

На правах рукописи

Ли Ен Кван

**ЧАСТОТНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург

2003

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет»

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор ЧЕЧУРИН Сергей Леонидович

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор ДРОЗДОВ Валентин Нилович

кандидат технических наук, доцент ПОЛЯНСКИЙ Владимир Анатольевич

Ведущая организация: Научно-производственная фирма «Системаавтоматика»

Защита состоится 04 декабря 2003г. в 13 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д.212.229.10 Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет» (ГОУ «СПбГПУ») по адресу: 195251, С-Петербург, ул. Политехническая, 29, корп. 9, факультет технической кибернетики, ауд. 535.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ «СПбГПУ» (Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29, Главное здание)

Автореферат разослан 04 ноября 2003г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д.212.229.10

Доктор технических наук, профессор

Малыхина Г. Ф.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Периодически нестационарные динамические системы с распределенными параметрами широко используются в технике управления, электротехнике, электромеханике, механике, тепло-, гидро-, газодинамике, радиофизике и в других областях. Примером подобных систем служит система управления координатой робота-манипулятора, в которой периодически нестационарным звеном является МДМ (модуляция-демодуляция) усилитель, а звеном с распределенными параметрами служит упругий вал привода схвата. Другим примером периодически нестационарной системы с распределенными параметрами является электромашинный преобразователь энергии, содержащий двигатель постоянного тока и синхронный генератор. В этой системе периодически изменяющимся со временем звеном служит взаимная индуктивность обмоток статора и ротора синхронного генератора, а нагрузкой генератора служит длинная линия – звено с распределенными параметрами.

Задачи тепло-, гидро-, газодинамики описываются, как правило, нелинейными уравнениями в частных производных, т.е. представляют собой сложные нелинейные динамические системы с распределенными параметрами. Как известно, задача устойчивости периодических движений в подобных системах сводится к решению периодически нестационарных систем с распределенными параметрами.

Задачами расчета периодически нестационарных систем и систем с распределенными параметрами занимались крупные ученые Хилл Г., Болотин В.В., Валеев К.Г., Лурье А.И., Розенвассер Е.Н., Якубович В.А., Фомин И.Н., Весницкий А.И., Сейранян А.П., Левинштейн М.Л., Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш., Чечурин С.Л. и многие другие. Процессы и решения периодически нестационарных систем с распределенными параметрами необычайно сложны, так что точные аналитические решения существуют лишь в редких простейших случаях. Таким образом, задачи исследований, поставленные в диссертационной работе, являются актуальными.

Цель исследования. Цель диссертации заключается в разработке приближенного метода расчета колебаний периодически нестационарных систем с распределенными параметрами.

Методы исследования. Поставленная цель достигается следующими путями:

- 1) использованием частотных характеристик для анализа периодически нестационарных систем с распределенными параметрами (ПНСРП);
- 2) выбором цифрового моделирования звеньев с распределенными параметрами;

- 3) использованием прямого и обратного Z-преобразований для получения частотных характеристик звеньев с распределенными параметрами;
- 4) модификацией одночастотного метода стационаризации.

Основные научные результаты

- 1) Разработана методика расчета частотных характеристик звеньев с распределенными параметрами.
- 2) Получены частотные модели и определены условия возбуждения параметрических колебаний в периодических нестационарных системах с распределенными параметрами.
- 3) Найдены решения прикладных задач механики, электромеханики и управления.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, подтверждается

- 1) рамками одночастотного приближения;
- 2) существующими точными решениями задач;
- 3) численным методом конечных элементов;
- 4) вычислительным экспериментом;
- 5) экспериментальными наблюдениями;
- 6) в решениях прикладных задач.

Научная новизна. В диссертации впервые сформулирована методика расчета частотных характеристик на основе цифрового моделирования. На базе модифицированного в работе известного метода одночастотной стационаризации получены новые условия возбуждения параметрических колебаний в периодических нестационарных системах с распределенными параметрами.

Практическая ценность результатов работы заключается в простоте получения решений прикладных задач. Большую практическую значимость представляет полученная в работе возможность использования в расчетах экспериментальных частотных характеристик. Наконец, самостоятельную практическую ценность составляют полученные решения прикладных задач: расчет колебаний балки Тимошенко, расчет систем управления роботом-манипулятором и электромашинного преобразователя.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы опубликованы в пяти печатных трудах и обсуждались на семинарах «Моделирование и управление» в СПбГПУ, на международных конференциях «АРМ-2002» (20-24 июня 2002, С-Петербург) и Physics and Control '2003 (22-24 августа 2003, С-Петербург).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы из 105 наименований. Полный объем диссертации – 150 страниц, включая 71 рисунок и 7 таблиц.

Содержание работы

В первой главе дан обзор методов исследования периодически нестационарных систем и систем с распределенными параметрами. Показаны некоторые примеры систем с распределенными параметрами и рассмотрены основные методы моделирования систем с распределенными параметрами: метод Релея-Ритца и методы взвешенной невязки, в частности, метод Галеркина, метод наименьших квадратов и метод конечных элементов (МКЭ). Приведены примеры периодически нестационарных систем, а также рассмотрено несколько известных методов исследования систем с периодически изменяющимися параметрами, таких как спектральный метод и метод приведения. Поставлены задачи разработки частотного метода расчета периодически нестационарных систем с распределенными параметрами: модификации метода стационаризации, разработки методики частотного анализа, выбора метода цифрового моделирования.

Во второй главе разработаны методики расчета частотных моделей систем с распределенными параметрами. Осуществлен и обоснован выбор метода цифрового моделирования. Частотные модели систем с распределенными параметрами получены с помощью прямого и обратного Z -преобразований.

