

Г.Н. Цицикян

Филиал «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

## ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ КОНТУРОВ И ИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

**Объект и цель научной работы.** Коаксиальные токоведущие элементы являются составной частью многих электротехнических устройств, включая трансформаторы, реакторы и различные электромеханизмы, характеризующиеся индуктивными параметрами и электродинамическими взаимодействиями. Объектом исследования являются тонко-слойные прямоугольные и цилиндрические катушки, входящие в состав нагрузочных устройств, предназначенных для швартовых испытаний мощных генераторных агрегатов судовых электростанций. Основной целью исследования является анализ и расчет электродинамических сил, возникающих в соленоидальных элементах нагрузочных устройств, для принятия мер конструктивного характера по исключению возможных разрушений в процессе испытаний, являющихся неременной составной частью швартовых испытаний судовой электростанции.

**Материалы и методы.** Оценка электродинамических сил основана на расчете взаимной индуктивности в выбранной конструкции с привлечением аппарата специальных функций в случае определения сил на крайние витки соленоидов.

**Основные результаты.** Содержат оценку сил, которые следует учитывать при выборе конструктивных исполнений соленоидов нагрузочных устройств.

**Заключение.** Результаты исследования могут быть использованы и для других аналогичных приложений.

**Ключевые слова:** коаксиальные контуры, взаимная индуктивность, электродинамические силы, соленоиды нагрузочных устройств.

Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.

Для цитирования: Цицикян Г.Н. Взаимная индуктивность коаксиальных контуров и их электродинамическое взаимодействие. Труды Крыловского государственного научного центра. 2018; 2(384): 70–75.

УДК 537.8

DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-384-70-75

G. Tsitsikyan

TSNII SET Branch, Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

## MUTUAL INDUCTANCE OF COAXIAL CIRCUITS AND THEIR ELECTRODYNAMIC INTERACTION

**Object and purpose of research.** Coaxial current-carrying elements are parts of numerous electric equipment, including transformers, reactors and various electric machinery characterized by inductance parameters and electrodynamic interaction. This paper studies thin-layered rectangular and cylindrical coils of loading devices intended for bollard-pull testing of heavy-duty marine gensets. The main purpose of this study is to analyse and calculate electrodynamic forces arising in solenoids of loading devices, to take design measures for preventing possible damage during the tests that are a compulsory part of mooring tests for electric power plants of ships.

**Materials and methods.** The assessment of electrodynamic forces is based on the calculation of mutual inductance in the selected structure. The forces on extreme coils of solenoids are determined using special functions.

**Main results.** Main results are the assessment of the forces to be taken into account in decision making on the design of loading device solenoids.

**Conclusion.** The results of this study could be also used for other similar applications.

**Key words:** coaxial circuits, mutual inductance, electrodynamic forces, solenoids of loading devices.

Author declares lack of the possible conflicts of interests.

For citations: Tsitsikyan G. Mutual inductance of coaxial circuits and their electrodynamic interaction. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2018; 2(384): 70–75 (in Russian).

UDC 537.8

DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-384-70-75

Определение взаимной индуктивности для контуров различной конфигурации и характера взаимного расположения является важной задачей при проектировании токоведущих частей электротехнических комплексов и вспомогательного электрооборудования. Относящиеся к ним вопросы оказываются в поле зрения соответствующих специалистов и научных работников. При этом неизбежно обращение к имеющимся справочным руководствам, к числу которых следует отнести, прежде всего, справочные книги [1, 2], монографию [3], а также монографии [4, 5], где рассмотрены электродинамические силы.

Для нахождения взаимной индуктивности прямоугольных коаксиальных контуров, показанных на рис. 1, можно воспользоваться выражением (3.13a) в [5] для взаимной индуктивности двух параллельных прямолинейных проводников.

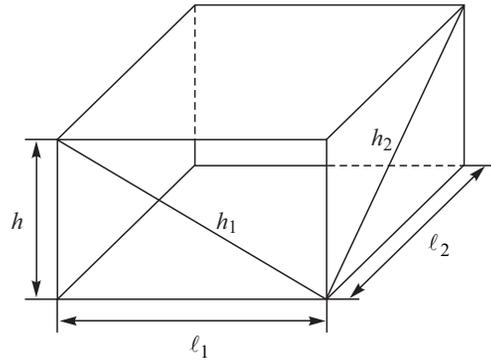
Тогда, с учетом обозначений на рис. 1, взаимная индуктивность  $M$  между двумя одинаковыми соосными прямоугольными контурами будет определяться по выражению

$$M_{\text{пр}} = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & \ell_1 \ln \frac{\ell_1 + (\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{\ell_1 + (\ell_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \ell_2 \ln \frac{\ell_2 + (\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{\ell_2 + (\ell_2^2 + h_1^2)^{\frac{1}{2}}} - \\ & - \ell_1 \ln h + \ell_1 \ln h_2 + h - h_2 - (\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} + \\ & + (\ell_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}} - \ell_2 \ln h + \ell_2 \ln h_1 + h - h_1 - \\ & - (\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} + (\ell_2^2 + h_1^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $h_1 = (\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$ ;  $h_2 = (\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Выражение (1) может быть преобразовано к виду

$$M_{\text{пр}} = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & \ell_1 \ln \frac{[\ell_1 + (\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}](\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{[\ell_1 + (\ell_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}]h} + \\ & + \ell_2 \ln \frac{[\ell_2 + (\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}](\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{[\ell_2 + (\ell_2^2 + h_1^2)^{\frac{1}{2}}]h} + \\ & + 2 \left[ \begin{aligned} & (\ell_1^2 + \ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} - (\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} - \\ & - (\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} + h \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$



**Рис. 1.** Прямоугольные коаксиальные контуры с параллельными сторонами  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  и с расстоянием между плоскостями  $h$

**Fig. 1.** Rectangular coaxial circuits with parallel sides  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  and  $h$  distance between the planes

Выражение (2) совпадает с выражением (4-39) в [2], если принятые здесь обозначения заменить на следующие:

$$\ell_1 = a; \quad \ell_2 = b; \quad h = x; \quad (\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} = d_1; \\ (\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} = d_2 \quad \text{и} \quad (\ell_1^2 + \ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} = D.$$

Тогда, в полном соответствии с (4-39), в [2] будем иметь:

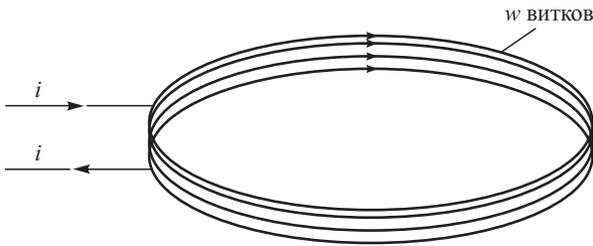
$$M_{\text{пр}} = \frac{\mu_0}{\pi} \left[ a \ln \left( \frac{a + d_1}{a + D} \cdot \frac{d_2}{x} \right) + b \ln \left( \frac{b + d_2}{b + D} \cdot \frac{d_1}{x} \right) + \right. \\ \left. + 2(D - d_1 - d_2 + x) \right].$$

При  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  для двух одинаковых квадратных контуров, в соответствии с (2), взаимная индуктивность  $M$  равна:

$$M_{\text{кв}} = \frac{2\mu_0}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & \ell \ln \frac{[\ell + (\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}](\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{[\ell + (2\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}]h} + \\ & + (2\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} - 2(\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} + h \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

При  $h^2 \ll \ell^2$  для  $M_{\text{кв}}$  можно записать с некоторым приближением:

$$M_{\text{кв}}|_{h^2 \ll \ell^2} = \frac{2\mu_0}{\pi} \left[ \ell \ln \frac{2(\sqrt{2}-1)\ell}{h} + \sqrt{2}(1-\sqrt{2})\ell + h \right] = \\ = \frac{2\mu_0 \ell}{\pi} \left( \ln \frac{\ell}{h} - 0,774 + \frac{h}{\ell} \right). \quad (4)$$



**Рис. 2.** Фрагмент обмотки соленоида с током  $i$  и с числом витков  $w$

**Fig. 2.** A fragment of solenoid winding with current  $i$  and coil number  $w$

Выражение (4) по первым трем членам совпадает с (4-47) в [2].

