1.2. Система $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ -6x+8y=2 \end{cases}$ имеет более одного решения, например, её решениями являются: $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=7/4$; $x=5$, $y=4$. Эта система является совместной неопределённой системой.

Пример 1.3. Система $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ -6x+8y=7 \end{cases}$ не имеет решений, то есть является несовместной.

Решить систему (1.1) – это значит найти все её решения или доказать, что она не имеет решений. Для этого систему преобразуют в более простую, решения которой легко найти или доказать её несовместность. При этом центральным понятием является равносильность двух систем.

Определение 1.4. Две линейные системы с неизвестными x_1, …, x_n называются *равносильными*, если они обе несовместны, или же они обе совместны и каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

Пример 1.4. Системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0 \end{cases}$ являются равносильными, так как $x = 1$, $y = 1$ является решением и той и другой системы, а других решений они не имеют.

Пример 1.5. Системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 3x-4y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=0 \end{cases}$ также являются равносильными, поскольку обе они несовместны.

Число уравнений в равносильных совместных системах может быть различным, но они должны содержать одни и те же неизвестные.

2°. Теорема об элементарных преобразованиях в системе линейных уравнений.

Определение 1.5. *Элементарными преобразованиями* над системой линейных уравнений вида (1.1) называются:

1) перестановка местами двух любых её уравнений;

2) умножение всех членов любого уравнения системы на любое отличное от нуля число;

3) почленное сложение любых двух её уравнений.

На практике обычно объединяют последние два элементарных преобразования в одно и рассматривают два основных типа:

первый тип – перестановка местами уравнений системы;

второй тип – почленное сложение двух любых её уравнений, все члены одного из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Теорема 1.1. Конечное число последовательно выполненных элементарных преобразований первого и второго типов приводят систему (1.1) к равносильной ей системе.

Пример 1.6. Показать, что при помощи элементарных преобразований можно из системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ получить систему $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$

►Проведём последовательно такие элементарные преобразования:

1. Умножим 1-ое уравнение исходной системы на 3, а 2-ое – на 7, получим равносильную систему $\begin{cases} 9x-12y=-3, \\ 14x+35y=49. \end{cases}$

2. К 1-му уравнению прибавим 2-ое: $\begin{cases} 23x+23y=46, \\ 14x+35y=49. \end{cases}$

3. 1-ое уравнение умножим на 1/23, а 2-ое – на 2/7: $\begin{cases} x+y=2, \\ 4x+10y=14. \end{cases}$

4. Ко 2-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на (–7): $\begin{cases} x+y=2, \\ -3x+3y=0. \end{cases}$

5. 2-ое уравнение умножим на (–1/3): $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$ ◄

§ 2. Расширенная матрица системы. Метод Гаусса

Если к матрице A системы линейных алгебраических уравнений (1.1) добавить $(n+1)$-й столбец свободных членов системы (1.1), то получим так называемую расширенную матрицу системы A^*, содержащую всю информацию о системе: $A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

В примере 1.1 матрицей системы является $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, а расширенной матрицей – матрица $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{array}\right)$.

Двум типам элементарных преобразований системы (1.1) отвечают два типа элементарных преобразований строк матрицы A^* (см. § 2 гл. 3). На практике элементарным преобразованиям подвергают не саму систему, а её расширенную матрицу. Целью элементарных преобразований является приведение расширенной матрицы A^* системы (1.1) к ступенчатой форме.

На приведении расширенной матрицы A^* системы (1.1) к ступенчатой матрице $A_1{}^*$ основан *метод Гаусса*, или метод последовательного исключения неизвестных. Система линейных уравнений со ступенчатой расширенной матрицей называется ступенчатой, по теореме 1.1 она будет равносильной системе (1.1). Приведение системы (1.1) к ступенчатой форме называется *прямым ходом* метода Гаусса. Решение полученной ступенчатой системы называется *обратным ходом* метода Гаусса. Он может быть выполнен как в форме последовательного определения неизвестных, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, так и, в случае совместной неопределенной системы, с помощью выделения так называемых свободных неизвестных, через которые, также последовательно, начиная с последнего уравнения, выражаются все остальные неизвестные, и записывается множество всех решений системы (ее *общее решение*, где свободные неизвестные могут принимать любые значения).

Пример 2.1. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x+2z=8, \\ -x+3y=-5, \\ x+y+z=4. \end{cases}$

► $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Прямой ход метода Гаусса. В примере 2.5. гл. 3 матрица A^* элементарными преобразованиями приводится к ступенчатой матрице

$A_1^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$.

Теперь матрице A_1^* сопоставим систему, для которой она будет расширенной матрицей: $\begin{cases} x \quad + \quad 2z=8, \\ \qquad y-z=-4, \\ \qquad\quad 5z=15. \end{cases}$

Обратный ход метода Гаусса. Решаем полученную систему:
$z=3$; $y=-4+z=-4+3=1$; $x=8-2z=8-6=2$.

Ответ: система совместная и определенная, она имеет единственное шение $x=2$, $y=-1$, $z=3$.◄

§ 3. Крамеровские системы. Теорема Крамера

Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Система (3.1) называется *квадратной*. Матрица A этой системы – квадратная матрица n-го порядка, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы A называется *главным определителем* системы и обозначается Δ. Таким образом, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Наряду с главным определителем системы Δ рассмотрим так называемые *вспомогательные определители* Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые получаются из главного путём замены его i-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 3.1 (*теорема Крамера*). Если главный определитель Δ системы (3.1) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, определяемое равенствами

$$x_i = \Delta_i / \Delta, \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.2)$$

Равенства (3.2) называются *формулами Крамера*, а система (3.1) при $\Delta \neq 0$ называется *крамеровской системой*.

Пример 3.1. Используя формулы Крамера, решить систему

$$\begin{cases} x + 2z = 8, \\ -x + 3y = -5, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

►Для отыскания решения системы по формулам (3.2) найдем опреде-лители Δ_x, Δ_y, Δ_z, получающиеся из Δ путем замены его первого, второго и третьего столбцов соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 + 2(-5 - 12) = -10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2(-4 + 5) + (-5 + 8) = 5,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 5 + 8(-1 - 3) = -15.$$

Теперь находим решение системы по формулам (3.5):

$$x = \Delta_x/\Delta = 2,\ y = \Delta_y/\Delta = -1,\ z = \Delta_z/\Delta = 3. ◄$$

Замечание **3.1.** При доказательстве теоремы Крамера используется обратная матрица коэффициентов системы A, позволяющая выразить решение крамеровской системы в матричной форме:

$$X = A^{-1}B, \tag{3.3}$$

где A^{-1} – матрица, обратная к матрице системы A, а B – столбец свободных членов.

Пример 3.2. Используя матричную форму записи, решить систему уравнений из примера 3.1.

►Пусть A – матрица системы, B – столбец свободных членов, а X – столбец из неизвестных: $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Рассматриваемой системе соответствует уравнение (3.3), где матрицы A и B имеют указанный смысл.

Матрица A имеет обратную ($\Delta A \neq 0$), $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&2&-6\\1&-1&-2\\-4&-1&3\end{pmatrix}$. С помощью (3.3) найдём решение системы: $X=A^{-1}B=$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&2&-6\\1&-1&-2\\-4&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\cdot 8+2\cdot(-5)+(-6)\cdot 4\\1\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+(-2)\cdot 4\\-4\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+3\cdot 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-10\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Итак, система имеет единственное решение $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.◄

Замечание 3.2. Итак, систему уравнений с квадратной неособенной матрицей (крамеровскую систему) можно решать тремя способами: методом Гаусса, по формулам Крамера, с использованием обратной матрицы (по формуле (3.3) настоящего параграфа).

§ 4. Совместность систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases} \tag{4.1}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\qquad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right) \tag{4.2}$$

Теорема 4.1 (*теорема Кронекера-Капелли*). Для того, чтобы система (4.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A системы (4.1) был равен рангу расширенной матрицы A^* этой системы: $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^*$.

Замечание 4.1. Пусть $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^* = r$. Тогда, если $r = n$, то система является совместной и определенной, а если $r<n$, то система является сов-местной, но неопределенной .

Замечание 4.2. Кронекер Л. – немецкий математик (1823–1891), Капелли А. – итальянский математик (1855–1910).

§ 5. Примеры анализа систем линейных уравнений и их решения с использованием теоремы Кронекера-Капелли

Пример 5.1. Исследовать систему уравнений $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3=2. \end{cases}$

►Рассмотрим расширенную матрицу этой системы

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right). \qquad (5.1)$$

Первые три столбца этой матрицы образуют матрицу A – матрицу коэффициентов системы. Для приведения ее к ступенчатому виду подвергнем A^* следующим элементарным преобразованиям. Переставим 1-ю и 2-ю строки, затем

последовательно умножим 1-ую строку на (–2) и на (–3) и сложим со 2-ой и 3-ей строками, после чего из 3-ей строки вычтем 2-ую:

$$A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=A_1^*. \qquad (5.2)$$

Матрица A при этом преобразуется в матрицу A_1, составленную из первых трёх столбцов матрицы A_1^*. Матрица A_1^* имеет 3 ненулевых строки, поэтому её ранг равен 3. У матрицы A_1 только две ненулевых строки её ранг равен 2. Итак, $\mathrm{rang}A_1 \neq \mathrm{rang}A_1^*$. В соответствии с теоремой Кронекера – Капелли заключаем, что система несовместна.◄

Пример 5.2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=7, \\ x_1-2x_2+x_3=-4, \\ 4x_1-2x_2-x_3=1. \end{cases}$

►Выпишем расширенную матрицу этой системы A^*

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

и подвергнем её элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа 2, 1, 4 и вычтем её последовательно из второй, третьей и четвёртой строк, после чего поменяем местами вторую и третью строки, получим

$$A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right).$$

Умножим теперь вторую строку на числа 3, 2 и сложим её последовательно с третьей и четвёртой строками, получим

$$A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Наконец, умножим вторую строку на (-1), третью строку вычтем из четвёртой, после чего умножим третью строку на $(-1/5)$, получим

$$A^*\to A_1^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует система $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=-2, \\ \qquad x_2 \qquad =2, \\ \qquad\qquad x_3=-1, \end{cases}$ которая является крамеровской, так как её главный определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Она имеет единственное решение $x_1=1, x_2=2, x_3=-1$. ◄

Пример 5.3. Исследовать и найти все решения системы

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2, \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=5, \\ 3x_1-2x_2+5x_3-4x_4=7, \\ x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$$

►Выпишем расширенную матрицу системы $A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

Подвергнем матрицу A^* элементарным преобразованиям. Умножим 1-ую строку на числа (–2) и (–3) и сложим последовательно со 2-ой и 3-ей строкой, получим

$$A^* \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем теперь вторую строку из третьей и четвертой:

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует следующая система: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$ равносильная данной. Неизвестные x_1, x_2 примем за *базисные,* а неизвестные x_3, x_4 – за *свободные*. Перенесём члены со свободными неизвестными в правые части уравнений последней системы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - x_3 + x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_3 + x_4. \end{cases}$

Отсюда имеем $\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_3 + x_4, \\ x_1 = 2 - x_3 + x_4 + x_2 = 3 - 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

Приняв обозначения $x_3 = C_1 \in \mathbf{R}$, $x_4 = C_2 \in \mathbf{R}$, получаем совокупность всех решений данной системы в виде: $\begin{cases} x_1 = 3 - 3C_1 + 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 + C_2, \\ x_3 = C_1 \in \mathbf{R}, \\ x_4 = C_2 \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Это общее решение исходной системы. ◄

Решение системы (4.1), не совпадающее с тривиальным, называется ненулевым. Если однородная система является крамеровской или равносильна такой системе, то ее нулевое решение единственно. В противном случае наряду с нулевым она имеет бесчисленное множество ненулевых решений.

Пример 5.4. Дана система: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + \beta x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ Найти значения параметра β, при которых: а) нулевое решение этой системы единственно;

б) данная система имеет ненулевые решения.

►Данная система является квадратной. Вычислим её главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & \beta & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & \beta-6 & 5 \end{vmatrix} = -25 - 5\beta + 30 = 5(1-\beta).$$

а) Нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ единственно, если $\Delta \neq 0$. Это условие выполняется в случае $\beta \neq 1$.

б) Поскольку система имеет ненулевые решения при $\Delta = 0$, то для параметра β получаем условие $\beta = 1$.◄

§ 6*. Модель межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса (МОБ) – это метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры был применен впервые в 30- х гг. лауреатом Нобелевской премии американским экономистом русского происхождения В. В. Леонтьевым (1906—1999) для изучения макроструктуры экономики США. Первый МОБ был в США в 1936 г.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. Чистая отрасль – это условное понятие – некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная (например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т. п.) [19].

Пусть x_i − общий объем продукции i-ой отрасли (за данный промежуток времени, например, за год – валовой продукт i-ой отрасли). Далее x_{ij} – объем продукции i-ой отрасли, расходуемый в j-ой отрасли (выплата зарплаты и налогов, предпринимательская прибыль, инвестиции и т. п.). Ясно, что

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Равенства (6.1) называют соотношениями баланса.

Перейдем теперь к стоимостному межотраслевому балансу. Пусть $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ − затраты продукции i-ой отрасли, расходуемые на производство одной единицы продукции j-ой отрасли. Числа a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$ называются коэффициентами прямых затрат j-ой отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Число x_i / y_i есть доля продукции i-ой отрасли, идущая на непроизводственное потребление. Введем в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Назовем эту матрицу *матрицей прямых затрат*. Ее элементы определяются используемой технологией производства, которую будем на данном промежутке времени считать неизменной (эту матрицу называют также и *технологической* матрицей). Таким образом, элементы матрицы A постоянны. Но тогда, предполагая, что материальные издержки пропорциональны объему выпускаемой продукции (линейность используемой технологии), получаем

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \; i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.3}$$

И соотношения баланса (6.1) принимают вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} + y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.4}$$

Полагая $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ (матрицы-столбцы), равенства (6.4) запишем в матричном виде:

$$X = AX + Y. \tag{6.5}$$

Равенство (6.5) называется *уравнением Леонтьева*.

Замечание 6.1. Все элементы матриц A, X неотрицательны, что вытекает из их экономического смысла.

Замечании 6.2. Y – это матрица-столбец, каждый элемент которой равен доходу отрасли, т. е. разности объема денежных средств, полученных от реализации выпущенной продукции, и средств, затраченных на ее производство. Из (6.5) находим $Y = X - AX$, или

$$Y = (E - A)X. \tag{6.6}$$

Соотношения (6.5) и (6.6) позволяют прогнозировать цены на продукцию отраслей и изменение цен вследствие изменений в одной (или нескольких) из отраслей. Приведем несколько примеров (объемы выпуска продукции и доходы приведены в млн рублей).

Пример 6.1. Рассмотрим экономическую систему из 2 фирм. Пусть $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ – матрица выпуска продукции (за год) фирмами 1 и 2, $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат. Тогда доходы каждой фирмы описываются матрицей

$$Y = X - AX = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.2. Перед каждой из фирм 1 и 2 была поставлена задача повышения прибыли, т. е. чтобы матрица доходов имела вид $Y = \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \end{pmatrix}$. Как надо увеличить (изменить) объем выпускаемой продукции фирмами 1 и 2 для достижения такого результата?

►Соотношение (3.1) разрешить относительно матрицы X:

$$X = (E - A)^{-1}\, Y. \tag{3.7}$$

Находим последовательно:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,3 & 0,9 \end{pmatrix},\ (E - A)^{-1} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix},$$ отсюда

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 170 \end{pmatrix}. ◄$$

Замечание 6.3. Модель Леонтьева *продуктивна* (применима), если уравнение $X = AX + Y$ имеет неотрицательное решение (такое, что все компоненты столбца-решения X неотрицательны) для любой неотрицательной матрицы-столбца Y, т. е. матрица A позволяет произвести любую «неотрицательную матрицу Y» доходов. Для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица $E-A$ имела обратную, все элементы которой были бы неотрицательны.

Пример 6.3. Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$ продуктивной? Нет, так как все элементы матрицы $(E - A)^{-1} = \dfrac{100}{9}\begin{pmatrix} -0,2 & -0,3 \\ -0,35 & -0,3 \end{pmatrix}$ отрицательны.

Задачи для самостоятельной работы к главе 4 по темам
«Решение линейных системы. Теорема Кронекера-Капелли»

10) Решите систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

11) Решите систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

12) Исследуйте на совместность систему уравнений (методом Гаусса или, используя теорему Кронекера – Капелли). Если она совместна, решите её:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$$

13)* Рассмотрим экономическую систему, состоящую из 2 фирм. Пусть $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ – матрица выпуска продукции фирмами 1 и 2, $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.3 \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат. Найдите доходы каждой фирмы.

14)* Перед каждой из фирм 1 и 2 была поставлена задача повышения прибыли, т. е. чтобы матрица доходов имела вид $Y = \begin{pmatrix} 70 \\ 120 \end{pmatrix}$. Для достижения результата как надо увеличить выпуск продукции фирмами 1 и 2?

15)* Будет ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 \end{pmatrix}$ продуктивной?

Ответы: 10) $x_1 = 2x_2$, x_2 – любое число, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. 11) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

12) Система несовместна. **13)** $Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$. **14)** $X = (E - A)^{-1} \cdot Y = \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix}$.

15) Нет, так как матрица $(E - A)^{-1} = \frac{100}{9} \begin{pmatrix} -0.2 & -0.3 \\ -0.35 & -0.3 \end{pmatrix}$ не будет положительной.

Глава 5. Проверьте себя!

§ 1. Контрольные вопросы и задачи к разделу 1

Вар. 00	Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений
1	Даны две матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{32} матрицы $C = 3A - 4B - 2E$, где E – единичная матрица
2	Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{22} матрицы $C= A^2$.
3	Укажите элемент a_{25}^T матрицы A^T, транспонированной по отношению к матрице $A = \begin{pmatrix}7 & -14 & 21 & -28\\ 14 & -27 & 41 & -57\\ 35 & -69 & 104 & -141\\ -7 & 13 & -20 & 29\\ -21 & 40 & -61 & 86\end{pmatrix}$.
4	Найдите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 25\\ -4 & -95\end{pmatrix}$.
5	Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$.
6	Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$ найдите элемент $a_{21}{}^{-1}$ обратной матрицы A^{-1}.
7	При каком значении α матрица $B=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$ не имеет обратной матрицы?
8	Решите систему уравнений: $\begin{cases}29x-31y=178,\\ -2x+18y=-44.\end{cases}$ В ответе укажите сумму $x+y$.
9	Решите систему уравнений: $\begin{cases}-3x_1+5x_2+6x_3=-8,\\ 3x_1+x_2+x_3=-4,\\ x_1-4x_2-2x_3=-9.\end{cases}$ В ответе укажите x_3.

10	Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ В ответе укажите значение отношения x_1 / x_2.	

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ТЕСТА

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
-7	7	40	-193	120	-2,5	0,8	2	-6	-1/13

Контрольные вопросы по разделу 1

1. Напишите расширенную матрицу системы из двух линейных уравнений с тремя неизвестными: $x = 1$, $y - z = 0$.
2. Совместна ли система $x + y = 1$, $2x + 2y = 4$?
3. Какая система линейных уравнений называется квадратной?
4. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
5. Дайте понятия определителей 2-го и 3-го порядков.
6. Напишите квадратную матрицу A 3-го порядка в общем виде. Какие элементы находятся на главной диагонали $\det A$? На его побочной диагонали? Сформулируйте правило Саррюса для вычисления определителя 3-го порядка.
7. Дайте понятие определителя n-порядка и перечислите его свойства.
8. Какие две матрицы называются равными? Равны ли матрицы A и B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
9. Дайте определение действия сложения матриц. Можно ли сложить две матрицы с размерами 2×3 и 3×2?
10. Даны матрицы $A_{k \times l}$ и $B_{m \times n}$. При каких соотношениях между числами k, l, m, n операции сложения и умножения определены для данных матриц одновременно?
11. Матрица A имеет размерность 3×4. Какой размерности должна быть матрица B, чтобы было определено произведение: а) AB? б) BA? в) B^2A? г) AB^2?
12. Дана матрица A. В каком случае справедливо равенство $A^T = A$?
13. Докажите, что всегда определены произведения AA^T и A^TA.
14. Известно, что для матрицы A выполняется равенство: $(1\ \ 2\ \ 3)\, A = (0, 1)$. Каковы размеры матрицы A?
15. Дайте понятие единичной матрицы. Какая из матриц: а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является единичной?
16. Известно, что $\det A_{5 \times 5} = 3$. Чему равен: а) $\det 2A$; б) $\det A^T$; в) $\det A^{-1}$?

17. Найдите det(ABC), если A, B, C – квадратные матрицы одного порядка, при этом одна из них вырожденная.

18. Докажите, что если $A^2 = A$, то матрица $B = 2A - E$ удовлетворяет условию $2B = E$.

19. Какими должны быть матрицы A, B, C, чтобы было определено выражение: а) $(AB)C$; б) $(A+B)C$; в) $A(B+C)$; г) $A^2(BC)$; д) $(A^2+2B)C$?

20. Пусть A и B – две квадратные матрицы. Докажите, что суммы элементов, находящихся на главной диагонали, для матриц AB и BA равны.

21.Какая матрица всегда имеет обратную? Сколько обратных матриц она имеет? Как найти обратную матрицу?

22. Решите в матричном виде уравнение $AXC + D = F$, где A, C, D, F – данные матрицы (какая у них должна быть размерность?), X – искомая матрица.

23. При каких значениях параметра λ система $\begin{cases} x + \lambda y - 4z = -1, \\ \lambda x + y - 3z = 0, \\ x - y + z = 1, \end{cases}$ а) совместна и определённа? б) совместна и неопределённа? в) несовместа?

24. В каком случае однородная система линейных уравнений имеет неулевые решения? её нулевое решение единственно?

25. Понятие ранга матрицы.

§ 2. Контрольная работа (ИДЗ) по разделу 1 «Линейная алгебра»

Студент должен уметь:

1. Вычислять определители 2-го, 3-го и старших порядков.
2. Находить сумму, разность, произведение матриц.
3. Находить ранги матриц.
4. Решать произвольные системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
5. Решать квадратные системы методом Крамера.
6. Анализировать совместность систем, применяя теорему Кронекера-Капелли.

Задание первое. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

Задание второе. Дана однородная система из трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Требуется: 1) Исследовать систему по теореме Кронекера-Капелли. 2) Найти множество решений системы.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 1.5x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 25x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Задание третье. В задачах 1–10 решить две системы методом Гаусса.

1.

$\{3x_2 + 9x_3 + 24x_4 = 24\{-2x_1 + 7x_2 + 23x_3 + 66x_4 = 66\{-x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 26x_4 = 26$

$$\begin{cases} 6x_1 - 21x_2 + 48x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 7x_2 - 16x_3 - x_4 = 0 \\ -6x_1 + 27x_2 - 60x_3 - 9x_4 = 0 \\ 4x_1 - 17x_2 + 38x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 6x_1 - 21x_2 + 48x_3 + 3x_4 = -51 \\ -2x_1 + 7x_2 - 16x_3 - x_4 = 17 \\ -6x_1 + 27x_2 - 60x_3 - 9x_4 = 69 \\ 4x_1 - 17x_2 + 38x_3 + 5x_4 = -43 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_2 + 9x_3 + 24x_4 = 0 \\ -2x_1 + 7x_2 + 23x_3 + 66x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 26x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 - 16x_4 = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_3 + 10x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 16x_4 = 16 \\ -2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 28x_4 = 28 \\ -5x_1 + 9x_3 + 22x_4 = 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 18x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 22x_3 - 36x_4 = -12 \\ 5x_1 + 9x_2 + 19x_3 - 33x_4 = 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 18x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 1 \\ 8x_1 + 6x_2 + 22x_3 - 36x_4 = -4 \\ 5x_1 + 9x_2 + 19x_3 - 33x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + 4x_3 + 10x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 16x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 28x_4 = 3 \\ -5x_1 + 9x_3 + 22x_4 = 0 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -14 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -7 \\ 6x_1 - 9x_2 - 15x_3 = 39 \\ -6x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 6x_4 = -30 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_2 - 9x_3 - 21x_4 = -30 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -8 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 22x_4 = 28 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} -3x_2 - 9x_3 - 21x_4 = -30 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 22x_4 = 28 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -7 \\ 6x_1 - 9x_2 - 15x_4 = 39 \\ -4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4 = -15 \\ -6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 12x_4 = -30 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} -4x_1 + 8x_2 + 20x_3 - 12x_4 = -16 \\ -2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 - 11x_3 + 8x_4 = 9 \\ -6x_1 + 12x_2 + 30x_3 - 18x_4 = -25 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 17x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 22x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 38x_4 = -10 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 17x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 22x_3 + 7x_4 = -5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 38x_3 + 9x_4 = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 - 20x_3 + 12x_4 = 16 \\ -2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 - 11x_3 + 8x_4 = 9 \\ -6x_1 + 12x_2 + 30x_3 - 18x_4 = -24 \end{cases}$$

9. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 10x_4 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 6 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 12x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_2 + x_3 + 5x_4 = -4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 9x_3 - 31x_4 = 22 \\ 3x_1 - x_2 + 13x_3 + 38x_4 = -22 \\ 5x_1 - 5x_2 + 23x_3 + 74x_4 = -48 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1 + x_3 + 5x_4 = -5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 31x_4 = 22 \\ -x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 38x_4 = -22 \\ -5x_1 + 5x_2 + 23x_3 + 74x_4 = -48 \end{cases}$ $\begin{cases} 8x_1 - 16x_2 - 8x_3 + 40x_4 = 32 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 12x_4 = 9 \\ 6x_1 - 12x_2 - 6x_3 + 30x_4 = 24 \end{cases}$

Раздел 2. **ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА**

ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения в векторной алгебре являются векторные величины (векторы) и действия с ними. Примерами таких величин могут служить скорость и ускорение движущейся точки, сила и т. п. Они характеризуются не только своими численными значениями, но и направленностью.

Начальные сведения о векторах и некоторых действиях с ними (сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов) содержатся в школьном курсе элементарной математики. Изучение свойств операций с векторами приводит к алгебраизации геометрических высказываний, т.е. к замене геометрических утверждений некоторыми векторными равенствами. Введение понятия координат вектора заменяет действия с векторами действиями с числами. Построенная таким образом теория, называемая «векторная алгебра», служит математическим аппаратом для построения аналитической геометрии и других разделов математики, а также имеет многочисленные приложения в физике, теоретической механике и различных технических дисциплинах.

На основе понятия прямоугольного базиса вводится прямоугольная декартова система координат, названная именем великого французского учёного Р. Декарта (1596 – 1650). В дальнейшем (см. раздел 3) она служит основой для построения аналитической геометрии.

