Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II

К.т.н. В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

В предыдущих работах [1, 2] были рассмотрены изотропные и ортотропные оболочки общего вида, находящиеся под действием статической или динамической механической нагрузки в условиях проявления упругих, нелинейно-упругих и вязкоупругих свойств материала.

При этом предполагалось, что оболочки, закрепленные по контуру определенным образом, могут быть подкреплены ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий (направленных по линиям кривизны) с внутренней стороны (со стороны вогнутости в случае выпуклых оболочек).

В работе [1], исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получен функционал полной энергии деформации ребристых оболочек общего вида при динамических нагрузках (действие) и при определенных допущениях выведены из условия стационарности действия уравнения движения (с соответствующими граничными и начальными условиями) для пологих ребристых оболочек.

В работе [2], исходя из вариационного принципа Лагранжа, получен функционал полной энергии деформации ребристых оболочек общего вида при статических нагрузках (разность потенциальной энергии и работы внешних сил) и выведены из условия стационарности функционала Лагранжа общие уравнения равновесия ребристых оболочек, а также естественные граничные условия.

В настоящей работе выполнено обобщение, развитие и анализ предложенных автором статических математических моделей на случаи задач динамики для ребристых оболочек общего вида и при учете различных свойств материала.

Рассматриваем процесс движения оболочки на промежутке времени [t_0, t_1].

В соответствии с фундаментальным принципом наименьшего действия (в форме Гамильтона – Остроградского) истинные траектории движения точек системы для данного промежутка времени должны доставлять стационарное значение величине (действию) [1]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi + A^E)dt \text{ , (1)}$$

где K и Π – кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно;
A^E – работа внешних сил.

Математически принцип наименьшего действия в этом случае выражается в виде вариационного уравнения

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(K - \Pi + A^E\right)dt = 0 \text{ , (2)}$$

где δ – символ (изохронной) вариации.

Здесь

$$K = \frac{\rho}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial U^z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t}\right)^2\right] d\Omega \quad (3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_\Omega [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}^z + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}^z + \tau_{xy}\gamma_{xy}^z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}]d\Omega \text{ , (4)}$$

$$A^E = \frac{1}{2}\iint_S (P_x U + P_y V + qW)dS \text{ , (5)}$$

где $\rho = \gamma / g \approx const$ (γ –удельный вес материала оболочки, g – ускорение силы тяжести);

P_x, P_y и q – компоненты внешней механической нагрузки в направлении координатных линий x, y и z; Ω – область в пространстве (x, y, z);

S – область в плоскости (x, y);

$d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно $\left(d\Omega = ABdxdydz; dS = ABdxdy\right)$.

Проинтегрировав по z ($-h/2 \le z \le h/2 + H$) выражения (4) и (3), получим

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_S \left[N_{xx}\varepsilon_{xx} + N_{yy}\varepsilon_{yy} + N_{xy}\gamma_{xy} + M_{xx}\chi_1 + M_{yy}\chi_2 + 2M_{xy}\chi_{12} + Q_{xz}(\psi_x - \theta_1) + Q_{yz}(\psi_y - \theta_2)\right] dS, \quad (6)$$

где внутренние силовые факторы (усилия, моменты и поперечные силы) вычисляются (в зависимости от учитываемых свойств материала) с помощью соотношений (4), (7) или (10), приведенных в работах [1, 2], а деформации – по формулам (1) и (2) работ [1, 2].

Кроме того,

$$K = \frac{\rho}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{(h+\bar{F})\left(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2\right) + 2\bar{S}\left(\dot{U}\dot{\psi}_x + \dot{V}\dot{\psi}_y\right) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\left(\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2\right)\right\} dS. \quad (7)$$

Преобразуем вариационное уравнение (2) с учетом соотношений (3)–(6) так, чтобы под знаком (тройного) интеграла не было вариаций от производных искомых функций U, V, W, ψ_x, ψ_y.

