Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А.А. Моисеев

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекции для студентов направлений "Прикладная математика и информатика", "Механика и математическое моделирование"

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2023

УДК 517.521

Моисеев А.А. Несобственные интегралы. Лекции для студентов направлений "Прикладная математика и информатика", "Механика и математическое моделирование".: учеб. пособие / Моисеев А.А.– СПб., 2021. – 30 с.

Учебное пособие соответствует ФГОС ВО по дисциплине "Математический анализ" по направлениям подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика", 01.03.03 "Механика и математическое моделирование". Рассматривается тема, занимающая важное место в курсе Математического анализа. В небольшом пособии компактно изложены темы, представленные в развернутом виде в классических учебниках.

Предназначается для студентов ФИЗМЕХа.

Несобственные интегралы

Оглавление

Цель наших построений — обобщить операцию интегрирования на случай бесконечного промежутка и неограниченной функции. Перейдем к точным определениям

§ 1 Понятие несобственного интеграла

1^0. Определение. Пусть f — функция на промежутке $[a, b)$. (Здесь b — конечное вещественное число или $+\infty$). Предположим, что

$$\forall \eta \in (a, b) \ \ f \text{ интегрируема на отрезке } [a, \eta]. \qquad (*)$$

Замечание. Условие (*) выполняется, например, если функция f непрерывна на промежутке $[a, b)$.

Условие (*) позволяет рассмотреть интеграл с переменным верхним пределом

$$F : F(\eta) = \int_a^\eta f(x)\, dx,\ \eta \in [a, b).$$

Если функция F имеет предел $I \in \overline{\mathbb{R}}$ при $\eta \to b-0$, то I называют несобственным интегралом функции f по промежутку $[a, b)$ и пишут

$$I = \int_a^{b-0} f(x) dx .$$

Если I — конечное число, говорят, что несобственный интеграл $I = \int_a^{b-0} f(x) dx$ сходится, в противном случае (если предел бесконечен или не существует вовсе) говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{b-0} f(x) dx$ расходится.

Как термин несобственный интеграл, так и запись $\int_a^{b-0} f(x) dx$, имеют два значения: во-первых, это число I, предел интеграла с переменным верхним пределом, во-вторых, сам интеграл с переменным пределом. Опыт показывает, что эта двусмысленность не приводит к недоразумениям.

Символ $b-0$ на верхнем пределе интегрирования подчеркивает, что интеграл понимается в несобственном смысле. Если опасность недоразумений отсутствует, можно (обычно так и поступают) использовать обозначение $\int_a^b f(x)dx$ и для несобственного интеграла.

Если необходимо подчеркнуть, что интеграл понимается в обычном смысле, используют термин *собственный интеграл.*

Аналогично определяется несобственный интеграл $I=\int_{a+0}^{b} f(x)dx$ с "особенностью" на нижнем пределе интегрирования. Предполагаем выполненным условие интегрируемости функции на отрезках вида $[\xi, b]$, рассматриваем интеграл с переменным пределом $F(\xi)=\int_{\xi}^{b} f(x)dx$, полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\xi\to a+0} F(\xi) = \lim_{\xi\to a+0}\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

.

Запишем определение несобственного интеграла отдельно для случаев бесконечного и конечного промежутков.

I. f определена на $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке вида $[a, A]$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

называется несобственным интегралом I рода.

Примеры. 1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

$$\int_1^A \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^A = 1-\frac{1}{A}\underset{A\to+\infty}{\to}1.$$

Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=1.$

2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$\int\limits_1^A \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^A = 2\left(\sqrt{A}-1\right) \underset{A\to+\infty}{\to} +\infty$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$.

$\int\limits_0^A \cos x\, dx = \sin A$. Интеграл с переменным верхним пределом не имеет предела (при $A \to +\infty$), несобственный интеграл расходится и не имеет никакого значения.

II Пусть f определена на конечном промежутке $[a, b)$ и удовлетворяет условию (*). Тогда

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)dx = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^{\eta} f(x)dx$$

называется несобственным интегралом II рода.

Примеры. 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$\int\limits_0^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\left(1-\sqrt{1-\eta}\right) \underset{\eta\to1-0}{\to} 2$. Несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$.

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

$\int\limits_{\xi}^1 \frac{dx}{x} = -\ln\xi \underset{\xi\to+0}{\to} +\infty$. Несобственный интеграл $\int\limits_{+0}^1 \frac{dx}{x}$ расходится, $\int\limits_{+0}^1 \frac{dx}{x} = +\infty$.

