Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Москалец Артем Анатольевич

Прогнозирование вибрационного напряженно-деформированного состояния турбинных лопаток с применением моделей различной размерности

Направление подготовки: 15.06.01 «Машиностроение»

Код и наименование

Направленность: 05.02.02 «Машиноведение, системы приводов и детали машин»

Код и наименование

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

об основных результатах научно-квалификационной работы (диссертации)

Санкт Петербург – 2019

Научно-квалификационная работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» на кафедре «Машиноведение и основы конструирования»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент,
Беляев Александр Константинович

Официальный рецензент: кандидат технических наук, доцент,
Зиновьева Татьяна Владимировна,
старший научный сотрудник,
лаборатория мехатроники,
ФГБУН «ИПМаш РАН»

С научным докладом можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

Лопатка – важный и ответственный элемент турбины. Следует сразу оговорить, что в данной работе речь будет идти о рабочих лопатках, чья основная функция – преобразование энергии потока жидкости или газа в энергию вращения ротора. Слово «рабочий» будет далее опускаться.

Во время работы лопатка подвергается действию статических и динамических нагрузок. К первым относятся центробежные силы, ко вторым – силы воздействия, к примеру, струи пара со стороны сопла (причём, сопел может быть несколько). Очевидно, что такие динамические воздействия имеют периодический характер. Если частоты изменения нагрузок близки к собственным частотам лопатки, это приводит к увеличению амплитуд колебаний, динамических напряжений; становится возможным резонанс. Эти факторы, очевидно, приближают усталостное разрушение лопатки.

Поэтому всегда остаётся актуальным вопрос нахождения собственных частот и форм лопатки. Зная режимы, в которых будет работать лопатка проектируемой турбины, и вычислив собственные частоты лопатки, можно сделать вывод, возможны ли резонансы, и если да, то насколько опасны, и при необходимости внести изменения, например, в геометрию лопатки, «отстроив» её от определённых частот.

Цель работы. Разработка методики расчета колебаний и напряжённо-деформированного состояния рабочих лопаток турбин, основанной на использовании моделей различной размерности, служащей альтернативой иным методикам, в частности, основанным на методе конечных элементов; позволяющей верифицировать эти методики за отсутствием возможности сравнения с натурными испытаниями; дающей возможность сделать практические выводы на этапе проектирования лопатки.

Задачи исследования

1. Исследование турбинной лопатки с использованием одномерной математической модели

1.1. Построение одномерной модели с учетом сил инерции, сдвига и перекрестных связей.

1.2. Модальный анализ.

1.3. Расчёт вынужденных колебаний лопатки.

1.4. Анализ напряженно-деформированного состояния при вынужденных колебаниях.

1.5. Построение вибрационных диаграмм.

2. Исследование турбинной лопатки с использованием двумерной математической модели

2.1. Построение двумерной модели турбинной лопатки.

2.2. Модальный анализ.

2.3. Расчёт вынужденных колебаний лопатки.

2.4. Анализ напряженно-деформированного состояния при вынужденных колебаниях.

Научная новизна

1. Предлагается подход к моделированию колебаний лопаток, в основе которого лежит механика тонкостенных конструкций, как наиболее эффективный инструмент для исследования вибрационного напряжённо-деформированного состояния турбинных лопаток определённой конфигурации.
2. Предлагается подход к моделированию каплеударной эрозии, в основе которого лежит механика контактного взаимодействия.
3. Предложенный многомодельный подход к исследованию динамики турбинных лопаток опирается на прогресс в механике деформируемого тела и компьютерной математике.

Практическая ценность состоит в разработке методики расчета колебаний турбинных лопаток с использованием одномерных и двумерных моделей, разработке методики оценки напряженно-деформированного состояния лопатки, подверженной каплеударной эрозии, а также разработке численных алгоритмов для проведения соответствующих расчётов в системах компьютерной математики.

Апробация работы

Результаты работы доложены на конференциях:

- XLII, XLIII, XLIV Неделя науки СПбГПУ (Россия, г. Санкт-Петербург);
- 3-я, 4-я, 5-я, 6-я и 7-я Международная научно-практическая конференция «Современное машиностроение: наука и образование» (Россия, г. Санкт-Петербург)
- XII Международная научная конференция «Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование» (Украина, г. Харьков)
- 17th international symposium «Topical problems in the field of electrical and power engineering» (Эстония, г. Курессааре)
- International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» (Россия, г. Санкт-Петербург)

Публикации

По теме работы имеется 18 публикаций, из которых 3 – в журналах из перечня ВАК РФ и 6 – в изданиях, индексируемых Scopus.

Представление научного доклада: основные положения

1. Постановка и решение задачи динамики турбинных лопаток как стержней, методом решения системы дифференциальный уравнений механики стержня.
2. Постановка и решение задачи динамики турбинных лопаток как оболочек, с использованием уравнений Лагранжа.
3. Методика построения вибрационных диаграмм.
4. Математическая модель и расчет взаимодействия капли и поверхности лопатки.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Объектом исследования данной работы является лопатка газотурбинной установки.

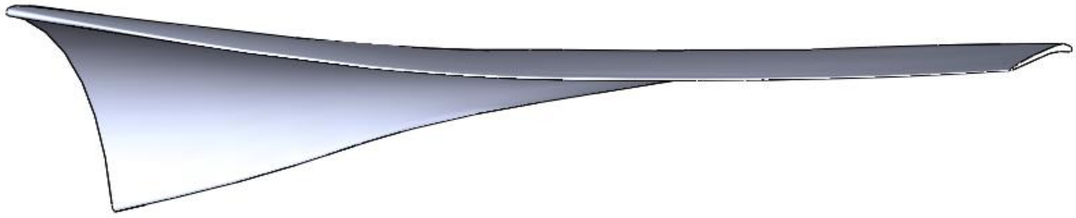


Рисунок 1. Трёхмерная модель исследуемой лопатки

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) турбинных лопаток продолжает привлекать внимание инженеров-механиков, но акценты в этой области смещаются. Сначала преобладали расчеты лопаток как балок, затем их стал вытеснять конечноэлементный анализ трехмерных моделей. Однако возможности одномерных моделей не исчерпаны. С ними можно решать задачи, недоступные в трехмерной постановке.

В данной работе турбинная лопатка рассматривается как прямолинейный закрученный стержень. Используется полная одномерная модель, учитывающая деформации изгиба, кручения и растяжения как взаимосвязанные. Связь изгиба и кручения возникает от несовпадения центра жесткости и центра тяжести сечения. Связь растяжения и кручения – от естественной крутки. Анализ такой непростой модели стал возможным благодаря прогрессу механики упругих стержней и компьютерной математики.

Полная одномерная модель стержня

Стержни представляются как материальные линии, для частиц которых задаются векторы перемещения $\mathbf{u}(z,t)$ и малого поворота $\boldsymbol{\theta}(z,t)$ (функции координаты и времени). Внутренние взаимодействия выражаются векторами силы $\mathbf{Q}(z,t)$ и момента $\mathbf{M}(z,t)$. Полная система уравнений линейной механики упругих стержней имеет вид [10]:

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}'+\mathbf{q}=\rho\ddot{\mathbf{u}},\, \mathbf{M}'+\mathbf{k}\times\mathbf{Q}+\mathbf{m}=\mathbf{G}\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}},\\ \boldsymbol{\theta}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{Q},\, \mathbf{u}'=\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{k}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}.\end{gathered} \tag{1}$$

Два первых уравнения выражают законы баланса импульса и момента импульса. В них ρ – погонная масса, $\mathbf{G}$ – тензор инерции, $\mathbf{k}$ – орт касательной (оси z). Третье и четвертое уравнения – это соотношения упругости, связывающие векторы деформации $\boldsymbol{\theta}'$ и $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{u}'-\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{k}$ с силовыми факторами. Отметим, что вектор деформации $\boldsymbol{\theta}'$ определяет искривление и кручение стержня, а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ – растяжение (сжатие) и поперечный сдвиг. В соотношения упругости входят три тензора податливости: $\mathbf{A}$ – на изгиб и кручение, $\mathbf{B}$ – на растяжение и сдвиг, $\mathbf{C}$ – тензор перекрестных связей.

Нагрузками в (1) служат сила $\mathbf{q}$ и момент $\mathbf{m}$ на единицу длины. Они считаются малыми в рассматриваемой линейной теории – как и $\mathbf{u},\boldsymbol{\theta},\mathbf{Q},\mathbf{M}$.

Тогда $\mathbf{G}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ соответствуют начальному (недеформированному) состоянию и не зависят от времени.