Краткая характеристика раздела 2

1°. Темы разделов. Геометрические векторы и операции с ними. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Базис множества векторов. Декартова прямоугольная система координат.

2°. Базисные понятия. Геометрический вектор, линейные операции с векторами. Базис на плоскости и в пространстве. Скалярное произведение векторов.

3°. Основные задачи. Выполнение операций над векторами. Изучение взаимного расположения векторов.

Глава 1. **Геометрические векторы и операции с ними**

§ 1. Понятие вектора. Равные векторы. Коллинеарные и компланарные векторы

Определение 1.1. Геометрическим вектором (или вектором) называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом. Начало вектора называют также точкой его приложения.

Если точки A и B – начало и конец данного вектора, то сам вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1.1). Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, т. е. масштаб. Длиной вектора или его модулем, называется длина отрезка, образующего вектор. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Определение 1.2. Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины.

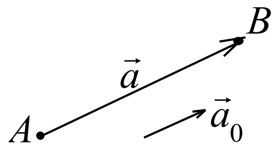


Рис. 1.1. Изображение векторов

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* или *нуль-вектором*. Нуль-вектор не имеет определённого направления, а его модуль равен нулю. Можно считать все нуль-векторы равными и ввести для них единое обозначение: $\vec{0}$.

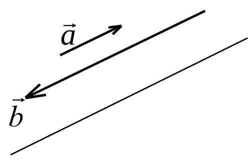


Рис. 1.2. Коллинеарные

Определение 1.3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой, или на параллельных прямых (рис. 1.2).

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используется символ параллельности: $\vec{a} \| \vec{b}$.

Определение 1.4. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются *компланарными*, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

Определение 1.5. Вектор, коллинеарный данному вектору $\vec{a}$, одинаково направленный с ним и имеющий единичную длину, называется *ортом* $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}_0$ (рис. 1.1).

§ 2. Линейные операции с векторами

К линейным операциям с векторами относятся сложение векторов и умножение вектора на вещественное число.

Определение 2.1 (*сложение векторов по правилу треугольника*). Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 2.1).

Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ можно также получить по *правилу параллелограмма*, пост-роив на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, параллелограмм (рис. 2.3). Понятие суммы двух векторов обобщается на случай сложения *n* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (рис. 2.2).

Определение 2.2. *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (рис. 2.5). Обозначение: $\vec{a}-\vec{b}$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Из определений 2.2 и 2.1 следует, что разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к общему началу, представляет собой вектор, идущий из кон-ца вектора $\vec{b}$ (вычитаемого) в конец вектора $\vec{a}$ (уменьшаемого) (рис. 2.5).

Определение 2.2. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими тремя условиями:

1) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, если $\lambda>0$, и противонаправлены, если $\lambda<0$.

Для введённой операции применяется обозначение: $\lambda\vec{a}$, т.е. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

При $\vec{a}=\vec{0}$ или $\lambda=0$ из условия 1 следует $|\lambda\vec{a}|=0$, т. е. $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

При $\lambda=\frac{1}{|\vec{a}|}$ получаем вектор $\vec{b}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0-$ орт вектора $\vec{a}$. Противоположный вектор $(-\vec{a})=(-1)\cdot\vec{a}$.

Теорема 2.1 (*свойство коллинеарных векторов*). Для того, чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{b}=\lambda\vec{a} \tag{2.1}$$

при некотором вещественном λ.

Число λ в (3.1) можно найти из соотношения $\lambda=\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, где знак «+» выбирается в случае, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) и знак «–», если они противонаправлены ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Свойства линейных операций с векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативное или переместительное свойство).

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативное или сочетательное свойство).

3. Существует единственный вектор, равный нуль-вектору $\vec{0}$ такой что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

4. Для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный вектор $(-\vec{a})$, называемый *противоположным*, такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

5. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

6. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (свойство ассоциативности относительного скалярного

множителя);
7. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (свойство дистрибутивности умножения вектора на сумму вещественных чисел);
8. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (свойство дистрибутивности умножения вещественного числа на сумму векторов).

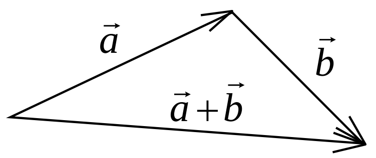


Рис. 2.1. Иллюстрация к понятию суммы векторов

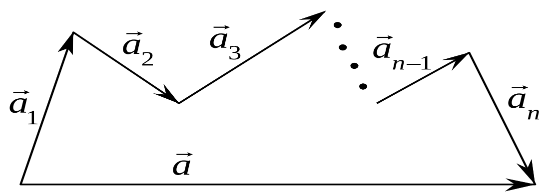


Рис. 2.2. Сложение векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

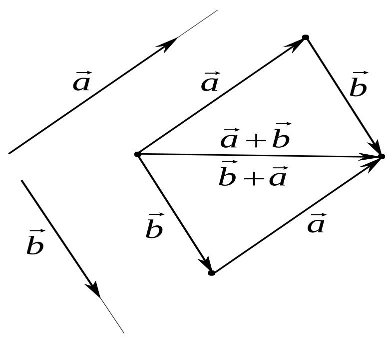


Рис. 2.3. Сложение векторов по правилу параллелограмма

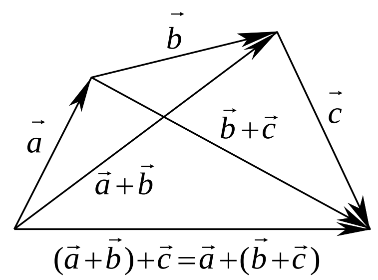


Рис. 2.4. Иллюстрация ассоциативного свойства сложения векторов

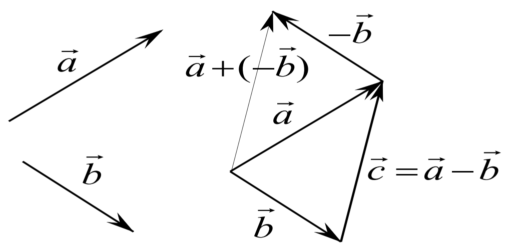


Рис. 2.5. Разность векторов

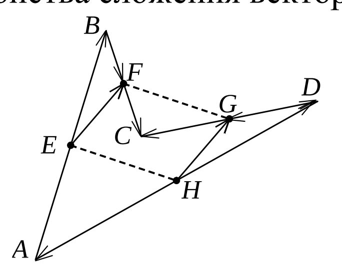


Рис. 2.6. Иллюстрация к примеру 2.1

Пример 2.1. Показать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

►Обозначим середины сторон четырехугольника *ABCD* буквами *E, F, G, H* (рис. 2.6). Для вектора $\overrightarrow{EF}$ имеем равенство: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$. Аналогично $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$. Так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, то $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{HG}=\vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Последнее равенство означает равенство длин и параллельность двух противолежащих сторон четырехугольника *EFGH*. Поэтому, как известно из планиметрии, он является параллелограммом.◄

§ 3. Базис множества векторов. Прямоугольная система координат

Определение 3.1. Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ из множества V_3 всех векторов пространства называется базисом в V_3 в пространстве.

Любой вектор $\vec{a}$ из V_3 единственным образом представим в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,\quad x,\ y,\ z \in R. \tag{3.1}$$

Особую роль в аналитической геометрии играет так называемый *прямоугольный базис*, в нем векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения: $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ называются ортами прямоугольного базиса. С прямоугольным базисом связано понятие о прямоугольной декартовой системе координат.

Замечание 3.1. Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ из множества V_2 всех векторов плоскости.

Определение 3.3. *Прямоугольной декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность некоторой точки O и прямоугольного базиса. Точка O называется *началом координат*; прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении ортов базиса, называются *координатными осями – абсцисс*, *ординат* и *аппликат* соответственно (рис. 3.1). Плоскости, проходящие через какие-либо две координатные оси, называются *координатными плоскостями* Oxy, Oyz и Oxz. *Прямоугольными координатами произвольной точки* M пространства называются координаты её радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном прямоугольном базисе (рис. 3.1). Их пишут в скобках после обозначения точки: $M(x, y, z)$, x называется *абсциссой*, y – *ординатой*, а z – *аппликатой* точки M.

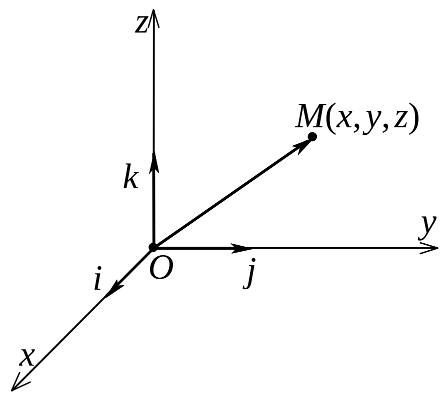


Рис. 3.1. Прямоугольный базис и прямоугольная декартова система координат

Выбранное определение прямоугольных координат точки пространства устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками вещественных чисел (x, y, z).

Пусть заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, для вектора $\overrightarrow{AB}$ имеем:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}\ . \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. Координаты вектора в прямоугольном базисе часто пишут в скобках после обозначения вектора. Например,

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Замечание 3.2. Аналогичным образом строится прямоугольная система координат на плоскости.

§ 4. Скалярное произведение двух векторов

Определение 4.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначать так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, иногда $(\vec{a},\vec{b})$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

где $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение применяется для вычислении работы A, затрачиваемой при движении материальной точки из положения P_1 в положение P_2 в поле действия силы $\vec{F}$,

$$A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}. \tag{4.1}$$

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность);
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность);
3) $\vec{a}\cdot(\lambda\,\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;
5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Замечание 4.1. Свойства 3 – 4 называются *линейными свойствами* скалярного произведения.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в прямоугольном базисе

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\end{aligned} \tag{4.2}$$

то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{4.3}$$

В частном случае, при $\vec{a}=\vec{b}$, имеем $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, т. е.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) дает выражение для длины вектора $\vec{a}$ через его координаты. В частности, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и, следовательно, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ (см. (3.5), гл. 1), то

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) – это формула для определения расстояния между точками A и B по известным прямоугольным координатам этих точек.

Из определения 4.1 с учетом (4.3) и (4.4) следует формула для косинуса угла между данными векторами:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4.6}$$

Полагая в (4.6) поочередно $\vec{b} = \vec{i},\ \vec{b} = \vec{j},\ \vec{b} = \vec{k}$, получим формулы для *направляющих косинусов* вектора $\vec{a}$, под которыми понимают косинусы углов с осями прямоугольной системы координат. Имеем

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}\,|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}\,|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$$\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{k}}) = 1.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ – это координаты его орта $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Пример 4.1. Точки $A(1, –1, 0)$, $B(3, –3, 1)$, $C(2, 1, 2)$ – вершины треугольника. Найти его внутренний угол при вершине B.

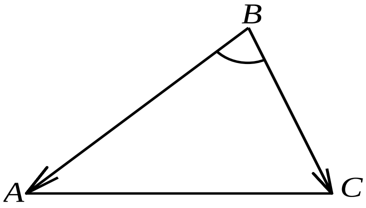


Рис. 4.1. К примеру 4.1

►Угол треугольника ABC при вершине B образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 4.1). Их координаты вычислим по формуле (3.5): $\overrightarrow{BC} = (-1, 4, 1)$, $\overrightarrow{BA} = (-2, 2, -1)$, а их длины по формуле (1.5): $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$.

Для $\cos B$ в силу (2.4) имеем: $\cos\hat{B} = \dfrac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{(-2)(-1) + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 1}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

отсюда угол $B = \pi/4$.◄

Пример 4.2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 2\pi/3$.

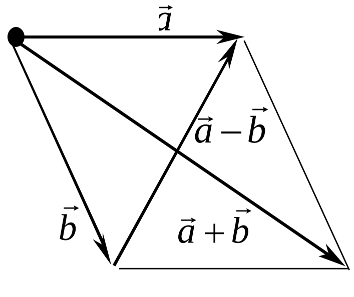


Рис. 4.2. К примеру 4.2

►Длины диагоналей параллелограмма равны $|\vec{a}+\vec{b}\,|$ и $|\vec{a}-\vec{b}\,|$ (рис. 4.2), $\vec{a}+\vec{b} = 5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{a}-\vec{b} = \vec{p}+3\vec{q}$. По свойству 5 $|\vec{a}+\vec{b}\,| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$, поэтому $|\vec{a}+\vec{b}\,| = \sqrt{(5\vec{p}+\vec{q})^2} = \sqrt{25\vec{p}^2 + 10\vec{p}\vec{q} + \vec{q}^2}$. Поскольку $\vec{p}\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 4\cdot 3\cdot\cos(2\pi/3) = -6$, $\vec{p}^2 = |\vec{p}\,|^2 = 16$, $\vec{q}^2 = |\vec{q}\,|^2 = 9$, то $|\vec{a}+\vec{b}\,| = \sqrt{25\cdot 16 - 60 + 9} = \sqrt{349}$. Аналогично, $|\vec{a}-\vec{b}\,| =$

$= \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{p}+3\vec{q})^2} = \sqrt{\vec{p}^2+6\vec{p}\vec{q}+9\vec{q}^2} \;\; = \sqrt{16-36+9\cdot 9} = \sqrt{61}.$ ◀

§ 5. Контрольные вопросы и задачи к разделу 2

1. Что такое вектор, его длина, орт вектора?

2. Сформулируйте свойства операции сложения векторов.

3. Докажите свойство 2 операции умножения вектора на число.

4. Как геометрически располагаются пара или тройка векторов линейно зависимых векторов, линейно независимых векторов?

5. Что такое базис некоторого множества векторов, координаты вектора в выбранном базисе?

6. Сформулируйте правило сложения двух векторов, заданных разложениями в некотором базисе.

7. Сформулируйте понятие прямоугольного базиса и прямоугольной декартовой системы координат.

8. Что такое скалярное произведение двух векторов? Перечислите свой-тва скалярного произведения.

9. Выведите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных разложениями в прямоугольном базисе.

10. Что такое направляющие косинусы вектора?

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ! Задачи для самостоятельной работы к гл. 1 и 2 *(Векторная алгебра. Линейные операции с векторами, скалярное произведение)*

1) Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = \sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) =$ 3π/4.

2) Найдите значение параметра λ, при котором векторы $\vec{a} = (\lambda, 2, 3)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$ будут перпендикулярны.

4) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

5) Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$

1) Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$ при условии $\vec{a}\,\vec{b}$ =3.

Ответы: 1) $\sqrt{101}$, **2)** -2 **3)** $2/\sqrt{14}$ **4)** $\vec{b}$ = (1,1/2,-1/2).

Раздел 3. **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия – раздел математики, в котором геометрические фигуры изучаются с помощью алгебраического анализа. При этом геометрическим фигурам по некоторому способу соотносятся алгебраические уравнения. Это способ, называемый методом координат, был создан независимо друг от друга двумя великими французскими математиками XVII века – Р. Декартом (1596 – 1650) и П. Ферма (1601 – 1665). Метод координат быстро завоевал большое число сторонников. Он дал возможность определить положение точки с помощью чисел и тем самым выразить геометрические свойства фигур в свойствах их уравнений. Сопоставляя геометрическим фигурам уравнения, аналитическая геометрия решает две основные задачи: 1) получить уравнение (или систему уравнений) данной геометрической фигуры и с его помощью исследовать свойства этой фигуры; 2) данному уравнению сопоставить геометрическую фигуру и с его помощью изучить её свойства. В трёх главах настоящего раздела решаются эти задачи для прямых, плоскостей, некоторых кривых и поверхностей, традиционно изучаемых в аналитической геометрии. При этом понятие точки, прямой и плоскости считаются начальными, а под кривой (линией) и поверхностью понимаются некоторые множества точек, обладающие общим геометрическим свойством. Такой подход к этим понятиям соответствует элементарной планиметрии и стереометрии и обеспечивает непрерывность и преемственность изучения математики в школе и в вузе.

Краткая характеристика раздела

1°. Темы раздела. Декартова прямоугольная система координат. Прямая как линия 1-го порядка. Плоскость как поверхность 1-го порядка. Поверхности 2-го порядка.

2. Базисные понятия. Различные виды уравнений прямой на плоскости, в пространстве. Уравнение плоскости**.**

3°. Основные задачи. Построение уравнений прямых и плоскостей по различным данным. Исследование взаимного расположения прямых и плоскостей. Построение кривых второго порядка. Построение графиков функций спроса и предложения, нахождение равновесной цены.

Глава 1. **Прямая на плоскости**

§ 1. Общее уравнение прямой на плоскости

Введём на плоскости прямоугольную декартову систему координат *Oxy* и рассмотрим уравнение первой степени относительно x, y:

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0. \qquad (1.1)$$

Теорема 1.1. Любая прямая на плоскости может быть задана в любой прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (1.1).

Теорема 1.1. Любое уравнение вида (1.1) определяет на плоскости прямую.

Из теорем 1.1 и 1.2 следует, что прямая на плоскости и только она является линией первого порядка.

Уравнение (1.1) называется *общим уравнением* прямой на плоскости. Его коэффициенты A и B являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного прямой, определяемой этим уравнением. Этот вектор называется *вектором нормали*, или *нормальным вектором* к данной прямой (рис. 2.1).

§ 2. Различные формы записи уравнения прямой

1°. Уравнение пучка прямых. Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (2.1)$$

при разных значениях коэффициентов A, B задаёт все прямые плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0)$. Оно называется *уравнением пучка прямых с центром в точке* M_0. Выбор конкретных значений A и B в (2.1) соответствует выбору той прямой пучка, которая проходит через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$ (рис. 2.1).

Если один из коэффициентов A или B равен нулю, уравнение (2.1) задаёт прямую, параллельную одной из осей координат, а именно, при $A = 0$ – прямую, параллельную оси Ox, а при $B = 0$ – оси Oy. При $C = 0$ оно задаёт прямую, проходящую через начало координат.

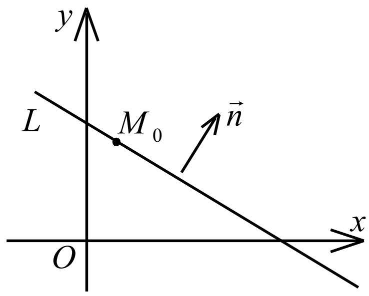


Рис. 2.1. К уравнению пучка прямых

2°. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Если заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащие данной прямой, то её уравнение записывается в виде:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \qquad (2.2)$$

Замечание 2.2. Разности $(x_1 - x_0)$, $(y_1 - y_0)$ есть координаты вектора, параллельного прямой L – *направляющего вектора* (рис. 2.3).

3°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy и прямую L, определяемую уравнением $Ax + By + C = 0$. Пусть в этом уравнении $B \neq 0$. При этом условии прямая L не параллельна оси Oy, а упомянутое уравнение приводится к виду

$$y = kx + b, \text{ где } k = -A/B,\ b = -C/B.$$

Коэффициент k из правой части уравнения равен тангенсу угла наклона φ прямой L к оси Ox. Он называется *угловым коэффициентом* этой прямой.

Углом наклона φ прямой L к оси Ox называется наименьший угол поворота этой оси, совершаемого вокруг точки пересечения Ox и L в направлении против часовой стрелки до совмещения Ox с прямой L (рис. 2.2).

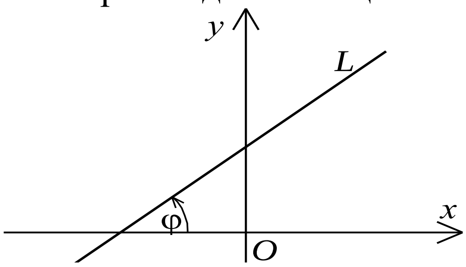


Рис. 2.2. Угол наклона прямой к оси Ox

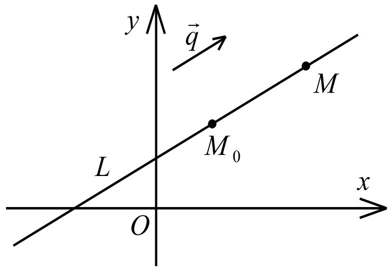


Рис. 2.3. К уравнению прямой, проходящей через две заданные точки

Замечание 2.1. Уравнением с угловым коэффициентом не может быть задана прямая, параллельная оси Oy, так как она определяется уравнением вида (2.1) при $B = 0$ и, следовательно, не имеет углового коэффициента.

4°. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, и имеющую заданный угловой коэффициент k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

§ 3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми

Две прямые на плоскости могут либо совпадать, либо пересекаться в одной точке, либо не иметь ни одной общей точки, т. е. быть параллельными.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом: L_1: $y=k_1x + b_1$, L_2: $y=k_2x + b_2$. Условие параллельности таких прямых следует из условия равенства углов наклона φ_1 и φ_2 этих прямых к оси Ox. Поскольку $\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2$, то $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

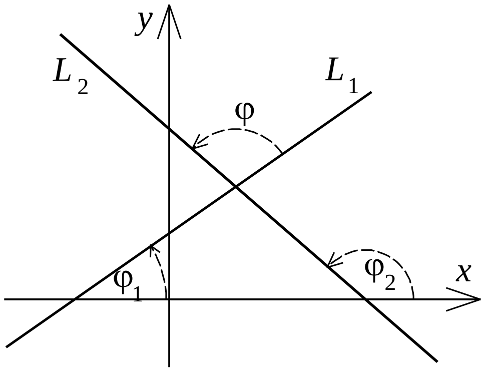


Рис. 3.1. К формуле для тангенса угла между прямыми

Для угла φ между прямыми L_1 и L_2, понимаемого как угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2 (рис. 3.1), имеем формулу $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$,

где $k_1 = \mathrm{tg}\varphi_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\varphi_2$.

Если $1 + k_1k_2 = 0$, то $\mathrm{ctg}\varphi = 0$, значит, угол φ равен $\pi/2$, и данные прямые перпендикулярны. Итак, любое из равенств 1

$+\ k_1k_2 = 0$ или $k_1 = -\ 1/k_2$ является условием перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

§ 4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат и

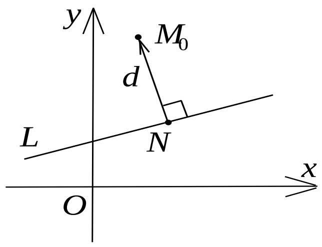


Рис. 4.1. К понятию расстояния от точки M_0 до прямой L

заданы прямая L: $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$, не принадлежащая L.

Расстоянием d от точки M_0 до прямой L называется, как известно, длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1)$ – проекция точки M_0 на данную прямую (рис. 4.1). Для d имеем формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.1)$$

§ 5. Образцы задач с решениями

Задача 1. Даны две точки $A(-4, -2)$ и $B(1, 4)$. Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс.

►Применяем уравнение (2.2) прямой через две точки: $\dfrac{x-(-4)}{1-(-4)} = \dfrac{y-(-2)}{4-(-2)} \rightarrow$

$6(x+4) = 5(y+2)$. Полагаем в этом уравнении y=0, имеем нужную абсциссу, $6x + 24 = 10$, $x = -7/3$. **Отв.** $x = -7/3$.◄

Задача 2. Дан треугольник с вершинами $A(2, -4)$, $B(2, -3)$, $C(3,4)$. Найдите ординату точки пересечения высоты CD с осью ординат.

►Используя уравнение (2.2) прямой через две точки A, B, составляем уравнение прямой AB: $\dfrac{x-(-2)}{2-(-2)} = \dfrac{y-(-4)}{-3-(-4)}$, $x + 2 = 4(y+4)$. Находим угловой коэффициент прямой AB, $k_{AB} = 1/4$. Угловой коэффициент перпендикулярной прямой CD находим по формуле $k_{CD} = -1/k_{AB} = -\ 4$. Далее применяем уравнение прямой через данную точку C с угловым коэффициентом k_{CD}: $y - y_C = k_{CD}\ (x - x_C) \rightarrow y - 4 = -\ 4(x - 3)$. В этом уравнении полагаем $x = 0$. Получаем нужную ординату $y = 16$. **Отв.** 16.◄

Задача 3. Найдите проекцию точки $P(1, 5)$ на прямую $2x + 5y + 3 = 0$.

►Находим угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -2/5$. Находим угловой коэффициент перпендикулярной прямой $k_2 = -\ 1/k_1 = 5/2$. Составляем уравнение прямой через точку P с угловым коэффициентом k_2: $y - 5 = 5(x - 1)/2$. Находим точку пересечения данной и построенной прямой. Она и есть искомая. Для этого решаем систему уравнений $\begin{cases} 2x+5y+3=0 \\ 5x-2y+5=0 \end{cases}$. Получаем x= –31/29; y= –5/29.

Отв. (–31/29, –5/29).◄

Задача 4. Дан треугольник своими вершинами A(–3, –4), B(5, –2), C(2, 4). Найдите ординату точки $M(0, y_0)$ прямой CM, параллельной AB.

►Составляем уравнение (2.2)прямой через две точки A, B:

$\frac{x-(-3)}{5-(-3)}=\frac{y-(-4)}{-2-(-4)}$, $2(x+3)=8(y+4)$ и находим угловой коэффициент этой прямой k_{AB} = 1/4. В силу условия параллельности угловой коэффициент прямой CM тот же, k_{CM} = 1/4. Далее применяем уравнение прямой через точку C с угловым коэффициентом k_{CM}: y – 4 = (x – 2)/4. В этом уравнении полагаем x = 0 и находим y_0 = 7/2. **Отв.** y_0 = 7/2.◄

Задача 5. Найдите модуль тангенса угла между прямыми $x + 4y + 1 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$.

►Применяем формулу для тангенса угла между прямыми

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{2}{7}.$$

Отв. 2/7.◄

§ 6. Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы к § 1, 2, 3 гл. 1 (*Прямая на плоскости)*

6) Даны две точки: A(–3, –2), B(1, –4). Найдите абсциссу точки пересечения прямой AB с осью абсцисс.

7) Найдите модуль тангенса угла между прямыми $x + 2y + 1 = 0$ и $x - y + 2 = 0$.

8) Дана прямая L: $x - 2y + 1 = 0$. и точка $M(2, -1)$. Найдите:

а) проекцию точки M на эту прямую; б) уравнение прямой, проходящей через точку M, параллельно заданной прямой;

в) расстояние от точки M до заданной прямой.

Ответы : 6) -7; **7)** 3; **8) а)** (4/5, 7/5); **б)** $x - 2y - 4 = 0$; **в)** $6/\sqrt{5}$.

Глава 2. **Плоскость и прямая в пространстве**

§ 1. Общее уравнение плоскости

Введём в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим уравнение первой степени (или линейное уравнение) относительно x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \qquad (1.1)$$

Теорема 1.1. Любая плоскость может быть задана в произвольной прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (1.1).

Точно так же, как и в случае прямой на плоскости, справедлива теорема, обратная теореме 1.1.

Теорема 1.2. Любое уравнение вида (1.1) задаёт в пространстве плоскость.