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных N -го порядка для непрерывных динамических систем

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x, t) = 0, \quad (1)$$

где R_{ij} – константы, не зависящие от x и t , и функция $v(x, t)$, зависящая от пространственной координаты x и временной t , которое допускает разделение на некоторые уравнения первого порядка

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_i(x, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_i(x, t) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где $Q_{ij}^k, \tilde{Q}_{ij}^k$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$, являются константами, полученными из уравнения (1). Преобразование Лапласа уравнений (2) по временной и пространственной координатам дает

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k q p^j w_i(x, p) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k p^j w_i(x, p) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где p и q – операторы Лапласа по времени и координате, соответственно. Переходя к цифровой модели, заменим аргумент q на одну из z -форм [1]

$$\begin{aligned} q &= \frac{z-1}{h} \text{ (метод прямой разности – МПР),} \\ q &= \frac{1}{h} \frac{z-1}{z} \text{ (метод обратной разности – МОР),} \\ q &= \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} \text{ (билинейное преобразование – БЛП),} \end{aligned} \quad (4)$$

где h – шаг дискретизации по пространственной координате. Уравнения (3) выражаются как Z -преобразованные формы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k q(z) p^j W_i(z, p) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k p^j W_i(z, p) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где $q(z)$ – одна из Z -форм (4). Обратное z -преобразование уравнений (5) приводит к дискретным уравнениям

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k p^j W_i(n+1, p) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k p^j W_i(n, p) = 0 \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

При преобразовании пространственной координаты необходимо учитывать граничные условия. С их учетом (6) переписывается как

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m Q_{ij}^k p^j z(W_i(z, p) - w_i(0)) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \tilde{Q}_{ij}^k p^j W_i(z, p) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Сгруппировав $W_i(z, p)$ и применив обратное Z -преобразование к уравнениям (8), окончательно получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \Gamma_{ij}^k p^j W_i(n, s) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \tilde{\Gamma}_{ij}^k p^j w_i(0) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Здесь Γ_{ij}^k и $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ являются константами, связанными с Q_{ij}^k и \tilde{Q}_{ij}^k . Уравнения (8) описывают при $p=j\omega$ амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) динамической системы. В уравнениях (8) учитываются граничные условия в конечных точках. АФЧХ была получена при условии разделения дифференциального уравнения N -го порядка на n дифференциальных уравнений первого порядка. Если это условие не выполнено, окончательные уравнения должны иметь граничные условия в других точках.

Приведены иллюстрации построения АЧХ систем с распределенными параметрами с помощью преобразования Лапласа и Z -преобразования на примере однородных круглых валов с постоянным сечением и длинной линии электрической передачи, имеющей комплексные погонные последовательные и параллельные сопротивления. Проведено сравнение выбранного метода моделирования с другими (Рис. 1). Предложенный метод имеет лучшую сходимость, чем МКЭ, в котором число

элементов не может быть увеличено без дополнительных ресурсов вычислительного времени и памяти. Показано, что из методов цифрового моделирования наибольшей точностью обладает метод БЛП.

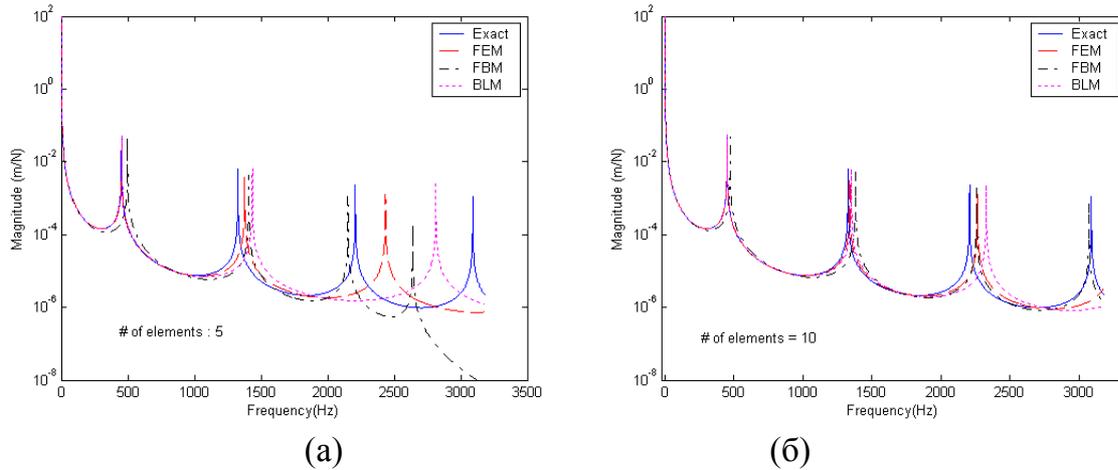


Рис. 1. Характерный вид АЧХ характеристик вала со свободными концами при использовании разных методов моделирования. Слева 5 конечных элементов, справа – 10 конечных элементов

Возможности метода демонстрируются решением задачи о колебаниях балки Тимошенко, уравнения движения вынужденных колебаний которой, с учетом эффектов ротационной инерции и деформации сдвига, даются в стандартных обозначениях как

$$-\frac{\partial}{\partial x} V + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} M - V = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (9b)$$

$$V = kAG\phi - kAG \frac{\partial w}{\partial x} \quad (9c)$$

$$M = EI \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (9d)$$

Применяя преобразование Лапласа по времени и заменяя дифференцирование по координате x Z-формой БЛП (4), уравнения (9) могут быть записаны в дискретной форме. Применяя к ним Z-преобразование, получаем систему из 4х алгебраических уравнений относительно 4х изображений неизвестных. Разрешая ее и применяя обратное Z-преобразование, приходим к окончательным выражениям.