2^0. Согласованность понятий собственного и несобственного интеграла.

Теорема 1. Пусть f интегрируема в собственном смысле на отрезке $[a, b]$, $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ сходится и имеет значение I.

Доказательство. $\int\limits_a^\eta f(x)\,dx \underset{\eta\to b-0}{\to} I$ по теореме о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Написанное предельное соотношение означает сходимость несобственного интеграла и равенство $\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx = I$.

Теорема 1 оправдывает принятую выше договоренность об использовании обозначения $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для собственных и несобственных интегралов.

3[0]. Интегрируемость ограниченной функции.

Теорема 2. Пусть f определена на конечном промежутке $[a, b)$ и удовлетворяет условию (*). Тогда если f ограничена, то она интегрируема в собственном смысле.

Доказательство. Подберем такое число M, что $|f(x)| \le M,\ x \in [a, b]$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем $\eta \in (a, b)$ так, чтобы $2M \cdot (b-\eta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Функция f интегрируема на отрезке $[a, \eta]$. Поэтому можно найти разбиение

$$\tilde{\tau} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \eta$$

отрезка $[a, \eta]$, для которого $S_{\tilde{\tau}} - s_{\tilde{\tau}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Дополнив $\tilde{\tau}$ одной точкой, получим разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \eta < x_{n+1} = b$ отрезка $[a, b]$, для которого

$$S_\tau - s_\tau = S_{\tilde{\tau}} - s_{\tilde{\tau}} + (M_{n+1} - m_{n+1})(b-\eta) \le S_{\tilde{\tau}} - s_{\tilde{\tau}} + 2M(b-\eta) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

4[0]. Особые точки.

Если функция f не является интегрируемой на отрезке $[a, b]$ в собственном смысле, точку b называют особой точкой для несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Для несобственного интеграла I рода $+\infty$ — особая точка. Для несобственного интеграла II рода точка b оказывается особой, если функция f не является ограниченной ни в какой окрестности этой точки. Те же слова можно произнести по отношению к точке a.

5[0]. Несобственный интеграл с несколькими особыми точками.

1) Если

$$\forall \xi, \eta \in (a, b) \text{ функция } f \text{ интегрируема на } [\xi, \eta],$$
то выбрав некоторую точку $c \in (a,b)$, рассмотрим несобственные интегралы
$$\int_{a+0}^{c} f(x)dx \text{ и } \int_{c}^{b-0} f(x)dx,$$
Положим по определению
$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)dx = \int_{a+0}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b-0} f(x)dx,$$
если эта сумма имеет смысл. Если хотя бы один из интегралов $\int_{a+0}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{b-0} f(x)dx$ расходится, то говорят, что $\int_{a+0}^{b-0} f(x)dx$ расходится.
Нетрудно показать, что результат не зависит от выбора точки c.
Можно еще написать
$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)dx = \lim_{\substack{\xi \to a+0 \\ \eta \to b-0}} \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx.$$
Здесь в правой части записан предел функции двух переменных. Допуская вольность речи, говорят, что переменные ξ, η стремятся соответственно к a, b независимо друг от друга.
2) Если существует такое разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, что интегралы $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют, хотя бы как несобственные, положим
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$
Результат не зависит от выбора разбиения.
Конечно, среди точек разбиения должны присутствовать все особые точки, т.е. точки, вблизи которых функция оказывается неограниченной.
Если хотя бы один из интегралов $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ расходится, то говорят, что интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ расходится.
Принятые определения сводят различные несобственные интегралы к интегралам вида $\int_{a+0}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{b-0} f(x)dx$ с одной особой точкой. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением интегралов таких типов.

6^0. Главное значение несобственного интеграла.

1) Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{+A} f(x)dx$$

называется главным значением несобственного интеграла.

Если $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то I является и главным значением. Может случиться, что интеграл расходится, но имеет главное значение.

Пример. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx=+\infty$, $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx=-\infty$, интеграл расходится, но $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx=0$, $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=0$, интеграл сходится и равен нулю в смысле главного значения.

2) Если $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ — несобственный интеграл с особой точкой $c\in(a,b)$, то

$$v.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

§ 2. Общие свойства несобственных интегралов

1^0. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема 1. Пусть f — функция на промежутке $[a,b)$, удовлетворяющая условию (*). Тогда для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ необходимо и достаточно условие Коши

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta_0\ \ \forall\eta_1,\eta_2>\eta_0\ \left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon .$$

Условие Коши записывают и в форме

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \underset{\eta_1,\eta_2\to b-0}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$F : F(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)\, dx .$$

Сходимость несобственного интеграла означает существование конечного предела функции F. Для последнего необходимым и достаточным является условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta_0\ \ \forall \eta_1, \eta_2 > \eta_0\ \ \left| F(\eta_2) - F(\eta_1) \right| < \varepsilon\ \ (F(\eta_2) - F(\eta_1) \underset{\eta_1, \eta_2 \to b-0}{\to} 0).$$

Поскольку $F(\eta_2) - F(\eta_1) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx$, то теорема доказана.

2⁰. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2. Пусть f — непрерывная функция на промежутке $[a, b)$, Φ — ее первообразная. Тогда для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ необходимо и достаточно существование конечного левостороннего предела функции Φ в точке b. В случае сходимости имеет место формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x)\Big|_a^{b-0} = \Phi(b-0) - \Phi(a). \qquad (1)$$

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница для собственного интеграла

$$\int_a^{\eta} f(x) dx = \Phi(\eta) - \Phi(a).$$

Отсюда следует утверждение о сходимости, а предельный переход дает формулу (1).

Замечание. Формула Ньютона-Лейбница справедлива и для интеграла, имеющего бесконечное значение.

3⁰. Линейность

Теорема 3. Пусть f, g — функции на промежутке $[a, b)$, $h = \alpha f + \beta g$.
Если интегралы функций f, g сходятся, то и интеграл функции h сходится, причем

$$\int_a^b h(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \qquad (2)$$

Доказательство. Обозначим через F, G, H частичные интегралы. В силу линейности собственного интеграла $H = \alpha F + \beta g$. Предельный переход завершает доказательство.

4^0. Аддитивность. Свойства остатка

Теорема 4. Пусть f — функция на промежутке $[a, b)$, удовлетворяющая условию (*), $c \in (a, b)$.

1) Сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ равносильна сходимости $\int_c^b f(x)dx$.

2) В случае сходимости

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{3}$$

3) В случае сходимости

$$\int_c^b f(x)dx \underset{c\to b-0}{\to} 0. \tag{4}$$

$\int_c^b f(x)dx$ называется остатком несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Сходимость интеграла равносильна сходимости остатка. Остаток сходящегося интеграла бесконечно мал.

Доказательство. Положим $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$, $G(\eta) = \int_c^\eta f(x)dx$, $J = \int_a^c f(x)dx$. В силу аддитивности собственного интеграла $F = J + G$, частичные интегралы различаются лишь на постоянную J. Если один из этих интегралов имеет предел, то и второй интеграл имеет предел, пределы (т.е. несобственные интегралы) связаны соотношением (3).

Если $I = \int_a^b f(x)dx$ сходится, то из равенства (3) получаем

$$\int_c^b f(x)dx = I - F(c) \underset{c\to b-0}{\to} I - I = 0.$$

5^0. Монотонность

Теорема 5. Пусть f, g — функции на $[a, b)$, имеющие сходящиеся несобственные интегралы.
Если $f \le g$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{5}$$

Действительно, при любом $\eta \in (a,b)$ по свойству монотонности собственного интеграла имеет место неравенство

$$\int_a^\eta f(x)\,dx \le \int_a^\eta g(x)\,dx.$$

Переходя здесь к пределу, получаем (5).

6⁰. Замена переменной в несобственном интеграле

Теорема 6. Пусть f — непрерывная функция на промежутке $[a, b)$, φ — непрерывно дифференцируемая, строго возрастающая функция на промежутке $[\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta - 0) = b$.

Тогда имеет место формула замены переменной в несобственном интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (6)$$

Фигурирующие в формуле (6) интегралы сходятся или расходятся одновременно. Интегралы имеют одинаковые значения (конечные или бесконечные).

Доказательство. Теорема получается предельным переходом в формуле замены переменной для собственного интеграла. Действительно,

$$\int_a^{\varphi(s)} f(x)\,dx = \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,\ s \in (\alpha, \beta).$$

Если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx \underset{\eta \to b-0}{\to} I$, то по теореме о пределе композиции $\int_a^{\varphi(s)} f(x)\,dx = F(\varphi(s)) \underset{s \to \beta-0}{\to} I$. Наоборот, если $G(s) = \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \underset{s \to \beta-0}{\to} I$, то $F(\eta) = G(\varphi^{-1}(\eta)) \underset{\eta \to b-0}{\to} I$.

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = [x = \operatorname{tg} t] = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что замена переменной свела несобственный интеграл к собственному.

7⁰. Интегрирование по частям в несобственном интеграле

Теорема 7. Пусть f, g — непрерывно дифференцируемые функции на промежутке $[a, b)$.

Если функция fg имеет конечный предел при $x \to b-0$, то несобственные интегралы функций fg' и $f'g$ сходятся или расходятся одновременно. В случае сходимости имеет место формула интегрировании по частям

$$\int_a^{b-0} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{b-0} - \int_a^{b-0} f'(x)g(x)dx. \tag{7}$$

Формула (7) получается предельным переходом в формуле интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = -x^{n+1}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = (n+1)I_n.$$

Таким образом, $I_n = n!$.

§ 3. Несобственные интегралы для положительных функций

$f \ge 0$ — функция на $[a, b)$, выполнено условие (*), F — частичный интеграл.

1⁰. Теорема 1. Для положительной функции несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится в том и только в том случае, если частичный интеграл F — ограниченная функция,

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\eta \in (a,\, b)} F(\eta). \tag{1}$$

Замечание. Всякий несобственный интеграл от положительной функции имеет некоторое значение: конечное для сходящегося интеграла и $+\infty$ для расходящегося. Формула (1) справедлива и для расходящегося интеграла.

Доказательство. Положительность функции f означает возрастание функции F: если $\eta_1 < \eta_2$, то $F(\eta_2) - F(\eta_1) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \ge 0$. Для возрастающей функции существование конечного предела равносильно ограниченности, роль предела выполняет верхняя грань.

2^0. Теорема сравнения в общей форме

Теорема 2. $f, g \geq 0$ — функции на $[a, b)$, удовлетворяющие условию (*). Если $f \leq g$, то

1) сходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$ влечет сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) расходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$ влечет расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$;

3) выполняется неравенство $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Пусть F, G — частичные интегралы. Функции F, G связаны неравенством $F \leq G$.

1) Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, тогда G ограничена, F ограничена, $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

2) Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится. Допустим, $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится, тогда по доказанному $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, что противоречит предположению.

Замечание. Для применения теоремы достаточно выполнения неравенства $f \leq g$ не на всем промежутке, а лишь на какой-нибудь его части вида $[\eta_0, b)$. Убедиться в этом можно, переходя к рассмотрению остатков интегралов. Гарантировать выполнение неравенства пункта 3) при этом уже нельзя.

3^0. Теорема сравнения в предельной форме

Теорема 3. $f, g \geq 0$ — функции на $[a, b)$, выполнено условие (*). Если $f(x) \underset{x \to b-0}{=} O(g(x))$ (т.е. найдутся такие η_0, M, что $f(x) \leq M \cdot g(x)$ при $x \in [\eta_0, b)$), то

1) сходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$ влечет сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) расходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$ влечет расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Подберем такие η_0 и M, что $f(x) \le M \cdot g(x),\ x \in [\eta_0, b)$. Если $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится остаток $\int_{\eta_0}^b g(x)dx$. По свойству линейности сходится интеграл $\int_{\eta_0}^b M \cdot g(x)dx$. По теореме 2 сходится $\int_{\eta_0}^b f(x)dx$. Наконец, сходящимся оказывается и $\int_a^b f(x)dx$.

Следствия. 1) Если $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$, то сходимость $\int_a^b g(x)dx$ влечет сходимость $\int_a^b f(x)dx$.

Справедливость следствия понятна, поскольку соотношение $f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x))$ сильнее, чем $f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x))$.

2) Если функции f, g одного порядка, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3) В частности, если $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

4^0. Несобственные интегралы для степенной функции

Теорема 4. 1) Несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \le 1$.

2) Несобственные интегралы $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$, $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходятся, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda \ge 1$.