Выражение (4) без последнего члена приведено в [3] с учетом замены обозначения  $h$  на  $r_w$  и в предположении, что  $r_w \ll \ell$ .

Для правильных шестиугольников в [2] в принятых здесь обозначениях в приближении  $h \ll \ell$ , где  $\ell$  – сторона коаксиальных шестиугольников ( $\ell = \ell_{ш}$ ), записано выражение для взаимной индуктивности (формула 4.48 [2]) в виде

$$M_{ш} = \frac{3\mu_0 \ell}{\pi} \left( \ln \frac{\ell}{h} - 0,1515 + 0,395 \frac{h}{\ell} \right). \quad (5)$$

В случае одного и того же периметра для квадрата и шестиугольника, когда  $\ell_{ш} = 2/3 \ell_{кв}$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} M_{ш} &= \frac{2\mu_0 \ell_{кв}}{\pi} \left( \ln \frac{\ell_{кв}}{h} + \ln \frac{2}{3} - 0,1515 + 0,395 \frac{3h}{2\ell_{кв}} \right) = \\ &= \frac{2\mu_0 \ell_{кв}}{\pi} \left( \ln \frac{\ell_{кв}}{h} - 0,557 + 0,593 \frac{h}{\ell_{кв}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, при  $\ell_{кв}/h = 10$  в круглых скобках, в (4) и в (6) получаем соответственно 1,629 и 1,805, а при  $\ell_{кв}/h = 20$  – 2,272 по (4) и 2,468 по (6).

Для квадратных контуров со стороной  $\ell$  сила взаимодействия в направлении  $h$  может быть получена дифференцированием выражения (3) по  $h$  на основе нахождения производной энергии  $W_m$  магнитного поля по координате [4] в виде

$$f_{кв} = i_1 i_2 \frac{\partial M_{кв}}{\partial h}.$$

При  $i_1 = i_2 = i$  получаем:

$$f_{кв} = \frac{2\mu_0 i^2}{\pi} \left[ \frac{\ell^2 + 2h^2}{(\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h} - 1 - \frac{(2\ell^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h}{\ell^2 + h^2} \right]. \quad (7)$$

Сила имеет характер притяжения. Вместе с тем, по формуле (16) в [6], полученной для силы притяжения между двумя одинаковыми прямоугольными контурами с током  $i_1 = i_2 = i$  на основе векторно-параметрического описания отрезков линейных проводников при условии замены  $\ell_{21}$  на  $\ell_1$ ,  $\ell_{22}$  на  $\ell_2$  и соответственно  $h_1 = (\ell_1^2 + h^2)^{1/2}$  и  $h_2 = (\ell_2^2 + h^2)^{1/2}$ , имеем:

$$\begin{aligned} f_{пр} &= \frac{\mu_0 i^2}{\pi} \left[ \frac{(\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{h} + \frac{(\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}}{h} - 2 + \frac{h}{(\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{(\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(\ell_1^2 + \ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h}{\ell_2^2 + h^2} - \frac{(\ell_1^2 + \ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h}{\ell_1^2 + h^2} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 i^2}{\pi} \left[ \frac{\ell_1^2 + 2h^2}{(\ell_1^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h} + \frac{\ell_2^2 + 2h^2}{(\ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h} - 2 - \frac{(\ell_1^2 + \ell_2^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} h}{(\ell_1^2 + h^2)(\ell_2^2 + h^2)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

При  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  сила притяжения для квадратных контуров с током не будет отличаться от выражения (7). В случае квадратных контуров в приближении  $h^2 \ll \ell^2$  имеем:

$$f_{кв} |_{h^2 \ll \ell^2} \cong \frac{2\mu_0 i^2}{\pi} \left( \frac{\ell}{h} - 1 - \frac{\sqrt{2}h}{\ell} \right). \quad (9)$$

Заметим, что при  $\ell = h$  из (7) получается следующий результат:

$$\begin{aligned} f_{кв} |_{\ell=h} &= \frac{2\mu_0 i^2}{\pi} \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \frac{2\mu_0 i^2}{\pi} \frac{3\sqrt{2} - 2 - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь следует отметить несовпадение с числовой дробью, приведенной в примере, записанном в [5]. Указанную в [5] числовую дробь в виде  $(3 - 2\sqrt{2})/\sqrt{2}$  следует заменить на дробь в выражении (10).

В качестве иллюстрации применения предыдущих соотношений рассмотрим соленоиды нагрузочного устройства с водяным охлаждением, предназначенные для испытаний генераторных агрегатов судовой электростанции. Нагрузочное устройство для испытаний генератора мощностью 1200 кВт имеет четыре основные ступени нагрузки по 300 кВт, составляющие каждая 25 % от номинальной мощности. Испытания проводятся с последовательным увеличением нагрузки от 25 % через 25 % до 100 %. Предусмотрена также 10 % перегрузочная ступень, которую здесь рассматривать не будем. На рис. 2 показан фрагмент однослойной обмотки соленоида с током  $i$ . Соленоиды трехфазной ступени соединены в звезду, и при напряжении 400 В по ним может проходить ток до 600 А при  $\cos\varphi = 0,8$ .

Периметр витков такого соленоида составляет около 1 м. Исходя из предположения, что силы взаимодействия (силы притяжения) между витками при одинаковом расстоянии между ближайшими витками (порядка 0,01 м) для случаев круговых витков и витков квадратной формы равновеликого периметра достаточно близки, о чем будет сказано позднее, примем сторону квадратного витка  $\ell_{\text{кв}} = 0,25$  м. Тогда, в соответствии с (9), получим следующую оценку для близлежащих витков:

$$f = 8 \cdot 10^{-7} i^2 \left( 25 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{25} \right) = 191,55 \cdot 10^{-7} i^2.$$

При переменном токе  $i = I_m \sin\omega t$  получаем, в соответствии с предыдущим выражением:

$$f = 191,55 \cdot 10^{-7} I_m^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = 191,55 \cdot 10^{-7} I^2 (1 - \cos 2\omega t),$$

где  $I$  – действующее значение, принимаемое равным 600 А.

Отсюда  $f = 6,9$  Н как для постоянной составляющей, так и для амплитуды переменной составляющей.

При удвоении значения  $h$ , т.е. для расстояния между следующим соосным витком в однослойной обмотке, когда  $h = 2 \cdot 10^{-2}$  м, в соответствии с (9) получаем 3,28 Н, а при утроении – уже 2,06 Н. Таким образом, на крайний виток слоя будет действовать притягивающее усилие в 12,5 Н или 1,3 кГ только при учете трех ближайших витков.

Однако для многослойных соленоидов такой подход к определению сил, действующих на край-

ние витки, не является оптимальным. Известны выражения для определения сил на виток от соосного соленоида в целом, основанные на публикации [7]. Для записи этого выражения рассмотрим рис. 3, в котором расстояние от середины соленоида до крайнего витка, на который воздействует сила от соленоида, обозначено как  $h$ . Тогда, на основании [7], сила, действующая на виток при протекании тока  $i$ , будет равна:

$$f = -\mu_0 \frac{i^2 w_2}{2s/R_2} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ Q_{1/2}(g_1) - Q_{1/2}(g_2) \right], \quad (11)$$

$$\text{где } g_{1,2} = 1 + \frac{[(h \mp s)/R_2]^2 + \left( \frac{R_1}{R_2} - 1 \right)^2}{2R_1/R_2};$$

$Q_{1/2}$  – сферические функции Лежандра второго рода с полуцелым индексом с аргументами  $g_1$  и  $g_2$ .