В результате вариационное уравнение (2) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Bigg\{&\left[\Phi_1(U,V,W,\psi_x,\psi_y) + P_x - \rho\left((h+\bar{F})\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \rho\bar{S}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right)\right]\delta U + \\
&+\left[\Phi_2(U,V,W,\psi_x,\psi_y) + P_y - \rho\left((h+\bar{F})\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \rho\bar{S}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}\right)\right]\delta V + \\
&+\left[\Phi_3(U,V,W,\psi_x,\psi_y) + q - \rho(h+\bar{F})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right]\delta W + \\
&+\left[\Phi_4(U,V,W,\psi_x,\psi_y) - Q_{xz} - \rho\bar{S}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right]\delta\psi_x + \\
&+\left[\Phi_5(U,V,W,\psi_x,\psi_y) - Q_{yz} - \rho\bar{S}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}\right]\delta\psi_y\Bigg\} ABdxdydt + \\
&+\rho\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Bigg\{\left[(h+\bar{F})\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{S}\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right]\delta U + \left[(h+\bar{F})\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{S}\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right]\delta V + \\
&+(h+\bar{F})\frac{\partial W}{\partial t}\delta W + \left[\bar{S}\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right]\delta\psi_x + \\
&+\left[\bar{S}\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\frac{\partial \psi_y}{\partial t}\right]\delta\psi_y\Bigg\}\Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} ABdxdy - \int_{t_0}^{t_1}\int_{-b}^{b}\Big[N_{xx}\delta U + N_{xy}\delta V - \big(N_{xx}\theta_1 + \\
&+N_{xy}\theta_2 + Q_{xz}\big)\delta W + M_{xx}\delta\psi_x + M_{xy}\delta\psi_y\Big]\Bigg|_{x=-a}^{x=a} Bdydt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{-a}^{a}\Big[N_{xy}\delta U + N_{yy}\delta V - \big(N_{yy}\theta_2 + \\
&+N_{xy}\theta_1 + Q_{yz}\big)\delta W + M_{xy}\delta\psi_x + M_{yy}\delta\psi_y\Big]\Bigg|_{y=-b}^{y=b} Adxdt = 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_1(U,V,W,\psi_x,\psi_y)=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BN_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(AN_{xy})}{\partial y}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial x}N_{yy}-\frac{\partial A}{\partial y}N_{xy}\right)-K_xQ_{xz}+K_x(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2),$$

$$\Phi_2(U,V,W,\psi_x,\psi_y)=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(AN_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(BN_{xy})}{\partial x}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}N_{xx}-\frac{\partial B}{\partial x}N_{xy}\right)-K_yQ_{yz}+K_y(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1),$$

$$\Phi_3(U,V,W,\psi_x,\psi_y)=$$

$$=K_xN_{xx}+K_yN_{yy}+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BQ_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(AQ_{yz})}{\partial y}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)}{\partial x}+\frac{\partial A(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)}{\partial y}\right),$$

$$\Phi_4(U,V,W,\psi_x,\psi_y)=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BM_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(AM_{xy})}{\partial y}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial x}M_{yy}-\frac{\partial A}{\partial y}M_{xy}\right),$$

$$\Phi_5(U,V,W,\psi_x,\psi_y)=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(AM_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(BM_{xy})}{\partial x}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}M_{xx}-\frac{\partial B}{\partial x}M_{xy}\right).$$