Тензоры податливости $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ находятся средствами теории упругости – из решения задачи Сен-Венана или же (что сложнее) из асимптотического анализа трехмерной задачи при малой толщине. Их расчет – отдельная тема за рамками данной работы.

Модель с уравнениями (1) называется полной, поскольку описывает изгиб, кручение и растяжение стержня как взаимосвязанные деформации. Определяемые тензором $\mathbf{C}$ перекрестные связи возникают от смещения центра жесткости и от крутки. Следствием этих связей являются одновременные изгиб, кручение и растяжение лопатки практически при любой нагрузке.

Цель данной работы – представление полной одномерной модели лопатки и методики ее расчета с применением компьютерной математики, а также оценка влияния связей на НДС.

Соотношения упругости

Главные направления тензора инерции поворачиваются относительно начальных (при $z=0$) на угол $\varphi(z)$. Вводится крутка $\Omega=\varphi'(z)$. Для прямолинейного стержня из обобщенной задачи Сен-Венана установлено:

$$\mathbf{A}=\left(E\mathbf{I}\right)^{-1}+A_z\mathbf{kk},\ \mathbf{B}=\left(\mu F\mathbf{K}\right)^{-1}+B_z\mathbf{kk},\ \mathbf{C}=A_z\mathbf{k}\boldsymbol{\eta}+C_z\mathbf{kk} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{J}=\int \mathbf{xx}dF, J=tr\underline{\underline{J}}, \mathbf{I}=-\mathbf{k}\times\mathbf{J}\times\mathbf{k}$ – геометрические моменты инерции ($\mathbf{x}$ – радиус-вектор в сечении); видим известные выражения податливости на изгиб $(E\mathbf{I})^{-1}$ и на растяжение (сжатие) $B_z=\left(EF\right)^{-1}$.

В (2) входят также геометрическая жесткость на кручение C_Φ, вектор координат центра изгиба $\boldsymbol{\eta}$ и коэффициент связи растяжения с кручением C_z. Их определение сопряжено с решением задачи кручения [10,12]:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi=-2, \Phi\big|_{\partial F}=0;\ \Delta W=0, \partial_n W=\mathbf{n}\times\mathbf{x}\cdot\mathbf{k};\\
&C_\Phi=2\int\Phi dF,\ A_z=(\mu C_\Phi)^{-1},\ C_z=\Omega\left(\mu F\right)^{-1}\left(1-JC_\Phi^{-1}\right), \qquad (3)\\
&\boldsymbol{\eta}=\mathbf{J}^{-1}\cdot\int\mathbf{x}WdF.
\end{aligned}$$

При этом функцию депланации W можно определить без решения задачи Неймана (3), если воспользоваться условиями Коши-Римана для сопряженных гармонических функций:

$$\nabla W=\nabla\left(\Phi+\frac{x^2}{2}\right)\times\mathbf{k}\Rightarrow W=\int[(\partial_y\Phi+y)dx-(\partial_x\Phi+x)dy] \quad (4)$$

Также в уравнениях (2) содержится $\mathbf{K}$ – тензор коэффициентов сдвига. Его определение связано с решением еще двух краевых задач для векторных полей в сечении. В рамках данной статьи $\mathbf{K}$ принят единичным.

Для определения функции напряжения и депланации используем вариационный метод. Введем две функции $y_t(x), y_l(x)$, графики которых ограничивают сечение «сверху» и «снизу». Приближенное решение будем искать в виде $\Phi = \alpha\big(y - y_t(x)\big)\big(y - y_l(x)\big) = \alpha\Phi_0$. Неизвестный варьируемый коэффициент α находится минимизацией функционала

$$J = \int_F \Big[|\nabla\Phi|^2 - 4\Phi \Big] dF = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_l(x)}^{y_t(x)} \Big(\alpha^2 |\nabla\Phi_0|^2 - 4\alpha\Phi_0 \Big) dy \to \min \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = 2\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_l(x)}^{y_t(x)} \Phi_0 dy \Bigg/ \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_l(x)}^{y_t(x)} |\nabla\Phi_0|^2 dy. \qquad (5)$$

Тогда геометрическая жесткость на кручение $C_\Phi = 2\alpha \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_l(x)}^{y_t(x)} \Phi_0 dy$.

Используя полученную функцию напряжений, определим депланацию W согласно (4): $W(x,y) = A\left(\int_{x_0}^{x} \partial_y \Phi_0 dx - \int_0^y \partial_x \Phi_0 dy \right) - xy$.

Контур сечения реальной лопатки задается массивом координат точек (около 30). Функции $y_t(x), y_l(x)$ определяются в *Mathcad* интерполяцией с регрессией, после чего производится численное интегрирование и дифференцирование согласно (3), (7) и (9).

Система ОДУ и ее решение

В проекциях получаем систему:

$$\begin{aligned}
&Q'_x = -q_x + \rho\ddot{u}_x,\ Q'_y = -q_y + \rho\ddot{u}_y,\ Q'_z = -q_z + \rho\ddot{u}_z, \\
&M'_x = Q_y - m_x + G_x\ddot{\theta}_x + G_{xy}\ddot{\theta}_y,\ M'_y = -Q_x - m_y + G_y\ddot{\theta}_y + G_{xy}\ddot{\theta}_x, \\
&M'_z = -m_z + G_z\ddot{\theta}_z, \\
&\theta'_x = A_x M_x + A_{xy} M_y,\ \theta'_y = A_y M_y + A_{xy} M_x, \\
&\theta'_z = A_z(M_z + \eta_x Q_x + \eta_y Q_y) + C_z Q_z, \\
&u'_x = \theta_y + B_x Q_x + B_{xy} Q_y + A_z \eta_x M_z, \\
&u'_y = -\theta_x + B_y Q_y + B_{xy} Q_x + A_z \eta_y M_z,\ u'_z = B_z Q_z + C_z M_z.
\end{aligned} \qquad (6)$$

При гармонических колебаниях с частотой λ неизвестные меняются по закону $u_x(z,t) = u_x(z)\sin\lambda t, \ddot{u}_x = -\lambda^2 u_x$, и для амплитуд получим систему ОДУ двенадцатого порядка.

Коэффициенты этих уравнений содержат компоненты векторов и тензоров, вращающихся с угловой скоростью Ω при возрастании координаты z. Формулы преобразования компонент:

$$
\begin{aligned}
&\eta_x = \eta_1 \cos\varphi - \eta_2 \sin\varphi,\ \eta_y = \eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi;\\
&I_{xy} = \frac{I_1 - I_2}{2}\sin 2\varphi + I_{12}\cos 2\varphi\\
&I_x = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\varphi - I_{12}\sin 2\varphi,\\
&I_y = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos 2\varphi + I_{12}\sin 2\varphi.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Подставив это в (6), получим сложную систему ОДУ с переменными коэффициентами. Однако ее нетрудно решить средствами компьютерной математики (*Mathcad*). Система (6) представляется в матричном виде $Y' = D(z,Y)$, где столбец Y содержит 12 элементов – компонент силы, момента, поворота и перемещения (вид функции D ясен из (6)). К подчеркнутой системе ОДУ следует добавить краевые условия. Для консольной лопатки с закрепленным концом $z = 0$ и свободным другим концом $z = L$ без нагрузки имеем условия $Y_9 = Y_{10} = Y_{11} = Y_6 = Y_7 = Y_8 = 0$ и $Y_0 = Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0$ соответственно. Поставленная краевая задача решается посредством встроенной функции *sbval-rkfixed*.

По изложенной методике выполнены расчеты конкретной лопатки для одного из заводов СПб. Длина лопатки $L = 781$ мм, сечение и нагрузки показаны на рис. 1:

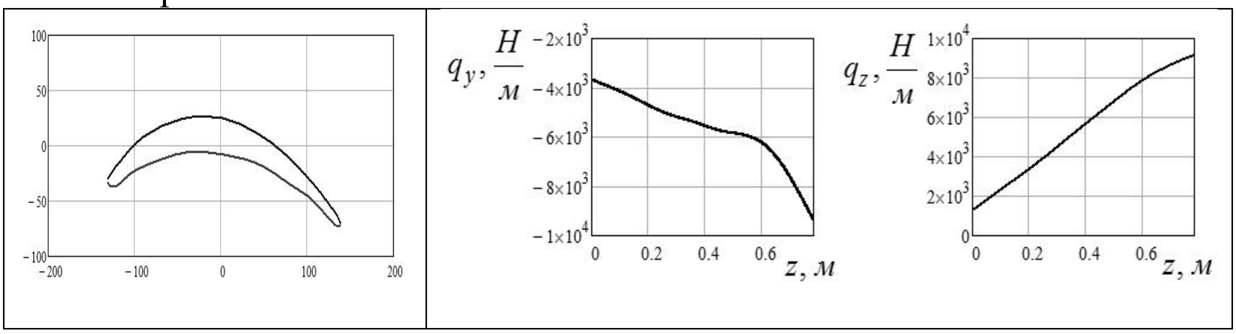


Рисунок 2. Сечение лопатки и распределенная нагрузка в двух плоскостях

Рассчитанные компоненты прогиба u_x, u_y, угол поворота θ_z и осевое перемещение u_z – на рис. 2. Учет последнего может быть важным – и не только от центробежной силы.