$$M(n,s) = p_1 \cosh vn + (p_1 \cosh v + u_1) \frac{\sinh vn}{\sinh v} + p_2 \cosh vn + (p_2 \cosh v + u_2) \frac{\sinh vn}{\sinh v} \quad (10a)$$

$$\Phi(n,s) = p_3 \cosh vn + (p_3 \cosh v + u_3) \frac{\sinh vn}{\sinh v} + p_4 \cosh vn + (p_4 \cosh v + u_4) \frac{\sinh vn}{\sinh v} \quad (10b)$$

$$V(n,s) = p_5 \cosh vn + (p_5 \cosh v + u_5) \frac{\sinh vn}{\sinh v} + p_6 \cosh wn + (p_6 \cosh w + u_6) \frac{\sinh wn}{\sinh w} \quad (10c)$$

$$W(n,s) = p_7 \cosh vn + (p_7 \cosh v + u_7) \frac{\sinh vn}{\sinh v} + p_8 \cosh wn + (p_8 \cosh w + u_8) \frac{\sinh wn}{\sinh w}. \quad (10d)$$

Подстановкой граничных условий в уравнения (10) получается окончательное матричное уравнение вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m(0) \\ v(0) \\ \phi(0) \\ w(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(n,s) \\ V(n,s) \\ \Phi(n,s) \\ W(n,s) \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Уравнения (11) позволяют при $p=j\omega$ получить частотные характеристики при различных граничных условиях. Уравнения (11) также приводят к решению проблемы собственных значений балки с заданными граничными условиями.

Получены выражения АЧХ для различных краевых условий. Так, для случая поперечной вынуждающей силы F_0 , приложенной к одному концу, и свободного другого, из (11) получим

$$\frac{W(n,s)}{F_0} = \frac{a_{13}a_{44} - a_{14}a_{43}}{a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}}. \quad (12)$$

Результаты вычислений АЧХ по формуле (12) даны на рис. 2 для трех типов балки – Эйлера, Релея и Тимошенко (длина 1.6м, ширина 5 см, толщина 2 см, модуль Юнга $200 \cdot 10^9 \text{Н/м}^2$, коэффициент Пуассона 0.3, коэффициент сдвига 5/6, плотность 8000кг/м^3). Результаты показывают, что, как и ожидалось, балки Эйлера и Релея имеют более высокие собственные частоты, чем балка Тимошенко. Существенно различие собственных частот в случае толстой балки (толщина 10см).

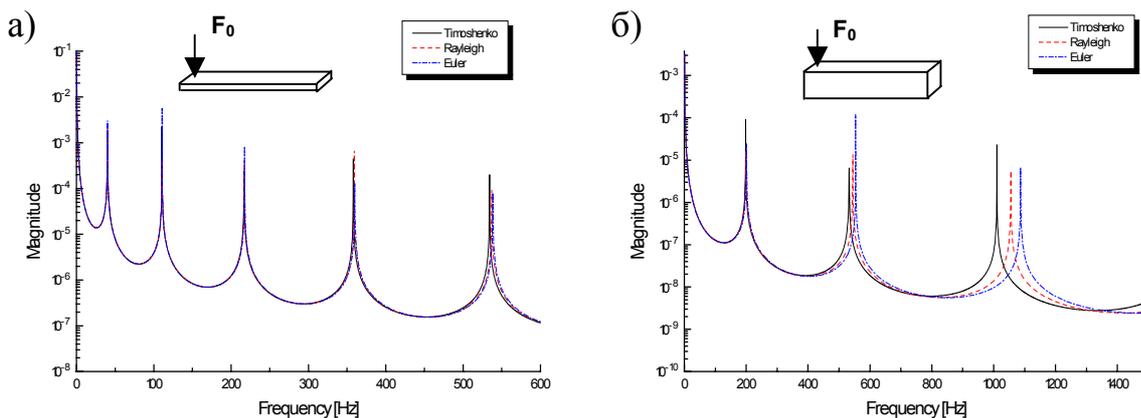


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики балок со свободными концами: (а) тонкая (б) толстая балка

Собственные частоты, полученные методами БЛП и МКЭ, сведены в Таблице 1. Видно, что вычисленные обоими методами собственные частоты близки.

Таблица 1. Сравнение частот собственных колебаний

Моды	МКЭ (Гц)		БЛП (Гц)	
	Релея	Эйлера	Релея	Тимошенко
1	40.15	40.15	40.15	40.15
2	110.51	110.70	110.70	110.50
3	218.50	217.50	217.20	216.75
4	359.83	359.85	359.25	358.05
5	524.77	538.50	537.15	534.30
6	764.42	753.60	750.90	745.35

В главе разобраны задачи и представлены результаты расчетов балок с другими краевыми условиями по этой же методике.

В третьей главе проведена модификация известного метода стационаризации периодически нестационарных систем, позволяющая упростить поиск условий возбуждения параметрических колебаний в частотной области.

Как показано в главе 2, стационарная часть систем с распределенными параметрами имеет многорезонансный характер. В силу этого задача определения условий возбуждения параметрического резонанса в подобных системах может иметь множество решений. Иллюстрация этого положения содержится в плоскости годографа Найквиста на рис. 3-а и в обратной плоскости на рис. 3-б.