Допуская, что  $R_1 \approx R_2 = R$ , получим:

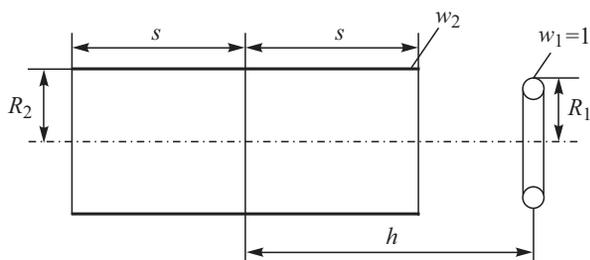
$$f_{|R_1=R_2=R} = -\mu_0 \frac{i^2 w_2}{2s/R} \left\{ \begin{array}{l} Q_{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h-s}{R} \right)^2 \right] \\ - Q_{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h+s}{R} \right)^2 \right] \end{array} \right\}. \quad (12)$$

Пусть теперь число витков в слое в двухслойной конструкции соленоида равно  $w_2 = 43$ ,  $2s = 0,35$  м,  $h = s + \Delta s$  и  $\Delta s = 0,01$  м, где  $\Delta s$  – расстояние по оси между соседними витками. Примем  $R = 1 \text{ м}/2\pi \approx 0,159$  м. Расчетное выражение для силы на крайний виток в слое получает вид

$$f = -4\pi \cdot 10^{-7} \frac{i^2 \cdot 43 \cdot 0,159}{0,35} \left\{ \begin{array}{l} Q_{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta s}{R} \right)^2 \right] \\ - Q_{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2s + \Delta s}{R} \right)^2 \right] \end{array} \right\} = -4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 19,534 i^2 \left[ Q_{1/2}(1 + 0,002) - Q_{1/2}(3,563) \right].$$

Выразим  $Q_{1/2}(3,563)$  через полные эллиптические интегралы  $K$  и  $E$ :

$$Q_{1/2}(3,563) = 3,563 \sqrt{\frac{2}{4,563}} K \left( \sqrt{\frac{2}{4,563}} \right) - (2 \cdot 4,563)^{\frac{1}{2}} E \left( \sqrt{\frac{2}{4,563}} \right).$$



**Рис. 3.** Соленоид высотой  $2s$  и один соосный виток  
**Fig. 3.** Solenoid with height of  $2s$  and one coaxial coil

Действительно, согласно 8.13 в [8], связь функции  $Q_{1/2}(z)$  с полными эллиптическими интегралами записывается следующим образом:

$$Q_{1/2}(z) = z \sqrt{\frac{2}{z+1}} K \left( \sqrt{\frac{2}{z+1}} \right) - [2(z+1)]^{1/2} E \left( \sqrt{\frac{2}{z+1}} \right).$$

Поэтому  $Q_{1/2}(3,563) = 2,359K(0,662) - 3,021E(0,662)$ .

Тогда, в соответствии с табл. 17.1 в [8], имеем:

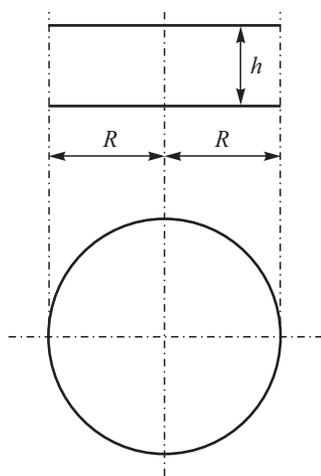
$$K(0,662) \cong 1,802 \text{ и } E(0,662) \cong 1,381.$$