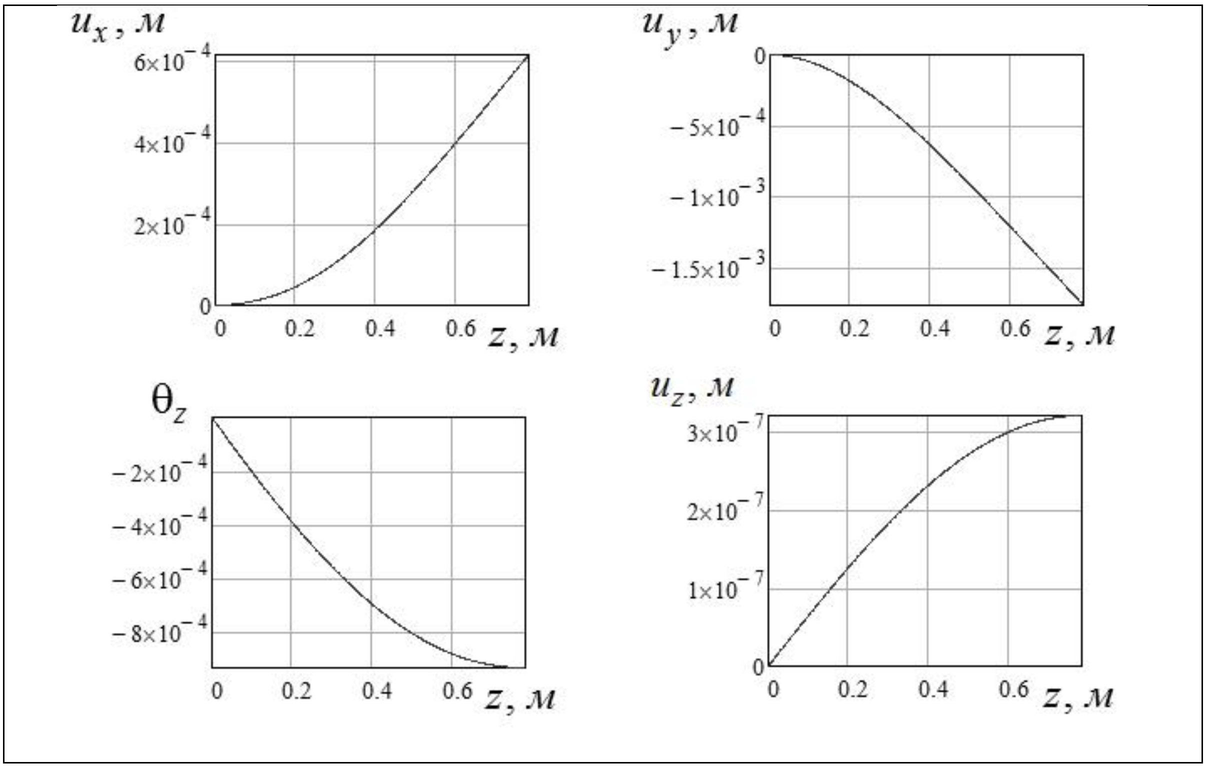


Рисунок 3. Амплитуды вынужденных колебаний

Для количественной оценки роли поправочных факторов проведены расчеты без учета поперечного сдвига и перекрестных связей в соотношениях упругости Перерезывающие силы, изгибающие моменты и прогибы практически не изменились (менее 0.5 %), но исчезли осевое перемещение и поворот.

При модальном анализе частота рассматривается как дополнительное неизвестное: $\lambda^2 = Y_{12}, D_{12} = 0$; при этом имеем систему из тринадцати уравнений.

Вариационный метод расчёта колебаний

Предлагаемая методика опирается на теорию стержней и вариационный метод Лагранжа в сочетании с компьютерной математико. Будучи простой, методика позволяет решать и сложные задачи о нестационарных колебаниях.

$$\int_0^l \left(f_y \delta u_y + f_z \delta u_z \right) dx = Q_y^T \delta U_y + Q_z^T \delta U_z, Q_y = \int_0^l f_y \varphi dx \qquad (8)$$

Энергия лопатки

Введем тройку декартовых осей, направив ось x через центры тяжести сечений вдоль лопатки (считается, что центры тяжести принадлежат одной прямой). Прогиб закрученного стержня всегда имеет две компоненты u_y, u_z – функции координаты x и времени t. Кинетическая энергия является интегралом по длине лопатки

$$T = 1/2 \int_0^l \rho(\dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) dx \qquad (9)$$

где ρ – погонная масса.

Потенциальную энергию определим с обычным для теории балок допущением, что осевое перемещение при изгибе $u_x = -yu'_y - zu'_z$:

$$\Pi = E/2\int_0^l dx\int_F u_x'^2 dF = E/2\int_0^l (J_y u_y''^2 + 2J_{yz}u_y''u_z'' + J_z u_z''^2)dx \qquad (10)$$

(E – модуль Юнга). Введены моменты инерции как интегралы по сечению F

$$J_y = \int y^2 dF,\ J_{yz} = \int yzdF,\ J_z = \int z^2 dF.$$

От модели с распределенными параметрами перейдем к дискретной посредством аппроксимации прогибов

$$u_y(x,t) = \sum_{k=1}^{n} U_{yk}(t)\varphi_k(x) = U_y(t)^T\varphi(x), u_z(x,t) = U_z(t)^T\varphi(x) \qquad (11)$$

(в матричных обозначениях). Функции $U_{y,z}(t)$, характерные для метода Канторовича, играют роль обобщенных координат и подлежат определению из системы уравнений Лагранжа. Координатные функции $\varphi(x)$ задаются нами с соблюдением условий закрепления (заделка при $x=0$). Примем

$$\varphi_i(x) = x^{1+i},\ i = 1,...,n \qquad (12)$$

Подставив (11) в (9) и (10), получим кинетическую и потенциальную энергию дискретной модели лопатки

$$T = 1/2\left(\dot U_y^T m\dot U_y + \dot U_z^T m\dot U_z\right), m = \int_0^l \rho\varphi\varphi^T dx;$$

$$\Pi = 1/2\left(U_y^T C_y U_y + 2U_y^T C_{yz} U_z + U_z^T C_z U_z\right), \qquad (13)$$

$$C_y = E\int_0^l J_y\varphi''\varphi''^T dx, C_{yz} = E\int_0^l J_{yz}\varphi''\varphi''^T dx, C_z = E\int_0^l J_z\varphi''\varphi''^T dx$$

с матрицами жесткости и инерции.

Обобщенные силы для уравнений Лагранжа находятся по виртуальной работе:

$$\int_0^l \left(f_y\delta u_y + f_z\delta u_z\right)dx = Q_y^T\delta U_y + Q_z^T\delta U_z, Q_y = \int_0^l f_y\varphi dx \qquad (14)$$

и аналогично столбец Q_z. Здесь $f_{y,z}$ – компоненты погонной нагрузки.

Уравнения Лагранжа и их решение

Сократив запись (5), (6) введением блочных столбцов и матриц

$$U = \begin{pmatrix} U_y \\ U_z \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} C_y & C_{yz} \\ C_{yz} & C_z \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \qquad (15)$$

запишем уравнения Лагранжа

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{U}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial K}{\partial U} = -\frac{\partial \Pi}{\partial U} + Q \Rightarrow M\ddot{U} + CU = Q(t) \qquad (16)$$

В случае свободных колебаний $(Q=0)$ рассматривают главные колебания с собственными формами Φ и частотами λ:

$$U(t) = \Phi \sin \lambda t; \ (C - \lambda^2 M)\Phi = 0 \qquad (17)$$

Здесь имеем обобщенную задачу на собственные значения, решаемую в *Mathcad* встроенными процедурами.