Очевидно, что в уравнении (8) вариации $\delta U,\delta V,\delta W,\delta\psi_x$ и $\delta\psi_y$ следует считать произвольными. Следовательно, приравнивая нулю сомножители, стоящие перед каждой из указанных вариаций, получаем уравнения движения оболочки:

$$\Phi_1(U,V,W,\psi_x,\psi_y)+P_x-\rho\left[(h+\overline{F})\frac{\partial^2U}{\partial t^2}+\overline{S}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\Phi_2(U,V,W,\psi_x,\psi_y)+P_y-\rho\left[(h+\overline{F})\frac{\partial^2V}{\partial t^2}+\overline{S}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\Phi_3(U,V,W,\psi_x,\psi_y)+q-\rho(h+\overline{F})\frac{\partial^2W}{\partial t^2}=0;$$

$$\Phi_4(U,V,W,\psi_x,\psi_y)-Q_{xz}-\rho\left[\overline{S}\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2}+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\Phi_5(U,V,W,\psi_x,\psi_y)-Q_{yz}-\rho\left[\overline{S}\frac{\partial^2V}{\partial t^2}+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right]=0. \quad (9)$$

Из вариационного уравнения (8) получаем естественные *граничные* (*краевые*) условия:

- при $x=-a$ и $x=a$

$N_{xx}=const$ или $U=const$, $N_{xy}=const$ или $V=const$,

$-N_{xx}\theta_1-N_{xy}\theta_2+Q_{xz}=const$ или $W=const$,

$M_{xx}=const$ или $\psi_x=const$, $M_{xy}=0$ или $\psi_y=const$;

- при $y=-b$ и $y=b$

$N_{xy}=const$ или $U=const$, $N_{yy}=const$ или $V=const$,

$-N_{yy}\theta_2-N_{xy}\theta_1+Q_{yz}=const$ или $W=const$,

$M_{xy}=const$ или $\psi_x=const$, $M_{yy}=const$ или $\psi_y=const$.

Из вариационного уравнения (8) получаем также и *начальные* условия при $t=t_0$:

$$(h+\overline{F})\frac{\partial U}{\partial t}+\overline{S}\frac{\partial\psi_x}{\partial t}=const \text{ или } U=const;$$

$$(h+\overline{F})\frac{\partial V}{\partial t}+\overline{S}\frac{\partial \psi_y}{\partial t}=const \text{ или } V=const;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=const \text{ или } W=const;$$

$$\overline{S}\frac{\partial U}{\partial t}+[(h^3/12)+\overline{J}]\frac{\partial \psi_x}{\partial t}=const \text{ или } \psi_x=const;$$

$$\overline{S}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}+[(h^3/12)+\overline{J}]\frac{\partial \psi_y}{\partial t}=const \text{ или } \psi_y=const.$$

Полученные уравнения движения (9) ортотропных и изотропных ребристых оболочек общего вида учитывают геометрическую нелинейность, дискретность расположения ребер (или вырезов), их ширину, сдвиговую и крутильную жесткость ребер, а также эффект поперечных сдвигов и инерции вращения.

Кроме того, уравнения (9) позволяют учитывать нелинейную упругость, а также возможные деформации ползучести материала.

Примечание. В частном случае *пологих* ребристых оболочек (в процессе деформирования которых полагается, что величины K_xU и K_yV малы, $\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}>>K_xU$ и $\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y}>>K_yV$, а значит $\theta_1\approx-\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}$; $\theta_2\approx-\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y}$, причем $A=B=1$) уравнения движения (9) существенно упрощаются и имеют вид

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}-K_xQ_{xz}+K_x(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)+P_x-\rho\left[(h+\overline{F})\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\overline{S}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}-K_yQ_{yz}+K_y(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)+P_y-\rho\left[(h+\overline{F})\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\overline{S}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$K_xN_{xx}+K_yN_{yy}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}-\left(\frac{\partial(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)}{\partial x}+\frac{\partial(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)}{\partial y}\right)+q-$$

$$-\rho(h+\overline{F})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0;$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_{xz}-\rho\left[\overline{S}\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial t^2}+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_{yz}-\rho\left[\overline{S}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}\right]=0.$$

Граничные и начальные условия для пологих оболочек сохраняют прежний вид.

Литература

1. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 1. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov.html.
2. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 2.– Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_02/zhgoutov1.html.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru