Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Ю.А.Андрианов

Операторы в евклидовых и унитарных пространствах

Лекция для студентов направлений "Прикладная математика и информатика", "Механика и математическое моделирование"

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2023

УДК 512.64

Андрианов Ю.А. Операторы в евклидовых и унитарных пространствах. Лекция для студентов направлений "Прикладная математика и информатика", "Механика и математическое моделирование": учеб. пособие/ Ю.А. Андрианов– СПб., 2023. 18 с.

Учебное пособие соответствует ФГОС ВО по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки». Текст лекции предназначен для студентов первого курса Физико-механического института. Рассматривается тема, представляющая достаточные трудности для студентов.

§1. Введение

Определение. Оператор $\varphi\colon V \to V$ называется оператором простой структуры, если в этом пространстве есть базис, матрица оператора в котором диагональная.

Сформулируем и докажем несколько теорем.

Теорема 1. Матрица оператора φ подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда в пространстве есть базис из собственных векторов оператора φ .

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\varphi\colon V \to V$– оператор, A – матрица этого оператора в базисе $v_1, \cdots, v_n$. Пусть существует матрица C, такая, что

$$C^{-1}AC = D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

то есть матрица A подобна диагональной D.

Рассмотрим новый базис $u_1, \cdots, u_n$ пространства V, связанный со старым базисом матрицей перехода C, тогда

$$[u_1, \cdots, u_n] = [v_1, \cdots, v_n]C.$$

Покажем, что базис $u_1, \cdots, u_n$ состоит из собственных векторов оператора φ. Действительно, матрица φ в базисе $u_1, \cdots, u_n$ имеет вид $C^{-1}AC = D$. Это значит, что

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varphi(u_1) &= \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n = \lambda_1 u_1 \\ \varphi(u_2) &= 0 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n = \lambda_2 u_2 \\ &\cdots \\ \varphi(u_n) &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \lambda_n u_n \end{aligned}.$$

Таким образом, $u_1, \dots, u_n$ – собственные векторы оператора φ.

Достаточность. Обратно, если в пространстве существует базис из собственных векторов оператора φ, то равенства (1) показывают, что матрица оператора φ в этом базисе – диагональная. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть V– векторное пространство над полем комплексных чисел, φ – оператор в этом пространстве, A – матрица этого оператора в некотором базисе. Если характеристический многочлен матрицы оператора имеет только простые корни (то есть корни кратности один), то оператор φ – простой структуры.

Доказательство. Пусть $f(t)$ – характеристический многочлен оператора φ. Основное поле – это поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Значит, $f(t)$ раскладывается в этом поле на линейные множители и все эти множители различные, так как по условию кратность каждого корня – единица.

$$f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n).$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – различные собственные числа оператора φ. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – собственные векторы оператора φ, соответствующие этим собственным числам. Тогда по теореме1 векторы $v_1, \dots, v_n$ – линейно независимы.

Значит, они образуют базис V (так как их число равно $\dim V = n$). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть V – векторное пространство над полем комплексных чисел, φ – оператор в этом пространстве. Для того, чтобы φ был оператором простой структуры необходимо и достаточно, чтобы каждому собственному числу оператора соответствовало столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность этого числа как корня характеристического многочлена.

Доказательство. Пусть $f(t)$ – характеристический многочлен оператора и

$f(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s}$ – его разложение на множители в поле комплексных чисел, где $\lambda_1 \neq \cdots \neq \lambda_s$ – попарно различные собственные числа оператора. Для каждого собственного числа оператора найдём базис пространства собственных векторов, соответствующих этому собственному числу, получим:

$$\begin{array}{l}
\text{для } \lambda_1 \text{ найден базис } L_1\!: \ v_{11}, \dots, v_{1m_1}, \ m_1 \leq k_1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
\text{для } \lambda_s \text{ найден базис } L_s\!: \ v_{s1}, \dots, v_{sm_s}, \ m_s \leq k_s
\end{array}$$