Формы колебаний Φ_i обладают известными свойствами ортогональности. Нормируя их, получим $\Phi_i^T M \Phi_k = \delta_{ik}, \Phi_i^T C \Phi_k = \lambda_i^2 \delta_{ik}$. Раскладывая прогибы по формам, придем к главным координатам V_i:

$$U(t) = \sum_{i=1}^{2n} V_i(t)\Phi_i = \Gamma V, \Gamma = \left(\Phi_1 ... \Phi_n\right) \qquad (18)$$

Базисная матрица Γ составлена из столбцов форм. В главных координатах будет

$$K = \frac{1}{2}\sum \dot{V}_i^2, \Pi = \frac{1}{2}\sum \lambda_i^2 V_i^2, \underline{\ddot{V}_i + \lambda_i^2 V_i = P_i(t)}, P = \Gamma^T Q \qquad (19)$$

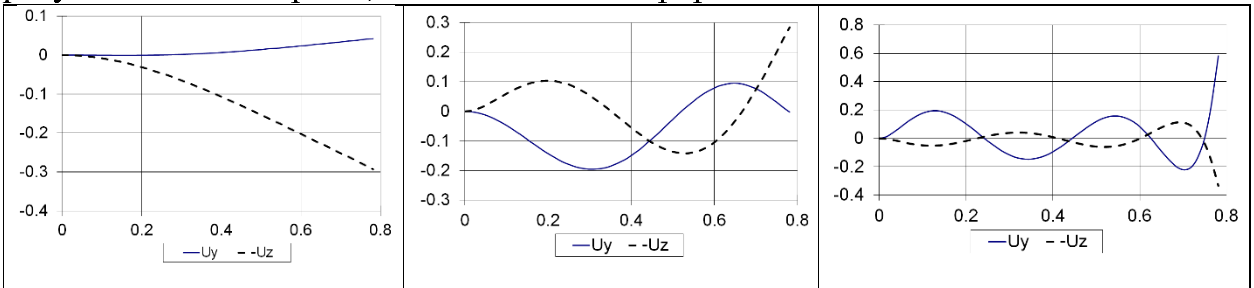
Подчеркнутое уравнение решается с помощью интеграла Дюамеля

$$V_i = V_i(0)\cos\lambda_i t + \dot{V}_i(0)\lambda_i^{-1}\sin\lambda_i t + \lambda_i^{-1}\int_0^t P_i(\tau)\sin\lambda_i(t-\tau)d\tau \qquad (20)$$

Формулы (20), (18) и (11) дают решение задачи о вынужденных колебаниях, если известны частоты и формы.

Набор частот и базисная матрица Γ находятся алгоритмами *genvals* и *genvecs*.

Аппроксимация прогибов (11) принята с числом членов $n=5$. Тогда число степеней свободы, частот и форм $2n=10$. На рис. 4 представлены результаты для первой, пятой и девятой форм:



а) Форма 1: $\lambda = 479\ c^{-1}$ б) Форма 5: $\lambda = 14710\ c^{-1}$ в) Форма 9: $\lambda = 87370\ c^{-1}$

Рисунок 4. Собственные формы лопатки

Далее рассмотрим пример расчета нестационарных вынужденных колебаний. Распределенные нагрузки заданы в виде

$$f_{y,z}(x,t) = f_{y,z}(x)\cos(\omega(t)t),\ \omega(t) = \lambda_0 + \dot{\lambda}t \qquad (21)$$

где $f_{y,z}(x)$ – предоставленные результаты по аэродинамике лопатки, а $\lambda_0, \dot{\lambda}$ – заданные константы. Имеем внезапно приложенную нагрузку с проходом через резонанс, λ_0 меньше одной из собственных частот. Расчет по вышеизложенной методике не вызывает трудностей, интегралы (21) вычисляются посредством *Mathcad*.

Однако заметим, что благодаря компьютерной математике предварительный расчет частот и форм перестает быть обязательным – можно сразу проинтегрировать систему ОДУ (8). Представляем ее в виде

$$\dot{U} = v,\ \dot{v} = M^{-1}(Q - CU) \qquad (22)$$

и обращаемся к процедуре *radau*. Это специальный метод решения жестких систем ОДУ, входящий в набор встроенных в системы компьютерной математики. Традиционные методы Рунге–Кутты оказались для системы (22) неэффективными.

На рис. 5 представлены результаты для прохода через первый резонанс при $f_y(x) = 1000 = -f_z(x),\ \lambda_0 = 470,\ \dot{\lambda} = 2$. Амплитуда колебаний $\approx 4\,см$ – слишком много.

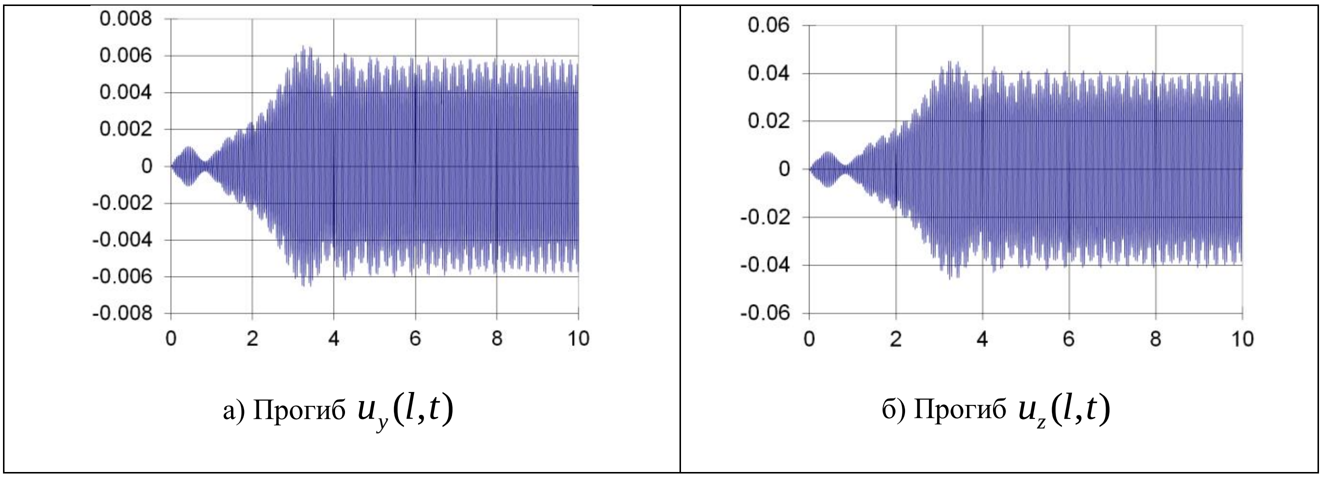


Рисунок 5. График динамического прогиба концевого сечения лопатки

Отметим, что при вынужденных гармонических колебаниях система (22) для амплитуд становится неоднородной и решается с встроенной функцией *lsolve*.

Заключение

Итак, разработана методика расчета колебаний лопаток как закрученных стержней с использованием уравнений Лагранжа. Преимуществами данного метода являются легкость осуществления расчетов в системе компьютерной математики и быстрота вычислений. Также можно отметить малую стоимость по сравнению с анализом трехмерных моделей в коммерческих пакетах.

Лопатка турбины как оболочка

Геометрия лопатки, исследуемой в этой работе, представлена на рисунке 6, она образована смещением тонкого прямоугольного сечения вдоль декартовой оси z с одновременным поворотом его на угол αz вокруг этой оси (α – параметр крутки). Ось z проходит через центры тяжести сечений. Декартовы оси x', y' (с ортами $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0$) фиксированы, а оси x, y (с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}$) повернуты с фигурой сечения. Сечение лопатки – прямоугольник высотой h, ширина которого зависит от осевой координаты z (рис. 7).

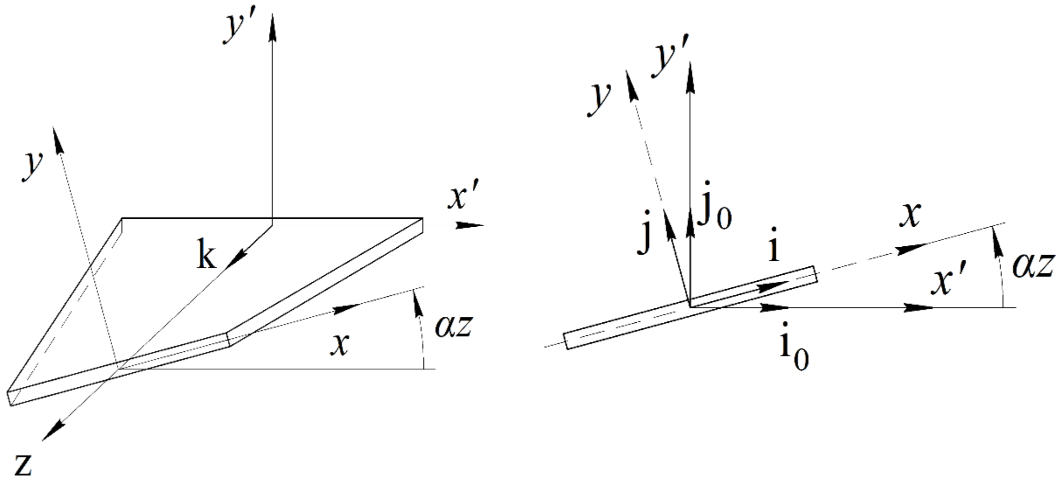


Рис. 6. Геометрия лопатки-оболочки

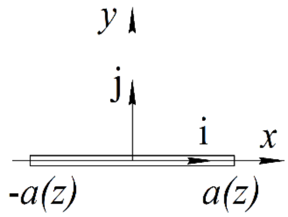


Рисунок 7. Сечение лопатки-оболочки

Такая лопатка моделируется тонкой оболочкой толщины h, срединная поверхность которой описывается радиус-вектором:

$$\mathbf{r}(z,x) = z\mathbf{k} + x\mathbf{i}(z), \ -a(z) \le \mathrm{x} \le a(z). \tag{23}$$

Учитывая формулы дифференцирования ортов $\mathbf{i}' = \alpha\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = -\alpha\mathbf{i}$, построим базис в касательной плоскости:

$$\mathbf{r}_1 = \partial_z \mathbf{r} = \mathbf{k} + \alpha x \mathbf{j} \equiv H\mathbf{e}, \ H = \sqrt{1+\alpha^2 x^2}, \ \mathbf{r}_2 = \partial_x \mathbf{r} = \mathbf{i}$$

и вектор нормали:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{H}(\mathbf{j} - \alpha x \mathbf{k}).$$

После введения кобазиса

$$\mathbf{r}^1 = \frac{1}{H}\mathbf{e} = \frac{1}{H^2}(\mathbf{k} + \alpha x \mathbf{j}), \ \mathbf{r}^2 = \mathbf{i},$$

получим выражение для оператора Гамильтона:

$$\nabla = \mathbf{r}^i \partial_i = \frac{1}{H}\mathbf{e}\partial_z + \mathbf{i}\partial_x.$$

Затем найдем первый и второй метрический тензор:

$$\mathbf{a} = \nabla\mathbf{r} = \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_\beta = \mathbf{ee} + \mathbf{ii},\ \mathbf{b} = -\nabla\mathbf{n} = \frac{\alpha}{H^2}\left(\mathbf{ei} + \mathbf{ie}\right)$$

Представим вектор перемещений оболочки в виде:

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}. \qquad (24)$$

Деформации оболочки в касательной плоскости заданы тензором

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\nabla\mathbf{u}\right)_\perp^S = \varepsilon_x \mathbf{ii} + \varepsilon_1 \mathbf{ee} + \varepsilon_{1x}(\mathbf{ei} + \mathbf{ie}),$$

$$\varepsilon_x = \partial_x u_x,\ \varepsilon_1 = \frac{1}{H^2}\left[\alpha x\left(\alpha u_x + u_y'\right) + u_z'\right], \qquad (25)$$

$$\varepsilon_{1x} = \varepsilon_{x1} = \frac{1}{2H}\left[u_x' - \alpha u_y + \alpha x \partial_x u_y + \partial_x u_z\right],$$

здесь и далее $(...)'$ означает дифференцирование по координате z.

Поворот нормали выражается через перемещение по формулам:

$$\boldsymbol{\varphi} = -\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \varphi_x \mathbf{i} + \varphi_y \mathbf{j} + \varphi_z \mathbf{k},$$

$$\varphi_x = \frac{1}{H}\left(\alpha x \partial_x u_z - \partial_x u_y\right), \varphi_y = \frac{\alpha x}{H^3}\left(\alpha x u_z' - u_y' - \alpha u_x\right), \qquad (26)$$

$$\varphi_z = \frac{1}{H^3}\left(\alpha x u_z' - u_y' - \alpha u_x\right)$$

Второй тензор деформации определяет изгиб и кручение оболочки:

$$\boldsymbol{\kappa} = -\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}\right)_\perp + \mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \kappa_x \mathbf{ii} + \kappa_1 \mathbf{ee} + \kappa_{1x}(\mathbf{ei} + \mathbf{ie}),$$

$$\kappa_x = -\partial_x u_x + \frac{\alpha}{H^3}\left[\alpha x \partial_x u_y + \partial_x u_z\right],$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{H^2}\left[\alpha x\left(\alpha\varphi_x + \varphi_y'\right) + \varphi_z'\right] + \frac{\alpha}{H^3}\left(u_x' - \alpha u_y\right), \qquad (27)$$

$$\kappa_{1x} = \kappa_{x1} = \frac{1}{H}\left[-\varphi_x' + \alpha\varphi_y\right] + \frac{\alpha}{H^2}\partial_x u_x.$$

После определения всех компонент тензоров деформаций можно воспользоваться соотношениями упругости, уравнениями баланса сил и моментов и свести задачу к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент перемещения. А затем решить эту систему, например, методом конечных разностей. Однако мы применим подход с уравнениями Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i. \qquad (28)$$

Для этого необходимо сначала вычислить потенциальную Π и кинетическую K энергии оболочки.

Энергия лопатки

Потенциальная энергия деформации (на единицу площади) изотропной оболочки может быть найдена по формуле:

$$\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\left[\nu\varepsilon^2 + (1-\nu)\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{h^2}{12}\left(\nu\kappa^2 + (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}\cdot\cdot\boldsymbol{\kappa}\right)\right] \quad (29)$$

где E – модуль Юнга, h – толщина, ν – коэффициент Пуассона, ε, κ – следы тензоров деформации. Отметим, что элемент площади геликоидальной оболочки равен $\mathrm{d}O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = H\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, поэтому полная энергия деформации найдется интегрированием:

$$\Pi = \int \Pi \mathrm{d}O = 2\int_0^L \int_0^{a(z)} \Pi H \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \quad (30)$$

введено обозначение L длины оболочки.

Нам понадобится и полная кинетическая энергия оболочки:

$$K = \int \rho h |\dot{\mathbf{u}}|^2 \mathrm{d}O = 2\int_0^L \int_0^{a(z)} \rho h\left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2\right) H\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \quad (31)$$

здесь и далее $(\ldots)^{\cdot}$ означает дифференцирование по времени t, ρ – объемная плотность материала.

Мы будем рассматривать изгибные колебания оболочки, зададим аппроксимацию перемещения в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(z,t) - \mathbf{U}'(z,t)\cdot x\mathbf{ik} + S(z,t)\left(x^2 - a^2(z)\right)\mathbf{j}. \quad (32)$$

Первые два слагаемых соответствуют элементарной теории балки с вектором прогиба $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}(z,t) = U_x(z,t)\mathbf{i}_0 + U_y(z,t)\mathbf{j}_0. \quad (33)$$

Третье слагаемое в (10) задает деформацию сечения в своей плоскости по квадратичному закону. Записанная аппроксимация позволяет выразить все неизвестные задачи через три новые функций U_x, U_y, S, зависящие только от одной координаты z как в теории стержней. Для выражения потенциальной и кинетической энергии через эти функции используем соотношения:

$$\begin{aligned} u_x &= U_x(z,t)\cos(\alpha z) + U_y(z,t)\sin(\alpha z), \\ u_y &= U_y(z,t)\cos(\alpha z) - U_x(z,t)\sin(\alpha z) + S(z,t)\left[x^2 - a^2(z)\right], \\ u_z &= -x\left[U_x'(z,t)\cos(\alpha z) + U_y'(z,t)\sin(\alpha z)\right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Применение метода Ритца-Канторовича

Перед использованием уравнений Лагранжа (28) необходимо ввести обобщенные координаты q_i и выразить через них энергию оболочки.