Уравнение (1.1) называется *общим уравнением плоскости*. Его коэффициенты A, B, C геометрически трактуются как координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, определяемой этим уравнением. Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ называется вектором нормали к данной плоскости.

§ 2. Различные виды задания уравнения плоскости

1°. Уравнение связки плоскостей. Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.1)$$

при всевозможных значениях коэффициентов A, B, C задаёт все плоскости, проходящие через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ (рис 2.1). Оно называется *уравнением связки плоскостей*. Выбор конкретных значений A, B, C в (2.1) означает выбор плоскости P из связки, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}(A, B, C)$ (рис.2.1).

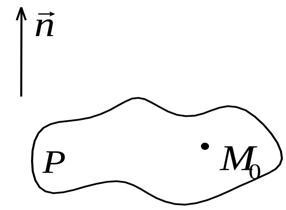


Рис. 2.1. К уравнению связки плоскостей

2°. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

3°. Расстояние d от точки *с*-(x_0, y_0, z_0) **до плоскости** P, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ может быть вычислено по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

§ 3. Образцы задач с решениями. Задачи к § 1, 2 гл. 2

Задача 1. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1, 2, 0)$ параллельно векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$.

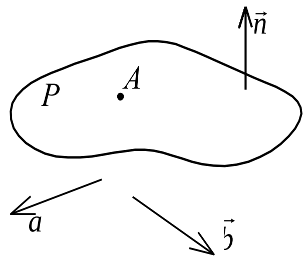


Рис. 3.1

►Вектор нормали $\vec{n}(A,B,C)$ к плоскости P ортогонален данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.1), поэтому $\vec{n}\vec{a}=0, \vec{n}\vec{b}=0$. Для его координат получаем систему: $\begin{cases} A+2B-C=0, \\ 2A+C=0. \end{cases}$ Она имеет бесчисленное множество решений: $A = -C/2$, $B= -3C/4$, где C может принимать любые вещественные значения. При $C= -4$ имеем: $A = =2$, $B = -3$, таким образом $\vec{n}(2,-3,-4)$. Подставим координаты точки M_0 и координаты вектора $\vec{n}$ в уравнение (2.1), получим уравнение плоскости P: $2(x-1) -3(y-1) -4z = 0$ или P: $2x - 3y -4z + 4 = 0$.◄

Задача 2. Найти значения параметра λ, при которых уравнение
$\lambda^2 + 2\lambda)y +(\lambda^2 + \lambda - 2)z +\lambda - 3 = 0$ определяет плоскость P:

а) параллельную одной из координатных плоскостей;

б) параллельную одной из координатных осей;

в) проходящую через начало координат.

►Запишем данное уравнение в виде

$$\lambda x+\lambda(\lambda+2)y+(\lambda+2)(\lambda-1)z+\lambda-3=0. \qquad (3.1)$$

При любом значении λ уравнение (3.1) определяет некоторую плоскость, ибо коэффициенты при x, y, z в (3.1) не обращаются в нуль одновременно.

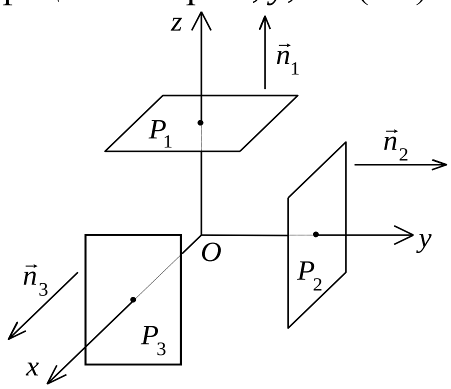


Рис. 3.2. Плоскости параллельные плоскостям координат

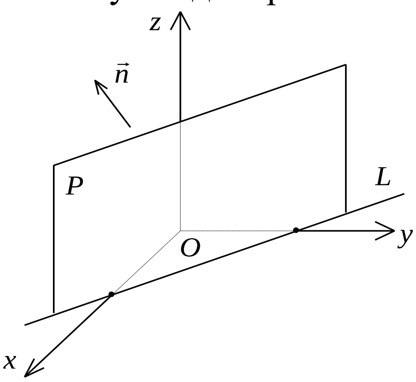


Рис. 3.3. Плоскость P: $Ax+By+D=0$, параллельная оси Oz

а) При $\lambda=0$ уравнение (3.1) определяет плоскость P, параллельную плоскости Oxy, P: $z = -3/2$, а при $\lambda=-2$ оно определяет плоскость P, параллельную плоскости Oyz, P: $x = -5/2$. Ни при каких значениях λ плоскость P, определяемая уравнением (3.1), не параллельна плоскости Oxz, так как коэффициенты при x, z в (3.1) не обращаются в нуль одновременно.

б) При $\lambda = -1$ уравнение (4.3) определяет плоскость P, параллельную оси Oz, P: $x +3y - 2 = 0$. При остальных значениях параметра λ оно не представляет плоскости, параллельной только одной из координатных осей.

в) При $\lambda = 3$ уравнение (3.1) определяет плоскость P, проходящую через начало координат, P: $3x + 15y + 10z = - 0$. ◄

§ 4. Различные виды уравнений прямой в пространстве

1°. Канонические уравнения прямой в пространстве. Любую прямую L в пространстве можно задать принадлежащей ей точкой $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и не нулевым вектором $\vec{q}(l,m,n)$, коллинеарным ей и называемым её *направляющим вектором* (рис. 4.1), причём и точка M_0, и вектор $\vec{q}$ выбираются произвольно. Уравнения

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{4.1}$$

называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве.

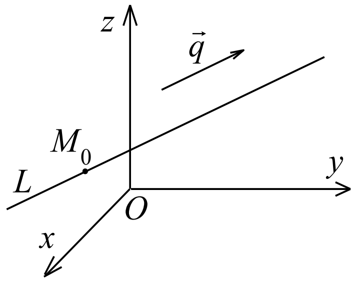


Рис. 4.1

2°. Уравнение прямой, проходящей две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Замечание 4.2. Задание прямых каноническими уравнениями позволяет легко установить их взаимное расположение в пространстве: установить, например, их параллельность или перпендикулярность, найти угол между ними, угол между прямой и плоскостью и другие задачи [1].

Образцы задач с решениями

Задача 1. Найти значения параметров λ и μ так, чтобы прямые $L_1{:}\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1},\ L_2{:}\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{\lambda}=\frac{z}{\mu}$ были: а) параллельны, б) перпендикулярны.

►Обозначим через $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых,

$$\vec{q}_1=(2,-2,1),\ \vec{q}_2=(3,\lambda,\mu).$$

а) $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \| \vec{q}_2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}=-\frac{2}{\lambda}=\frac{1}{\mu} \Rightarrow \lambda=-3, \mu=\frac{3}{2}$.

б) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \perp \vec{q}_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1\cdot\vec{q}_2=0 \Rightarrow 6-2\lambda+\mu=0 \Rightarrow \begin{cases}\mu=2\lambda-6,\\ \lambda\in\mathbf{R},\end{cases}$ например, $\lambda=1,\ \mu=-4$.◄

Задача 2. Найти значение параметра λ, при котором прямая $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{\lambda}$ и плоскость $P: 2x-y+z+5=0$ параллельны.

►Обозначим через $\vec{q}$ направляющий вектор прямой L, $\vec{q}=(2,3,\lambda)$, а через $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n}=(1,-1,1)$. Прямая L и плоскость P будут параллельны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут перпендикулярны (рис. 4.2). Последнее условие эквивалентно равенству $(\vec{q},\vec{n})=0$, поэтому для λ получаем уравнение 2·2 + 3·(−1) + λ = 0, откуда находим λ = −1.◄

Задача 3. Найти значения параметров λ и μ, при которых прямая L: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{2}$ и плоскость $P: 2x+\lambda y+\mu z+5=0$ перпендикулярны.

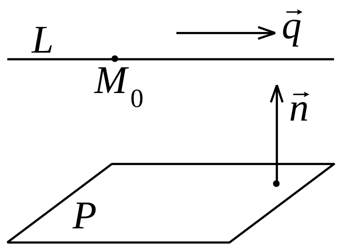


Рис. 4.2. Прямая L параллельна плоскости P

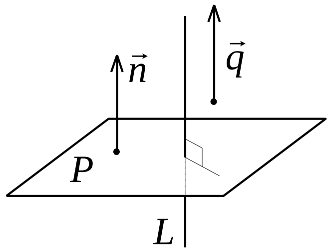


Рис. 4.3. Прямая перпендикулярна плоскости P

►Пусть $\vec{q}$– направляющий вектор прямой L, $\vec{q}=(1,3,2)$, а $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n}=(2,\lambda,\mu)$. Прямая L и плоскость P будут перпендикулярны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут коллинеарны (рис.4.3). Поскольку координаты коллинеарных векторов пропорциональны, то имеем соотношения $\frac{1}{2}=\frac{3}{\lambda}=\frac{2}{\mu}$, откуда находим: $\lambda=\frac{3}{2}$, $\mu=4$.◄

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ и точку $C(2,3,4)$.

►Проще всего взять две точки на прямой, например, $M(3;7;9)$ и $N(2;5;6)$. Через три точки *M, N,* С проводим нужную плоскость, пользуясь уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-9 \\ 2-3 & 5-7 & 6-9 \\ 2-3 & 3-7 & 4-9 \end{vmatrix}=0 .$$

Разлагаем определитель по первой строке

$$(x-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}+(z-9)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

отсюда $x+y-z-1=0.$

Проверка показывает, что три точки *M, N, C* лежат на построенной плоскости.

Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы

9) Дана плоскость $3x-2y+7=0$ и точка $M(2, -1, 3)$. Найдите проекцию точки M на плоскость.

10) Дана прямая L: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z}{1}$ и точка $M(1, 2, -3)$.Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L.

11) Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ и точку $M_1(1, 1, 1)$.

Ответы: 9) (–19/13; 17/13; 3). **10)** $2x-3y+z+7=0$. **11)** $x+y-z-1=0$;

Глава 3. **Кривые второго порядка**

§ 1. Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка

Определение 1.1. Линия, определяемая в произвольной прямоугольной декартовой системе координат $O'x'y$ алгебраическим уравнением второй степени, т. е. уравнением вида

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+Dx'+E\ y'+F=0, \tag{1.1}$$

где $A^2+B^2+C^2\neq 0$, называется *линией второго порядка*.

При подходящем выборе системы координат уравнение (1.1) можно привести к одному из следующих 9 видов:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{1.2}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \tag{1.3}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad \text{`(1.4)}$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \tag{1.5}$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0; \tag{1.6}$$
$$y^2=2px; \tag{1.7}$$
$$y^2-a^2=0; \tag{1.8}$$
$$y^2+a^2=0; \tag{1.9}$$
$$y^2=0. \tag{1.10}$$

Предполагается, что $a, b, p>0$ в каждом из уравнений (1.2) – (1.9). Уравнения (1.3) и (1.9) не задают никакого множества точек; говорят, что они определяют мнимые линии второго порядка. Уравнение (1.4) задаёт одну почку – начало координат. Уравнения (1.6), (1.8), (1.10) определяют пару пересекающихся прямых, пару параллельных и пару совпадающих прямых соответственно. Эти пары прямых называются *вырожденными линиями второго порядка*. Остальные три уравнения: (1.2), (1.5) и (1.7) определяют *невырожденные линии второго порядка* (или *невырожденные кривые второго порядка*), называемые *эллипсом,* *гиперболой и параболой*. Именно они и будут изучаться в настоящей главе. Каждому из этих уравнений будет сопоставлена линия и будут изучены её свойства.

Замечание 1.1. В практических задачах кривые 2-го порядка задаются уравнением вида $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$, которое путём выделения полных квадратов вида $(x - x_0)^2$ и $(y - y_0)^2$ приводится к одному из уравнений 1.2, 1.5 и 1.7.

§ 2. Эллипс и его свойства

Определение 2.1. *Эллипсом* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипса.

Свойства эллипса

1. Эллипс – *осесимметричная и центрально симметричная* фигура. Осями симметрии эллипса являются оси координат, а центром симметрии – начало координат (рис. 2.1).

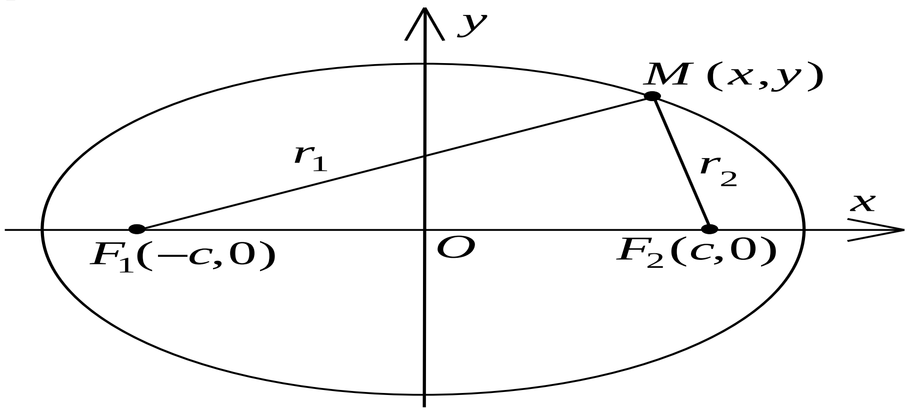


Рис. 2.1. Точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса, r_1 и r_2 – фокальные радиусы его точки

2. Из уравнения (2.1) следует, что точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ принадлежат эллипсу. Они называются его *вершинами*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются *большой* и *малой осями* эллипса, а числа a и b – *большой* и *малой полуосями*.

3.*Фокусы эллипса. Свойство фокальных радиусов точки эллипса.* Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, находящиеся на большой оси эллипса называются его фокусами, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до этих точек – фокальными радиусами точки M (рис. 2.1).

Свойство фокальных радиусов

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (2.2)$$

§ 3. Гипербола и её свойства

Определение 3.1. *Гиперболой* называется кривая, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ a, b > 0\,. \qquad (3.1)$$

Равенство (3.1) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

Свойства гиперболы

1. Гипербола – *осесимметричная* и *центрально симметричная кривая.* Осями симметрии являются оси координат, а центром симметрии – начало координат.

2. Точки гиперболы принадлежат множеству $G=\{(x,\ y)\colon\ |x|\ge a,\ \ |y|\ge a\}$. Гипербола – *неограниченная кривая.* Две бесконечные ветви гиперболы расположены в левой и правой полуплоскостях координатной плоскости. На рис. 3.1 заштрихованы те части плоскости Oxy, в которых расположены ветви гиперболы.

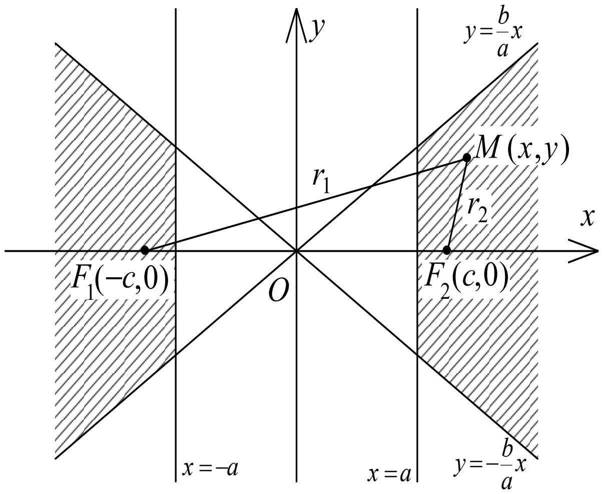


Рис. 3.1. К расположению гиперболы на координатной плоскости

Из уравнения (3.1) следует, что точки $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$ принадлежат гиперболе. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называется *действительной осью* гиперболы (рис. 3. 2). Гипербола не пересекает ось Oy.

3. *Фокусы гиперболы. Свойство фокальных радиусов точки гиперболы.* Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, находящиеся на действительной оси гиперболы, называются ее фокусами, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки $M(x, y)$ до этих точек – ее *фокальными радиусами*.

Свойство фокальных радиусов

$$|\,r_1 - r_2\,| = 2a\,.$$

4. *Асимптоты гиперболы. Построение гиперболы.* Прямые $L_1: y = \frac{b}{a}x$ и $L_2: y = -\frac{b}{a}x$ играют важную роль в исследовании и построении гиперболы. о мере удаления точки $M(x, y)$ от нача-ла координат по гиперболе эта точка приближается сколь угодно близко к одной из этих прямых (но никогда не пересекает её – рис. 3.2 и свойство 2). Прямые L_1 и L_2 называются *асимптотами* гиперболы. Они проходят через противолежащие вершины прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a$, $y= \pm b$, который называется *основным прямоугольником* гиперболы.

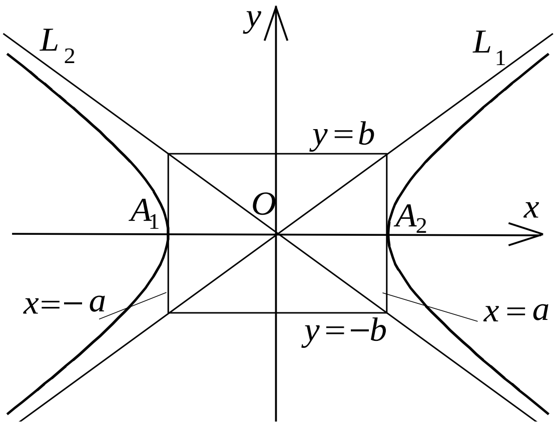


Рис. 3.2. Построение гиперболы, прямые L_1 и L_2 – асимптоты гиперболы

5. *Эксцентриситет гиперболы.*

Определение 3.2. Отношение расстояния между фокусами гиперболы к длине её действительной оси называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается e.

По определению $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, откуда следует, что $e > 1$, поскольку для гиперболы $c > a$.

Замечание 3.1. Уравнение (3.1) при $a = b$ принимает вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ или $x^2 - y^2 = a^2$ и задаёт так называемую *равнобочную* гиперболу. Её асимптоты имеют уравнения $y = \pm x$ и являются биссектрисами координатных углов, а основной прямоугольник – квадратом.

Замечание 3.2. Уравнение $y = k/x$ определяет равнобочную гиперболу с уравнением $x^2 - y^2 = a^2$ в системе координат $Ox'y$, которая получается из системы Oxy поворотом на угол $\pi/4$ вокруг начала координат (рис. 3.3). Это график обратно пропорциональной зависимости.

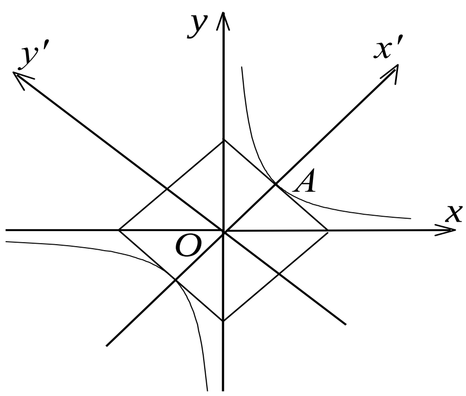


Рис. 3.3. Равнобочная гипербола $y = k/x$ как график обратно пропорциональной зависимости

§ 4. Парабола и её свойства

Определение 4.1. *Параболой* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

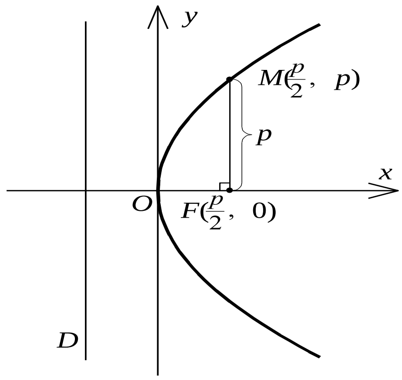


Рис. 4.1. Фокус и директриса параболы

$$y^2 = 2px,\ p > 0. \qquad (4.1)$$

Равенство (4.1) называется *каноническим уравнением* параболы.

Парабола, задаваемая уравнением (4.1) изображена на рис 4.1. Начало координат $O(0, 0)$ принадлежит параболе. Эта точка называется *вершиной* параболы.

1. *Фокус и директриса параболы.* Точка $F(p/2, 0)$, находящаяся на оси параболы, называется *фокусом*, а прямая D: $x= - p/2$ – *директрисой*. Число p из уравнения (4.1) называется *параметром* параболы.

2. Расстояние любой точки параболы $M(x, y)$ от фокуса называется ее *фокальным радиусом* $r(M)$. Параметр параболы равен фокальному радиусу точки параболы, расположенной на перпендикуляре, восставленном из её фокуса (рис. 4.1).

Свойство фокальных радиусов

Расстояние любой точки параболы до директрисы рано фокальному радиусу этой точки.

§ 5. Образцы задач с решениями

Задача 1. Эллипс задан уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$. Найти его полуоси. Изобразить этот эллипс на чертеже.

►Разделив обе части уравнения эллипса на 400, имеем равенство $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, сравнив которое с уравнением (2.1) заключаем, что $a^2= 25$, $b^2= 16$, откуда $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Точки $F_1(-3, 0)$, $F_2(3,0)$ – фокусы эллипса, эксцентриситет $e = c/a = 3/5$. На рис. 5.1 изображен данный эллипс, A_1A_2 – его большая полуось, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, B_1B_2 – малая полуось, $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$.◄

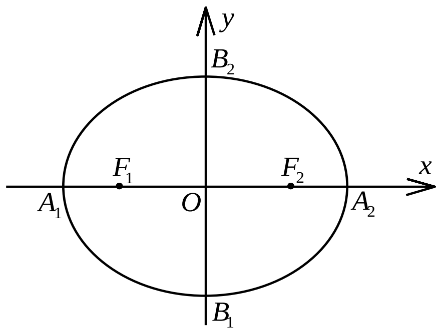


Рис. 5.1. К задаче 1

Задача 2. Кривая задана уравнением $-4x^2-y^2 + 8x +1= 0$. Убедитесь в том, что это уравнение определяет эллипс. Укажите центр и полуоси эллипса.

►Записываем уравнение в виде, выделяя полный квадрат по переменной x:

$4x^2 - 8x + 1 + y^2 = 1$; $(2x-1)^2 + y^2 = 1$;

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 = 1.$$

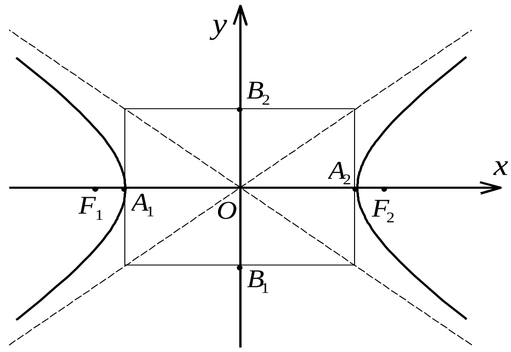


Рис. 5.2. К задаче 3

Значит, это эллипс с центром в точке $M(1/2, 0)$. Полуоси: $a = 1/2$, $b=1$.◄

Задача 3. Уравнение $9x^2 - 16y^2 = 144$ задаёт гиперболу. Найти её полуоси, координаты фокусов, уравнения асимптот. Изобразить гиперболу на чертеже.

►Разделим обе части данного уравнения на 144, получим равенство $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, сравнив которое с (3.1), заключаем, что $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, откуда $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Точки $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ – фокусы гиперболы.

Асимптоты гиперболы L_1 и L_2 имеют уравнения $y = \pm 3x/4$. Основной прямоугольник гиперболы образован прямыми образован прямыми $x = \pm 4$, $y = \pm 3$, прямые L_1 и L_2 проходят через вершины этого прямоугольника (рис. 5.2). На этом рисунке изображена данная гипербола, её действительная ось A_1A_2, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, отрезок B_1B_2, называемый *мнимой осью*, $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$, точки F_1, F_2 – фокусы гиперболы.◄

Задача 4. Парабола задана уравнением $y^2 = 8x$. Найти её параметр, координаты фокуса, уравнение директрисы.

►Сравнив данное уравнение с (4.1), имеем $8 = 2p$, откуда $p = 4$. Точка $F(2, 0)$ – фокус параболы, а $x = -2$ – уравнение её директрисы D. Построим на чертеже две точки $M_1(2, -4)$ и $M_2(2, 4)$ (точки выбраны произвольно). Теперь проведём параболу через эти точки и её вершину – начало координат (рис. 5.3).◄

Задача 5. Найдите координаты фокуса параболы $y^2 - 2y = 4x+3$ и постройте её.

►В левой части уравнения параболы выделим полный квадрат: $(y-1)^2 = 4(x+1)$ и перейдя к новым прямоугольным координатам x', y' по формулам: $x' = x + 1$, $y' = y - 1$, получим уравнение: $y'^2 = 4x'$. В системе координат $O'x'y'$ оно является каноническим уравнением параболы вида (4.1). Имеем $4 = 2p$, откуда $p = 2$. В новой системе координат фокус параболы имеет координаты (1, 0), а его старые координаты можно найти из формул перехода: $F(0, 1)$. Вершина параболы находится в точке O', поэтому в системе Oxy она имеет координаты: (–1, 1). Далее строим параболу, применяя свойство 4 (рис. 5.4).◄

§ 6*. Линейные и квадратичные зависимости в моделях экономики

1°. Одним из важнейших вопросов микроэкономики состоит в изучении взаимодействия спроса и предложения. Рассмотрим какой-нибудь товар. Пусть $D(p)$ – количество (число единиц) товара, которое покупатель на рынке желает купить при данной цене p за единицу. $D = D(p)$ называется *функцией спроса на товар*. Эта функция – убывающая. Она может быть достаточно сложной, но часто ее аппроксимируют (приближают) линейной функцией

$$D = ap + c, \text{ где } a < 0. \tag{6.1}$$

С другой стороны, пусть $S(p)$ – число единиц товара, предлагаемого продавцами на рынке по цене p. Очевидно, предложение растет с рос-
том цены. Поэтому *функция предложения* $S = S(p)$ – возрастающая функция. Она может быть достаточно сложной, но часто ее аппроксимируют линейной функцией

$$S = bp + d, \text{ где } b>0. \tag{6.2}$$

Для экономики представляет интерес условие, когда спрос н пред-
ложению: $D(p) = S(p)$ или, используя соотношения (6.1) и (6.2),

$$ap + c = bp + d. \tag{6.3}$$

Цена $p = p_0$, при которой выполняется равенство (6.3), называется *равновесной*. Точка пересечения графиков функций $D = D(p)$ и $S = S(p)$ – в рассматриваемом случае – прямых, называется *точкой равновесия*.

Пример 6.1. Пусть функция спроса на товар $D(p) = 10 - p$, функция предложения $S(p) = 2p + 1$. Найдите:

1) равновесную цену; 2) насколько измениться доход предприятия (в процентах) при увеличении цены на 10 процентов?