Доказательство. Если $\lambda > 1$, то $\int_1^A \frac{dx}{x^\lambda} = -\frac{1}{\lambda-1}\frac{1}{x^{\lambda-1}}\Big|_1^A = \frac{1}{\lambda-1}\left(1-\frac{1}{A^{\lambda-1}}\right) \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{1}{\lambda-1}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}$. Для $\lambda = 1$ частичный интеграл $\int_1^A \frac{dx}{x} = \ln A \underset{A\to+\infty}{\to} +\infty$, интеграл расходится, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=+\infty$. Если $\lambda<1$, то $\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x^\lambda}=\left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_1^A=\frac{1}{1-\lambda}\left(A^{1-\lambda}-1\right)\underset{A\to+\infty}{\to}+\infty$, интеграл расходится.

Для второй части теоремы вычисления проводятся вполне аналогичным способом.

5[0]. Специальная теорема сравнения

Теорема 5. 1) $f\ge 0$ — функция на $[a,+\infty)$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{A}{x^\lambda}$.

Тогда если $\lambda>1$, интеграл сходится, если $\lambda\le 1$ — расходится.

2) $f\ge 0$ — функция на $(0,b]$, $f(x)\underset{x\to+0}{\sim}\frac{A}{x^\lambda}$.

Тогда если $\lambda<1$, интеграл сходится. Если $\lambda\ge 1$ — расходится.

Теорема 5 — следствие теорем 3, 4.

Примеры.

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda(1+x)}$.

$\frac{1}{x^\lambda(1+x)}\underset{x\to+0}{\sim}\frac{1}{x^\lambda}$; $\frac{1}{x^\lambda(1+x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\lambda+1}}$.

Интеграл сходится, если $0<\lambda<1$.

2) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda\ln^\mu x}$. Если $\lambda>1$, интеграл сходится. Действительно, положим $\lambda_1=\frac{\lambda+1}{2}$, тогда $1<\lambda_1<\lambda$, $\frac{1}{x^\lambda\ln^\mu x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^{\lambda_1}}\right)$ и сходимость следует из теоремы сравнения. Если $\lambda<1$, интеграл расходится. (Можно положить $\lambda_1=\frac{\lambda+1}{2}$, заметить, что $\lambda<\lambda_1<1$, $\frac{1}{x^{\lambda_1}}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^\lambda\ln^\mu x}\right)$).

Если $\lambda=1$, замена переменной $t=\ln x$ сводит исследуемый интеграл к $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\mu}$.

Интеграл сходится, если $\mu>1$, и расходится, если $\mu\le 1$.

3) $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ сходится.

Выполним в этом интеграле замену переменной по формуле $x=1/y$:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}\frac{dy}{y^2}=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln y}{1+y^2}dy=-I\,.$$

Получается, что $I=0$.

4) Интеграл Эйлера $I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Сначала мы установим сходимость интеграла Эйлера. Подынтегральная функция положительна. На промежутке $(0,\pi/2)$ справедливы неравенства

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x,\ \frac{1}{\sin x}<\frac{\pi}{2x},\ \ln\frac{1}{\sin x}<\ln\frac{\pi}{2x},$$

а $\int\limits_0^{\pi/2}\ln\frac{\pi}{2x}dx$ сходится (интеграл вычисляется интегрированием по частям:

$$\int_0^{\pi/2}\ln\frac{\pi}{2x}dx=x\ln\frac{\pi}{2x}\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}dx=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}).$$

По теореме сравнения сходится интеграл Эйлера.

Теперь можно провести замену переменной по формуле $x=\pi/2-y$:

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\cos y}dy\,.$$

и написать

$$2I=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\sin x}dx+\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\sin x\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{2}{\sin 2x}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\sin 2x}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{\sin z}dz=\frac{\pi}{2}\ln 2+I$$

Учитывая сходимость интеграла Эйлера, мы получаем равенство

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

§ 4. Несобственные интегралы от знакопеременных функций

1^0. Абсолютная и условная сходимость

Теорема 1. f определена на $[a,b)$, удовлетворяет условию (*).

Если $\int\limits_a^b|f(x)|dx$ сходится, то и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Для любых $\eta_1 < \eta_2$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| \le \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx$. Возьмем произвольное положительное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, найдется такое η_0, что $\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx < \varepsilon$ для любых $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2$; тем более $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$. По критерию Коши делаем вывод о сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение.

1) Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится.

2) Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется условно сходящимся, если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится.

2^0. Примеры.

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$ абсолютно сходится.

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Рассмотрим остаток интеграла $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. В частичном интеграле проведем интегрирование по частям:

$$\int\limits_{\pi/2}^{A} \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_{\pi/2}^{A} - \int\limits_{\pi/2}^{A} \frac{\cos x}{x^2}dx = \underset{A\to+\infty}{\to} -\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Интеграл сходится.