Перейдем от континуальной модели оболочки к дискретной посредством аппроксимации введенных нами функций, следуя методу Ритца-Канторовича:

$$\begin{gathered} U_x(z,t)=\sum_{i=1}^{N}U_{xi}(t)\Phi_i(z)=U_x^T\Phi,\ U_y(z,t)=\sum_{i=1}^{N}U_{yi}(t)\Phi_i(z)=U_y^T\Phi, \\ S(z,t)=\sum_{i=1}^{N}S_i(t)\Psi_i(z)=S^T\Psi. \end{gathered} \tag{35}$$

(здесь использованы матричные обозначения). В качестве обобщенных координат q_i будем рассматривать функции $U_{xi}(t), U_{yi}(t), S_i(t)$ в разложениях (35), эти координаты будут найдены решением уравнений Лагранжа. Координатные функции задаются с соблюдением условий закрепления: поскольку корневое сечение $z=0$ лопатки заделано, то $\Phi(0)=\Phi'(0)=\Psi(0)=0$. Этим условиям удовлетворяют, например, степенные зависимости:

$$\Phi_1=z^2, \Phi_2=z^3,..., \Psi_1=z, \Psi_2=z^2,... \tag{36}$$

С аппроксимациями энергия оболочки по формулам (30), (31) выражается квадратичными формами:

$$\begin{aligned} &2\Pi=U_x^TC_{xx}U_x+U_y^TC_{yy}U_y+2U_x^TC_{xy}U_y+ \\ &+S^TC_{ss}S+2U_x^TC_{xs}S+2U_y^TC_{ys}S, \\ &2K=\dot U_x^TM_{xx}\dot U_x+\dot U_y^TM_{yy}\dot U_y+2\dot U_x^TM_{xy}\dot U_y+ \\ &+\dot S^TM_{ss}\dot S+2\dot U_x^TM_{xs}\dot S+2\dot U_y^TM_{ys}\dot S \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь введены матрицы жесткости и инерции, они не представлены в силу их громоздкости.

В правой части уравнений Лагранжа стоят обобщенные силы, они определяются по выражению виртуальной работы внешней нагрузки. Пусть на лопатку действует сила в направлении оси y': $\mathbf{P}=p(t)\mathbf{j}_0$, ее виртуальная работа

$$\begin{gathered} \delta A=\int_O \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u}\mathrm{d}O=\sum_i Q_{yi}(t)\delta U_{yi}(t)+\sum_i S_i(t)\delta S_i(t)=Q_y^T\delta U_y+Q_s^T\delta \mathrm{S}, \\ Q_{yi}(t)=p(t)\int_0^L\int_{-a(z)}^{a(z)}\Phi_i(z)H(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \\ S_i(t)=p(t)\int_0^L\int_{-a(z)}^{a(z)}\Psi_i(z)\cos(\alpha z)\left(x^2-a^2(z)\right)H(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x, \end{gathered} \tag{38}$$

обобщенные силы, соответствующие координатам U_{xi}, равны нулю.

Уравнения Лагранжа (6) примут вид:

$$M\ddot{U} + CU = Q(t), \tag{39}$$

где введены блочные столбцы и матрицы

$$M \equiv \begin{pmatrix} M_{xx} \, M_{xy} \, M_{xs} \\ M_{xy} \, M_{yy} \, M_{ys} \\ M_{xs} \, M_{ys} \, M_{ss} \end{pmatrix}, \; U \equiv \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ S \end{pmatrix}, \; C \equiv \begin{pmatrix} C_{xx} \, C_{xy} \, C_{xs} \\ C_{xy} \, C_{yy} \, C_{ys} \\ C_{xs} \, C_{ys} \, C_{ss} \end{pmatrix}, \; Q(t) \equiv \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_s \end{pmatrix}.$$

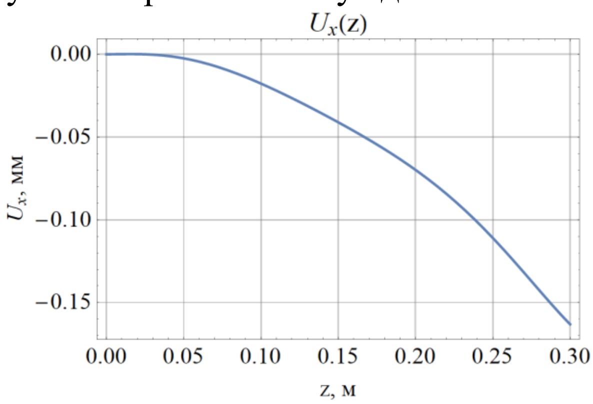
Расчет вынужденных колебаний лопатки

Рассчитаем амплитуду установившихся колебаний лопатки под действием вынуждающей силы $\mathbf{P} = p_0 \sin(\omega t)\mathbf{j}_0,\; p_0 = \text{const}$. Для столбцов амплитуд из (39) будем иметь:

$$\left(C - \omega^2 M\right)U = Q. \tag{40}$$

Решив эту СЛАУ, найдем все обобщенные координаты, а по ним и перемещения.

В системе компьютерной математики Mathematica исследована модель со следующими параметрами: $\alpha \approx 1{,}745$, h = 0,01 м, L = 0,3 м, ρ = 7800 кг/м^3, ν = 0,3, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и размером поперечного сечения, меняющимся от 0,4 м до 0,2 м. Построены все глобальные матрицы, решена система уравнений Лагранжа с параметрами вынуждающей силы p_0 = 10^4 Н, ω = 3000 об/мин. Результаты расчета вынужденных колебаний представлены на рисунках 3, 4:



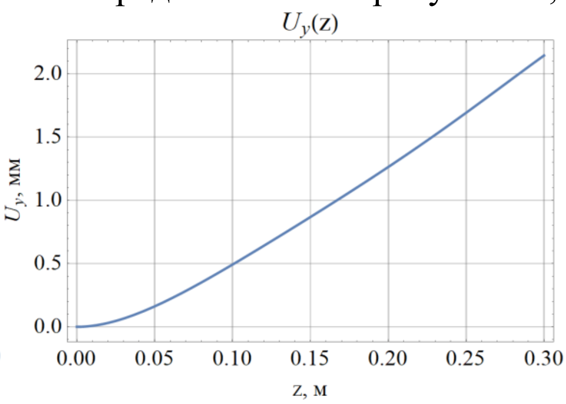


Рисунок 8. Прогибы U_x(z), U_y(z)

Разработанный в работе алгоритм позволяет рассчитывать и нестационарные колебания турбинной лопатки.

Удары капель жидкости по поверхности тела, вызывающие эрозию, рассматриваются как упругое контактное взаимодействие. Средствами теории упругости и компьютерной математики определено напряженное состояние тела и найдены параметры нагрузки, при которой начинаются пластические деформации. Выведена формула для скорости капель. при которой начинается эрозия.

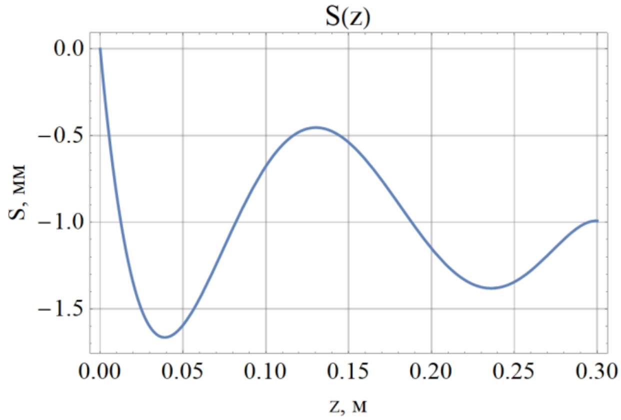


Рисунок 9. Функция S(z)

Моделирование каплеударной эрозии

В лопаточных машинах наблюдается такое явление, как каплеударная эрозия (далее – КЭ) – разрушение поверхности тела, находящейся под воздействием струи газа с каплями жидкости. Этому явлению посвящено много исследований, экспериментальных и теоретических. Результаты отражены не только в виде многих статей, но также и монографий.

Для полного понимания сущности КЭ желательно разобраться в двух процессах: гидродинамике капли при ударе о поверхность тела и деформировании тела локальной ударной нагрузкой. Многие авторы считают причиной КЭ накопление пластических контактных деформаций. Такая точка зрения принимается и в данной работе.

Целью работы является математическое моделирование возникновения КЭ посредством решения контактной задачи теории упругости. Тело считается упругим полупространством, а капля – шариком радиусом R, падающим с некоторой скоростью v (рис. 10). Предпринята попытка построения на плоскости параметров v, R границы области, в которой КЭ не возникает. Работа опирается на литературу по контактным задачам теории упругости, а также компьютерную математику. Именно последняя (*Mathcad*) позволила довести классическое решение контактной задачи по Герцу до полной картины контактных напряжений в теле.