Выпишем все эти собственные векторы.

$$(2\ )\ v_{11}, \dots, v_{1m_1}; v_{21}, \dots, v_{2m_2}; \dots; v_{s1}, \dots, v_{sm_s}.$$

Проверим, что они линейно независимы в совокупности. Для этого составим их линейную комбинацию и посмотрим, при каких коэффициентах она может равняться нулевому вектору.

$$(3)\ \alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{1m_1}v_{1m_1} + \cdots + \alpha_{s1}v_{s1} + \cdots + \alpha_{sm_s}v_{sm_s} = 0.$$

Обозначим $y_1 = \alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1m_1}v_{1m_1}, \dots, y_s = \alpha_{s1}v_{s1} + \cdots + \alpha_{sm_s}v_{sm_s}$.

Тогда имеем

(4) $y_1 + \cdots + y_s = 0$.

Если $y_1 = y_2 = \cdots = y_s = 0$, то все коэффициенты линейной комбинации (3) равны нулю. Если хоть один из y_i, $i = 1, \dots, s$ не равен нулю, то y_i – собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_i, и равенство (4) даёт противоречие с известной теоремой, согласно которой собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, линейно независимы.

Вывод. В пространстве V существуют

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$$

линейно независимых собственных векторов и это максимально возможное их число.

Переходим к непосредственной проверке утверждений теоремы.

Необходимость. Пусть φ – оператор простой структуры. По Т1 в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора φ. Это значит, что векторы (2) образуют базис V. Следовательно, $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$. Отсюда $m_i = k_i$ $\forall i = 1,2, \dots, s$, так как $m_i \leq k_i$.

Достаточность. Если $m_i = k_i$, то векторы системы (2) дают базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора φ. Следовательно, φ – оператор простой структуры.

Теорема доказана.

§2. Операторы в унитарном пространстве.

1. Теория вещественных квадратичных форм доставляет нам другой пример достаточного условия того, чтобы оператор был простой структуры. Действительно, пусть A – вещественная симметричная матрица ($A^T = A$). Тогда A можно рассматривать как матрицу квадратичной формы $f(X) = X^T AX$. Известно, что существует ортогональное преобразование $X = CY$, приводящее $f(X)$ к каноническому виду $f(X) = X^T AX = Y^T C^T ACY = Y^T DY$, где $D -$ диагональная матрица. При этом $D = C^T AC = C^{-1}AC$, так как $C^T = C^{-1}$ из условия ортогональности матрицы C. Таким образом, любая вещественная симметричная матрица подобна диагональной и, следовательно, задаёт оператор простой структуры. В этом параграфе мы займёмся обобщением этого утверждения.

2. Операторы в унитарном пространстве.

<u>Определение.</u> Пусть V – унитарное пространство, $\varphi\colon V \to V$. Оператором, сопряжённым к оператору φ, называется оператор $\varphi^*\colon V \to V$, такой, что

(1) $(\varphi(x), y) = \big(x, \varphi^*(y)\big) \qquad \forall x, y \in V.$

<u>Теорема1.</u> Для всякого оператора $\varphi\colon V \to V$ существует единственный оператор, сопряжённый к нему.

<u>Доказательство.</u> Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис пространства V (такой базис всегда есть, так как произвольный базис можно подвергнуть ортогонализации и полученные векторы нормировать). Построим оператор, сопряжённый к данному, следующим образом. Пусть A – матрица оператора φ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Нам надо найти φ^*, зная φ. Мы найдём этот оператор, если найдём его матрицу в данном ОНБ. Пусть B – искомая матрица. Равенство (1) в матричной записи имеет вид

$(AX)^T\overline{Y} = X^T\overline{(BY)}$, то есть

$X^T A^T \overline{Y} = X^T \overline{B} \cdot \overline{Y} \quad \forall X, Y \in V,$

так как наш базис ортонормированный и, следовательно, матрица Грама в нём – это единичная матрица E. Отсюда следует, что $A^T = \overline{B}$, то есть $B = \overline{A}^T$. Если рассмотреть матрицу $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$,

транспонированную и комплексно сопряжённую к матрице A, и обозначить оператор, имеющий в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрицу A^* своей матрицей, то получим оператор, сопряжённый к данному φ.