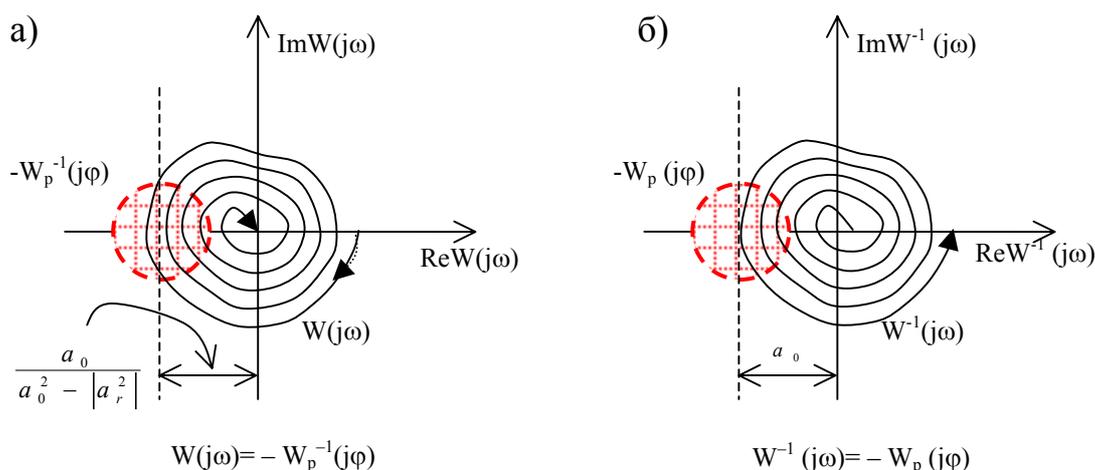


Рис. 3. Условия параметрического возбуждения систем с распределенными параметрами в прямой плоскости (а) и обратной плоскости (б) годографа Найквиста

Как следует из рисунков, отыскание решений – точек пересечения годографов в комплексной плоскости – представляет определенные трудности. С целью облегчения задачи проводится модификация метода стационаризации для случая периодического нестационарного элемента $a(t)$ со средним значением a_0 и периодической частью со средним значением $a_1(t)$ (Рис. 4-а). Вместо нее предлагается использовать эквивалентную схему (Рис. 4-б), отнеся среднее значение параметра a_0 к стационарной части.

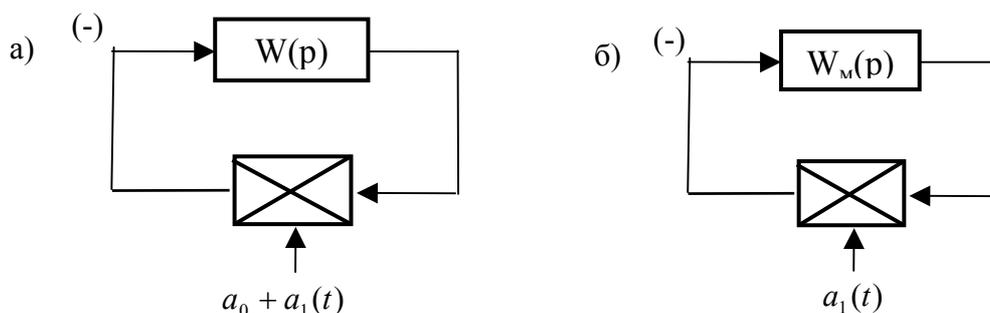


Рис. 4. Эквивалентные представления периодически нестационарной системы

При этом эквивалентная стационарная часть системы принимает вид

$$W_M(p) = \frac{W(p)}{1 + a_0 W(p)}. \quad (13)$$

Теперь описание периодически нестационарного элемента составит центральная окружность с радиусом a_r . С вычислительной точки зрения для систем с распределенными параметрами множество собственных частот удобнее отыскивать из простого условия

$$\left| W_M^{-1} \left(j \frac{r\Omega}{2} \right) \right| = |a_r| \quad \text{или} \quad \left| W_M \left(j \frac{r\Omega}{2} \right) \right| = |a_r^{-1}|. \quad (14)$$

Геометрически условие (14) иллюстрируется на рис. 5-а в комплексной плоскости годографа, а на 5-б проведена иллюстрация решения задачи в вещественной плоскости амплитудно-частотной характеристики. Штрихованными являются неустойчивые области.

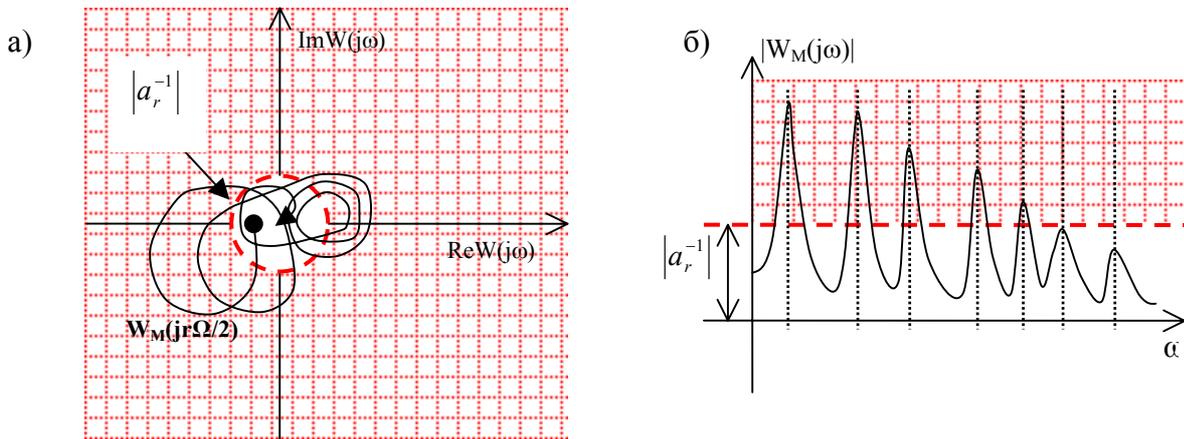


Рис. 5. Иллюстрации условия возбуждения параметрического резонанса в комплексной плоскости

Приведен пример расчета и обсуждены особенности численного моделирования систем с распределенными параметрами с использованием модифицированного метода стационаризации.

В четвертой главе исследуются параметрические резонансы в двух системах с распределенными параметрами.

Система управления координатой манипулятора. Система состоит из упругого вала с сосредоточенной массой на конце, двигателя и МДМ усилителя (Рис. 6). Обратная связь строится по измерению координаты массы оптическим датчиком.

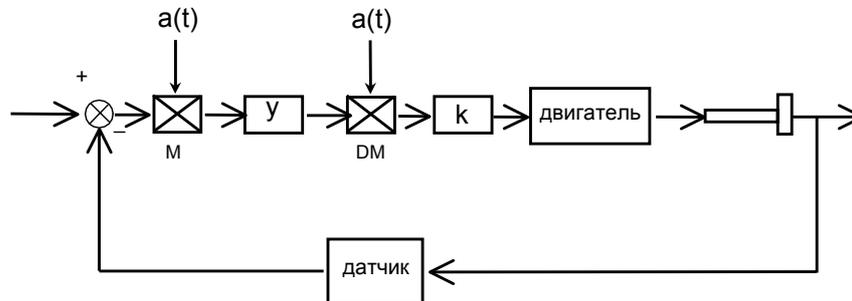


Рис. 6. Блок-схема робота-манипулятора

Упругий вал системы представляет собой звено с распределенными параметрами, а МДМ-усилитель является периодически нестационарным элементом с частотой изменения параметра $\Omega = 2\omega_M$, который преобразовывает входной сигнал $u_c(t)$ в напряжение двигателя $u(t)$ в виде

$$u(t) = a(t) \cdot u_c(t) = (\sqrt{2} \sin \omega_M t)^2 u_c(t) = (1 - \cos 2\omega_M t) u_c(t).$$

Частотная передаточная функция разомкнутой стационарной части системы имеет вид

$$W(j\omega) = K \frac{(K_p + K_d j\omega)(j\omega)}{(T_L T_M (j\omega)^2 + T_M (j\omega) + 1)} W_d(j\omega), \quad (15)$$

где $W_d(j\omega)$ – частотная передаточная функция упругого вала, K_p и K_d обозначают пропорциональную и производную составляющие звена коррекции ПДР (пропорционально-дифференциального регулятора).

Частотные характеристики системы с распределенными параметрами рассчитаны в соответствии с (15) и следующими данными для вала : $I_o = 0.09$ кг·м², $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, радиус вала $r = 0.01$ м., длина $l = 0.36$ м., коэффициент демпфирования $b = 0.0005$ Н·с/м, Модуль сдвига $G = 40 \cdot 10^9$ Н/м².

Для стабилизации стационарной следящей системы с жестким валом используется звено коррекции $W_c(p) = 0.01p + 1$. Частотная передаточная функция мотора с числовыми данными имеет вид

$$W_{motor} = \frac{70p}{8 \cdot 10^{-5} p^2 + 0.081p + 1}. \quad (16)$$

При использовании модели жесткого вала реакция сосредоточенной системы затухает во времени. Однако анализ годографа Найквиста стационарной части системы с распределенными параметрами показывает, что частотная характеристика заданной следящей системы попадает внутрь окружности $-W_{1п}(j\varphi)$ первого параметрического резонанса, т.е. в системе возникает параметрический резонанс на частоте ω , равной половине частоты изменения параметра Ω .

Частотная модель вала получена по методике, описанной в главе 2, а для численной проверки полученного результата передаточная функция упругого вала получена с помощью метода конечных элементов. Численное моделирование выполнено с помощью программы «SIMULINK». Эксперимент показывает наличие первого параметрического резонанса (см. рис. 7-б), который не проявлялся при отсутствии изменяющегося во времени параметра (см. рис. 7-а).

Таким образом, показано, что ПДР, обычно используемый для коррекции сосредоточенной системы, может приводить к потере устойчивости системы из-за возбуждения параметрического резонанса при периодическом изменении параметра – МДМ усилителя. Кроме того, пренебрежение распределенностью параметров для простоты расчетов может пропустить потерю устойчивости равновесия системы.

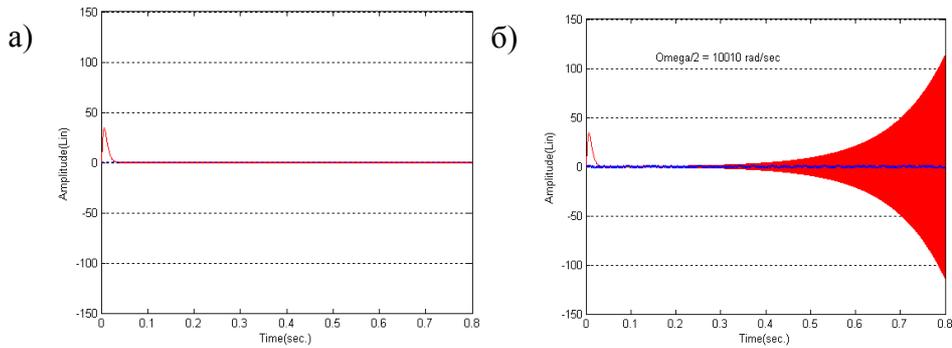


Рис. 7. Сравнение переходных процессов без учета (а) и с учетом распределенных параметров системы (а)

Электромеханический преобразователь. Рассматривается работа системы «двигатель-генератор» на сеть с различными типами нагрузки (рис. 8). Генератором служит синхронная электрическая машина. Роль двигателя играет электрическая машина постоянного тока, параметры которой выбирались из каталога.