Формулы Герца

В результате решения задачи линейной теории упругости о контактном взаимодействии полупространства и шара (рис. 10) выведены следующие известные формулы Герца:

$$\frac{1}{R}=\frac{3Q\beta}{4a^3},\ \delta=\left(\frac{3Q\beta}{4}\right)^{2/3}R^{-1/3};Q=p_0\frac{2}{3}\pi a^2,\ \beta\equiv\frac{1-\nu_0^2}{E_0}+\frac{1-\nu^2}{E} \qquad (41)$$

Обозначено: Q – прижимающая сила, a – радиус контактного круга, δ – сближение тел; E, E_0 – модули Юнга материалов (нолик относится к шару), ν, ν_0 – коэффициенты Пуассона.

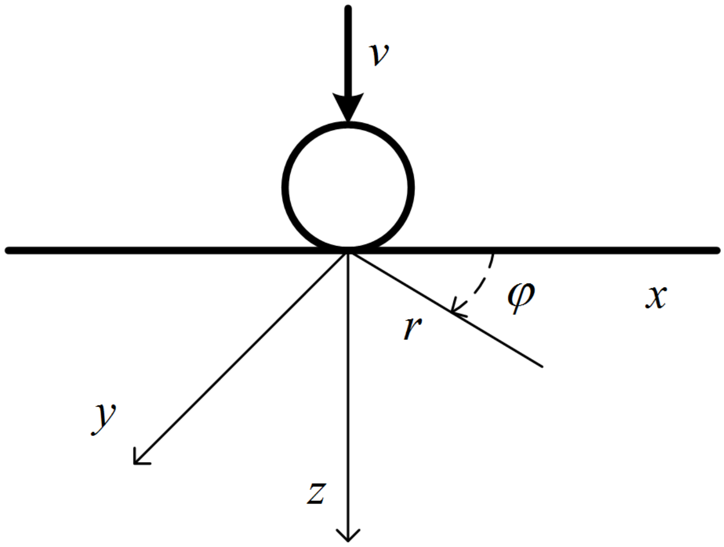


Рисунок 10. Расчетная схема контакта

Для контактного давления и силы имеем формулы

$$p(r) = p_0\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2},\ Q = 2\pi\int_0^a p(r)\,r\,dr\ ,$$

так что p_0 – значение в центре.

Нелинейное соотношение между силой и сближением можно выразить через потенциальную энергию взаимодействия Π:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4}{3\beta}R^{1/2}\delta^{3/2} = \Pi'(\delta), \\ \Pi &= \frac{4}{3\beta}R^{1/2}\frac{2}{5}\delta^{5/2} = \frac{2}{5}R^{-1/3}\left(\frac{3\beta}{4}\right)^{2/3}Q^{5/3} \end{aligned} \tag{42}$$

Эти формулы можно использовать для расчета максимального сближения и силы при ударе. По закону сохранения энергии (m – масса шарика, ρ_0 – плотность)

$$\Pi = \frac{1}{2}mv^2,\ m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 \tag{43}$$

Однако формул Герца недостаточно для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тела.

Контактные напряжения в полупространстве

Для бесконечного тела нельзя применять распространенные программы конечноэлементного анализа (ANSYS). Зато весьма эффективны классические аналитические подходы. Например, решение Папковича-Нейбера, представляющее вектор перемещения $\mathbf{u}$ через гармонические функции:

$$\mathbf{u} = -z\overline{\nabla}B - \overline{\nabla}B_0 + [(3-4\nu)B - z\partial_z B - \partial_z B_0]\mathbf{k} \tag{44}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – орт оси z (рис. 1), $\overline{\nabla}$ – оператор Гамильтона в перпендикулярной плоскости, $B,\ B_0$ – гармонические скаляры ($\Delta B = \Delta B_0 = 0$ – с оператором Лапласа); $\partial_z \equiv \partial/\partial z$.

Определив перемещения (44), деформации и далее напряжения (по закону Гука), обращаются к граничным условиям. На плоскости $z=0$ отсутствуют касательные напряжения, а нормальное напряжение равно нулю вне контактного круга и давлению с минусом – в круге. В результате, во-первых, находится соотношение

$$(1-2\nu)B = \partial_z B_0 \Rightarrow B_0 = -(1-2\nu)\int_z^\infty B\,dz \tag{45}$$

Во-вторых, для гармонической функции B получается задача Неймана с заданной нормальной производной на границе, решаемая с потенциалом простого слоя (контактного круга):

$$B(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu}\int \frac{p(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}do_1 \tag{46}$$

Здесь $\mu = E/2(1+\nu)$ – модуль сдвига, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор в полупространстве; $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор на площадке контакта – по ней производится интегрирование.

Рассматриваемая задача осесимметричная, поэтому используем цилиндрические координаты $r,\ \varphi,\ z$ (рис. 10). При этом компоненты векторов и тензоров будут функциями лишь двух переменных $r,\ z$. Формулу (46) можно записать в виде

$$\begin{gathered}B(r,z) = \frac{p_0}{4\pi\mu}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\mathrm{r},\mathrm{z},\rho,\theta)d\rho,\\ f \equiv \frac{\rho\sqrt{1-(\rho/a)^2}}{\sqrt{r^2-2r\rho\cos\theta+\rho^2+z^2}}\end{gathered} \tag{47}$$

При интегрировании в круге по переменной $\mathbf{r}_1$ используются полярные координаты $\rho,\ \theta$. Для радиус-вектора $\mathbf{r}$ остаются $r,\ \varphi,\ z$, причем в осесимметричном случае можно считать $\varphi = 0$.

Двойной интеграл (47), зависящий от параметров $r,\ z$, вычисляется в *Mathcad*. Во избежание расходимости на оси z интегрируем по ρ не от нуля, а от некоторого малого значения (например, $\lambda = 10^{-2}a$). Дифференцировать по $r,\ z$ можно под интегралом, используя символьные вычисления – понадобится далее при вычислении перемещений и деформаций.

Определяя вторую функцию B_0 согласно (45), получим для нее интеграл как в (47), но вместо f будет

$$f_0(r,z,\rho,\theta) = -(1-2\nu)\rho\sqrt{1-(\rho/a)^2}G(z,\xi),$$
$$G(z,\xi) \equiv \ln(z^2+\sqrt{z^2+\xi})\Big|_z^M, M \to \infty; \tag{48}$$
$$\xi \equiv r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2$$

Для сходимости интеграла в расчетах принималось $M = 10a$.

По найденным функциям B, B_0 найдем деформации:

$$\varepsilon_r = -\partial_r^2(zB+B_0), \varepsilon_\varphi = -\frac{1}{r}\partial_r(zB+B_0),$$
$$\varepsilon_z = 2(1-2\nu)\partial_z B - z\partial_z^2 B - \partial_z^2 B_0, \tag{49}$$
$$\varepsilon_{rz} = (1-2\nu)\partial_r B - z\partial_r\partial_z B - \partial_r\partial_z B_0$$

Введены компактные выражения частных производных. Подставив (49) в закон Гука, определим напряжения σ_r, σ_φ, σ_z, τ_{rz}. Далее найдем компоненты девиатора напряжений и норму Мизеса τ:

$$S_r = \frac{1}{3}(2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z),\ldots,S_{rz} = \tau_{rz}; \tau = \sqrt{\frac{1}{2}(S_r^2 + S_\varphi^2 + S_z^2) + \tau_{rz}^2} \tag{50}$$

Выражения компонент S_φ, S_z отличаются заменой индексов.

Начало пластических деформаций определяется условием текучести

$$\tau(r,z) = k \tag{51}$$

где k – предел текучести материала. Для титана, например, $k = 500$ МПа. При достаточно слабом контактном воздействии (малая скорость капли) везде в материале будет $\tau < k$. Эрозия начнется, предположительно, при выполнении условия (51) в некоторой точке. Данный расчет должен показать, где и когда это произойдет.