Существование доказано.

Докажем единственность. Пусть $(\varphi(x), y) = \big(x, \varphi^*(y)\big)$, и, кроме того, $(\varphi(x), y) = \big(x, \psi(y)\big)$. Проверим, что $\varphi^* = \psi$.

<u>Лемма.</u> Пусть $x \in V$ и $(x, y) = 0 \quad \forall y \in V$. Тогда $x = 0$.

<u>Доказательство леммы.</u> Если $(x, y) = 0 \quad \forall y \in V$, то, в частности, при $y = 0$ получим $(x, x) = 0$. Следовательно, $x = 0$. Пусть теперь $\big(x, \varphi^*(y)\big) = \big(x, \psi(y)\big)\ \forall x$, следовательно, $\big(x, \varphi^*(y) - \psi(y)\big) = 0$. Тогда по лемме $\varphi^*(y) - \psi(y) = 0 \quad \forall y$.

Это значит, что $\varphi^*(y) = \psi(y)\ \ \forall y$, то есть $\varphi^* = \psi$.

Теорема доказана.

Следствие. Из доказательства теоремы следует, что для нахождения оператора φ^* надо сначала найти матрицу A оператора φ в каком – нибудь ОНБ. Затем построить матрицу A^*, транспонированную и комплексно сопряжённую к матрице A. Тогда матрица A^* будет матрицей оператора φ^* во взятом ОНБ.

Определение. Пусть V – унитарное пространство, $\varphi: V \to V$ называется нормальным оператором, если $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi^* \cdot \varphi$ (здесь имеется в виду умножение $' \cdot '$ в кольце операторов, то есть последовательное их применение).

Примеры.

1) φ – самосопряжённый оператор, то есть $\varphi = \varphi^*$. Если $\varphi = \varphi^*$, то $\varphi \cdot \varphi^* = \varphi \cdot \varphi = \varphi^* \cdot \varphi$, следовательно, φ – нормальный оператор. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис V и A – матрица φ в этом базисе. Тогда по следствию из теоремы матрица $(\overline{A})^T$ – комплексно сопряжённая и транспонированная к A – будет матрицей φ^* в этом базисе, $\varphi = \varphi^* \Leftrightarrow A = (\overline{A})^T$. Матрица, которая равна своей комплексно сопряжённой и транспонированной, называется эрмитовой. Таким образом, матрица самосопряжённого оператора является эрмитовой.
2) φ – унитарный оператор, то есть $\varphi^* \cdot \varphi = \varepsilon$, где ε – единичный или тождественный оператор, $\varepsilon(x) = x \ \forall x \in V$. Унитарный оператор является нормальным. Пусть A – матрица унитарного оператора φ. Тогда $A(\overline{A})^T = E$. Матрица с таким свойством называется унитарной. Если A – вещественная матрица, то $A = \overline{A}$ и A – унитарна, то $AA^T = E$, значит A – ортогональная.

Теорема 2. Для всякого нормального оператора, действующего в унитарном пространстве, существует ортонормированный базис, так что матрица этого оператора и матрица оператора, сопряжённого к нему, в этом базисе диагональные. При этом на диагонали стоят собственные числа и соответственные диагональные элементы этих матриц комплексно сопряжены.

Эту теорему приводим без доказательства.

Теорема 3. Для того, чтобы нормальный оператор φ был самосопряжённым, необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа были вещественными.
Доказательство.
Необходимость. Пусть φ – самосопряжённый, то есть $\varphi = \varphi^*$. По предыдущей теореме существует ортонормированный базис пространства, в котором матрицы обоих операторов диагональные и при этом
$A_{\varphi} = diag[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, $A_{\varphi^*} = diag[\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}]$.
Равенство $\varphi = \varphi^*$ влечёт $A_{\varphi} = A_{\varphi^*}$, следовательно, $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$, то есть λ_i – вещественное.
Достаточность. Пусть все собственные числа оператора φ вещественные. По предыдущей теореме 2 в пространстве существует базис из собственных векторов операторов φ и φ^*.
В этом базисе оператор φ имеет матрицу $A_{\varphi} = diag[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, а оператор φ^* имеет матрицу $A_{\varphi^*} = diag[\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n]$.
По условию, $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, n$.
Следовательно, $A_{\varphi^*} = A_{\varphi}$, то есть $\varphi = \varphi^*$.
Теорема доказана.

Теорема 4. Для того, чтобы нормальный оператор был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы все его собственные числа по модулю равнялись единице (имеется в виду модуль комплексного числа).
Доказательство.
Необходимость. Допустим, что нормальный оператор φ является унитарным, то есть $\varphi \cdot \varphi^* = \varepsilon$. По теореме 2 существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов φ и φ^*, при этом

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, A_{\varphi^*} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

Из условия $\varphi\varphi^* = \varepsilon$ следует, что $A_{\varphi}A_{\varphi^*} = E$, то есть

$$A_{\varphi}A_{\varphi^*} = \begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\overline{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $1 = \lambda_i\overline{\lambda}_i = |\lambda_i|^2$, $i = 1, \dots, n$.
Следовательно, $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Достаточность. Пусть $|\lambda_i| = 1, i = 1, \dots, n$ и φ – нормальный оператор. Проверим, что φ – унитарный, то есть $\varphi\varphi^* = \varepsilon$.
По теореме 2 строим ортонормированный базис, в котором $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, A_{\varphi^*} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
Следовательно, $A_\varphi A_{\varphi^*} = E$, то есть $\varphi\varphi^* = \varepsilon$.
Теорема доказана.

Полярное разложение оператора.

Определение. Самосопряжённый оператор φ называется положительно определённым, если $(\varphi(x), x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Замечание. Это определение имеет смысл, так как $(\varphi(x), x)$ – вещественное число для самосопряжённого оператора φ.
Действительно, имеем
$(\varphi(x), x) = \big(x, \varphi^*(x)\big) = \big(x, \varphi(x)\big) = \overline{(\varphi(x), x)}$
в унитарном пространстве.

Лемма 1. Самосопряжённый оператор φ является положительно определённым тогда и только тогда, когда все его собственные числа положительны.
Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_n$ – ОНБ из собственных векторов оператора φ, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – соответствующие собственные числа. Тогда

$$(\varphi(x), x) = (\varphi(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n), x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) =$$
$$= (x_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + x_n \lambda_n u_n, x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) =$$
$$= \lambda_1 |x_1|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2 > 0$$

тогда и только тогда, когда $\lambda_i > 0 \; \forall i = 1, \dots, n$.
Лемма доказана.

Лемма 2. Из положительно определённого оператора φ можно «извлечь квадратный корень», являющийся самосопряжённым положительно определённым оператором. Это значит, что существует положительно определённый самосопряжённый оператор ψ такой, что $\varphi = \psi^2$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа оператора φ и $u_1, \dots, u_n$ – ОНБ из собственных векторов оператора φ. Тогда $\lambda_i > 0$ по лемме 1 и существует $\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$.
Пусть ψ – оператор, имеющий $u_1, \dots, u_n$ своими собственными векторами и $\sqrt{\lambda_i}$ – соответствующие им собственные числа. Тогда ψ – самосопряжённый и положительно определённый (так как $\sqrt{\lambda_i} > 0$).
Кроме того, $\psi^2 = \varphi$, так как в базисе из собственных векторов $u_1, \dots, u_n$ квадрат матрицы оператора ψ равен матрице оператора φ .
Следовательно, $\psi^2 = \varphi$.
Лемма доказана.

Теорема 5. (полярное разложение оператора). Любой невырожденный оператор равен произведению унитарного на положительно определённый.
Доказательство. Пусть φ – невырожденный оператор (то есть $ker\varphi = \{0\}$). Тогда $\varphi^*\varphi$ – самосопряжённый положительно определённый оператор. Проверим это.

a) $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*(\varphi^*)^* = \varphi^*\varphi$, следовательно, $\varphi^*\varphi$ –самосопряжённый.
b) $(\varphi^*\varphi(x), x) = \big(\varphi(x), \varphi(x)\big) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Следовательно, $\varphi^*\varphi$ – положительно определённый.

Поэтому по лемме 2 существует ψ – квадратный корень из $\varphi^*\varphi$, то есть

$$\varphi^*\varphi = \psi^2 \Longrightarrow \psi^{-1}\varphi^*\varphi\psi^{-1} = \psi^{-1}\psi^2\psi^{-1} = \varepsilon, \ (\varphi\psi^{-1})^*\varphi\psi^{-1} = \varepsilon.$$

Следовательно, оператор $\eta = \varphi\psi^{-1}$ – унитарный, тогда $\varphi = \eta\psi$ — это и есть полярное разложение оператора φ.

Замечание. В размерности 1 ему соответствует $z = re^{i\varphi}$.

§3. Операторы в евклидовом пространстве.

Теорема 6. Пусть φ – оператор в евклидовом пространстве V над R,

$\dim V = n > 2$. Тогда в V существует инвариантное подпространство размерности 1 или 2.

Доказательство. Характеристический многочлен оператора φ — это многочлен степени n с вещественными коэффициентами. Если у него есть хоть один вещественный корень λ, то в V найдётся собственный вектор, соответствующий собственному числу λ. Подпространство, натянутое на этот собственный вектор, будет искомым инвариантным подпространством.

Допустим теперь, что все корни характеристического многочлена – комплексные числа. Пусть A – матрица оператора φ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$, λ – собственное число матрицы A, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$.

Найдём собственный столбец Z_0 матрицы A, то есть решим систему $AZ = \lambda Z$. Элементы столбца Z_0 — это комплексные числа $Z = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$. Подставим этот столбец Z_0 в систему $AZ = \lambda Z$. Выпишем подробно полученные тождества: $\begin{cases} a_{11}(x_1 + iy_1) + \dots + a_{1n}(x_n + iy_n) = (\alpha + i\beta)(x_1 + iy_1) \\ \cdots \\ a_{n1}(x_1 + iy_1) + \dots + a_{nn}(x_n + iy_n) = (\alpha + i\beta)(x_n + iy_n) \end{cases}$

Разделим здесь вещественные и мнимые части. Тогда получим

$$(1)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \alpha x_1 - \beta y_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \alpha x_n - \beta y_n \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = \beta x_1 + \alpha y_1 \\ \cdots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n = \beta x_n + \alpha y_n \end{cases}.$$

Рассмотрим два вектора $u, v \in V$, заданные равенствами

$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.

Тогда система (1) показывает, что $\varphi(u) = \alpha u - \beta v$, а система (2) показывает, что $\varphi(v) = \beta u + \alpha v$. Рассмотрим $L = \mathcal{L}(u, v)$ – линейную оболочку векторов u, v. Тогда L – инвариантное подпространство в V и $\dim L \le 2$.

Теорема доказана.

<u>Определение.</u> Оператором, сопряжённым к оператору $\varphi: V \to V$, действующему в евклидовом пространстве V, называется оператор

$\varphi^*: V \to V$ такой, что $(\varphi(x), y) = \big(x, \varphi^*(y)\big)$ $\forall x, y \in V$.

Оператор φ^* существует и единственен

(доказательство аналогично доказательству теоремы 1).

Определение. Оператор $\varphi: V \to V$ называется нормальным, если $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$ (здесь V – евклидово).