►Равновесная цена p_0 определяется из условия $D(p) = S(p)$ или
$10 - p = 2p + 1$. Откуда $p_0 = 3$.

При $p = p_0 = 3$ доход предприятия был равен $D(p_0) = 3 \cdot 7 = 21$(ден. ед). При $p_0 = 3.3$ доход предприятия был равен $3.3D(3.3) = 3.3 \cdot (10 - 3.3) = 22.11$ (ден.ед.). Итак, доход предприятия увеличился на ((22,11–21)/21) 100=5,2 процента◄

2°. В ряде случаев для построения математических моделей используют квадратичное приближение. Например, функции спроса и предложения записываются так:

$$D(p) = ap^2 + a_1 p + c, \; a < 0, \tag{6.4}$$

$$S(p) = bp^2 + b_1 p + d, \; b > 0. \tag{6.5}$$

Графики этих функций − параболы (см. § 4). При этом ветви параболы $D(p) = ap^2 + a_1 p + c$ направлены вниз, так как $a<0$, ветви параболы $S(p) =$
$= bp^2 + b_1 p + d$ вверх, так как $b>0$.

Нахождение равновесной цены сводится к решению квадратного уравнения:

$$ap^2 + a_1 p + c = bp^2 + b_1 p + d \text{ или } (b - a)p^2 + (b_1 - a_1)p + (d - c) = 0,$$

которое при $\Delta = (b_1 - a_1)^2 - 4(b - a)(d - c) = 0$ имеет только одно решение, при $\Delta > 0$ – два решения, одно (а может и два) из них может оказаться отрицательным и не иметь экономической интерпретации.

Пример 6.2. Пусть функция спроса на товар $D(p) = -p^2 + p + 31$, функция предложения $S(p) = p - 6$. Найдите равновесную цену.

►Равновесная цена p_0 определяется из условия $D(p) = S(p)$ или $-p^2 + p + 31 = p - 6$. Отсюда $-p^2 + 36 = 0$ или $p = \pm 6$. Выбирая положительное решение, получаем $p_0 = 6$.◄

§ 7. Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы к § 2-4 гл. 3

1°. Построить кривую, определяемую уравнением

12) $4x^2 - 16y^2 - 24 = 0$. **13)** $9x - 4y^2 + 24 = 0$.

2°. Определите тип кривой, определяемой уравнением. Если это гипербола или эллипс (окружность) – укажите центр кривой (радиус окружности), если парабола – укажите вершину параболы.

14) $2x^2 - 2y^2 + 16y + 3 = 0$. **15)** $4x^2 + 16y^2 - 24 = 0$. **16)** $x^2 + 2x + y^2 - 8 = 0$.

3°. К § 6 гл. 3. 17). Пусть функция спроса на товар $D(p) = -p^2 + p + +3$, функция предложения $S(p) = 4p^2 + 2p + 6$. Найдите равновесную цену. Постройте графики заданных функций спроса и предложения.

Ответы: 12) Гипербола. **13)** Парабола. **14)** Гипербола, (0,4).

15) Эллипс с центром в начале координат.

16) Окружность с центром (− 1, 0) и радиусом 3.

*__17)__ Уравнения спроса и предложения несовместны.

Глава 4. **Поверхности второго порядка**

§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка

Определение 1.1. Поверхностью второго порядка называется множество точек, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \qquad (1.1)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbf{R}$, а $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$.

Можно показать, что при надлежащем выборе прямоугольной системы координат множество точек, определяемое уравнением (1.1) будет задано одним из ниже перечисленных уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (1.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad (1.5)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0\ ; \qquad (1.6)$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\ p,q>0\ ; \qquad (1.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1.9)$$

$$y^2=2px; \qquad (1.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad (1.11)$$

$$x^2-a^2=0; \qquad (1.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad (1.13)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad (1.14)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (1.15)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \qquad (1.16)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1. \qquad (1.17)$$

Последние три из этих уравнений задают пустые множества точек, уравнение (1.13) задает ось Oz ($x = 0$, $y = 0$, $z \in \mathbf{R}$), уравнение (1.14) – начало координат ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). Уравнения (1.11) и (1.12) определяют пару пересекающихся и пару параллельных (или слипшихся) плоскостей соответственно. Геометрические образы, задаваемые уравнениями (1.2) – (1.10), называются невырожденными поверхностями второго порядка, а уравнения (1.2) – (1.10) – их каноническими уравнениями. Форма и некоторые свойства этих поверхностей, вытекающих из их уравнений, приводятся в следующих параграфах в таблицах 1 и 2..

Замечание 1.2. В практических задачах поверхности 2-го порядка задаются уравнением $Ax^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + K = 0$, $ABC \neq 0$, которые путем выделения полных квадратов вида $(x - x_0)^2$, $(y - y_0)^2$, $(z - z_0)^2$ приводятся к виду (1.2) – (1.10).

§ 2. Перечень поверхностей второго порядка, заданных каноническими уравнениями

1. Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Сфера радиуса R

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

3. Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

4. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

6.Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z; \quad p > 0, q > 0.$$

7. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z; \quad p > 0, q > 0.$$

8. Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными Oz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

9. Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz

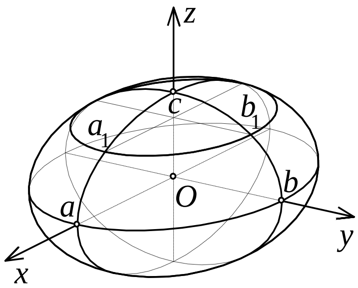
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

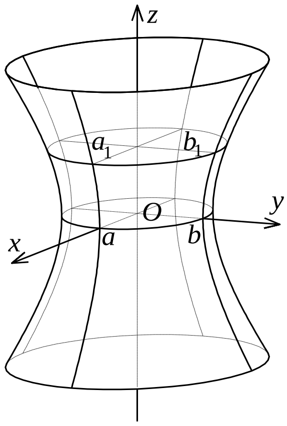
10. Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz

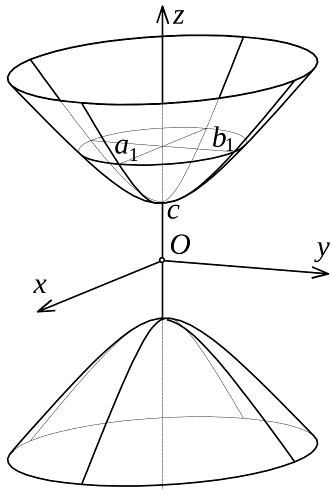
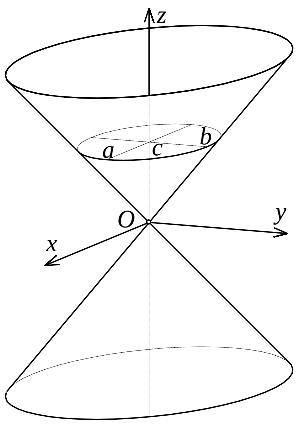
$$y^2 = 2px.$$

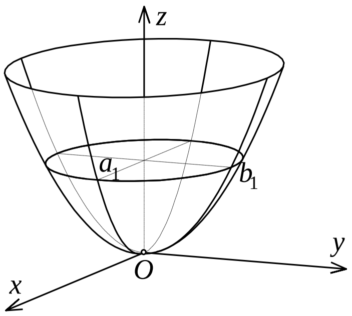
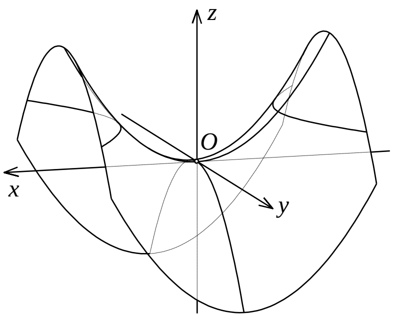
В таблице 1 приведены чертежи поверхностей 1-7 второго порядка

Табл. 1

Чертеж пов-ти	Уравн-е пов-ти Название	Сечение пов-ти Коорд. плоск.	Примечания
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Эллипсоид	1) $\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \end{cases}$; $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$; $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$	a, b, c– полуоси ($a=b=c$ – сфера); a_1, b_1– полуоси эллипса в сечении плоскостью $z=h$, $\|h\|<c$.

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Однополостный гиперболоид	1. $\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \end{cases}$; $a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$; $b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$	a, b, c– – полуоси (a=b –поверхность вращения); a_1,b_1 – полуоси эллипса в сечении плоскостью $z=h$.

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ Двуполостный гиперболоид	1. $\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \end{cases}$; $a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$; $b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$	a, b, c– полуоси (a=b –поверхность вращения); a_1, b_1 – полуоси эллипса в сечении плоскостью $z = h$, $\|h\| > c$. .
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ Конус	$\begin{cases} z=c \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$	a=b – круговой конус (поверхность вращения)

	$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ $(p > 0, q > 0)$ Эллиптический параболоид	1. $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2qz \end{cases}$; 2. $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$; 3. $\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \end{cases}$; $a_1 = \sqrt{2hp}$, $b_1 = \sqrt{2hq}$.	(p=q – поверхность вращения); a_1, b_1 – полуоси эллипса в сечении плоскостью $z = h > 0$.
	$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ $(p > 0, q > 0)$ Гиперболический параболоид	1. парабола $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$ 2. парабола $\begin{cases} x = h \\ 2z = \frac{h^2}{p} - \frac{y^2}{q} \end{cases}$ 3. парабола $\begin{cases} y = h \\ 2z = \frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q} \end{cases}$ 4. гипербола $\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \end{cases}$	

§ 3. Цилиндры второго порядка

Определение 3.1. Поверхность второго порядка называется *цилиндрической поверхностью* (или *цилиндром*), если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат *Oxyz* она может быть задана уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \tag{3.1}$$

где $F(x, y)$ – многочлен второй степени относительно переменных *x*, *y*, не содержащий переменной *z*. Кривая Г, определяемая уравнением (3.1) в плоскости *Oxy*, называется *направляющей* этого цилиндра (рис. 3.1).

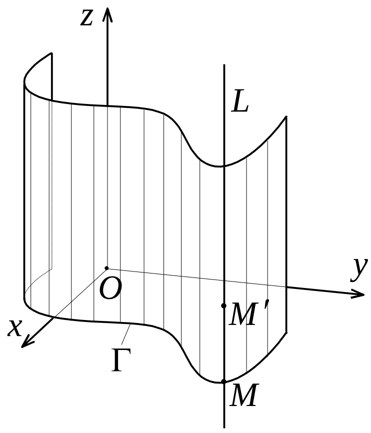


Рис. 3.1. К понятию цилиндрической поверхности

Если точка *M*(*x*, *y*, 0) принадлежит Г (и, следовательно, данному цилиндру), то все точки *M*′(*x*, *y*, *z*), где *z* – любое действительное число, тоже ему принадлежат, так как координаты *M*′ удовлетворяют (2.1). Все эти точки расположены на прямой *L*, проходящей через точку *M*(*x*, *y*, 0) параллельно оси *Oz* (рис. 2.1). Таким образом, данный цилиндр образован прямыми, параллельными оси *Oz* и пересекающими его направляющую □. Эти прямые называются его *образующими.*

Замечание 3.1. Цилиндры с образующими, параллельными осям *Ox* и *Oy*, определяются уравнениями вида *G*(*y*, *z*) = 0 и *H*(*x*, z) = 0.

Замечание 3.2. В практической работе востребованы цилиндры второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнениями вида

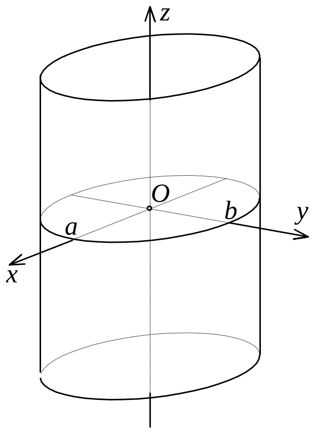
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0, \tag{3.3}$$

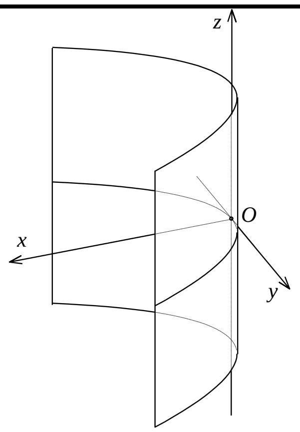
$$y^2 = 2px,\ p > 0. \tag{3.4}$$

Направляющими этих цилиндров служат эллипс, гипербола и парабола, определяемые уравнениями (3.2) – (3.4) в плоскости *Oxy*. Их образующие, как было установлено выше, параллельны оси *Oz* (рис. 3.2 – 3.4).

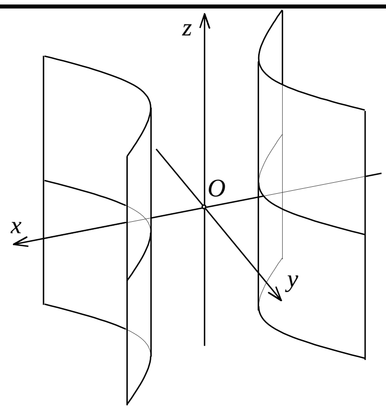
Табл. 2. Цилиндры 2-го порядка, определяемые уравнением $F(x, y) = 0$

<table>
<tr>
<td>


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Рис. 3.2. Эллиптический цилиндр
</td>
<td>


$$y^2 = 2px$$

Рис. 3.3. Параболический цилиндр
</td>
<td>


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Рис. 3.4. Гиперболический цилиндр
</td>
</tr>
</table>

§ 4. Образцы задач с решениями

Задача 1. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение: $4x^2 + 5z=0$?

А) Эллипсоид.
Б) Сферу.
В) Коническую поверхность.
Г) Эллиптический параболоид
Д) Однополостный гиперболоид.
Е) Двуполостный гиперболоид.
Ж) Гиперболический параболоид**.**
З) Цилиндрическую поверхность.
И) Ни одну из перечисленных выше поверхностей.

►Так как уравнение не содержит переменной y, то уравнение описывает цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy. Этот цилиндр – параболический, так как направляющей является парабола, расположенная в плоскости Oxz. Ее осью симметрии является ось Ox. Вершина параболы находится в начале координат.◄

Задача 2. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение $8x^2 – y^2 – 4z +16 = 0$?

А) Эллипсоид.
Б) Сферу.

В) Коническую поверхность.
Г) Эллиптический параболоид
Д) Однополостный гиперболоид.
Е) Двуполостный гиперболоид.

►Данное уравнение описывает гиперболический параболоид с вершиной в точке (0, 0, 4).◄

Проверьте себя! Задача 1. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение: $4x^2 + 5z=0$?
А) Эллипсоид.
Б) Сферу.
В) Коническую поверхность.
Г) Эллиптический параболоид
Д) Однополостный гиперболоид.
Е) Двуполостный гиперболоид.
Ж) Гиперболический параболоид**.**
З) Цилиндрическую поверхность.
И) Ни одну из перечисленных выше поверхностей.

►Так как уравнение не содержит переменной y, то уравнение описывает цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy. Этот цилиндр – параболический, так как направляющей является парабола, расположенная в плоскости Oxz. Ее осью симметрии является ось Ox. Вершина параболы находится в начале координат.◄

Задача 2. Какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение $8x^2 - y^2 - 4z + 16 = 0$?
А) Эллипсоид.
Б) Сферу.
В) Коническую поверхность.
Г) Эллиптический параболоид
Д) Однополостный гиперболоид.
Е) Двуполостный гиперболоид.

►Данное уравнение описывает гиперболический параболоид с вершиной в точке (0, 0, 4).◄

Проверьте себя! Задачи для самостоятельной работы к § 1-4 гл. 4

Определите тип поверхности, заданной уравнением:

Эллипсоид; сфера; конус; эллиптический параболоид; гиперболический параболоид; однополостный гиперболоид; двуполостный гиперболоид; эллиптический цилиндр; параболический цилиндр; гиперболический цилиндр;

18) $2x^2 + 3z = 0$;
19) $z^2 - 2y^2 = -4x^2$;
20) $z^2 - 2y = -4x^2$;

21) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$.

Ответы: 18**)** Параболический цилиндр. 19) Эллиптический параболоид. 20**)** Конус. 21) Эллипсоид.

Глава 5. **Проверьте себя! Контрольные вопросы и задачи к разделам 2+3**

1º. Тест по разделу 2+3 (образец, 90 мин.)

Вар № 00	Раздел 2. **Векторная алгебра и Аналитическая геометрия**
1	В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой М в отношении 5:3, считая от точки B. Тогда разложение вектора $\overline{AM}$ по векторам $\overline{b} = \overline{AC}$ и $\overline{c} = \overline{AB}$ имеет вид:
2	Даны векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{c} = 5\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$. Проекция вектора $\overline{b} + \overline{c}$ на ось вектора $\overline{a} - \overline{b}$ равна:
3	Даны вершины треугольника: $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(5, 1)$. Найдите длину высоты треугольника, опущенной из вершины A.
4	Как располагаются прямые на плоскости, заданные уравнениями $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{8}$ и $x + 4y - 1 = 0$: *параллельны; перпендикулярны; совпадают; пересекаются под острым углом, отсчитываемом от первой прямой против часовой стрелки; пересекаются под тупым углом, отсчитываемом от первой прямой против часовой стрелки?*
5	Укажите координаты центра кривой $2x^2 + y^2 + 16x = 0$ (вершины параболы, если кривая – парабола). Постройте кривую.
6	Какая линия на плоскости определяется уравнением $x^2 - 2 + y = 0$? *Окружность; гипербола; парабола; эллипс; пара прямых; точка; никакой кривой и никакой точки*.
7	Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2, 0, -5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, соединяющему точки $B(2, 7, -3)$ и $C(1, 10, -1)$.
8	Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(0, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(1, -5, -9)$, $A_4(-1, -6, 3)$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
9	Каково взаимное расположение прямой и плоскости, заданных соответственно уравнениями: $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{2}$ и $x + 2y - 5z - 15 = 0$? *Прямая лежит в плоскости; прямая перпендикулярна плоскости; прямая пересекает плоскость под углом $\alpha < 60°$; прямая пересекает плоскость под углом $\alpha < 60°$; прямая параллельна плоскости*.

10	Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через вершину A_2 параллельно грани $A_1A_3A_4$.
11	Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$ и плоскости $x+2y-5z+16=0$.
12	Какая поверхность определяется уравнением $2x^2 + 3z = 0$? *Эллипсоид; сфера; конус; эллиптический параболоид; гиперболический параболоид; однополостный гиперболоид; двуполостный гиперболоид; эллиптический цилиндр; параболический цилиндр; гиперболический цилиндр.* Сделайте чертеж

Ответы к заданиям теста Вариант № 00

1) $\frac{3}{8}\overline{c}+\frac{5}{8}\overline{b}$. **2)** 7. **3)** $7/\sqrt{5}$. **4)** *Перпендикулярны*. **5)** $(-4,0)$. **6)** *Парабола.*
7) $x-3y-2z-8=0$. **8)** $37/3\sqrt{5}$. **9)** Прямая лежит в плоскости.
10) $6x-23y-4z-9=0$. **11)** $M(3,-7,1)$. **12)** Параболический цилиндр.

2°. Контрольные вопросы по разделу 2+3

1. Что такое вектор? его длина? орт вектора?

2. Сформулируйте свойства операции сложения векторов.

3. При каких условиях: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$? 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$? .

4. Что такое базис некоторого множества векторов? координаты вектора в выбранном базисе?

5. Что такое скалярное произведение двух векторов?

6. Какие прямые называются асимптотами гиперболы?

7. Сформулируйте правило сложения двух векторов, заданных разложениями в некотором базисе.

8. Сформулируйте понятие прямоугольного базиса и прямоугольной декартовой системы координат.

9. Перечислите свойства скалярного произведения.

11. Прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями L_1: $y = k_1x + b_1$, L_2: $y = k_2x + b_2$. Напишите условия параллельности и перпендикулярности этих прямых.

12. Почему плоскости и только они называются поверхностями 1-го порядка?

13. Прямая L задана уравнением с угловым коэффициентом $y = кx + в$. Поясните геометрический смысл $к$ и $в$.

14. Что такое эллипс? Сформулируйте свойство фокальных радиусов точки эллипса. Найдите координаты центра симметрии, полуоси.

15. Напишите уравнения асимптот гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

16. При каком условии плоскость и прямая в пространстве параллельны? перпендикулярны?

17. Напишите условие перпендикулярности прямых в пространстве.

18. Напишите общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл коэффициентов уравнения?

19. Напишите уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

20. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (A, B, C)$.

21. Дайте определение понятиям: «функция спроса», «функция предложения», «равновесная цена». Линейная и квадратичная аппроксимации.

3º. Варианты контрольных работ(ИДЗ)

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ (*ИДЗ*)

Перед выполнением индивидуального домашнего задания (ИДЗ) (контрольной работы) студент должен изучить соответствующие разделы курса по пособию для студентов-заочников ИПТЭТ (то, которым Вы используете сейчас) в котором. даются определенные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров. Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя. ответственного за работу с этой группой заочников ИПМЭТ.

Каждая контрольная работа (ИДЗ) должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, шифр, номер задания ИДЗ, название раздела и дату отправки работы в институт.

Задачи в ИДЗ выбираются из таблицы вариантов согласно тому варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. (Если этот шифр заканчивается нулём, то выбирается вариант№10)

Решения задач необходимо приводить в последовательности, указанной в таблице вариантов. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением.

В прорецензированной зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенные контрольные работы (ИДЗ) предъявляются студентом при сдаче зачета или экзамена.

ПРИМЕЧАНИЕ: Часть задач в каждом блоке заданий по решению преподавателя может быть опушена.

Задание первое. Векторная алгебра 1.

В задачах 1–10 даны векторы -, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$ и число m. Требуется найти вектор $\vec{s}=\{s_x,s_y,s_z\}$

1. $\vec{a}=\{2;-3;-1\},\quad \vec{b}=\{-3;-6;4\},\quad \vec{c}=\{-3;-5;1\},\quad m=-58$.
2. $\vec{a}=\{1;2;-2\},\quad \vec{b}=\{0;4;1\},\quad \vec{c}=\{-1;4;2\},\quad m=-6$.
3. $\vec{a}=\{-1;1;3\},\quad \vec{b}=\{-3;0;-3\},\quad \vec{c}=\{0;-1;-3\},\quad m=-3$.
4. $\vec{a}=\{-2;6;1\},\quad \vec{b}=\{1;4;0\},\quad \vec{c}=\{-5;0;-2\},\quad m=48$.
5. $\vec{a}=\{2;-3;5\},\quad \vec{b}=\{-4;0;3\},\quad \vec{c}=\{-4;1;6\},\quad m=62$.
6. $\vec{a}=\{0;2;4\},\quad \vec{b}=\{-1;3;0\},\quad \vec{c}=\{4;2;1\},\quad m=-54$.
7. $\vec{a}=\{-1;0;2\},\quad \vec{b}=\{3;-1;-4\},\quad \vec{c}=\{-1;-3;-4\},\quad m=12$.
8. $\vec{a}=\{-4;-2;0\},\quad \vec{b}=\{-1;-5;-1\},\quad \vec{c}=\{0;-2;-4\},\quad m=-64$.
9. $\vec{a}=\{2;-3;-2\},\quad \vec{b}=\{-4;-1;2\},\quad \vec{c}=\{2;0;-2\},\quad m=-12$.
10. $\vec{a}=\{0;2;4\},\quad \vec{b}=\{-1;2;-1\},\quad \vec{c}=\{3;2;0\},\quad m=-38$.

Задание второе. Векторная алгебра 2.

В задачах 1–10 даны вершины $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$, $D(x_D,y_D,z_D)$ треугольной пирамиды $ABCD$. Найти (средствами векторной алгебры): 2.1. проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AD}$;

2.2. площадь S треугольника ABC;

1. $A(0;3;-1),\quad B(2;0;-2),\quad C(-3;-3;3),\quad D(-3;-2;0)$.
2. $A(2;-2;0),\quad B(3;0;-2),\quad C(2;2;1),\quad D(1;2;2)$.
3. $A(3;-2;0),\quad B(2;-1;3),\quad C(0;-2;-3),\quad D(3;-3;-3)$.
4. $A(2;-3;-1),\quad B(0;3;0),\quad C(3;1;-1),\quad D(-3;-3;-3)$.
5. $A(1;2;-3),\quad B(3;-1;2),\quad C(-3;2;0),\quad D(-3;3;3)$.
6. $A(-2;-1;-1),\quad B(-2;1;3),\quad C(-3;2;-1),\quad D(2;1;0)$.
7. $A(0;1;1),\quad B(-1;1;3),\quad C(3;0;-3),\quad D(-1;-2;-3)$.
8. $A(2;2;2),\quad B(-2;0;2),\quad C(1;-3;1),\quad D(2;0;-2)$.
9. $A(1;1;1),\quad B(3;-2;-1),\quad C(-3;0;3),\quad D(3;1;-1)$.
10. $A(0;-1;-2),\quad B(0;1;2),\quad C(-1;1;-3),\quad D(3;1;-2)$.

Задание третье. Прямая на плоскости

В задачах 1–10 даны уравнения сторон $AB,\ AC,\ BC$ треугольника ABC

1.1. Уравнение прямой (L), проходящей через вершину A и параллельной стороне BC (не определяя координат точки A).

1.2. Уравнение высоты BK и её длину $|BK|$.

1.3. Длину $|AD|$ высоты AD (не определяя её уравнения).

1.4. Уравнение медианы CM.

1. AB: $2x+3y+3=0.$ AC: $2x-5y+11=0.$ BC: $4x-2y-2=0.$

2. AB: $-4x+5y+7=0.$ AC: $-3x+5y+4=0.$ BC: $x+2=0.$

3. AB: $x+y-1=0.$ AC: $y+1=0.$ BC: $-x+2y+1=0.$

4. AB: $x+4y-7=0.$ AC: $x+1=0.$ BC: $-x+2y+1=0.$

5. AB: $5x+4y+7=0.$ AC: $x+3y+8=0.$ BC: $4x+y+10=0.$

6. AB: $3x+y-7=0.$ AC: $x-3=0.$ BC: $x-y-1=0.$

7. AB: $y+2=0.$ AC: $x-4y-11=0.$ BC: $x-3y-8=0.$

8. AB: $x-3y+8=0.$ AC: $-x+1=0.$ BC: $x+y=0.$

9. AB: $-6x+y+15=0.$ AC: $y-3=0.$ BC: $2x+y-1=0.$

10. AB: $5x+y-7=0.$ AC: $-x+1=0.$ BC: $x+y+1=0.$

Задание четвертое. Плоскость и прямая в пространстве

В задачах 1–10 даны четыре точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$. Выполнить следующее:

3.1. Написать уравнение плоскости P, проходящей через три точки $A,\ B,\ C$.