В итоге для  $Q_{1/2}(3,563)$  получаем следующее численное значение:

$$Q_{1/2}(3,563) = 4,251 - 4,172 \cong 0,079.$$

Теперь, используя выражение для  $Q_{1/2}(1 + \Delta z)$ , когда  $|\Delta z| \leq 0,5$ , а именно [9],

$$Q_{1/2}(1 + \Delta z) = \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta z}{2} \left[ \ln \left( \frac{2 + \Delta z}{\Delta z} \right) - 1,2274 \right] + \frac{3}{8}\Delta z,$$



**Рис. 4.** Два соосных круговых контура радиуса  $R$  с расстоянием  $h$  между ними

**Fig. 4.** Two round coaxial circuits of radius  $R$  with distance  $h$  between them

найдем для  $Q_{1/2}(1,002) \cong 2,843$ , а для разности  $Q_{1/2}(1,002) - Q_{1/2}(3,563)$  – значение 2,764.

Теперь, при действующем значении тока  $I = 600$  А, для постоянной составляющей силы  $f_{\pm}$  получим:  $f_{\pm} = -4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,36 \cdot 10^6 \cdot 19,534 \cdot 2,764 \cong -24,43$  Н или  $-2,5$  кГ. Знак минус означает, что сила притягивает виток. Учет второго слоя при том же числе витков и радиусе, весьма незначительно отличающимся от радиуса внешнего слоя, приведет к удвоенной оценке силы на каждый из крайних витков в двухслойной конструкции, т.е. к 5 кГ, а на конструктивные элементы, удерживающие крайние витки, до 10 кГ. В то же время следует принимать во внимание и переменную составляющую, которая в определенные моменты времени будет доводить общее усилие до 20 кГ.

Усилия будут восприниматься диэлектрическим каркасом соленоидов при условии закрепления витков в пазах конструктивных элементов, в так называемых гребенках, во избежание смещения витков и коротких замыканий, и на это обстоятельство следует обратить особое внимание.

В завершение вернемся к вопросу о допустимости замены круглого витка квадратным витком и наоборот при условии равновеликости периметров. С этой целью используем приближение [2]:

$$M_{кр} = \mu_0 R \left[ \left( \left( 1 + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{15}{64}\xi^4 + \dots \right) \ln \frac{4}{\xi} - 2 - \right) \right. \\ \left. \left( -\frac{1}{4}\xi^2 + \frac{31}{128}\xi^4 - \dots \right) \right],$$

где  $\xi = h/2R$  (рис. 4).

Для силы притяжения витков найдем (Приложение П1):

$$f_{кр} \cong \mu_0 i^2 \left( \frac{R}{h} - \frac{3}{8} \frac{h}{R} \ln \frac{R}{h} - 0,217 \frac{h}{R} \right). \quad (13)$$

Если в формуле (9) осуществить подстановку  $\ell = \pi R/2$  исходя из равновеликости периметров, то будем иметь:

$$f_{кв} \cong \mu_0 i^2 \left( \frac{R}{h} - \frac{2}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{h}{R} \right). \quad (14)$$

Положим в (13) и в (14)  $R/h = 10$ . Тогда из (13) и (14) соответственно получим

$$f_{кр} \cong \mu_0 i^2 \cdot 9,892 \text{ и } f_{кв} \cong \mu_0 i^2 \cdot 9,306,$$

т.е. значения сил в обоих случаях при  $R/h \geq 10$  будут близки.

Аналогичные соображения относительно несущественной зависимости коэффициентов самоиндукции от формы плоских контуров при условии равенности периметров имеются в [3].