Теорема 7. Пусть V – евклидово, $\varphi: V \to V$ – нормальный оператор. Матрица нормального оператора φ в произвольном базисе подобна матрице

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \ddots & \cdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & \lambda_s & & & \\ & & & \Lambda_{s+1} & \cdots & 0 \\ & 0 & & \cdots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & \Lambda_{s+t} \end{pmatrix}.$$

Здесь B – блочно-диагональная матрица, в которой первые s диагональных элементов — это вещественные собственные числа оператора φ (если они есть!). Дальше по диагонали стоят квадратные 2×2 блоки

$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \alpha_{s+j} & \beta_{s+j} \\ -\beta_{s+j} & \alpha_{s+j} \end{pmatrix}$, $j = 1,2,\dots,t$, где $\lambda_{s+j} = \alpha_{s+j} + i\beta_{s+j}$ – комплексные собственные числа матрицы оператора φ (но не оператора φ), $\beta_{s+j} \neq 0$. Напомним, что тогда $\overline{\lambda_{s+j}} = \alpha_{s+j} - i\beta_{s+j}$ – тоже собственные числа матрицы оператора φ $(j = 1,2,\dots,t)$; $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, λ_{s+1}, $\overline{\lambda_{s+1}}, \dots$, $\overline{\lambda_{s+t}}$ – все корни характеристического многочлена матрицы оператора φ.

Приводим эту теорему без доказательства.

Теорема 8 (Эйлер). Любое вращение трёхмерного пространства, сохраняющее ориентацию, есть вращение вокруг некоторой оси.

Доказательство. При вращении орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ переходят в новые орты $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, при этом тройка векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ – правая. Значит, матрица оператора вращения в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – это ортогональная матрица с определителем «+1». Известно (теорема 4), что собственные числа такой матрицы равны по модулю единице. Возможны следующие варианты:

a) Все три собственные числа вещественные и равны единице по модулю ($\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$)
b) Одно собственное число – вещественное (и равно единице), а два других – комплексно сопряжённые числа, равные единице по модулю ($\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = cos\alpha \pm isin\alpha$).

В любом случае получаем, что оператор вращения имеет собственное число, равное единице. Собственный вектор, соответствующий этому собственному числу, является направляющим вектором оси вращения, а α — это угол, на который происходит вращение.

§4. Оператор проецирования.

Пусть $V = L_1 \oplus L_2$.Тогда $\forall\, v \in V \;\; v = l_1 + l_2, \quad l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$ и данная запись единственна.

Элемент l_1 называется проекцией вектора v на L_1 параллельно L_2. Отображение $\varphi: V \to V$, сопоставляющее каждому $v \in V$ его проекцию l_1 на L_1, называется оператором проецирования пространства V на L_1 параллельно L_2. Пишут: $\varphi(v) = l_1$.

Если $\varphi: V \to V$ – оператор проецирования на L_1 параллельно L_2, то имеем с одной стороны $\varphi(v) = l_1$, а с другой стороны $\varphi\big(\varphi(v)\big) = \varphi(l_1) = l_1$, так как $l_1 = l_1 + 0$. Поэтому $\varphi\big(\varphi(v)\big) = \varphi(v) \;\; \forall v \in V$. Это значит, что $\varphi \cdot \varphi = \varphi$. Оператор φ, удовлетворяющий равенству $\varphi \cdot \varphi = \varphi$, называется идемпотентным (от английского identity – тождественность, идентичность, potential – потенциал, степень).

Таким образом, оператор проецирования – идемпотентен.

Обратно, любой идемпотентный оператор, отличный от нулевого и тождественного, есть оператор проецирования.

Действительно, пусть

$\varphi^2 = \varphi \cdot \varphi = \varphi$. Обозначим $im\varphi = \varphi(V) = L_1, \;\; (\varepsilon - \varphi)(V) = L_2$

(здесь ε – тождественный оператор, $\varepsilon(v) = (v) \;\; \forall v \in V$).

Для любого $v \in V$ верно равенство

$$v = \varphi(v) + (\varepsilon - \varphi)(v) = l_1 + l_2, \;\; \text{где } l_1 = \varphi(v), l_2 = (\varepsilon - \varphi)(v).$$

Поэтому $V = L_1 + L_2$.