В силу симметрии достаточно рассмотреть норму Мизеса на оси z: $\tau(0,z) = T(z)$. Построенный средствами Mathcad график этой функции – на рис. 11:

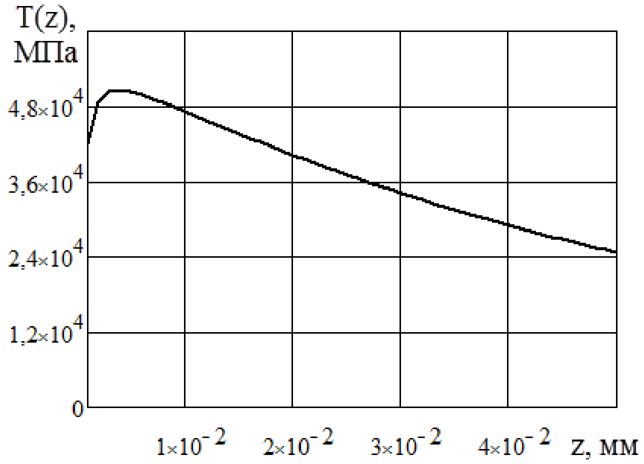


Рисунок 11. Зависимость нормы Мизеса от глубины

На графике видно, что максимум нормы Мизеса достигается не на поверхности, а очень близко от нее в глубине тела. График типичный, проведены десятки расчетов с различными параметрами. Радиус контактного круга для графика $a = 10^{-4}$ м. Другие параметры: $E = 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$, $k = 5 \cdot 10^{8}$ Па (титан). Считалось $p_0 = 1$, поскольку решение пропорционально этому множителю. Максимум на рис. 11 равен $\underline{T_1 = 5{,}06 \cdot 10^{4} \text{ МПа}}$ и достигается на глубине $z_1 = 3{,}96 \cdot 10^{-3}$ мм. При начале пластической деформации будет

$$p_0 T_1 = k \Rightarrow p_0 = 9{,}88 \cdot 10^{-3} \tag{52}$$

И оказалось, что значение p_0 не зависит от радиуса контактного круга a. Этот впечатляющий результат, впрочем, можно было предвидеть по соображениям подобия.

Расчет для удара капли

Все формулы для этого расчета уже представлены выше. Сначала из (41) находим силу Q при начале пластической деформации:

$$a = \left(\frac{3Q}{2\pi p_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{3Q\beta R}{4}\right)^{1/3} \Rightarrow Q = \left(\frac{3\beta}{4}\right)^{2}\left(\frac{2\pi p_0}{3}\right)^{3} \tag{53}$$

Далее из (42), (43) определим соответствующую скорость капли

$$v = \frac{\beta^2 \pi^2}{2\sqrt{10\rho_0}} p_0^{5/2} = \frac{1.56 \cdot \beta^2}{\sqrt{\rho_0}} \cdot \left(\frac{k}{T_1}\right)^{2.5}. \tag{54}$$

Константа T_1 определена выше (подчеркнуто). Величина скорости не зависит от радиуса капли R (удивительный результат) и по степенному закону зависит от предела текучести k и параметра β.

Но возникает серьезная проблема – свойства воды как упругого тела. Для любого изотропного тела имеем пару упругих модулей; например, модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Или же модули изменения объема $K = E/3(1-2\nu)$ и сдвига μ. Модуль K для воды определяется известной скоростью распространения звука. А вот модуль сдвига обычно принимают равным нулю. Но тогда вся логика наших расчетов рушится – $\beta \to \infty$

Однако найдены экспериментальные данные по упругим свойствам воды, где сообщается: $\nu = 0{,}5$, $\mu = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. Используя эти значения вместе с результатом (52) в формуле (54), получим критическое значение скорости капли $v = 177$ м/с.

Результаты

1. Разработаны математические модели различной размерности, применимые для моделирования вибрационного напряжённо-деформируемого состояния лопаток турбин с различным соотношение длины и размера поперечного

сечения: одномерные (стержни) – для длинных лопаток, двумерные (оболочки) – для коротких.
2. Разработан подход, использующий теорию контактного взаимодействия, позволяющий оценить состояние лопатки, подверженной каплеударной эрозии.

В заключении перечислены основные результаты работы:
1. Поставлены и численно решены краевые задачи для соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений линейной механики стержней для свободных и вынужденных колебаний.
2. Проведен модальный анализ.
3. Построены вибрационные диаграммы.
4. Исследованы колебания лопатки как геликоидальной оболочки.
5. Решена контактная задача взаимодействия капли и упругого полупространства лопатки.

Список работ, опубликованных по теме научно-квалификационной работы (диссертации)

В изданиях из перечня ВАК:

1. Елисеев, В.В. Анализ деформаций турбинных лопаток на основе полной одномерной модели/ В.В. Елисеев, А.А. Москалец, Е.А. Оборин // Тяжелое машиностроение. М.: Фонд поддержки и развития Научно-производственного объединения «Центральный научно-исследовательский институт технологии машиностроения», 2015. – № 5. – с. 35-38.
2. Елисеев, В.В. Применение уравнений Лагранжа для расчета колебаний лопаток/ В.В. Елисеев, А. А. Москалец, Е. А. Оборин // Справочник. Инженерный журнал с приложением. М.: ООО «Издательский дом "Спектр"», 2015. – № 8. – с. 21-24.
3. Елисеев, В.В. Оценка опасности каплеударной эрозии методами теории контактных упругих деформаций / В.В. Елисеев, А.А. Москалец // Известия Самарского научного центра РАН, 2016. – №1 (2). – с. 296-299.

В изданиях, индексируемых Scopus:

4. Yeliseyev, V.V. Computational technique of plotting Campbell diagrams for turbine blades // Advances in Mechanical Engineering. Springer international Publishing, Switzerland, 2016. – p. 37-44.
5. Yeliseyev, V.V. One-Dimensional Models in Turbine Blades Dynamics / V.V. Yeliseyev, A.A. Moskalets, E.A. Oborin // Advances in Mechanical Engineering. Springer international Publishing, Switzerland, 2016. – p. 93-104.
6. Yeliseyev, V.V. Application of the theory of contact elastic deformations for assessing the risk of destruction of turbine blades as a result of high-speed impact by steam particles / V.V. Yeliseyev, M.A. Skotnikova, A.A. Moskalets, N.A. Krylov// International Review of Mechanical Engineering. – 2017. – Vol. 11. – № 5. – p. 350-355.
7. Yeliseyev, V.V. Vibrations of turbine blades as elastic shells / V.V. Yeliseyev, A.A. Moskalets// Advances in Mechanical Engineering. Springer international Publishing, Switzerland, 2018 – p. 53-60.

8. Zinovieva, T.V. Modal Analysis of Turbine Blade as One-and Three-Dimensional Body / T.V. Zinovieva, A.A. Moskalets // Advances in Mechanical Engineering. Springer international Publishing, Switzerland, 2018 – p. 195-204.
9. Moskalets, A.A. Turbine blade vibration analysis using helicoidal shell model / A.A. Moskalets, T.V. Zinovieva, A.K. Belyaev // Advanced Problems in Mechanics, 2018. – p. 181-190.

В прочих изданиях:

10. Елисеев, В.В. Колебания турбинных лопаток как естественно закрученных стержней/ В.В. Елисеев, А. А. Москалец // Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции с международным участием. Ч. I – Спб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – с. 88-90.
11. Елисеев, В.В. Колебания турбинных лопаток как естественно закрученных стержней/ В.В. Елисеев, А. А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. 2014. – № 4. – с. 344-350.
12. Елисеев, В.В. Расчет колебаний турбинных лопаток вариационным методом/ В.В. Елисеев, А. А. Москалец // Научный форум с международным участием «Неделя науки СПбПУ»: материалы научно-практической конференции. Институт металлургии, машиностроения и транспорта СПбПУ. Ч. 2. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. – 432 с.
13. Елисеев, В.В. Расчетный метод построения диаграмм Кэмпбелла для турбинных лопаток/ В.В. Елисеев, А.А. Москалец // Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции с международным участием. Ч. I – Спб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. – с. 73-75.
14. Елисеев, В.В. Расчетный метод построения диаграмм Кемпбелла для турбинных лопаток/ В.В. Елисеев, А. А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. 2016. – № 5. – с. 413-420.
15. Елисеев, В.В. Применение метода Лагранжа-Ритца-Канторовича к анализу колебаний турбинных лопаток / В.В. Елисеев, А.А. Москалец // Вестник НТУ ХПИ. Сборник научных трудов. Серия: Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. – Харьков, НТУ «ХПИ», 2016. – № 8. – с. 149-152.
16. Зиновьева, Т.В. Модальный анализ турбинной лопатки как одномерного и трехмерного тела / Т.В. Зиновьева, А. А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. 2017. – № 6. – с. 346-355.
17. Елисеев, В.В. Колебания турбинных лопаток как упругих оболочек / В.В. Елисеев, А. А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. 2017. – № 6. – с. 356-366.
18. Зиновьева, Т.В. Вынужденные колебания турбинной лопатки как геликоидальной оболочки / Т.В. Зиновьева, А. А. Москалец // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2018. – № 7. – с. 322-329.