Точно так же устанавливается сходимость интеграла $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$. Поскольку $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то и $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}dx$ расходится, т.е. $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится.

Заметив, что $\dfrac{|\sin x|}{x} \ge \dfrac{\sin^2 x}{x}$, приходим к выводу, что интеграл $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится, а $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится лишь условно.

Отметим, пока без доказательства, что $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

2^0. Признаки Дирихле и Абеля

Теорема 2. Признак Дирихле

Рассматривается интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

1) Частичный интеграл $F(\eta) = \displaystyle\int\limits_a^\eta f(x)dx$ — ограниченная функция; $|F(\eta)| \le M$.

2) g монотонна, $g(x) \underset{x\to b-0}{\to} 0$.

Тогда интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. По второй теореме о среднем

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)g(x)dx = g(\eta_1)\int\limits_{\eta_1}^{\xi} f(x)dx + g(\eta_2)\int\limits_{\xi}^{\eta_2} f(x)dx.$$

Возьмем произвольное положительное ε. Найдем такое η_0, что для всех $\eta > \eta_0$ выполняется неравенство $|g(\eta)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Тогда для $\eta_1, \eta_2 > \eta_0$ имеем неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{4M}2M + \frac{\varepsilon}{4M}2M = \varepsilon.$$

Интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Замечание. Абсолютная сходимость не гарантируется.

Теорема 3. Признак Абеля

1) Интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

2) g монотонна и ограничена.

Тогда интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство.

Функция g имеет конечный предел. Положим $A=\lim\limits_{x\to b-0} g(x)$. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\big(g(x)-A\big)dx$ сходится по признаку Дирихле. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, поскольку представляется в виде суммы двух сходящихся интегралов $\int\limits_a^b f(x)\big(g(x)-A\big)dx$ и $\int\limits_a^b A\,f(x)dx$.

Примеры.

1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^\lambda}dx,\ \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin ax}{x^\lambda}dx$ ($a\neq 0$).

Если $\lambda>1$, интегралы абсолютно сходятся.

Если $0<\lambda\le 1$, мы оказываемся в условиях признака Дирихле. Ограничимся рассмотрением первого интеграла. $F(A)=\int\limits_1^A \cos ax\,dx=\frac{1}{a}(\sin aA-\sin a)$ — ограниченная функция, $\frac{1}{x^\lambda}\underset{x\to+\infty}{\searrow}0$. По признаку Дирихле интеграл сходится. В то же время, $\frac{|\cos ax|}{x^\lambda}\ge\frac{\cos^2 ax}{x^\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^\lambda}+\frac{\cos 2ax}{x^\lambda}\right)$, Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\lambda}dx$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2ax}{x^\lambda}dx$ сходится (по признаку Дирихле), поэтому $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos^2 ax}{x^\lambda}dx$ расходится. По теореме сравнения $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\cos ax|}{x^\lambda}dx$ расходится. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^\lambda}dx$ сходится условно.

(Замечание. Расходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos^2 ax}{x^\lambda}dx$ можно установить и на основе критерия Коши:

$$\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\cos^2 x}{x^\lambda}dx\ge\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\cos^2 x}{x}dx\ge\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\cos^2 x dx=\frac{1}{4\pi n}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{4\pi n}\pi n=\frac{1}{4}).$$

2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$.

Выше мы установили сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Заметим, что

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sin x\right)}\geq 0,$$

а интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sin x\right)}dx$ расходится, поскольку

$$\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sin x\right)}dx\geq\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi n}+1\right)^2}\int\limits_{\pi n}^{2\pi n}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi n}{2\left(\sqrt{2\pi n}+1\right)^2}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{4}.$$

Исследуемый интеграл оказался представленным в виде суммы сходящегося и расходящегося интегралов, поэтому он расходится.

Пример показывает существенность условия монотонности в признаке Дирихле.

Литература:

1. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I. — 6-е изд, дополн.— М.: МЦНМО, 2012. — XVIII+ 702с. Библ.: 55 назв. Илл.: 65. ISBN 978-5-94057-891

2. Аксенов, А. П. Математика. Математический анализ Ч. 2: учебное пособие / СПб.: СПбГПУ, 2004. 758 с. ISBN 5742206259.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1 — Изд. 5-е, перераб. и доп. Москва : Дрофа, 2003, 702 с. ISBN 5710741191.