Проверим, что $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Пусть $v \in L_1 \cap L_2$, тогда $v = \varphi(v')$ и $v = \varphi(v'')$. Следовательно, из первого имеем $\varphi(v) = \varphi^2(v') = \varphi(v') = v$, а из второго $\varphi(v) = (\varphi - \varphi^2)(v'') = 0$. Значит, $v = 0$.

Итак, $V = L_1 \oplus L_2$ и φ является оператором проецирования V на L_1.

Оператор проецирования является оператором простой структуры.

Действительно, возьмём в качестве базиса V объединение базисов L_1 и L_2.

В таком базисе матрица оператора проецирования диагональная,

$D = diag[1,1,\dots,1,0,\dots,0]$.

Пусть теперь V – унитарное пространство, $V = L_1 \oplus L_2$, где$L_2 = L_1^{\perp}$.

В этом случае оператор проецирования V на L_1 называется оператором ортогонального проецирования.

Оператор ортогонального проецирования самосопряжён, так как он имеет вещественную диагональную матрицу в ортонормированном базисе, полученным объединением ортонормированных базисов L_1 и L_2.

Теорема 9. Любой самосопряжённый идемпотентный оператор φ есть оператор ортогонального проецирования.

Эту теорему мы приведём без доказательства.

Пример. Найти канонический вид B ортогональной матрицы A и ортогональную матрицу Q такую, что $B = B^{-1}AQ$, где $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся методом, применённом при доказательстве теоремы 7.

Ищем собственные числа матрицы A. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$f_A(t) = det(A - tE) = -t^3 + 2t^2 - 2t + 1.$$

Его корнями являются числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Собственным столбцом матрицы A, соответствующим собственному числу $\lambda = 1$, является столбец $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при любом $x_3 \neq 0$.

Берём $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Получаем $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Ищем собственные столбцы, соответствующие комплексному собственному числу $\lambda=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1-3\sqrt{3}i & -2 \\ -2 & 4 & 1-3\sqrt{3}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1-\sqrt{3}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}x_3.$$

Поясним первый переход: все строки матрицы A прибавляем к первой и делим её на $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Берём $x_3=1$ и в столбце $X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ выделяем действительную и мнимую части.

Обозначим $u=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $X=u+iv,\ u\perp v$.

Имеем $AX=\lambda X$;

$$A(u+iv)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(u+iv);$$

$$Au+iAv=\left(\frac{1}{2}u-\frac{\sqrt{3}}{2}v\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u+\frac{1}{2}v\right).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} Au &= \tfrac{1}{2}u - \tfrac{\sqrt{3}}{2}v \\ Av &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}u + \tfrac{1}{2}v \end{aligned}.$$

Имеем $\|u\| = \|v\| = \sqrt{\frac{3}{2}},\ \ u \perp v.$

Обозначим $e_2 = \frac{u}{\|u\|},\ e_3 = \frac{v}{\|v\|}$.

Поэтому $\left[\begin{aligned} Ae_1 &= e_1 \\ Ae_2 &= \tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}e_3 \\ Ae_3 &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}e_2 + \tfrac{1}{2}e_3 \end{aligned}\right.$.

<u>Ответ.</u> $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\ Q = (e_1\ e_2\ e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Вывод.</u> Видим, что оператор умножения на матрицу A в пространстве R^3 оставляет неподвижным вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, так как $Ae_1 = e_1$.

Кроме того, этот оператор действует в плоскости, перпендикулярной к e_1, как поворот на угол $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Таким образом, оператор умножения на матрицу A действует как оператор вращения трёхмерного пространства вокруг оси OL с направляющим вектором e_1 на угол $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Список литературы

[1] В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Линейная алгебра. - М.;Наука.1984.

[2] Л.И.Головина. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. - М.;Наука.1979.

[3] Д.К.Фадеев. Лекции по линейной алгебре. - Лань.2007.

Оглавление