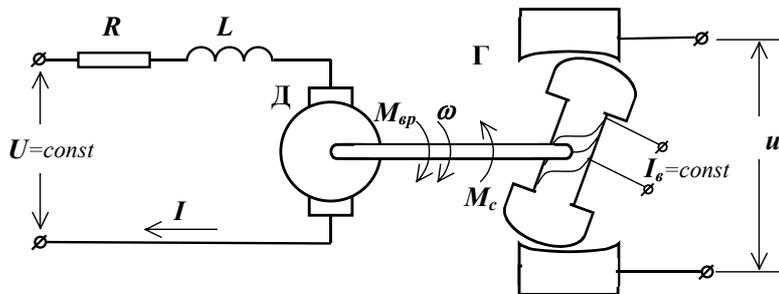


Рис. 8. Система "двигатель-генератор" (ДГ). Обозначения: U и I – напряжение и ток в цепи двигателя постоянного тока; R и L – активное сопротивление и индуктивность двигателя постоянного тока; $M_{сп}$ и M_c – вращающий момент двигателя и момент сопротивления генератора на валу; ω – угловая скорость вращения двигателя, вала и генератора; $I_в$ – ток возбуждения якоря генератора; u – напряжение в цепи нагрузки

Для однофазной синхронной электрической машины (генератора), система уравнений, связывающая введенные переменные, имеет вид

$$J\ddot{\alpha} = C_M I - M_c \quad (17)$$

$$U = RI + L\dot{I} + C_e \dot{\alpha} \quad (18)$$

$$M_c = \frac{\partial M}{\partial \alpha} i I_B \quad (19)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} I_B = Z_n i, \quad (20)$$

где приняты следующие обозначения параметров: J – момент инерции вала и роторов

системы «двигатель-генератор»; α – угол поворота вала; C_M – электромеханическая постоянная двигателя; C_e – электрическая постоянная двигателя; M – взаимная индуктивность обмоток статора и якоря генератора; Z_n – комплексное сопротивление нагрузки (импеданс); i – ток статора генератора.

Изменение взаимного расположения обмоток статора и якоря, вызванное вращением последнего, отражается в том, что M необходимо считать периодической функцией времени. В настоящей работе принят гладкий вариант этой зависимости

$$M(t) = C_U \sin \alpha = C_U \sin \omega_0 t,$$

где C_U – максимальное значение взаимной индукции (при полной соосности обмоток).

Из уравнений (17) – (20), полное уравнение системы записывается в виде

$$T_a T_M \ddot{\alpha} + T_M \ddot{\alpha} + \dot{\alpha} + k_1 W_n(p) \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right)^2 \dot{\alpha} + T_a k_1 W_n(p) \left[2 \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} \right) \dot{\alpha}^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right)^2 \ddot{\alpha} \right] = \frac{U}{C_e},$$

где $T_a = L/R$, $T_M = RJ/C_e C_M$ обозначают электрическую и механическую постоянные времени соответственно, $k_1 = (T_M I_B^2)/J$ и $W_n(p) = 1/Z_n$ – передаточная функция от напряжения к току цепи нагрузки.

Линеаризованное уравнение системы имеет вид

$$\begin{aligned} T_a T_M p^3 \Delta \alpha + T_M p^2 \Delta \alpha + p \Delta \alpha + \left\{ 2 k_1 W_n(p) \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} \right) \omega_0 \right\} \Delta \alpha + \left\{ k_1 W_n(p) \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right)^2 p \right\} \Delta \alpha + \\ + T_a k_1 W_n(p) \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} \right)^2 \omega_0^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial^3 M}{\partial \alpha^3} \right) \omega_0^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} \right) (2\omega_0) p \right\} + \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} \right)^2 p^2 \right] \Delta \alpha = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку $M = C_U \sin \alpha$ и, соответственно,

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = C_U \cos \alpha, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} = -C_U \sin \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 M}{\partial \alpha^3} = -C_U \cos \alpha,$$

стационаризация (21) приводит к уравнению

$$T_a T_M p^3 + \left(T_M + \frac{1}{2} q T_a \right) p^2 + \left(1 + \frac{1}{2} q \right) p + \left\{ \left(\frac{1}{2} q T_a \right) p^2 + \left(\frac{1}{2} q + j \omega_0 (2 T_a) q \right) p + j \omega_0 q \right\} \left(-\frac{1}{2} e^{-j\varphi} \right) = 0,$$

где $q = k_1 W_n(p) C_U^2$. Откуда условие возбуждения первого параметрического резонанса

$$1 + W(p)W(j\varphi) = 0, \quad (22)$$

где

$$W(p) \Big|_{p=j\frac{\Omega}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2} q T_a \right) p^2 + \left(\frac{1}{2} q + j \omega_0 (2 T_a) q \right) p + j \omega_0 q}{T_a T_M p^3 + \left(T_M + \frac{1}{2} q T_a \right) p^2 + \left(1 + \frac{1}{2} q \right) p} \Big|_{p=j\frac{\Omega}{2}} = \frac{\frac{5}{2} q T_a \left(j \frac{\Omega}{2} \right) + \frac{3}{2} q}{T_a T_M \left(j \frac{\Omega}{2} \right)^2 + \left(T_M + \frac{1}{2} q T_a \right) \left(j \frac{\Omega}{2} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} q \right)},$$

$W(j\varphi) = \left(-\frac{1}{2}e^{-j\varphi}\right)$, где $\Omega=2\omega_0$ – частота изменения параметра.

Таким образом, в соответствии с критерием Найквиста, равномерное со скоростью ω_0 вращение вала системы двигатель-генератор при работе на цепь нагрузки с передаточной функцией $W_n(p)$ при законе изменения взаимной индукции $M(t) = C_U \sin\omega_0 t$ неустойчиво, если годограф разомкнутой передаточной функции $W(p)W_1(j\varphi)$ охватывает точку $(-1;j0)$. Из условия $W(j\Omega/2)W_1(j\varphi) = -1$ или $W_1(j\varphi) = -W_1^{-1}(j\Omega/2)$ находятся критические частоты (и амплитуды) изменения параметра, приводящие к возбуждению первого параметрического резонанса. В работе показано, как из уравнения (22) при простой активной нагрузке можно теоретически вычислить частоту возбуждения параметрического резонанса.

Приведены результаты расчетов условий возбуждения параметрического резонанса для активной и реактивной нагрузок. Показано, что при значениях нагрузок, имеющих технический смысл, электрический преобразователь не может иметь параметрического резонанса при вращении вала с частотой 300 рад/с.

Отдельно рассмотрен случай работы ЭМП на длинную линию. С помощью цифрового моделирования по методике, изложенной в главе 2, передаточная функция нагрузки $W_n(p)$ представляется в следующей конечномерной аппроксимации

$$W_n(p) = \frac{1}{\frac{\sinh \nu}{\gamma_e} \sinh \nu N + \cosh \nu N \cdot R_e(p)}, \quad (23)$$

где N обозначает количество ячеек конечномерной модели, ν и γ – некоторые параметры, зависящие от оператора p , физических свойств линии и выбранного порядка аппроксимации. При чисто активном сопротивлении r_n на конце длинной линии: $R_e(p) = r_n$; при чистой индуктивности l_n : $R_e(p) = l_n p$; при реактивной нагрузке в виде колебательного контура:

$$R_e(p) = \frac{l_n c_n r_n p^2 + l_n p + r_n}{l_n c_n p^2 + 1}. \quad (24)$$

Рассмотрена работа ЭМП на длинную (250м) линию с параметрами: $r_L=1e-6$ Ом/м, $l_L=1e-5$ Гн/м, $c_L=1e-8$ Ф/м. На конце линии имеется сосредоточенная индуктивная нагрузка $l_n=0.032$ Гн. При этом $W_n(p)$ рассчитывается по (23). На рис. 9-а приведены годографы $W(j\omega)$, а на рис. 9-б – амплитудно-частотные характеристики передаточных функций $-W_1^{-1}(j\varphi)$ и $W(j\Omega/2)$ в ограниченном несколькими первыми резонансами частотном диапазоне.

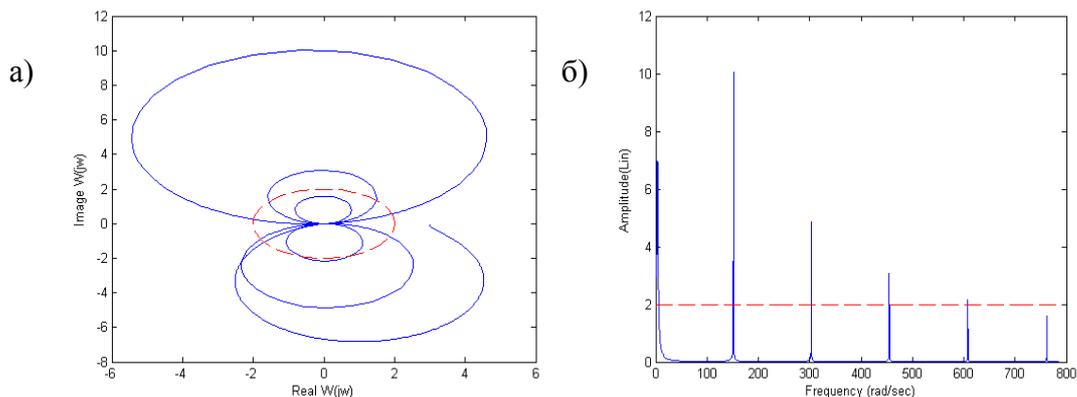


Рис. 9. Расчет условий возбуждения ЭМП;

сплошной – приведенная частотная характеристика системы с распределенной нагрузкой $W(j\Omega/2)$, пунктирной – частотная характеристика стационаризованного элемента. $-W^{-1}_1(j\varphi)$: (а) годограф Найквиста (б) АЧХ

Расчет показывает, что третий резонансный пик стационарной части системы находится в непосредственной близости от номинальной частоты вращения 300 рад/с.

Также проведено численное исследование зависимостей частот возбуждения параметрического резонанса от длины электрической линии (Рис. 10).

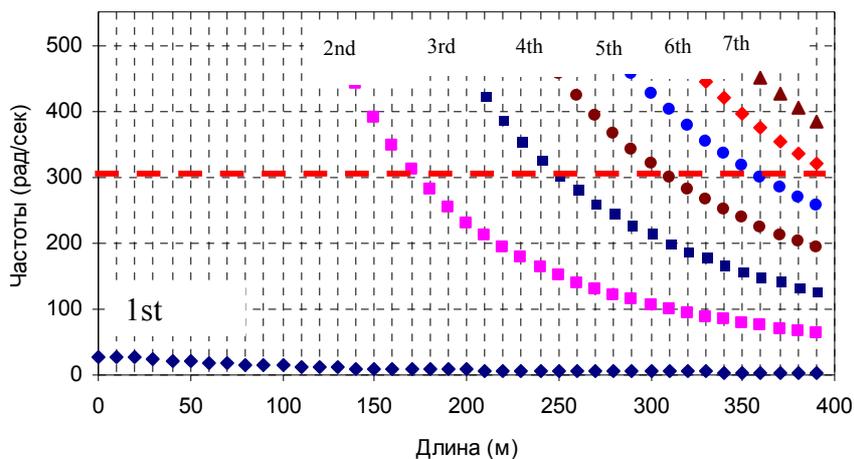


Рис. 10. Частоты возбуждения параметрического резонанса в зависимости от длины линии: пунктирной – частота вращения вала 300 рад/сек

Откуда видно, что параметрические колебания возникают при следующих длинах : 170м (вторая мода), 250м (третья мода), 310м (четвертая мода), 360м (пятая мода) и т.п.

Для численного построения переходных характеристик выбран простейший путь разбиения АЧХ на отдельные моды.

Стационарную часть $W(j\Omega/2)$ из уравнения (22) можно переписать как

$$W(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}W_3(p),$$

где передаточные функции $W_1(p)$ и $W_3(p)$ определяются как

$$W_1(p) = \frac{0.5k_1C_U^2(T_a p + 1)}{T_a T_M p^2 + T_M p + 1} \text{ и } W_3(p) = \frac{0.5k_1C_U^2(5T_a p + 3)}{T_a T_M p^2 + T_M p + 1},$$

а передаточная функция $W_2(p)$ есть передаточная функция нагрузки, в данном случае $W_2(p) = W_n(p)$.

Численный эксперимент с помощью среды SIMULINK показал наличие первого параметрического резонанса на частоте изменения параметра, равной удвоенной частоте вращения ротора (рис. 11).

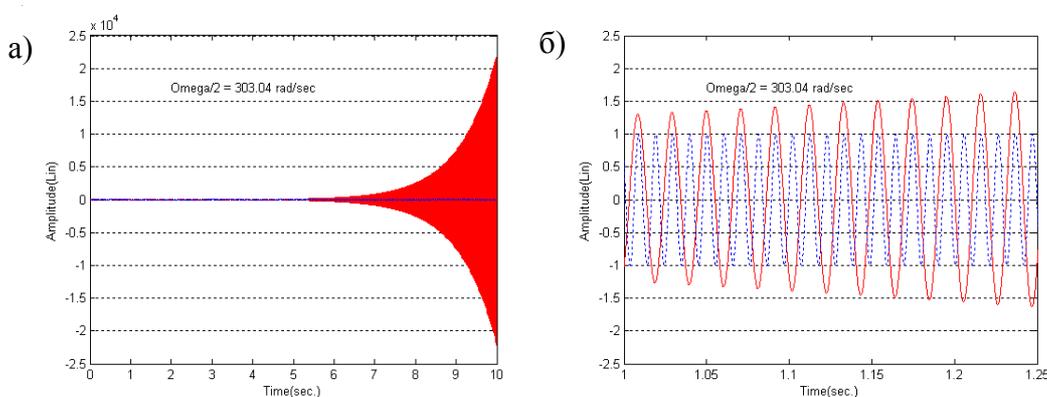


Рис. 11. Осциллограмма нарастания качаний вала ЭМП при численном эксперименте.

(а) – общий вид первого параметрического резонанса на 303,04 рад/сек, (б) – фрагмент (пунктирной – колебания параметра, сплошной – колебания в системе)

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

- 1) Предложена методика частотного анализа систем с распределенными параметрами. Суть методики заключается в использовании билинейного преобразования при переходе к описанию системы дифференциально-разностными уравнениями, с последующим использованием аппарата прямого и обратного Z -преобразования.
- 2) Получено новое решение задачи колебаний балки Тимошенко.
- 3) Проведена модификация известного метода стационаризации периодически нестационарных систем, позволяющая упростить поиск условий возбуждения параметрических колебаний в частотной области. Сущность модификации

- состоит в переходе к эквивалентной передаточной функции стационарной части с последующим использованием равенства модулей в частотной области.
- 4) Предлагаемый метод построения частотных моделей периодически нестационарных систем с распределенными параметрами состоит в использовании метода частотного анализа систем с распределенными параметрами главы 2 и модифицированного метода стационаризации главы 3.
 - 5) Проведен расчет условий возбуждения параметрического резонанса в системе управления одной координатой робота-манипулятора.
 - 6) Показана недопустимость замены в расчетах упругого вала на жесткий, так как при этом пропускается потеря устойчивости равновесия.
 - 7) Проведен расчет системы электромеханического преобразователя, содержащего двигатель постоянного тока и синхронный генератор, работающий на разнообразные нагрузки, включая длинную линию электроснабжения.
 - 8) Получены условия потери устойчивости вращения преобразователя за счет возбуждения параметрического резонанса. Полученные условия подтверждаются результатами численного моделирования.
 - 9) Полученные в работе теоретические результаты подтверждаются расчетами практических задач и численным моделированием.

Публикации по теме диссертации

1. Lee Y. K. A new modeling technique for distributed parameter systems - digital modeling. Kumoh National University of Technology, Master's dissertation, 1995.
2. Lee Y. K. A study on dynamic analysis of the continuous system by digital modeling / Y. K. Lee, I. S. Kim, S. W. Hong, S. L. Tchetchourine // Journal of KSNVE(Korea Society of Noise and Vibration Engineering), 1997. Vol7. № 1. P. 135-142.
3. Lee Y. K. Distributed parameter systems. Глава 4 в книге "Frequency Analysis for dynamic systems" / S. L. Tchetchourine, S. W. Hong St. Petersburg-Kumi, 1997. 248. с. (С. 181-240)
4. Ли Е. К. Частотный анализ систем с распределенными параметрами с использованием цифрового моделирования // Инновации в науке, образовании и производстве Труды. СПбГПУ. № 484. С. 184-190.
5. Ли Е. К. Параметрический резонанс в системах электромеханического преобразования / Е. К. Ли, Л. С. Чечурин // Exponenta Pro, 2003. №.3. С. 46-51.