## Приложение

Annex

Выражение для взаимной индуктивности коаксиальных круговых контуров (рис. 4) в [2] записано в виде формулы (5-17), дифференцированием которой по  $h$  при малых  $\xi = h/2R$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{кр}}{\partial h} &= \mu_0 R \frac{\partial}{\partial h} \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 - \dots \right) \ln \frac{8R}{h} - \right. \\ &\quad \left. - 2 - \frac{h^2}{16R^2} + \dots \right] \cong \\ &\cong \mu_0 R \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 \right) \left( -\frac{1}{h} \right) + \frac{3}{8} \frac{h}{R^2} \ln \frac{8R}{h} - \frac{3h}{8R^2} \right] \cong \\ &\cong -\mu_0 \left( \frac{R}{h} + \frac{9}{16} \frac{h}{R} - \frac{3h}{8R} \ln 8 - \frac{3h}{8R} \ln \frac{R}{h} \right) = \\ &= -\mu_0 \left( \frac{R}{h} - 0,217 \frac{h}{R} - \frac{3h}{8R} \ln \frac{R}{h} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Здесь минус показывает, что с увеличением  $h$  коэффициент  $M_{кр}$  уменьшается. Умножая на  $i^2$ , получаем для силы притяжения выражение (13).

## Библиографический список

References

1. Grover F.W. Inductance calculation. N.Y, Van-Nostrand, 1946.
2. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Л.: Энергоатомиздат. 1986. [P. Kalantarov, L. Tseitlin. Calculation of inductances. Leningrad: Energoatomizdat, 1986. (in Russian)].
3. Clayton R. Paul. Inductance: Loop and Partial. John Willey and Sons. Inc. 2010.
4. Кузнецов И.Ф., Цицикян Г.Н. Электродинамические усилия в токоведущих частях электрических аппаратов и токопроводов. Л.: Энергоатомиздат, 1989. [I. Kuznetsov, G. Tsitsikyan. Electrodynamical forces in

- live parts of electric equipment and current-conducting wires. Leningrad: Energoatomizdat, 1989. (in Russian)].
5. Цицикян Г.Н. Электродинамические силы в токоведущих частях электротехнических комплексов. СПб.: ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 2016. [G. Tsitsikyan. Electrodynamical forces in current carrying parts of electrotechnical systems. St. Petersburg: KSRC, 2016. (in Russian)].
6. Цицикян Г.Н., Ежов В.В. О расчете электродинамических усилий в некоторых конфигурациях проводников // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 5. С. 70–76. [G. Tsitsikyan, V. Yezhov. On electrodynamic force calculations in certain designs of conductors // USSR Academy of Sciences. Izvestiya. Power engineering and transport. 1989; 5: 70–6. (in Russian)].
7. Цицикян Г.Н. Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. № 6. С. 90–99. [G. Tsitsikyan. Mutual inductances and interaction forces of coaxial circuits, solenoids and coils // USSR Academy of Sciences. Izvestiya. Power engineering and transport. 1985; 6: 90–9. (in Russian)].
8. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. [M. Abramovitz, I. Stegun. Handbook of mathematical functions. Moscow: Nauka, 1979. (Russian translation)].
9. Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле и силовые взаимодействия цилиндрического индуктора с проводящей пластиной при импульсном токе // Электричество. 1998. № 9. С. 52–58. [G. Tsitsikyan. Electromagnetic field and force interactions of cylindrical inductor with conducting plate under pulse current // Elektrichestvo (Electricity). 1998; 9: 52–8. (in Russian)].

## Сведения об авторе

Цицикян Георгий Николаевич, д.т.н., профессор, начальник сектора – заместитель начальника отдела филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, ул. Благодатная, 6. Тел.: 8 (812) 748-52-39. E-mail: George20021940@mail.ru.

## About the authors

Tsitsikyan, Georgy N., D. Sc., Prof., Head of Sector – Deputy Head of Department, TSNII SET, KSRC. Address: 6, Blagodatnaya st. St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: 8 (812) 748-52-39. E-mail: George20021940@mail.ru.

Поступила / Received: 15.02.18  
Принята в печать / Accepted: 31.05.18  
© Цицикян Г.Н., 2018