3.2. Написать уравнение плоскости (P_1), проходящей через точки A и B параллельно прямой, проходящей через точки C и D.

3.3. Составить уравнение прямой (L), проходящей через точку D перпендикулярно плоскости (P).

3.4. Найти расстояние d от точки D до плоскости (P_1).

1. $A(0;3;-1),\quad B(2;0;-2),\quad C(-3;-3;3),\quad D(-3;-2;0)$.

2. $A(2;-2;0),\quad B(3;0;-2),\quad C(2;2;1),\quad D(1;2;2)$.

3. $A(3;-2;0),\quad B(2;-1;3),\quad C(0;-2;-3),\quad D(3;-3;-3)$.

4. $A(2;-3;-1),\quad B(0;3;0),\quad C(3;1;-1),\quad D(-3;-3;-3)$.

5. $A(1;2;-3),\quad B(3;-1;2),\quad C(-3;2;0),\quad D(-3;3;3)$.

6. $A(-2;-1;-1),\quad B(-2;1;3),\quad C(-3;2;-1),\quad D(2;1;0)$.

7. $A(0;1;1),\quad B(-1;1;3),\quad C(3;0;-3),\quad D(-1;-2;-3)$.

8. $A(2;2;2),\quad B(-2;0;2),\quad C(1;-3;1),\quad D(2;0;-2)$.

9. $A(1;1;1),\quad B(3;-2;-1),\quad C(-3;0;3),\quad D(3;1;-1)$.

10. $A(0;-1;-2),\quad B(0;1;2),\quad C(-1;1;-3),\quad D(3;1;-2)$.

Задание пятое Кривые 2-го порядка 1.

В задачах 1–10 требуется составить уравнение окружности, проходящей через начало координат и две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Найти центр $C(a; b)$ и радиус R этой окружности.

1. $M_1\left(2; 4+2\sqrt{2}\right); \quad M_2\left(2; 4-2\sqrt{2}\right)$.

2. $M_1(1; 5); \quad M_2\left(-1; 3-2\sqrt{3}\right)$.

3. $M_1\left(1; 4+\sqrt{13}\right); \quad M_2(-2; 0)$.

4. $M_1(-2; 6); \quad M_2\left(1; 3-\sqrt{6}\right)$.

5. $M_1\left(-1; -3+2\sqrt{3}\right); \quad M_2(-5; -5)$.

6. $M_1(6; 6); \quad M_2\left(1; 3-\sqrt{14}\right)$.

7. $M_1(1; 5); \quad M_2(-4; 0)$.

8. $M_1\left(1; -3+2\sqrt{2}\right); \quad M_2(3; -3)$.

9. $M_1\left(-3; -3+\sqrt{6}\right); \quad M_2\left(-1; -3-\sqrt{10}\right)$.

10. $M_1\left(1; 4+\sqrt{15}\right); \quad M_2\left(2; 4-2\sqrt{3}\right)$.

Задание шестое. Кривые 2-го порядка 2.

Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду. Указать координаты центра, а если кривая парабола, координаты вершины.

1. $-9x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 6x + 1 = 0$

$x^2 + 4y^2 + 4x - 8 = 0$

$6x^2 + 3y^2 + 18y - 1 = 0$

2. $2x^2 - 2y^2 + 16y + 3 = 0$

3. $-x^2 + 2y - 2x + 4 = 0$ $\qquad$ $4y^2 + 6x - 8y + 1 = 0$

4. $-2x^2 - 2y^2 - 8x - 16y + 3 = 0$ $\qquad$ $-3x^2 + 3y^2 + 9y - 7 = 0$

5. $-3x^2 + 3y^2 + 12x + 2 = 0$ $\qquad$ $-3y^2 - 6x - 12y + 6 = 0$

6. $-2y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ $\qquad$ $5x^2 + 5y^2 + 10x - 20y - 1 = 0$

7. $-2y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ $\qquad$ $2x^2 - 8y^2 + 4x + 7 = 0$

8. $-4x^2 - 4y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$ $\qquad$ $-x^2 - 9y^2 - 3y + 5 = 0$

9. $4y^2 - 4x + 12y - 2 = 0$ $\qquad$ $8x^2 + 2y^2 + 4x - 4 = 0$

Задание 7. Поверхности 2-го порядка

Определить какую из перечисленных ниже поверхностей определяет уравнение и сделать чертеж

А) Эллипсоид.

Б) Сферу.

В) Коническую поверхность.

Г) Эллиптический параболоид
Д) Однополостный гиперболоид.
Е) Двуполостный гиперболоид.
Ж) Гиперболический параболоид**.**
З) Цилиндрическую поверхность
Ж) Ни одну из перечисленных выше поверхностей.

1.	$x^2+4z=0;$	$y^2+2z^2=6x^2;$
2.	$x^2+2y^2-2z=0;$	$x^2-2y=-z^2;$
3.	$y^2+4z^2=5x^2;$	$4x^2-y^2-3z^2=12;$
4.	$x^2-y=-9z^2;$	$3x^2+12y^2+4z^2=48;$
5.	$7x^2-3y^2-z^2=21;$	$7y^2+z^2=14x^2;$
6.	$4x^2+9y^2+36z^2=72;$	$15y=10x^2+6y^2;$
7.	$y^2+8z^2=20x^2;$	$2x^2+3y^2-z^2=36;$
8.	$y=5x^2+3z^2;$	$3x^2-4y^2-2z^2+12=0;$
9.	$2x^2+3y^2-z^2=18;$	$y-4z^2=3x^2;$
10.	$4z^2-3y^2-5x^2+60=0;$	$x-3z^2=9y^2;$

Раздел 4. **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ – ряд разделов математики, посвящённых исследованию функций методами анализа бесконечно малых. В настоящем разделе вводятся основные понятия математического анализа: функция, предел, непрерывность функции. Описание нового по сравнению с элементарной математикой действия – предельного перехода – является центральным для всего раздела. С помощью операции предельного перехода далее будут построены другие основные понятия математического анализа – интеграл и т. п.

Краткая характеристика раздела 4

1. Темы раздела. Числовые множества. Функция одной переменной. предел функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Непрерывность функции. Функции в экономике.

2. Базисные понятия. Множество. Функция. Предел. Непрерывность.

3. Основные задачи. Простейшее исследование функций. Вычисление пределов Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Исследование непрерывности функций. Классификация разрывов. Свойства непрерывных функций.

Глава 1. **Множества и функции**

§ 1. Множества. Определения и формулы

1º. Множество относится к базовым математическим понятиям и не имеет классификационного определения. Это понятие поясняется примерами. Множества состоят из элементов. Тот факт, что элемент а входит в множество A обозначается знаком принадлежности $a \in A$. Объединение множеств $C=A \cup B$ состоит из всех элементов, принадлежащих A или B (или их общей части). Пересечение множеств $D=A \cap B$ состоит из всех элементов, принадлежащих A и B одновременно.

Числовое множество называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если есть такое число M, что для всех элементов множества справедливо неравенство $a<M$ ($a >M$). Наименьшее из всех возможных чисел M называется *точной верхней*, а наибольшее из всех этих чисел *точной нижней границей* множества. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

2º. Некоторые подмножества из *R* (множества всех вещественных чисел), используемые в этом курсе. Пусть a и b – заданные вещественные числа, причем $a < b$. Далее используются следующие обозначения и терминологию:

1. $\{x\in \boldsymbol{R}\colon a < x < b\} = (a, b)$ – интервал или открытый промежуток.
2. $\{x\in \boldsymbol{R}\colon a \le x \le b\} = [a, b]$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток).
3. $\{x\in \boldsymbol{R}\colon a < x \le b\} = (a, b]$ и $\{x\in \boldsymbol{R}\colon a \le x < b\} = [a, b)$ – полуинтервалы.

Множества 1-3 относятся к конечным промежуткам.

4. $\{x\in \boldsymbol{R}\colon x \le a\} = (-\infty, a]$ и $\{x\in \boldsymbol{R}\colon x \ge a\} = [a, +\infty)$ – бесконечные полуинтервалы.
5. $\{x\in \boldsymbol{R}\colon x < a\} = (-\infty, a)$ и $\{x\in \boldsymbol{R}\colon x > a\} = (a,+\infty)$ – бесконечные интервалы.
6. $\{x\in \boldsymbol{R}\colon -\infty< x < + \infty\} = (-\infty, \infty)$ – бесконечный интервал или числовая прямая.
7. $U(a)$ – окрестность точки a – любой интервал (a_1, a_2), содержащий эту точку (рис. 1.1).
8. $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ – ε - окрестность точки a (рис. 1.2).

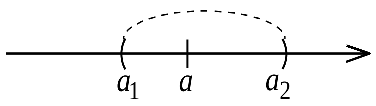


Рис. 1.1. Окрестность точки а

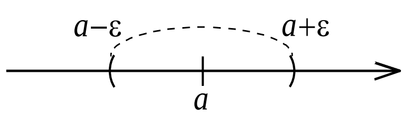


Рис. 1.2. ε – окрестность точки а

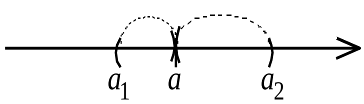


Рис. 1.3. Проколотая окрестность точки а

9. $\mathring{U}(a)$ – проколотая окрестность точки a – объединение интервалов $(a_1, a) \cup (a, a_2)$, a_1, a_2 – любые вещественные числа (рис. 1.3).

10. $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ – проколотая ε – окрестность точки a – объединение интервалов $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$.

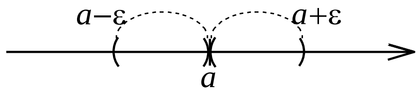


Рис. 1.4. Проколотая ε-окрестность точки a

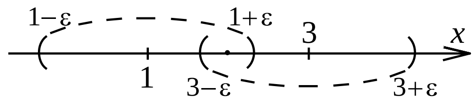


Рис. 1.5. К задаче 1

3º. Модуль вещественного числа и его свойства.

Определение 1.1. Абсолютной величиной (модулем) вещественного числа x называется число, обозначаемое через $|x|$ и определяемое формулой

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Замечание 1.1. Геометрически $|x|$ интерпретируется как расстояние от точки x числовой прямой до точки O (начала отсчёта) (рис. 1.6, 1.7).

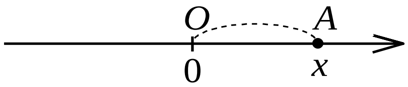


Рис. 1.6. К замечанию 3.1,
$x>0$, $|x| = |OA|$

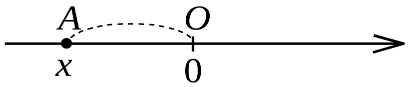


Рис. 1.7. К замечанию 1.1,
$x<0$, $|x| = |AO|$

Некоторые свойства абсолютной величины

1. $|x| \geq 0$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

2. Неравенства $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ равносильны для $\forall a > 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

4. Неравенство $|x| \geq a$ и объединение двух неравенств: $x \leq -a \vee x \geq a$ равносильны для $\forall a > 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ для $\forall\ x \in \boldsymbol{R}$, $\forall\ y \in \boldsymbol{R}$, если $y \neq 0$, то $|x/y| = |x|/|y|$.

Замечание 1.2. Из свойства 2 следует, что число x находится в данном случае на числовой прямой на отрезке длиной $2a$ между точками $-a$, a и на расстоянии от точки 0, не большем, чем a (рис. 1.8), а из свойства 3 – число x находит-ся от точки 0 на расстоянии, не меньшем, чем a (рис. 1.9).

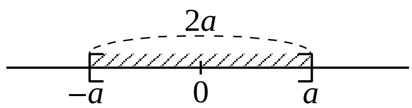


Рис. 1.8. К замечанию 1.2 (свойство 2)

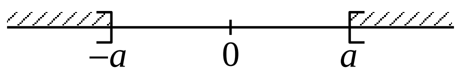


Рис. 1.9. К замечанию 1.2 (свойство 3)

Замечание 1.3. Неравенство $|x+y| \leq |x| + |y|$ называют неравенством треугольника. Можно доказать и более общее утверждение: пусть n – заданное на-туральное число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – заданные вещественные числа, тогда справедливо неравенство $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

4º. Образцы задач с решениями (к § 1)

Задача 1. Записать в виде промежутков множества $U_\varepsilon(1)\cup U_\varepsilon(3)$, $U_\varepsilon(1)\cap U_\varepsilon(3)$ при $\varepsilon\in(1, 2)$.

► $U_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $U_\varepsilon(3) = (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$. $U_\varepsilon(1)\cap U_\varepsilon(3) = (1-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, $U_\varepsilon(1)\cap U_\varepsilon(3) =(3-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ (рис. 1.5).◄

Задача 2. Решить неравенства: а) $|x-1| \le 3$, б) $|x+2| \ge 2$, в) $|x+2|\ge-2$.

►а) В силу свойства 2 имеем $-3 \le x-1 \le 3$. Прибавив ко всем частям неравенства по 1, получим: $-2 \le x \le 4$ или $x\in [-2, 4]$.

б) Из свойства 3 имеем: $x+2 \le -2 \vee x+2 \ge 2$. Прибавив ко всем частям этих неравенств по -2: $x \le -4\vee x \ge 0$, или $x\in (-\infty-4] \cup[0, +\infty)$.

в) В силу свойства 1 решением данного неравенства является $x\in\boldsymbol{R}$.◄

§ 2. Функция. Основные определения и понятия

1º. Определение 2.1. Если дано правило или закон, ставящий в соответствие каждому вещественному числу x из множества X единственное вещественное число y из множества Y, то y называют функцией аргумента x и записывают: $y = f(x)$.

При этом x называют независимой, а y – зависимой переменной. Множество X называют областью определения и обозначается $D(f)$, а множество Y – множеством значений функции и обозначается $E(f)$.

Пример 2.1. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

►Решим неравенство $\dfrac{x-1}{x+1}\ge 0$ методом интервалов, получим, что $D(f) = (-\infty, -1) \cup [(1, +\infty)$.◄

2º. Способы задания функции.

1) *Аналитический способ* – задание закона, устанавливающего связь между переменными x и y, с помощью формулы. В школьном курсе математики так были введены обратно пропорциональная зависимость $y = k/x$, квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ и т. д. Функции при аналитическом задании могут быть заданы:

в явном виде: $y = f(x)$, например: $y = k/x$;

в неявном виде: $F(x, y) = 0$, например: $xy = 5$;

параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t\in[t_1, t_2]$, например: $\left(\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}\right)$.

2) *Табличный способ* – задание таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции.

3) *Графический способ* – соответствие между аргументом и функцией задаётся посредством графика.

4) *Алгоритмический способ* – задание функции с помощью алгоритма (программы). Он используются при вычислениях на компьютерах.

5) *Задание функции словесным описанием.* Так, функция $y=[x]$, называемая *целой частью числа x*, определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x.

Определение 2.2. Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке $[a, b]$, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, а именно, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

Функции, возрастающие или убывающие на промежутке $[a, b]$, называются *монотонными* на этом промежутке.

Определение 2.3. Функция $y=f(x)$ называется *чётной (нечётной),* если её область определения $D(f)$ симметрична относительно точки $x = 0$ и для $\forall x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f x))$.

Функция $y = x^2$ – чётная, ибо $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, а функция $y = x^3$ – нечётная, поскольку $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

График чётной функции обладает симметрией относительно оси Oy, а нечётной — симметрией относительно начала координат (рис. 1.1, 1.2).

Определение 2.4. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) если можно указать такое число M, что $f(x) \le M$ $(f(x) \ge M)$ для любого x из области определения $f(x)$.

Определение 2.5. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) если можно указать такое число M, что $f(x) \le M$ $(f(x) \ge M)$ для любого x из области определения $f(x)$.

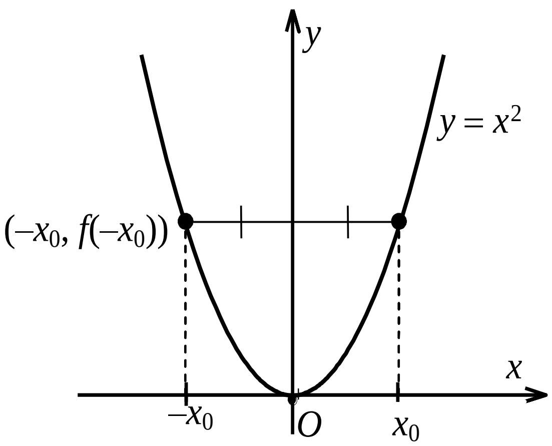


Рис. 2.1. График функции $y = x^2$

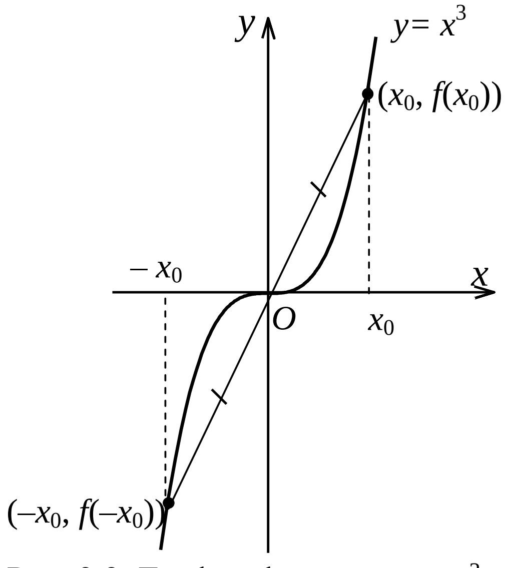


Рис. 2.2. График функции $y = x^3$

Определение 2.6. Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, при этом $E(f) \subset D(g)$. Функция $z = g(f(x))$, $x \in D(f)$ называется *сложной функцией*

3º. Классификация функций.

Перечисленные ниже функции называют *основными элементарными функциями*; они наиболее употребительны в приложениях математики.

1. $y = C$ – const для $\forall x \in X$, где X – промежуток числовой прямой, её график при $C \neq 0$ – отрезок прямой, параллельной оси абсцисс.

2. *Показательная функция* $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

3. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. *Степенная функция* $y = x^a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$. При $x > 0$.

5. *Тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

6. *Обратные тригонометрические функции* $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Определение 2.7. Функция, которая может быть задана одним аналитическим выражением с помощью конечного числа суперпозиций и арифметических операций над основными элементарными функциями, называется *элементарной функцией*.

Элементарная функция называется *алгебраической*, если её можно задать с помощью конечного числа алгебраических действий (сложения, вычитания, ум-ножения, деления и возведения в степень с рациональным показателем). Все другие элементарные функции называются *трансцентденными*. Так, из функций $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 2}{\sqrt{x+5} + x^{2/5}}$, $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\sqrt{e^x - 1} + \ln\cos(3x+1)}{\sin(1/x) + \operatorname{ctg}\sqrt[3]{2x-5}}$, первая – алгебраическая функция, а вторая – элементарная трансцентдентная.

Пример 2.1. Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_{1/2}(4 - x^2)}$.

►$D(y)$: $\log_{1/2}(4 - x^2) \geq 0$ или, в силу свойств логарифмической функции, $D(y)$: $0 < 4 - x^2 \leq 1$. Это неравенство равносильно системе из двух неравенств: $0 < 4 - x^2 \wedge 4 - x^2 \leq 1$. Для первого из них имеем: $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Решение второго выполним по аналогии: $4 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$ $x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}$. Пересечение найденных решений приводит к соотношению $D(y) = (-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2)$ (рис.3.1).◄

Пример 2.2. Является ли функция $y = (e^x - e^{-x})/2$ чётной? нечётной?

►$D(y) = \boldsymbol{R}$, $y(-x) = -(e^x - e^{-x})/2 = -y(-x)$ при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, поэтому данная функция нечётная.◄

§ 3. Функции в экономике

Функции широко применяются в экономической теории и при решении экономических (и производственных) задач. Приведем наиболее часто применяемые функции.

Функция полезности − зависимость полезности (эффекта, результата) некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

Производственная функция − зависимость результата производственной деятельности от обусловивших ее факторов.

Функция выпуска определяет зависимость объема выпускаемой продукции от объема перерабатываемого ресурса. Функция выпуска является частным видом производственной функции.

Функция издержек – зависимость издержек производства от объема продукции. Функция издержек также есть частный вид производственной функции.

Функции спроса (потребления) и предложения – зависимость объема спроса (потребления) D и предложения S от разных факторов, так, от цены p.

Эти функции, как правило, функции нескольких переменных. Но в ряде случаев можно выделить одну переменную (фактор), которая оказывает наибольшее влияние на значения рассматриваемой функции.

Пример 3.1. Спрос и предложение некоторого товара (услуги) определяются главным образом ценой p товара (услуги). Они могут задаваться функциями:

$$D(p) = ap+c, \text{ где } a<0 \text{ или } D(p) = ap^2+a_1p + c,\ a > 0; \tag{3.1}$$

$$S(p) = bp+d, \text{ где } b<0 \text{ или } S(p) = bp^2+b_1p + c,\ b > 0. \tag{3.2}$$

Пример 3.2. Зависимость спроса на различные товары от дохода (функции Торнквиста):

$$y=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1},(x>a_1) \text{ товары первой необходимости);} \tag{3.3}$$

$$y=\frac{b_2(x-a_2)}{x-c_{12}},(x>a_2) \text{(товары второй необходимости);} \tag{3.4}$$

$$y=\frac{b_3x(x-a_3)}{x-c_3},(x>a_3) \text{(товары роскоши).} \tag{3.5}$$

В (3.3) − (3.5) $a_1 < a_2 < a_3$ − уровни доходов, b_1, b_2 – точки насыщения групп товаров 1-й и 2-й необходимости.

§ 4. Задачи для самостоятельной работы к § 2, 3 гл. 1

Задача 4. Исследовать функции на четность и нечетность:
$f(x) = (x^2 – x+ 2)/x$.

Задача 5. $f(x) = |x + 1| – x$. Найти: *a*) $f(3)$; *b*) $f(–5)$.

Задача 6. $f(x) = \sin 2x + \cos x$. Найти: *a*) $f(\pi)$; *b*) $f(\pi/6)$;

Задача 7. Пусть $f_1(x) = x^{-1}$, $f_2(x) = 5x+2$, $f_3(x) = \sin x$. Записать $z(x) = \sin(1/(5x+2))$ как сложную функцию, составленную из трех данных функций.

Ответы. 4) ни четная, ни нечетная; **5)** *a*)1; *b*) 9; **6)** *a*) –1; *b*) √3.

Глава 2. **Предел функции**

§ 1. Предел функции в точке

Предположим, что мы приближаемся к точке a, при этом расстояние от точки a ($|x-a|$) может быть сколь угодно малым (но не равным нулю), например, меньше δ, где δ наперед заданное сколь угодно малое положительное число. А как при этом ведут себя значения функции? Если при каком-то значении δ значения функции $f(x)$ отличаются от A меньше чем на ε ($|f(x) - A| < \varepsilon$), то это означает, что $f(x)$ имеет предел в точке a равный A.

Определение 1.1. Пусть функция $f(x)$ определена на $\overset{\circ}{U}(a)$ – некоторой проколотой окрестности точки a. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для x: $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Замечание 1.1. Предел функции $f(x)$ в точке a – характеристика поведения функции в некоторой проколотой окрестности точки a. Значение функции $f(a)$, если оно существует, не влияет ни на существование, ни на величину предела.

Определение 1.2. Число A называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a - 0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a_1, a) и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для x:
$a_1 < a - \delta(\varepsilon) < x < a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $A = f(a-0)$.

Аналогично определяется правый предел функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a + 0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a, a_2).

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $A = f(a+0)$.

Теорема 1.1. Для того чтобы $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:

1. $\exists\ f(a-0)$ и $f(a+0)$; **2.** $f(a-0) = f(a+0)$.

Следствие из теоремы 1.1. Если $f(a-0) \neq f(a+0)$, то функция $f(x)$ не имеет предела в точке a. Доказательство от противного.

Определение 1.3. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если $f(x)$ определена на множестве $X = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a – некоторое положительное число, и по $\forall\varepsilon > 0$ можно найти число $M(\varepsilon)>0$: для $\forall x$: $|x| > M(\varepsilon)$ верно неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Обозначение: $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Пример 1.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^p = 0$ для $\forall p > 0$ и $\forall x > 0$.

►Возьмём $\forall\,\varepsilon > 0$. Так как $|1/x^p|<\varepsilon \Rightarrow |x^p|>1/\varepsilon \Rightarrow |x|>1/\varepsilon^p$, то для x: $|x|>M(\varepsilon)=1/\varepsilon^p \Rightarrow |1/x^p| < \varepsilon$, отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^p = 0$ (определение 1.3, $A = 0$).◄

Пример 1.2. Если функция $f(x) = C$ на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a, то ее предел равен C при $x\to a$.

►Неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$ из определения 1.1 выполняется при $A = C$ для $\forall\; x\in\mathring{U}(a)$ и $\forall\,\varepsilon > 0$. ◄

Упражнение. Сформулировать определения, соответствующие следующим обозначениям: $A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

§ 2. Свойства функций, имеющих предел

Теорема 2.1. (*теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел*). Если $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

1. $\exists\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = A\pm B,$ 2. $\exists\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B,$

3. $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при условии, что функция $g(x)\neq 0$ на $\mathring{U}(a)$ и $B\neq 0$.

Теорема 2.2. Если $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то он единственный.

►Пусть $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. Но $f(x) - f(x) \to 0 = A-B$ при $x\to a$ (теорема 1.2). Предел постоянной равен самой постоянной (пример 1.2), поэтому приходим к выводу, что $A=B$.◄

Теорема 2.3 (*о сжатой функции*). Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на $\mathring{U}(a)$ и для $\forall x\in\mathring{U}(a)$ верно неравенство $f(x)\le g(x)\le h(x)$, а также $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\exists\lim\limits_{x\to a} h(x)=A$, то $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

Замечание 2.1. Теоремы 1.1 – 1.5 верны и в случае, когда под a понимается один из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

§ 3. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Следствия замечательных пределов

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin x}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

Пример 3.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\text{tg}3x}$.

► $\frac{\sin 2x}{\text{tg}3x}=\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\text{tg}3x}\cdot\frac{2x}{3x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\left|2x=u\right|=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ (первый замечательный предел). Аналогично получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\text{tg}3x}=1$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\text{tg}3x}=\frac{2}{3}$ (теорема 2.1).◄

Глава 3. **Бесконечно малые и бесконечно большие функции**

§ 1. Основные определения

Определение 1.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\exists\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (под a может пониматься один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$).

Так, функция $1/x^p$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$ и $\forall p>0$, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^p=0$ для $\forall p>0$ (см. пример 1.1 гл. 2).

Свойства бесконечно малых функций

1) Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть бесконечно малые функции при $x\to a$.

2) Произведение функции $\alpha(x)$, бесконечно малой при $x\to a$, на функцию $f(x)$, ограниченную на $\mathring{U}(a)$ – в некоторой проколотой окрестности точки a, есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

3) Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$f(x)=A+\alpha(x), \tag{1.1}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Определение 1.2. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ если она определена на $\mathring{U}(a)$ – некоторой проколотой окрестности точки a и для любого числа $M>0$ можно найти число $\delta(M)>0$: $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(x)|>M$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Замечание 1.1. Определение 1.2 можно переформулировать на случай: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Это определение можно переформулировать и на случай, когда под a понимают один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Теорема 1.1. (*о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций*).

Пусть дана функция $f(x)$, отличная от нуля на $\mathring{U}(a)$. Тогда:

1) если $f(x) \to 0$ при $x\to a$, то $1/f(x)\to\infty$ при$\to a$;

2) если $f(x) \to\infty$ при $x\to a$, то $1/f(x)\to 0$ при $x\to a$.

Пример 1.1. Показать, что функция $f(x) = x^p$ – бесконечно большая при $x\to+\infty$ для $\forall p> 0$.

►Функция $g(x) = 1/x^p$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$ для $\forall p> 0$ (пример 1.1 из гл. 2 и определение 1.1). Поскольку $f(x) = 1/g(x)$, то $f(x) = x^p$ – бесконечно большая функция при $x\to+\infty$ для $\forall p> 0$.◄

Арифметические операции над бесконечно большими функциями

Теорема 1.2. Если $f(x) \to\pm\infty$ и $g(x) \to\pm\infty$ при $x \to a$, либо функция $g(x)$ ограничена на $\mathring{U}(a)$, то и $f(x) + g(x)\to\pm\infty$ и $g(x)$ при $x\to a$ (здесь нужно брать либо везде знак «+», либо везде знак «–»).

Если $f(x) \to\infty$, а $g(x) \to\infty$ или $g(x) \to A \neq 0$ при $x\to a$, то и $f(x)\cdot g(x) \to \infty$ при $x\to a$.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$.

Определение 1.3. Если $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0, \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x\to a$.

Определение 1.4. Если $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется *величиной более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$ при $x\to a$.

Определение 1.5. Если $\nexists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми* при $x\to a$.

Определение 1.6. Если $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x\to a$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x\to a$.

Теорема 1.2 (*теорема о замене эквивалентными в произведении и отношении*). Если $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$ и

$\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть функция $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда

$\sin\alpha \sim \alpha$,	(1)	$1-\cos\alpha \sim \alpha^2/2$,	(2)
$\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$,	(3)	$\arcsin\alpha \sim \alpha$,	(4)
$\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$,	(5)	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$,	(6)
$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$,	(7)	$(1+\alpha)^{\mu} - 1 \sim \mu\alpha$.	(8)

Замечание 1.3. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций включает в себя как частный случай таблицу *замечательных пределов* и следствий из них.

§ 2. Раскрытие неопределенностей

Арифметические действия с бесконечно малыми и бесконечно большими функциями могут привести к так называемым *неопределённостям*, когда неприменимы теорема 1.2 из гл. 2 и теорема 1.2 из гл. 3. Так, при вычислении

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$, если $f(x)$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$ неприменима теорема 1.2 из гл. 2. В этом случае говорят, что выражение $f(x) - g(x)$ при $x \to a$ приводит к неопределённости вида $\infty - \infty$, а отыскание его предела называют *раскрытием неопределённости*. Если $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ или $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, то при вычислении $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)/g(x)\right)$ неприменима теорема 1.2 из гл. 3, говорят, что частное $f(x)/g(x)$ при $x \to a$ приводит к неопределённости $0/0$ или ∞/∞. Ниже рассматриваются методы для раскрытия некоторых неопределённостей.

Раскрытие неопределенностей, как и вычисление пределов функции, сводится к их преобразованию с последующим применением замечательных пределов, следствий из них и использованию эквивалентных бесконечно малых.

Неопределённость ∞/∞ **в отношении многочленов при** $x \to \infty$**.** Пусть $\dfrac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. В членах дроби вынесем за скобки старшие степени x:

$$\frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \frac{x^k(a_0 + a_1x^{-1} + \ldots + a_{k-1}x^{1-k} + a_kx^{-k})}{x^n(b_0 + b_1x^{-1} + \ldots + b_{n-1}x^{1-n} + b_nx^{-n})} =$$

$$= x^{k-n}\,\frac{a_0 + a_1x^{-1} + \ldots + a_{k-1}x^{1-k} + a_kx^{-k}}{b_0 + b_1x^{-1} + \ldots + b_{n-1}x^{1-n} + b_nx^{-n}}.$$

Предел второго сомножителя полученного произведения равен $a_0/b_0 \neq 0$ (пример 1.6, теорема 5.1), а $\lim\limits_{x\to\infty} x^{k-n} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < n, \\ 1 & \text{при } k = n, \\ \infty & \text{при } k > n, \end{cases}$ (примеры 1.6, 4.3). Тогда, в силу теорем 5.1 и 4.6, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_k(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < n, \\ a_0/b_0 & \text{при } k = n, \\ \infty & \text{при } k > n. \end{cases}$

Так, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 5x}{3x^3 - x + 2} = \dfrac{2}{3}$ ($k = n = 3$, $a_0 = 2$, $b_0 = 3$)), а $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x + 5}{2x^3 - x^2 + 1} = 0$, ибо здесь $k = 2$, $n = 3$, и, следовательно, $k < n$.

2. Неопределённость ∞/∞ в отношении алгебраических функций, содержащих иррациональности, $x\to\infty$. Неопределённость раскрывается в результате выделения в обоих членах дроби старшей степени x.

Задача 2. 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + x} + x}{\sqrt{x^2 - 3x} + 5x}$.

►Вынесем из-под знака радикала старшие степени x, после чего вынесем их за скобку в обоих членах дроби:

$$\frac{\sqrt{x^3 + x} + x}{\sqrt{x^2 - 3x} + 5x} = \frac{x^{3/2}\sqrt{1 + 1/x^2} + x}{x\sqrt{1 - 3/x} + 5x} = \frac{x^{3/2}(\sqrt{1 + 1/x^2} + x^{-1/2})}{x(\sqrt{1 - 3/x} + 5)} = x^{1/2}\,\frac{\sqrt{1 + 1/x^2} + x^{-1/2}}{\sqrt{1 - 3/x} + 5}.$$

В силу свойств пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + x} + x}{\sqrt{x^2 - 3x} + 5x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{1/2}\,\dfrac{\sqrt{1 + 1/x^2} + x^{-1/2}}{\sqrt{1 - 3/x} + 5} = +\infty$, ибо $x^{1/2} \to \infty$ при $x \to +\infty$ (пример 1.1), второй сомножитель стремится к 1/6.

3. Неопределённость $0/0$ в отношении многочленов, $x \to a$, $a \in \boldsymbol{R}$. Метод раскрытия таких неопределённостей состоит в разложении на множители членов дроби и последующего сокращения на разность $x - a$. При этом используется следующая теорема: "если число $x = a$ является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на разность $x - a$ без остатка".

Задача 2.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}$**.**

►Многочлен $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ делится на разность $x - 2$, ибо $x = 2$ – его корень, имеем: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{P_3(x)}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2 - x - 2)(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

При вычислении предела x принадлежит проколотой окрестности точки $x = 2$ (т. е. $x \neq 2$), поэтому оба члена дроби под знаком предела можно разделить на $x - 1$. Дробь из правой части последнего равенства не даёт неопределённости при $x\to 2$, её предел вычисляем по теореме 5.1. Окончательно получаем:
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{-1} = 0$.◄

4. Неопределённость 0/0 **в отношении алгебраических функций,**

содержащих иррациональности, $x \to a$, $a \in \boldsymbol{R}$**.** Надо перенести иррациональность из одного члена дроби в другой и далее разложить полученные многочлены на множители с целью сокращения на разность $x - a$.

Задача 2. 3. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3}}{x^2 - 4x + 4}$.

►Перенесём иррациональность из числителя дроби в знаменатель:

$$\frac{\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3}}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3})(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3})(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})} = \frac{(x^2 - x - 2)(x-2)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})} =$$

$= \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})}$, многочлен $x^3 - 3x^2 + 4$ разложен на множители как в задаче 2.2. Имеем: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3}}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3})}$. Сократим оба члена дроби в правой части последнего равенства на $(x-2)^2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3}}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{\sqrt{x^3+4} + x\sqrt{3}}.$$

Используя свойства пределов получаем: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^3+4} - x\sqrt{3}}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{3}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.◄

5. **Неопределённость** $\infty - \infty$**.** Общий принцип – трансформация данной неопределённости в неопределённость ∞/∞ или 0/0.

Задача 2.4. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 4})$.

►Выражение под знаком предела умножим и разделим на сопряженное:

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-4} = \frac{(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-4})(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-4})}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-4}} =$$

При $x \to \infty$ имеем неопределённость ∞/∞. Аналогично примеру 3.1:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-4}} = \frac{x(3 + 4/x)}{x(\sqrt{1 + 3/x} + \sqrt{1 - 4/x})} = \frac{3 + 4/x}{\sqrt{1 + 3/x} + \sqrt{1 - 4/x}} \quad \text{и}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-4}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 4/x}{\sqrt{1 + 3/x} + \sqrt{1 - 4/x}} = \frac{3}{2}.◄$$

Задача 2.5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}$.

►Дробь под знаком предела при $x \to 0$ даёт неопределённость 0/0. Имеем $\dfrac{\ln \cos x}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1} = \dfrac{\ln(1 + \cos x - 1)}{(1 + x^2)^{1/3} - 1}$. Из таблицы эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$ следуют соотношения:

$\ln(1 + \cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim -x^2/2$ ((9/7), $\alpha = \cos x - 1$ и ((9.2), $\alpha = x$),

$$(1 + x^2)^{1/3} - 1 \sim x^2/3 \ ((9{,}8),\ \alpha = x^2,\ \mu = 1/3).$$

Поэтому из теоремы 1.1 получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2/2}{x^2/3} = -\dfrac{3}{2}$. ◄

Задача 2.6. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{\mathrm{tg}\pi x}-1}$.

►Дробь под знаком предела при $x\to 2$ – неопределённость 0/0. Сделаем замену переменной под знаком предела:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{\mathrm{tg}\pi x}-1} = \begin{bmatrix} u = x-2, \\ x\to 2 \Rightarrow u\to 0, \\ x = u+2 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 2}\frac{\arcsin((u+2)^2-2(u+2))}{e^{\mathrm{tg}\pi(u+2)}-1} =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin(u^2+2u)}{e^{\mathrm{tg}(\pi u+2\pi)}-1} = \lim_{u\to 0}\frac{u^2+2u}{e^{\mathrm{tg}(\pi u)}-1} = \lim_{u\to 0}\frac{u(u+2)}{\mathrm{tg}(\pi u)} = \lim_{u\to 0}\frac{u(u+2)}{\pi u} = \frac{2}{\pi}.$$

Из таблицы эквивалентных бесконечно малых при $x\to 0$:

$$\arcsin(u^2+2u) \sim u^2+2u,\ e^{\mathrm{tg}\pi u} - 1 \sim \mathrm{tg}\pi u \sim \pi u, \text{ при } u\to 0$$

Правила вычисления пределов

1. В отсутствии неопределённости предел вычисляется с помощью теорем о пределах и непрерывности функций.

2. Предел выражения, представляющего неопределённость 0/0 вычисляется с помощью теоремы о замене эквивалентными бесконечно малыми, при этом применяется таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

3. Для вычисления пределов выражений, представляющих другие виды неопределённостей $x\to a \neq 0$, то целесообразно сделать замену $u = x-a$. Тогда $u\to 0$ (см. примеры 3.5 и 3.6).

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ! Задачи для самостоятельной работы к гл. 2+3

Предел функции в точке. Односторонние пределы. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые. Раскрытие неопределенностей

8) Вычислите пределы: ***a*)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; ***b*)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; ***c*)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

***d*).** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$. ***e*).** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-11x+2}{3x^2-x-10}$. ***f*).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\mathrm{tg}\,5x}$.

Ответы: 8). *a*) 2; *b*) –1/3; *c*) 1/4; *d*) 0; *e*) 9/11; *f*) 0,8.

Глава 4. **Непрерывность функции, определения, задачи**

С понятием предела функции в точке тесно связано другое важнейшее понятие математического анализа – непрерывность функции, отражающее свойство непрерывности многих процессов и явлений, происходящих в природе и обществе. Непрерывные функции обладают многими важными свойствами, чем и объясняется большое значение этих функций в математике и её приложениях.

§ 1. Непрерывность функции в точке

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) она определена в окрестности точки x_0 и в самой точке x_0,

2) существует конечный предел функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0),$$

выполняется равенство $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. этот предел равен значению функции в точке x_0.

Определение 1.2. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в ней нарушено хотя бы одно из трёх условий определения функции, непрерывной в точке.

1°. *Существует конечный* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, *но либо* $f(x)$ *не определена при* $x=x_0$, *либо* $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. В этом случае x_0 называют *точкой устранимого разрыва* данной функции.

Замечание 1.1. Функцию $f(x)$ с устранимым разрывом в точке x_0 можно доопределить или переопределить, приняв за её значение в этой точке $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Построенная таким образом функция

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке x_0. В этой связи точку x_0 и называют точкой устранимого разрыва.

2°. не существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$, но при этом существуют оба односторонних конечных предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, очевидно, не равные друг другу. Точка x_0 называется точкой *разрыва 1–го рода*, а разность $f(x_0-0) - f(x_0+0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

3°. В точке x_0 функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, или хотя бы один из них бесконечен. Точка x_0 называется точкой *разрыва 2–го рода*.

Образцы задач с решениями к § 1 гл. 4.

Пример 1.1. Показать, что функция $f(x) = (\sin x)/x$ имеет в точке $x=0$ устранимый разрыв.

► $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}((\sin x)/x) = 1$, но функция не определена при $x = 0$, поэтому $x = 0$ – точка устранимого разрыва данной функции.◄

В соответствии с замечанием 1.1 функцию $f(x)$ с устранимым разрывом в точке $x = 0$ можно доопределить, приняв за её значение в этой точке 1. В этом случае функция $f^*(x) = (\sin x)/x$, если $x \neq 0$ и равна 1, если $x=0$.

Пример 1.2. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} (x^2+x)/(x+1) & \text{при } x \neq -1, \\ -2 & \text{при } x = -1, \end{cases}$ имеет в точке $x = -1$ устранимый разрыв и построить её график.

► $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} x = -1$, но $f(-1) = -2 \neq -1$, поэтому $x = -1$ – точка устранимого разрыва. Для построения графика $f(x)$ преобразуем задающее её выражение: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \neq -1, \\ -2, & \text{при } x = -1. \end{cases}$

График функции приведён на рис. 1.1, точка $(-1, -2)$ принадлежит графику.

Построим $f^*(x)$ в соответствии с предыдущим замечанием

$$f^*(x) = \begin{cases} (x^2+x)/(x+1), & \text{при } x \neq -1, \\ -1, & \text{при } x = -1 \end{cases} \text{ или } \quad f^*(x) = x.$$

Эта функция непрерывна в точке $x = -1$. ◄

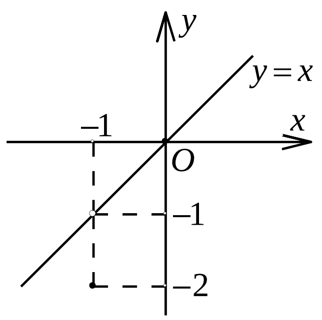


Рис. 1.1. График функции $f(x)$ из примера 1.2

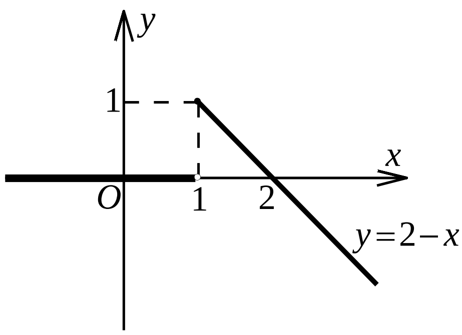


Рис. 1.2. График функции $f(x)$ из примера 1.3

Пример 1.3. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<1,\\ 2-x, & \text{при } x\ge 1,\end{cases}$ имеет в точке x=1 разрыв 1-го рода и построить её график.

►Существуют $f(1-0)=0$, $f(1+0)=1$, $f(1-0)\ne f(1+0)$ поэтому не существует $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Скачок функции $f(x)$ в точке x=1 равен $f(1+0)-f(1-0)=1$. График $f(x)$ приведён на рис. 1.2.◄

Пример 1.4. Показать, что функция $f(x)=e^{2/(x-2)}$ имеет в точке x=2 разрыв 2-го рода, $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} e^{2/(x-2)}=\left|z=-2/(x-2)\right|=0$,

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} e^{2/(x-1)}=\left|z=2/(x-2)\right|=\lim\limits_{z\to+\infty} e^{z}=+\infty$. В точке $x=2$ функция имеет неустранимый разрыв 2–го рода. График данной функции приведён на рис. 1.3.◄

Пример 1.5. При каком значении параметра λ функция $y=\begin{cases}x^3 & ; \quad x\le 0,\\ \lambda+x & ; \quad x>0\end{cases}$ будет непрерывной? Постройте ее график.

►Точка x=0 является точкой соединения двух аналитических выражений, поэтому может быть точкой разрыва при ненадлежащем значении параметра λ. Вычисляем пределы функции слева и справа в точке x = 0: $f(-0)=\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$; $f(+0)=\lim\limits_{x\to 0}(\lambda+x)=\lambda$; $f(-0)=f(+0)=\lambda=0$. С найденным значением λ зададим выражение для функции $y=\begin{cases}x^3, & \text{при } x\le 0,\\ x, & \text{при } x>0\end{cases}$ и построим ее график (рис. 1.4). ◄

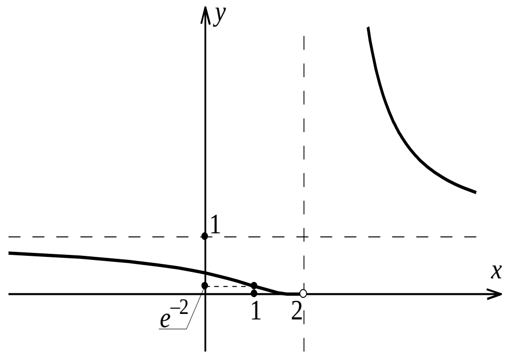


Рис. 1.3. К примеру 1.4

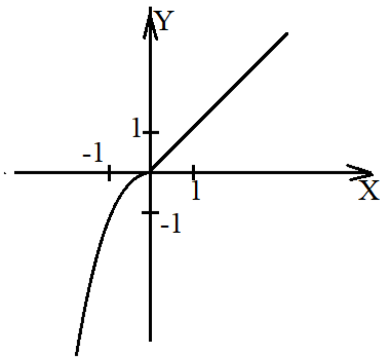


Рис. 1.4. К примеру 1.5.

§ 2. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 2.1 (*об арифметических операциях над непрерывными функциями*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны также их сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $f(x)/g(x)$ при условии, что в случае частного $g(x_0)\ne 0$.

Эта теорема является следствием теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (теорема 2.2 главы 3) и определения функции, непрерывной в точке (определение 1.1).

Пример 2.1. Показать, что многочлен $P_n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$.

►Функция $f(x)=x$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ ($\Delta f(x_0)=\Delta x\to 0$ для $\forall x_0\in\boldsymbol{R}$), поэтому функция $g(x)=x^n$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ как произведение n непрерывных функций, а многочлен $P_n(x)$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$ в силу теоремы 2.1.◄

Пример 2.2. Показать, что рациональная алгебраическая дробь $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}$ непрерывна на своей области определения.

►Поскольку функция $R(x)$ является отношением двух многочленов, то она непрерывна на своей области определения в силу теоремы 2.1, как частное двух непрерывных функций: многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.◄

Теорема 2.2 (*об ограниченности непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена на некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

Теорема 2.3 (*о сохранении знака непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то на некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 значения $f(x)$ отличны от нуля и имеют тот же знак, как $f(x_0)$.

Теорема 2.4 (*о непрерывности сложной функции*). Если функция $z=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(z))$ непрерывна в точке z_0: z_0,$=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

§ 3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 3.1 (*первая теорема Вейерштрасса* (Вейерштрасс К. Ф. – немецкий математик, 1819 – 1897)). Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке

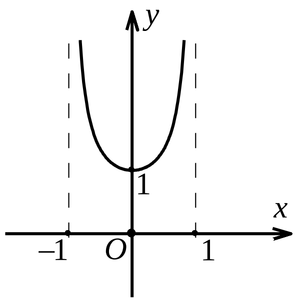


Рис. 3.1. График функции $f(x) = 1/(1–x^2)$ на

Непрерывность функции именно на отрезке существенна для вывода об её ограниченности. Например, функция $f(x) = 1/(1– x^2)$, непрерывная на интервале (–1, 1), не является ограниченной на нём (рис. 3.1).

Ограниченность функции на отрезке является только необходимым, но не достаточным условием непрерывности, ибо не любая функция, ограниченная на отрезке, непрерывна на этом отрезке. Так, функция из примера 1.3, ограниченная на отрезке [0, 2], не является непрерывной на нём.

Теорема 3.2. (*вторая теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке свои наименьшее и наибольшее значения.

Непрерывность функции именно на отрезке существенна для заключения теоремы 3.2. Функция $(x) = 1/(1– x^2)$, непрерывная на интервале (–1, 1), принимает на нём наименьшее значение: $f(0) = 1$, но не принимает на нём наибольшего значения (рис. 3.1).

Теорема 3.3 (*первая теорема Больцано-Коши*, (Больцано Б. – чешский математик, философ, логик (1781-1848), Коши О. Л. – французский математик (1789-1857)). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в нуль, т. е. $f(c) = 0$.

Замечание 3.1. Использование этого свойства позволяет построить алгоритм вычисления корней уравнения $f(x) = 0$, причём на функцию $f(x)$ накладывается только одно условие: её непрерывности на некотором промежутке.

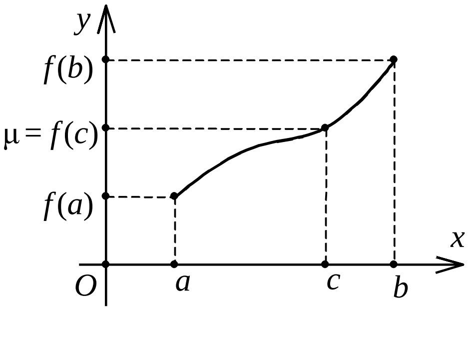


Рис.3.2 К теореме 3.4

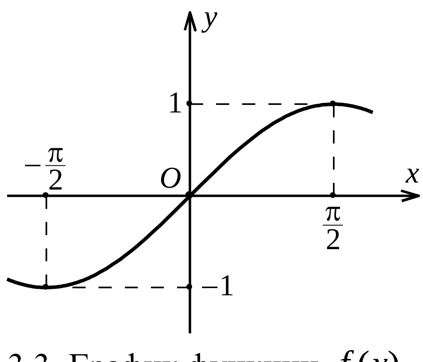


Рис. 3.3. График функции $f(x) = \sin x$

Теорема 3.4 (*вторая теорема Больцано-Коши*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то она принимает на $[a, b]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Поэтому для любого числа μ, расположенного между f (a) и f (b), на $[a, b]$ найдётся хотя бы одна точка c, такая что. f (c) = μ (рис.3.2).

Следствие. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, то множество её значений $E(f)$) также представляет собой некоторый промежуток.

Так, функция f $(x) = \sin x$, непрерывная на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, принимает на нём все промежуточные значения между $f(-\pi/2)=\sin(-\pi/2) = -1$ и $f(\pi/2) =$ $=\sin(\pi/2) = 1$ (рис. 3.3), т. е. любое число из отрезка $[-1, 1]$ будет значением этой функции для некоторой точки из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ (рис. 3.3).

Теорема 3.5. Любая элементарная функция, определённая на некотором промежутке вещественной оси, конечном или бесконечном, непрерывна на этом промежутке.

Доказательство этого утверждения следует из определения элементарной функции, из непрерывности основных элементарных функций, из теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями и из теоремы о непрерывности сложной функции.

§ 4. Задачи для самостоятельной работы к главе 4 *Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва*

9) При каком значении a функция $y = f(x)$ будет непрерывной, если
$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 2;\\ 4-ax^2, & x>2 \end{cases}$?

10) Найдите правый предел функции $f(x) = 3^{x/(x-2)}$ в точке ее разрыва.

11) Найдите точки разрыва функции $y = \frac{x+1}{x^2+3x-4}$, если они существуют, и исследуйте характер разрыва.

12) $f(3-0)=3,\ f(3+0)=-3$. Какое утверждение справедливо:

а) $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$; б) $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)=-3$; в) $\nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

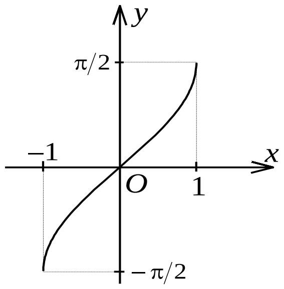
Ответы: 9) 0. **10)** $+\infty$. **11)** $x=-4, x=1$ – точки бесконечного разрыва.

12). в) $\nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

Глава 5. **Проверьте себя!** *Тест и контрольные вопросы для самопроверки качества усвоения раздела 4*

§ 1. Тест по разделу 4 (образец, 90 мин.)

Вар. 00	*Раздел 4. Введение в математический анализ*
1	Найдите множество $C\cup D$, если $C=\{1,3,5\}$, $D=\{2,3,6\}$.

2	Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{x+\lvert x\rvert}$.
3	Будет ли функция $y=\lg(3-\cos x)$ периодической?. Если да, то укажите ее наименьший период.
4	Будет ли функция $y=\dfrac{x}{x^2+1}$: а) чётной? б) нечётной? в) общего вида?
5	 Представленная кривая есть график функции: **A** $y=\mathrm{ctg}\,x$ **B** $y=\mathrm{arcctg}\,x$ **C** $y=\sin x$ **D** $y=\arcsin x$ **E** $y=\mathrm{tg}\,x$ **F** $y=\arccos x$ **G** $y=\cos x$ **H** $y=\mathrm{arctg}\,x$ **I** Нет правильного ответа
6	Вычислитет $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$.
7	Вычислите $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$.
8	Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$.
9	Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{arctg}\,2x}$.
10	При каком значении a функция $y=f(x)$ будет непрерывной, если $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{tg5x}, & x\neq 0;\\ a, & x=0\end{cases}$?
11	Найдите левый предел функции $f(x)=4^{\frac{x^2}{x-5}}$ в точке ее разрыва.
12	Найдите точки разрыва функции $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$, если они существуют, и исследуйте характер разрыва.

Ответы к заданиям теста Вариант 00

1) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$. **2)** $(0, +\infty)$. **3)** $T=2\pi$. **4)** Нечётная. **5)** $y=\arcsin x$ **6)** $+\infty$. **7.** $22/5$. **8)**$e^{1.}$ **9)** 2,1. **10)** 0. **11)** 0. **11.** $x=-1$ – точка устранимого разрыва

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 4

1. Какое числовое множество называется ограниченным сверху?
2. Какое числовое множество называется ограниченным снизу?
3. Какое числовое множество называется ограниченным?
4. Что называется модулем вещественного числа?
5. При каких условиях $|x+y| = |x|+|y|$?
6. При каких условиях $|x+y| = |y|-|x|$?
7. Напишите неравенства, связывающие модуль суммы и разности двух чисел с суммой и разностью их модулей.
8. Изобразите график функции $y = \operatorname{sign} x$.
9. Дайте понятие числовой функции, её графика, способов задания.
10. Какой симметрией обладает график чётной и нечетной функций?
11. Напишите таблицу эквивалентных бесконечно малых.
12. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ на языке $\varepsilon - \delta$.
13. Сформулируйте теорему о сжатой функции.
14. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве.
15. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел при $x \to a$.
16. Сформулируйте теоремы о пределах суммы, произведения и частного двух функций.
17. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.
18. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.
19. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.
20. Напишите первый замечательный предел и пределы, связанные с ним.
21. Напишите второй замечательный предел и пределы, связанные с ним.
22. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
23. Непрерывность функции в точке и на промежутке.
24. Свойства функций непрерывных на отрезке.
25. Точки разрыва функций и их классификация.
26. Приведите таблицу замечательных предел

§ 3. Задания к контрольной работе по разделу 4 «Введение в матанализ»

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ (*ИДЗ*)

Перед выполнением индивидуального домашнего задания (ИДЗ) (контрольной работы) студент должен изучить соответствующие разделы курса по пособию для студентов-заочников ИПТЭТ, (то, которое Вы используете сейчас). В нем даются определенные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров. Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя. ответственного за работу с этой группой заочников ИПМЭТ.

Каждая контрольная работа (ИДЗ) должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, шифр, номер задания ИДЗ, название раздела и дату отправки работы в институт.

Задачи в ИДЗ выбираются из таблицы вариантов согласно тому варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. Если этот шифр заканчивается нулём, то выбирается вариант №10.

Решения задач необходимо приводить в последовательности, указанной в таблице вариантов. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением.

В прорецензированной зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы.

По разделу 4 «Введение в матанализ» студент должен уметь:

1. Проводить простейшее исследование элементарных функций (область определения, множество значений, возрастание, убывание, нахождение обратной функции и т.п.).
2. Вычислять пределы на основе теорем о пределах и непрерывности функций.
3. Раскрывать неопределённости с помощью основных методов.
4. Сравнивать б. м. и б. б. функции.
5. Исследовать непрерывность функций

Задание первое. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1. 1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$,

3) $\lim\limits_{x\to-0.5}\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2-x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{\operatorname{tg}\pi x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2-2x+7}$,

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x+6}$, 4) $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{-4}{x+3}}$.

3.) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x+1}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$,

3) $\lim\limits_{x\to -0.5}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 2x)^{\frac{1}{1-\cos 4x}}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$, 4) $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x\cdot(\operatorname{tg} x+x)$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(2+x)^{\frac{1}{x^2}}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x-10}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

7. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^{x^2}-1}{\operatorname{arctg} x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(9-x^3)^{\frac{4}{x-2}}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{ctg} x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$,

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x^2)^{\frac{1}{2(1-x)}}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{e^{x+2}-1}{\ln(x+2)}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+9x+17}{21x^3+10x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$, 4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to -1}(4-x)^{\frac{1}{(1+x)^2}}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2-3x+1}$, 4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$.

Задание второе. Исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $$y=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, & x<-2;\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2;\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$$

2. $$y=\begin{cases}\dfrac{|x+3|}{x+3}, & x<-3;\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3;\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3.\end{cases}$$

3. $$y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0;\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1;\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

4. $$y=\begin{cases}-\dfrac{2|x|}{x}, & x<0;\\ \sqrt{4-x^2}, & 0\le x\le 2;\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$$

5. $$y=\begin{cases}\dfrac{3|x|}{x}, & x<0;\\ \sqrt{9-x^2}, & 0\le x\le 3;\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3.\end{cases}$$

6. $$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, & x<-2;\\ -\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2;\\ \dfrac{|x-2|}{x-2}, & x>2.\end{cases}$$

7. $$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, & x<-3;\\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3;\\ \dfrac{|x-3|}{x-3}, & x>3.\end{cases}$$

8. $$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+1}, & x<-1;\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0;\\ \dfrac{|x|}{x}, & x>0.\end{cases}$$

9. $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, & x < -2; \\ \sqrt{4-x^2}, & -2 \le x \le 0, \\ \dfrac{2|x|}{x}, & x > 0. \end{cases}$

10. . $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+3}, & x < -3; \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \le x \le 0; \\ \dfrac{3|x|}{x}, & x > 0. \end{cases}$

Задание третье. Укажите точку x_0 разрыва функции и определите ее род, вычислив в ней пределы слева и справа**.**

1. $y = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$

2. $y = \dfrac{arc\sin x^2}{x^2}$

3. $y = e^{1/x}$

4. $y = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x \le 2, \\ 1 + x & \text{при } x > 2 \end{cases}$

5. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

6. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$

7. $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$

8. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

9. $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

10. $y = \dfrac{1}{\ln x}$ $(x > 0)$

11. $y = e^{1/x^2}$

12. $y = e^{-1/x^2}$

Задание четвертое. При каком значении параметра λ (в. 1-6) или C (в. 1-10) заданная функция будет непрерывной? Постройте ее график.

1. $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \ge 0, \\ \lambda + x & \text{при } x > 0 \end{cases}$.

2. $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \le 1, \\ \lambda - x^2 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } x \le 1, \\ \lambda - x^2 & \text{при } x > 1 \end{cases}$

4. $y = \begin{cases} \lambda - x & \text{при } x \le 1, \\ x & \text{при } x > 1 \end{cases}$

5. $y = \begin{cases} 1 - x & \text{при } x \le 0, \\ x + \lambda & \text{при } x > 0 \end{cases}$.

6. $y=\begin{cases} 2x & \text{при } x \le 1, \\ \lambda - x & \text{при } x > 1 \end{cases}$

7. $y=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{при } x \ne 0, \\ C & \text{при } x = 0. \end{cases}$

8. $y=\begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} & \text{при } x \ne 0, \\ C & \text{при } x = 0. \end{cases}$.

9. $y=\begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{при } x \ne 0, \\ C & \text{при } x = 0. \end{cases}$

10. $y=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{при } x \ne 0, \\ C & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Раздел 5. **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

ВВЕДЕНИЕ

Раздел знакомит с важнейшими понятиями математического анализа (производная, дифференциал, дифференцируемая функция) и с некоторыми их приложениями (исследование поведения функции, вычисление пределов). Понятия и теоремы этого раздела образуют фундамент, на который опираются последующие разделы математического анализа.

Краткая характеристика раздела

Темы раздела. Производная и дифференциал. Основные теоремы дифференциального исчисления. Исследование функций и построение графиков.

Базисные понятия. Производная и дифференциал функции. Правила вычисления. Экстремумы функции. Наибольшие и наименьшие значения функции. Точки перегиба графика функции. Асимптоты графика. *Эластичность функций в экономике

Основные задачи. Вычисление производных и дифференциалов функций. Исследование функций. Вычисление пределов функций по правилу Лопиталя. Построение графиков.

Глава 1. **Производная и дифференциал**

§ 1. Производная функции

Определение 1.1. Пусть дана функция $y = f(x)$ и x, $x_0 \in D(f)$. Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается Δx. Разность $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* в точке x_0, отвечающим данному приращению аргумента, и обозначается $\Delta f(x_0)$, Δy.

Итак, по определению, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Из первого равенства выразим x и подставим во второе, получим: $x = x_0 + \Delta x$,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0).$$

Пример 1.1. Найти $\Delta f(1)$, если $f(x) = x^3 - x$. ►$\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) =$
$= (1+\Delta x)^3 - (1+\Delta x) - 0 = 1+3\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3 - 1 - \Delta x = 2\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.◄

Определение 1.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует и конечен, называется *производной* этой функции в точке x_0 и обо-

значается символами: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $y'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}_{|x=x_0}$, $\dot{y}$. Итак, по определению 1.2

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Пример 1.2. Найти $f'(1)$ по определению, если $f(x) = x^3 - x$.

► $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$ (выражение для $\Delta f(1)$ приведено в примере 1.1). Сократив оба члена дроби под знаком предела на Δx, получим $f'(1)$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+3\Delta x+(\Delta x)^2)=2$. ◄

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно *угловому коэффициенту касательной*, проведённой к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Уравнение касательной

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0). \tag{1.2}$$

Уравнение *нормали* – прямой, перпендикулярной к касательной к графику функции) в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0);\quad \left(y'(x_0)\neq 0\right). \tag{1.3}$$

2º. Механический смысл производной. Пусть $s=s(t)$ – путь, пройденный материальный точкой за время t при движении по прямой, тогда Δs = $=s(t+\Delta t) - s(t)$ – путь, пройденный за время Δt, а отношение $\Delta s/\Delta t$ – средняя скорость движения за это время. Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dot{s}(t)$, то он является мгновенной скоростью v точки в момент времени t, т. е. $\dot{s}(t)=v(t)$.

Итак, механически производная интерпретируется как мгновенная скорость движения, если данная функция определяет путь, проходимый материальной точкой в прямолинейном движении за время t.

Определение 1.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(x_0 - \delta, \delta]$ ($[x_0, x_0 + \delta)$), δ – некоторое положительное число. Если существует предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to -0$ ($\Delta x\to +0$), то он называется *левой* (*правой*) *производной* этой функции в точке x_0 и обозначается символом $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$). Таким образом,

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.2}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Замечание 1.2. Левая и правая производные объединяются термином *односторонние производные*.

§ 2. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал

Определение 2.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Если её приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \tag{2.1}$$

где $o(\Delta x)$ – величина более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, то данная функция называется *дифференцируемой* в точке x_0, а первое слагаемое из (2.1) называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается следующим образом

$$df(x_0),\ dy(x_0),\ dy_{|x=x_0},\ dy.$$

Дифференциал $dy(x_0)$ есть *главная часть* приращения функции $y = f(x)$, линейная относительно Δx, при этом Δy *и* dy эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \to 0$.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $y'(x_0)$.

Из определения 2.1 имеем:

$$dy = y'(x_0)\Delta x. \tag{2.2}$$

Из соотношения (2.2), в частности, при $y \equiv x$ следует, что $dx = (\underline{x})'dx$, т. е. дифференциал аргумента равен его приращению:

$$dx = \Delta x. \tag{2.3}$$

Поэтому равенство (2.2) можно переписать в виде:

$$dy = y'(x_0)dx. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Вычисление производной и дифференциала функции в данной точке принято называть одним термином – *дифференцирование*.

§ 3. Производные основных элементарных функций. Таблица производных

1º. В таблице 3.1 приведены производные основных элементарных функций, полученные по определению 1.2, вместе с правилами дифференцирования и формулой для производной сложной функции.

Таблица 3.1.

	$(x^a)' = a\,x^{a-1}, \quad x > 0,\ \forall a \in \boldsymbol{R},$	(1)
в частности,	$(1/x)' = -1/x^2\ , a = -1,$	(2)
	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ a = \dfrac{1}{2}\ .$	(3)
	$(a^x)' = a^x \ln a\ ,\ x \in \boldsymbol{R},\ a > 0, a \neq 1,$	(4)
в частности,	$(e^x)' = e^x\ .$	(5)
	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}\ ,\ x > 0,\ \ a > 0, a \neq 1,$	(6)
в частности,	$(\ln x)' = 1/x\ .$	(7)
	$(\sin x)' = \cos x,\ \ x \in \boldsymbol{R}.$	(8)
	$(\cos x)' = -\sin x\ ,\ x \in \boldsymbol{R}.$	(9)

$$(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (10)$$

$$(\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (11)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \qquad (12)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1). \qquad (13)$$

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \boldsymbol{R}. \qquad (14)$$

$$(\text{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in \boldsymbol{R}. \qquad (15)$$

$$(\text{sh}x)' = \text{ch}x, \ (\text{ch}x)' = \text{sh}x, \ x \in \boldsymbol{R}, \qquad (16)$$

$$(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \ \forall x \in \boldsymbol{R}, \ (\text{cth}x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}, \ x \in \boldsymbol{R}, \text{ кроме } x = 0. \qquad (17)$$

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции x.

$$(C)' = 0, \text{ где } C - \text{const}. \qquad (18)$$

$$(Cu)' = Cu', \text{ где } C - \text{const}. \qquad (19)$$

$$(u+v)' = u' + v'. \qquad (20)$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (21)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \qquad (22)$$

Если $y = y(u)$, а $u = u(x)$, т. е. $y = y(u(x))$, тогда

$$y'_x(u(x)) = y'_u(u) \cdot u'_x(x). \qquad (23)$$

Пусть функция задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$.

$$\text{Тогда } y'_x = \frac{y'_t(t)}{x_t(t)}. \qquad (24)$$

2º. Образцы задач с решениями (к §§ 1-3)

Задача 1. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin^5 t, \\ y = \cos^5 t. \end{cases}$ Вычислить её значение при $t = \pi/4$.

►Применяем правила дифференцирования и таблицу производных.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5\sin^4 t \cos t}{5\cos^4 t(-\sin t)} = -tg^3 t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y =$ $= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ в точке с абсциссой x_0 и вычислите $y(0)$.

►Находим производную $y' = 3x^2 - 8x + 5$. Угловой коэффициент касательной $k = y'(2) = 12 - 16 + 5 = 1$. Составляем уравнение касательной к графику функции в точке $M_0(2, 0)$: $y = 1\cdot(x-2)$; $y = -2$ при $x = 0$.◄

Задача 3. $y = \sqrt{2+x^4}$. Найдите dy при $x = 1$ и $dx = 0.1$.

► $dy = y'dx = \dfrac{4x^3}{2\sqrt{2+x^4}}dx\Big|_{\substack{x=1\\ dx=0,1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}0{,}1 = \dfrac{0{,}2}{\sqrt{3}}$.◄

Задача 4. Вычислить y'_x, если $y = \log_2\sqrt{x} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$.

► $y'_x = (\log_2\sqrt{x} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x})'$. Применим правило дифференцирования суммы: $y'_x = (\log_2\sqrt{x})' - (\frac{2}{x})' + (\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x})'$. Имеем $(\log_2\sqrt{x})' =$

$= (\frac{1}{2}\log_2 x)' = \frac{1}{2}(\log_2 x)' = \frac{1}{2x\,ln\,2}$, $(\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x})' = \dfrac{3}{4}(x^{4/3})' = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$.

Ответ: $y'_x = \dfrac{1}{2x\ln 2} + \frac{2}{x^2} + \sqrt[3]{x}$.◄

Задача 5. Вычислить y'_x**,** если $y = e^x\text{ctg}x$.

► $y'_x = (e^x\text{ctg}x)'$. Имеем: $y'_x = (e^x)'\text{ctg}x + e^x(\text{ctg}x)'$ (правило дифференцирования произведения (формула (23) табл. 3.1). Вычислим производные: $(e^x)'$и $(\text{ctg})'$ по формулам (7.5) и (7.11): $y'_x = e^x\text{ctg}x - e^x\sin^{-2}x$.◄

Задача 6. Вычислить y'_x**,** если $y = \dfrac{(1+x^2)\text{arctg}x}{x} - \ln x$.

► $y'_x = \left(\dfrac{(1+x^2)\text{arctg}x}{x}\right)' - \dfrac{1}{x} = \dfrac{((1+x^2)\text{arctg}x)'x - (1+x^2)\text{arctg}x}{x^2} - \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{(2x\text{arctg}x + 1)x - (1+x^2)\text{arctg}x}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(x^2-1)\text{arctg}x}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(x^2-1)\text{arctg}x}{x^2}$ (использованы формулы для производной частного и произведения).◄

§ 4. Производные неявных функций одной переменной

Определение 4.1. Пусть дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (4.1)$$

связывающее две переменные x и y. Если каждому значению x из некоторого множества X это уравнение ставит в соответствие одно значение y так, что упорядоченная пара (x, y) является его решением, то говорят, что уравнение (4.1) на множестве X задаёт y как *неявную функцию* x.

Не всегда уравнение вида (4.1) задаёт какую-либо неявную функцию, уравнение $x^2 + y^2 - 1$ не задаёт никакой функции. Иногда уравнение вида (4.1) задаёт две и более неявных функций. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ на промежутке $(-1,\ 1)$ задаёт неявно две функции: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Вопрос об условиях, при которых уравнение (4.1) задаёт однозначную неявную функцию, достаточно сложен и рассматривается далее вместе с условиями существования производной неявной функции. В данном параграфе приводятся примеры вычисления производной неявной функции.

Пример 4.1. Найти y'_x, если $y = x + \operatorname{arctg} y$.

►Считая, что равенство из условия задачи задаёт y как неявную функцию x, продифференцируем обе его части по x, рассматривая $\operatorname{arctg} y$ как сложную функцию x: $y'_x = 1+\frac{1}{1+y^2}\cdot y'_x$. Перенесём в левую часть члены с y'_x и вынесем из них y'_x за скобки: $y'_x(1-\frac{1}{1+y^2}) = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1+y^2}{y^2}$.◄

§ 5. Производные высших порядков

Определение 5.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y'_x=g(x)$, $x\in X$. Если существует производная g'_x, $x\in X$, то она называется *производной второго порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначается следующими символами: y'', y''_{x^2}, $f''(x)$, $f''_{x^2}(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$. Итак, $y''= (y')'$.

Пример 5.1. Найти y'', если $y = x\ln x$.

►$y' = \ln x+1$, $y''= 1/x$. ◄ла

Механический смысл второй производной. Пусть $s=s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t при движении по прямой, тогда, как было установлено в § 2, $\dot{s}(t)=v(t)$ – скорость движения точки в момент времени t. Для второй производной от пути по времени справедливо равенство: $\ddot{s}(t)=\dot{v}(t)$ и, следовательно, вторая производная от пути по времени в прямолинейном движении интерпретируется как *ускорение*.

Определение 5.2. Производная от производной 2-го порядка функции $y = f(x)$ называется *производной 3-го порядка* и обозначается y''', $y'''= (y'')'$ и т. д. Для обозначения производных более высоких порядков используют римские цифры или арабские в круглых скобках: y^{IV}, y^{V}, …, y^{X}, …, или $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, …, $y^{(10)}$, … .

Производной n – го порядка $y^{(n)}$ (или $\frac{d^ny}{dx^n}$) данной функции в точке x называется производная от её производной $(n$-$1)$ – го порядка. Итак, по определению

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'. \tag{5.1}$$

Пример 5.2. Найти y^{IV}, если $y = (x^3 + 2)/(x - 1)$.

►Представим y в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби: $(x^3 + 2)/(x - 1) = x^2 + x + 1 + 3/(x - 1)$. Имеем:

$((x^3 + 2)/(x - 1))^{IV} = (x^2 + x + 1)^{IV} + (3/(x - 1))^{IV}$ или

$y^{IV} = (3/(x - 1))^{IV}$, ибо $(x^2 + x + 1)^{IV} = 0$. В самом деле,

$(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, $(x^2 + x + 1)'' = 2$, $(x^2 + x + 1)''' = (x^2 + x + 1)^{IV} = 0$. Так как

$(3/(x - 1))' = - 3/(x - 1)^2$, $(3/(x - 1))'' = 6/(x - 1)^3$, $(3/(x - 1))''' = - 18/(x - 1)^4$,

$(3/(x - 1))^{IV} = 72/(x - 1)^5$, то $y^{IV} = 72/(x - 1)^5$.◄

Замечание 5.1. В процессе решения примера 5.2 установлено, что многочлен 2–ой степени имеет производные любого порядка, а все его производные порядка выше 2–го равны нулю. Этот результат обобщается на случай многочлена n–ой степени, который имеет производные любого порядка при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, все его производные, начиная с $(n+1)$–го порядка, равны 0.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x, $x \in \boldsymbol{R}$, производные любого порядка, то представляет интерес формула для производной $y^{(n)}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы n раз в точке $x \in \boldsymbol{R}$, то их сумма и произведение также n раз дифференцируемы в этой точке и справедливы формулы:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \tag{5.2}$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} \, v^{(n-k)}, \tag{5.3}$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, а коэффициенты C_n^k, $k = 0, 1, ..., n$, называемые биномиальными, определяются равенством:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \tag{5.4}$$

Замечание 5.2. Равенство (5.3) называется формулой Лейбница.

§ 6. Дифференциалы высших порядков

Определение 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X. *Дифференциалом второго порядка* d^2y, или *вторым дифференциалом* данной функции в точке $x \in X$, называется дифференциал, взятый в этой точке (если это возможно) от её дифференциала dy, который в этом контексте называют первым дифференциалом. Итак, $d^2y = d(dy)$.

Дифференциал dy можно вычислить по формуле: $dy = y'(x)\mathrm{d}x$. В этой формуле $y'(x)$ – функция точки $x \in X$, а $dx = \Delta x$ не зависит от аргумента x, тогда $d^2y = d(y'(x))dx = (y''(x))dx = y''(x)dx^2$. Под обозначением dx^2 всегда подразумевают степень дифференциала: $dx^2 = (dx)^2$, дифференциал от степени обозначается так: $d(x^2)$. Таким образом, для d^2y имеем:

$$d^2y = y''(x)dx^2. \tag{6.1}$$

Пример 6.1. Найти d^2y, если $y = x\ln x$.

►Имеем $y'' = \dfrac{1}{x}$ (пример 5.1), $d^2y = \dfrac{1}{x}dx^2$ (формула (6.1). ◄

Определение 6.2. *Дифференциалом третьего порядка* d^3y или *третьим дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется дифференциал, взятый в этой точке от её второго дифференциала d^2y, $d^3y = d(d^2y)$ и т. д. *Дифференциалом n - го порядка* d^ny функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется дифференциал, взятый в этой точке от её дифференциала $(n–1)$-го порядка $d^{n-1}y$, т. е. $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Замечание 6.1. В математическом анализе принято, что при каждой операции дифференцирования в определениях 6.1, 6.2 приращение (дифференциал) аргумента берётся одним и тем же.

Для d^ny справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}\, dx^n. \tag{6.2}$$

Из равенства (6.2) следует, что символ производной n–го порядка $\dfrac{d^nx}{dx^n}$ можно рассматривать как дробь.

Пример 6.2. Найти d^4y, если $y = x\ln x$.

►Из (6.2) при $n = 4$ следует равенство $d^4y = y^{\mathrm{IV}}dx^4$. Так как $y^{\mathrm{IV}} = (y'')''=$ $= (1/x)''= 2/x^3$ (пример 5.1), то $d^4y=\dfrac{2}{x^3}dx^4$.◄

Замечание 6.2. Первый дифференциал dy обладает *свойством инвариантности* формы, т. е. его можно вычислять по формуле (2.4) независимо от того, является x независимой или зависимой переменной (см. § 2). Дифференциалы высших порядков этим свойством не обладают.

Глава 2. **Приложения производной к исследованию функций**

§ 1. Раскрытие неопределенностей с помощью правила Лопиталя

Теорема 1.1 (Лопиталь Г. Ф. (1661–1704) – французский математик). Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенности 0/0, или ∞/∞) равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{1.1}$$

если предел из правой части равенства (1.1) существует.

Пример 1.1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - shx}$.

►Имеем неопределенность вида 0/0. Применяем правило Лопиталя, неопределенность того же типа сохраняется.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\mathrm{c}hx}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{-shx}=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{-chx}=-16. \blacktriangleleft$$

***Замечание* 1.1.** Правило Лопиталя остается справедливым при $a = \infty$.

§ 2. Интервалы монотонности функции

В разд. 4 гл. 2 § 1 было дано определение функции, монотонной на данном промежутке.

Теорема 2.1 (*достаточный признак строгой монотонности функции*). Если производная функции $f(x)$ положительна (отрицательна) на (a, b), то данная функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

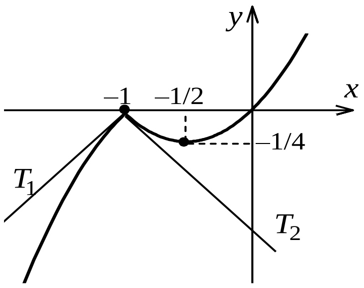


Рис.2.1. График функции $f(x)=x\,|\,x+1|$ в точке (-1,0) – перегиб

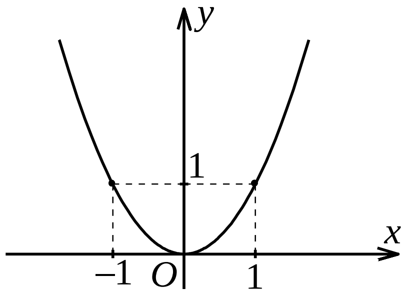


Рис. 2.2. График функции $f(x) = x^2$ в точке (0,0) перегиба нет

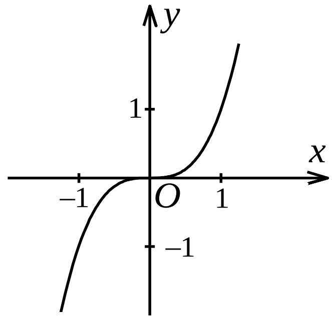


Рис. 2.3. График функции $f(x) = x^3$ в точке (0,0) – перегиб

Замечание 2.1. Теорема 2.1. позволяет найти так называемые *промежутки монотонности* непрерывной функции, на каждом из которых она только возрастает или только убывает. Интервалы монотонности функции разделены точками в которых производная функции либо равна нулю (рис. 2.2 и рис. 2.3), бесконечности либо не существует (рис 2.1).

§ 3. Нахождение экстремумов функций

Определение 3.1. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если $f(x)$ $f(x)$ определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ и для

$\forall x \in U(x_0)$ справедливо неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$. Значение $f(x_0)$ называют *максимумом (минимумом)* данной функции.

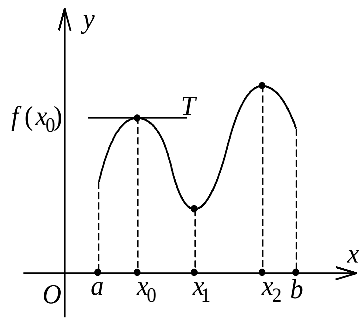


Рис. 3.1. К понятию экстремума функции

Если для всех x на некоторой проколотой окрестности $U(x_0)$ верно строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то точка x_0 называется *точкой строгого максимума (строгого минимума)* функции $y = f(x)$. Функцию $f(x)$ обычно предполагают непрерывной в точке x_0.

Замечание 3 1. Понятие экстремума функции $f(x)$ в определении 3.1 отнесено к окрестности точки x_0, поэтому его называют *локальным экстремумом*. На промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ может иметь несколько локальных (рис.3.1, x_0, x_2 – точки *локального максимума*, а x_1 – *локального минимума*).

Определение 3.2. Критической точкой функции называется точка, в которой первая производная функции равна нулю, бесконечности или не существует. Только в этих точках функция может иметь экстремум. Это *условие необходимое* для наличия экстремума в точке, но недостаточное (рис. 2.1-2.3).

Теорема 3.1 (*достаточный признак существования экстремума, связанный с первой производной*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этой окрестности за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, а при изменении знака $f'(x)$ с минуса на плюс – минимум.

Пример 3.1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = (2 - x)e^x + 2$.

Таблица 3.1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	$\nearrow$	$2+e \approx 4.7$ гладкий максимум	$\searrow$

►$D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x) = ((2 - x)e^x+2)'= (1 - x)e^x$, $x = 1$ – единственная критичес-

кая точка, $f'(1) =0$. Она делит ось Ox на два интервала: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Знак $f'(x)$ на них приведён в табл. 3.1. В силу теоремы 2.1 на первом из этих интервалов $f(x)$ возрастает, а на втором – убывает (направление стрелок в таблице 3.1 указывает характер изменения функции). В точке $x = 1$ функция имеет гладкий максимум (теорема 3.1), $f(1)=2+e\approx4.7$.◄

§ 4. Отыскание наименьшего и наибольшего значения функции, непрерывной на отрезке [*a*, *b*]

1º. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения ($M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, теорема Вейерштрасса).

2º. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек, то отыскание M и m производится по следующему *алгоритму.*

1) На интервале (a, b) находим критические точки (подозрительные на экстремум): $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) Вычисляем значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах отрезка $[a, b]$:

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(b).. \qquad (4.1)$$

3) Среди чисел (4.1) находим наименьшее и наибольшее. Наименьшее из этих чисел равно m, а наибольшее $f(x) - M$.

Пример 4.1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4/4 - x^3/3 - 2x^2 + 4x + 5$ на отрезке [–3, 3].

►$D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$, $f'(1) = f'(\pm 2) = 0$, $x=1$ и $x=\pm 2$ – стационарные точки $f(x)$. Вычислим в них и на концах отрезка [–3, 3] значения функции: $f(-2) = -13/3$, $f(2) = 19/3$, $f(1) = 83/12$, $f(-3) = =17/4$, $f(3) = 41/4$. Теперь среди выделенных значений функции найдём наименьшее: $f(-2) = -13/3$ и наибольшее: $f(3) = 41/4$. Итак, приходим к выводу, что $\max\limits_{x\in[-3,3]} f(x) = 41/4$, а $\min\limits_{x\in[-3,3]} f(x) = -13/3$.◄

Глава 3. **Построение графиков функций**

§ 1. Асимптоты графика функции

1º. Вертикальные асимптоты.

Определение 1.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 бесконечен, то прямая L: $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$.

Вертикальные асимптоты графика данной функции проходят через её точки разрыва 2-го рода (бесконечного) (рис.1.1 и рис 1.2).

1º. Наклонные и горизонтальные асимптоты.

Определение 1.2. Пусть функция $f(x)$ определена для сколь угодно больших по модулю значений x. Прямая L: $y = kx + b$ называется *асимптотой гра-*

фика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $f(x)$ представима в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

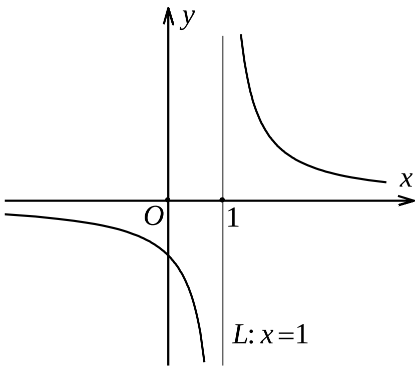


Рис. 1.1. График функции $f(x) = 1/(x-1)$

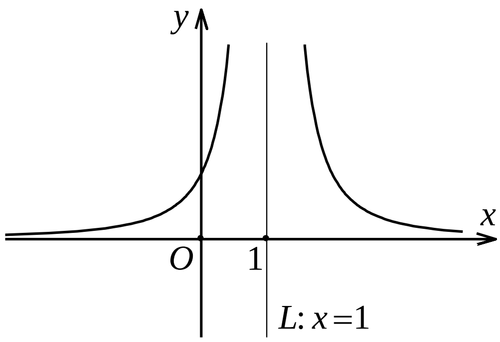


Рис. 1.2. График функции $f(x) = 1/(x-1)^2$

Замечание 1.1. Если угловой коэффициент k асимптоты L: $y = kx + b$ равен нулю, то она называется *горизонтальной*, если же $k \neq 0$, то асимптота называется *наклонной*.

Теорема. 1.1. Для того чтобы прямая L: $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо, чтобы существовали два предела:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$.

Пример 1.1. Укажите асимптоты графика функции $y = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$.

►Точка $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва (2-го рода) функции $f(-0) = +\infty$; $f(+0) = -\infty$. Отсюда следует, что график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 0$. Находим наклонную асимптоту $y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2} = 3$;

$b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = \left[\dfrac{3x^2 - 1}{x} - 3x \right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[-\dfrac{1}{x} \right] = 0$. Наклонная асимптота имеет уравнение $y = 3x$. ◄

§ 2. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Определение 2.1. График Γ функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале (a, b), называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на (a, b), если он расположен выше (ниже) касательной, проведённой к Γ в любой точке $M(x, f(x))$, где $x \in (a, b)$ (рис.2.1)

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) всюду на этом интервале, то график Γ этой функции на интервале (a, b) является выпуклым вверх (вниз).

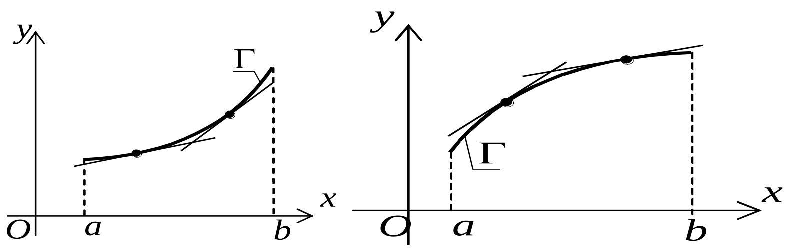


Рис. 2.1. К определению 2.1, график функции слева выпуклый вниз, справа – вверх

Определение 2.2. Точки из области определения функции $f(x)$, в которых её вторая производная равна нулю, бесконечности, или не существует, называются *точками, подозрительными на перегиб*.

Предполагается, что сама функция $f(x)$ в этих точках непрерывна. Это условие необходимо.

Теорема 2.2 (*достаточное условие существования точки перегиба графика функции*). Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на некоторой проколотой окрестности точки x_0, подозрительной на перегиб графика функции. Если при переходе аргумента x через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 есть абсцисса точки перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ графика $f(x)$.

Пример 2.1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = (2 - x)e^x + 2$.

►$D(f)=R$, $f'(x) = (1-x)e^x$, $f''(x) = ((1-x)e^x)' = -xe^x$, $f''(x) = 0$ при $x = 0$ – в точке $(0, f(0))$ график может иметь перегиб. Так как $f''(x) > 0$ при $x < 0$ и $f''(x) < 0$ при $x > 0$, поэтому при $x < 0$ в силу теоремы 5.1 график направлен выпуклостью вниз, а при $x > 0$ – выпуклостью вверх, а $(0, f(0))$ – точка перегиба графика по определению 2.1.◄

§ 3. Общий план исследования функции и построение её графика

План-схема исследования функции обобщает результаты, изложенные в предыдущих параграфах. Исследование функции по этому плану позволит построить обоснованный математический эскиз графика функции.

План исследования функции

1. Отыскание области определения данной функции $y = f(x)$, установление свойств чётности (нечётности) и периодичности.
2. Отыскание точек пересечения графика функции с осями координат и промежутков знакопостоянства.
3. Исследование функции на непрерывность и существование асимптот.
4. Отыскание промежутков монотонности и точек экстремума.
5. Отыскание промежутков одинаковой направленности выпуклости графика функции и точек перегиба.
6. Построение математического эскиза графика функции и отыскание множества её значений.

Пример 3.1. Построить график функции $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}$.

►**1.** $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. График пересекает оси координат в точках (2, 0) и (0, –4), $f(x) < 0$ при $x < 2$, $f(x) > 0$ при $x > 2$.

3. На $D(f)$ функция непрерывна как элементарная, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода ($\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2} = -\infty$), прямая $x=1$– вертикальная асимптота графика функции. Вычисляя, пределы имеем: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-2)^3}{2x(x-1)^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2} - \dfrac{1}{2}x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-4x^2 + 11x - 8}{2(x-1)^2} = -2 \Rightarrow b = -2$. Прямая

L: $y = x/2 - 2$ – наклонная асимптота графика

4. $f'(x)=\left(\dfrac{(x-1)^3}{2(x-1)^2}\right)' = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}$, на $D(f)$ две критические точки: $x=-1$, $x=2$, $f'(-1)=f'(2)=0$. Вместе с точкой $x = 1$ они делят ось Ox на 4 промежутка: $(-\infty,-1)$, $(-1, 1)$, $(1,2)$, $(2, +\infty)$. Знак $f'(x)$ в каждом из них приведён в таблице 31. Характер изменения функции указан стрелками, ∄ – символ несуществования, $x= =-1$ – точка гладкого максимума, а в точке $x=2$ нет экстремума, ибо $f'(x)$ не меняет знака при переходе аргумента x через эту точку.

Таблица 3.1

x		–1		1		2	
$f'(x)$	+	0	–	∄	+	0	
$f(x)$	↗	–27/8 Max	↘	∄	↗	0	↗

Таблица 3.2

X		1		2	
$f''(x)$	–	∄	–	0	+
$f(x)$	∩	∄	∩	0	∪

5. $f''(x)=\left(\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}\right)' = \dfrac{3(x-2)}{(x-1)^4}$, $x=2$ – единственная точка, подозрительная на перегиб, $f''(2)=0$. Вместе с точкой $x=1$ она делит ось Ox на три промежутка: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$ указано направление выпуклости графика функции, (2, 0) – точка перегиба графика. Знак $f''(x)$ в каждом из них приведён в таблице 3.2. В ней дугами указано направление выпуклости графика, (2, 0) – точка перегиба.

6. Результаты исследований используем для построения графика данной функции. Сначала строим асимптоты, точку максимума и точку перегиба, затем строим график функции с учётом характера поведения функции на $D(f)$ (таблица 3.1) и направления выпуклости графика (таблица 3.2). График функции приведён на рис .3.1, $E(y)=R$.◄

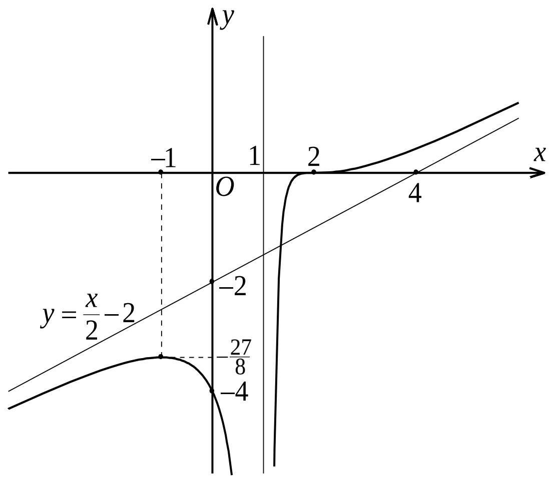


Рис. 3.1. График функции из примера 3.1

Особенности графика функции из примера 3.1:

L: $y = x/2 - 2$ – наклонная асимптота, $x=1$ – вертикальная, $x = 2$ – точка перегиба, $x = -1$ точка максимума.

§ 4. Образцы задач с решениями

Задача 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-shx}$.

►Имеем неопределенность вида 0/0. Применяем правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-shx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\text{c}hx}$. Повторно применяем правило Лопиталя несколько раз, так как неопределенность того же типа сохраняется:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\text{c}hx}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{-shx}=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{-chx}=-16.\blacktriangleleft$$

Задача 2. Правило Лопиталя. Вычислить предел выражения показательного типа $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{\cos x}$.

►Имеем неопределенность типа ∞^0. Обозначим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{\cos x}=A$.

Используя непрерывность логарифмической функции, имеем

$\ln A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \ln tgx = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln tgx}{\dfrac{1}{\cos x}}$. Получили неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, к которой применимо правило Лопиталя:

$$\ln A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln tgx}{\dfrac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{1}{tgx\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$ Отсюда $A = e^0 = 1$.◄

Задача 3. Найдите экстремумы функции $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

►Используем правило отыскания экстремумов. Находим производную: $y' = \dfrac{1-3x^2}{2\sqrt{x}\left(1+x^2\right)^2}$. Решаем уравнение $y' = 0$ в области определения функции $x \geq 0$. Получаем единственный корень $x=1/\sqrt{3}$. Поскольку $y' > 0$ при $0<x<1/\sqrt{3}$. $y' < 0$ при $1/\sqrt{3}<x<+\infty$. Отсюда следует, что в точке $x=1/\sqrt{3}$ имеем максимум $y(1/\sqrt{3}) = 3/(4\sqrt{3})$. ◄

Задача 4. Укажите точки перегиба графика функции $y= 2x^3 - 9x^2 + 12x-6$.

►Находим вторую производную: $y' = 6x^2 -18x + 12$, $y'' = 12x - 18$. Решаем уравнение $y'' = 0$, получаем $x= 3/2$. Вторая производная в этой точке меняет знак, поэтому она является абсциссой точки перегиба. Точкой перегиба является точка $M(3/2, -3/2)$.◄

Задача 5. Укажите интервалы выпуклости вниз графика функции $y = x^3/6 - 1/(2x)$.

►Находим вторую производную функции: $y' = x^2/2 + 1/(2x^2)$, $y'' = x - 1/x^3$. Решаем уравнение $y'' = 0$; $(x^4 -1)/x^3 = 0$; $x= \pm 1$. Вторая производная отрицательна в промежутках $(-\infty, -1)$; $(0, 1)$. Они искомые.◄

Задача 6. Укажите асимптоты графика функции $f(x) = (3x^2-1)/x$.

►Точка $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва (2-го рода) функции: $f(-0) = +\infty$; $f(+0) = -\infty$. Отсюда следует, что график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = 0$. Находим наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{x^2} = 3;\ b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = \left[\frac{3x^2-1}{x} - 3x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] = 0.$$

Следовательно, $y = 3x$ – наклонная асимптота.◄

Глава 4. **Проверьте себя! Контрольные вопросы и задачи к разделу 5**

1º. Задания (тесты) для самостоятельной работы *(Ответы).*

Образец 80 мин		Раздел 5 Дифференциальное исчисление функции одной переменной
1	Найдите производную первого порядка от функции $y = e^{4x}\operatorname{tg} x$.	
2	Найдите производную первого порядка от функции $y = \dfrac{x^5+5}{x^3-3}$.	
3	При каком значении A выражение Adx будет дифференциалом функции $y = 2\sin 3x + 9\arccos x + \sqrt{13}$ в точке $x = 0$.	
4	Найдите производную первого порядка от функции $y = 3^{6-x} - 4$.	
5	Найдите производную первого порядка от функции $y = \ln(2x^3 + x)$.	
6	Найдите производную второго порядка от функции: $y = \ln(e^{2x} + 1)$.	
7	Найдите производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически при $t = e$ если $\begin{cases} y = t\ln^2 t + 2, \\ x = t^3 + 1. \end{cases}$	
8	Найдите точки экстремума функции $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$. В ответе укажите сумму значений функции в точках минимума.	
9	Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ на отрезке $[-3; 4]$.	
10	Найдите интервалы убывания функции $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.	
11	Найдите наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.	
12	Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x) - x}{\ln(1-x) + x}$.	

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ТЕСТА Вариант 00

1) $y' = 4e^{4x}\operatorname{tg} x + \dfrac{e^{4x}}{\cos^2 x}$. **2)** $y' = \dfrac{2x^7 - 15x^4 - 15x^2}{(x^3-3)^2}$ **3)** -5. **4)** $y' = -3^{6-x}\ln 3$.

5) $y' = \dfrac{6x^2+1}{2x^3+x}$. **6)** $y'' = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ **7)** e^{-2}. **8)** -2. **9)** -6. **10)** $(1/2; 1)$. **11)** $y = x$. **12)** 0.

2º. Контрольные вопросы по разделу 5

Часть 1 (К главам 1 и 2).

1. Производная функции $f(x)$ в точке x_0. Определение. Механический и геометрический смысл.
2. Напишите таблицу производных функций: $x^\alpha, e^x, a^x, tgx, ctgx$, $\cos ax$.
3. Напишите таблицу производных функций: $arctgx$, $arcctgx$, $\sin ax$.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
5. Напишите правило для вычисления производной сложной функции

$y = f(u(x))$.

6. Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Напишите, чему равна $\dfrac{dy}{dx}$.
7. Напишите правила для вычисления производных суммы, произведения и частного функций $u(x)$ и $v(x)$.
8. Пусть $u'(x) = -v'(x)$. Как связаны между собой функции $u(x)$ и $v(x)$?.
9. Пусть $u'(x) = v'(x)$. Как связаны между собой функции $u(x)$ и $v(x)$?
10. Функция $f(x)$ имеет производную точке x_0 x_0. Напишите уравнение касательной к графику функции в этой точке.
11. Функция $f(x)$ имеет производную точке x_0, отличную от нуля. Напишите уравнение нормали к графику функции в этой точке.
12. Сформулируйте определение производной функции порядка n.
13. Что называется дифференциалом функции?
14. Раскройте содержание понятия «инвариантность формы дифференциала первого порядка сложной функции».
15. Дифференциал второго порядка. Определение.
16. Пусть $df(x_0) \neq 0$. Как связаны между собой дифференциал функции и ее приращение в этой точке?
17. Пусть $y = f(x)$, x –независимая переменная. Тогда $d^5 f(x) = \dots$
18. Геометрический смысл дифференциала первого порядка.
19. Пусть $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции. Выразите дифференциал $f(x)$ через дифференциалы функций $u(x)$ и $v(x)$.
20. Пусть $f(x) = u(x) / v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции. Выразите дифференциал $f(x)$ через дифференциалы функций $u(x)$ и $v(x)$.
21. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
22. Приведите пример функции, непрерывной в некоторой точке, но не имеющей в этой точке производной.
23. Как соотносятся понятия непрерывность и дифференцируемость функции?

Часть 2 (к главе 3).

1. Функция, определенная в некоторой окрестности точки x = a, имеет в этой

точке строгий максимум (минимум). Это означает?

2. Каково достаточное условие существования у функции f (x) в точке x = a минимума (по первой производной)?
3. Каково достаточное условие существования у функции f (x) в точке x = a максимума (по первой производной)?
4. Каково достаточное условие существования у функции f (x) в точке x = a экстремума (по первой производной)?
5. Пусть функция f (x) дважды дифференцируема в точке x_0, при этом $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f'''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет: 1- максимум; 2 – минимум; 3 - ничего определенного сказать нельзя.
6. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, при этом $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то функция f (x) в точке $x = x_0$ имеет: 1 - максимум; 2 –минимум; 3- ничего определенного сказать нельзя.
7. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, при этом $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x_0) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет: 1- max , 2-mim; 3 -ничего определенного сказать нельзя
8. Раскройте содержание понятия: график функции $f(x)$ на (a, b) выпукл вверх (вниз). Сделайте чертеж.
9. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. Раскройте содержание понятия – точка $x = a$ является точкой перегиба графика функции.
10. Сформулируйте достаточное условие для того, чтобы график дважды дифференцируемой функции имел в точке $x = a$ перегиб?
11. Каково необходимое условие того, чтобы дважды дифференцируемая в окрестности точки $x = a$ функция имела в этой точке перегиб?
12. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если…
13. Прямая $y = A$ является правой горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если…
14. Прямая $y = A$ является левой горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если…
15. Пусть прямая $y = kx + b$ является левой наклонной асимптотой графика функции $f(x)$. Тогда $k = \dots$, $b = \dots$.

3º.Варианты контрольной работы(ИДЗ) по разделу 5 «Дифф. Исчисление функций одной переменной»

РЕКОМЕДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ (ИДЗ)

Перед выполнением индивидуального домашнего задания задания (ИДЗ) (контрольной работы) студент должен изучить соответствующие разделы курса по пособию для студентов-заочников ИПТЭТ (то, которым Вы используете сейчас), в нем даются определенные теоретические сведения и приводятся решения типовых примеров. Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить устную или письменную консультацию у преподавателя. ответственного за работу с этой группой заочников ИПМЭТ.

Каждая контрольная работа (ИДЗ) должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, шифр, номер задания ИДЗ, название раздела и дату отправки работы в институт.

Задачи в ИДЗ выбираются из таблицы вариантов согласно тому варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. Если этот шифр заканчивается нулём, то выбирается вариант №10.

Решения задач необходимо приводить в последовательности, указанной в таблице вариантов. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением.

В прорецензированной зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенные контрольные работы (ИДЗ) предъявляются студентом при сдаче зачета или экзамена.

Студент должен уметь:

1. Вычислять различного рода пределы при помощи правила Лопиталя;
2.*Использовать формулу Тейлора для получения асимптотических формул;
3. Определять интервалы возрастания (убывания) функции, точки локального экстремума;
4. Находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;
5. Находить интервалы выпуклости вверх (вниз) графика функции и точки перегиба;
6. Находить асимптоты графика функции;
7. Строить графики функций.

Часть 1. Производная и дифференциал

Задание первое. Найти производную функции одной переменной, исходя из определения производной.

1. $y=\sqrt{2x-3}$. 2. $y=\sqrt{1-2x}$. 3. $y=\sqrt{4-3x}$. 4. $y=\sqrt{3x+4}$.

5. $y=\sqrt{3x-7}$. 6. $y=\sqrt{2x+3}$. 7. $y=\sqrt{3-2x}$. 8. $y=\sqrt{2x-9}$.
9. $y=\sqrt{1+2x}$. 10. $y=\sqrt{5-3x}$.

Задание второе. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

1. а) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$; в) $y=5^{\operatorname{arctg}^2 x}$;
2. а) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$; б) $y=\cos 2x\sin^2 x$; в) $y=\ln \operatorname{arctg} x$;
3. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; б) $y=\sin^3 5x\cos^5 3x$; в) $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;
4. а) $y=x\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; б) $y=e^{\cos^2 3x}$; в) $y=\ln \arcsin x$;
5. а) $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$; б) $y=e^{\operatorname{tg} x}\cos x$; в) $y=2^{\arcsin 3x}$;
6. а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$; в) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$;
7. а) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y=e^{\cos x}\sin^2 x$; в) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)$;
8. а) $y=5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. а) $y=\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^2$; б) $y=\dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$; в) $y=\operatorname{arctg} e^{3x}$;
10. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{3x-2}}$; б) $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$; в) $y=\arccos(\operatorname{tg} x)$;

Задание третье. Найдите производную второго порядка от функции:

1. $y=\cos^2 x$. 2. $y=arctgx^2$.
3. $y=1/(1+x^3)$. 4 . $y=e^{-x^2}$.
5 $y=-22/(x+5)$. 6 . $y=\sqrt{1+x^2}$.
7. $y=x^2-3x+2$. 8. $y=xe^{x^2}$.
9. $y=(1+x^2)arctgx$. 10. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Задание четвертое. Дана функция. Найдите dy при $x=1$ и $dx=0.1$.

1. $y=\sqrt{3+x^3}$. .
2. $y=(1+3x)\ln x$.
3. $y=\operatorname{arctg}^2 x$.
4. $y=xe^{x^2}$.
5. $y=xe^{-2x}$.
7. $y=(x^2+1)\ln x$.
8. $y=4x\operatorname{arctg} x$.
9. $y=x^4\operatorname{arctg} x$.
10. $y=\operatorname{tg}^2 x$. .
11. $y=xe^{-x^2}$.

Часть 2. Приложения производной

Задание пятое. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos 2x}{e^{2x}-\cos x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{1/x}-1}$. .
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{\operatorname{sh} x\cdot\cos x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. .
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\ln(1-x)+x\right)}{x-\sin x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x}{\operatorname{ch} x-\cos x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x}{\operatorname{ch} x-\cos x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}{x^3}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x+x^2-1}{x^4}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sh} x}{x-\sin x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}-e^{-x}}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sh} x}-e^x}{\operatorname{sh} x-x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.

Примечание ch(0)=1, sh(0)=0. Производные этих функций см. таблицу производных (17,18).

Задание шестое. В задачах 1–10 найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

1. $f(x)=x^3-12x+7;\quad a=0,\quad b=3.$
2. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7};\quad a=2,\quad b=8.$
3. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x;\quad a=0,\quad b=\dfrac{\pi}{2}.$
4. $f(x)=x^3-12x+7;\quad a=-3,\quad b=0.$
5. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5};\quad a=2,\quad b=8.$
6. $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x;\quad a=0,\quad b=\dfrac{\pi}{2}.$

7. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7};\quad a=-2,\quad b=5.$ 8. $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x;\quad a=\dfrac{\pi}{2},\quad b=\pi.$

9. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5};\quad a=-2,\quad b=3.$ 10. $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x;\quad a=-\dfrac{\pi}{2},\quad b=0.$

Задание седьмое. В задачах 1–10 исследовать методами дифференциально исчисления функции и построить их графики, используя результаты исследования.

1. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$; б) $y=x+\ln(x^2-4)$. 2. а) $y=\dfrac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}$; б) $y=\ln(1+x^2)$.

3. а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$. 4. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

5. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=xe^{-x^2}$. 6. а) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$; б) $y=(x+4)e^{2x}$.

7. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; б) $y=\ln(x^2+2x+2)$. 8. а) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; б) $y=xe^{2x-1}$.

9. а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$. 10. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов А. П. Математический анализ в 4 ч. Часть 1 : учебник и практикум для вузов.– Москва : Издательство «Юрайт», 2023. — 282 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. – СПб: Издательство «Лань», 2015. – 448 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. – 558,[2] с., ил.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для вузов. – СПб: Издательство «Лань», 2022. – 224 с., ил.
5. Лобкова Н. И., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А. Высшая математика для экономистов и менеджеров: Учебное пособие. – СПб: Издательство «Лань», 2018. – 520 с.
6. Лобкова Н. И., Хватов Ю. А., Максимов Ю. Д. Высшая математика. Том 1 : Учеб. пособие. – М.: Издательство «Проспект», 2023. – 584 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