XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.III: С.78-79, 2001.

УДК 621.9:519.3

С.А. Матвеев (асп., БГТУ), К.М. Иванов, д.т.н., проф. БГТУ

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

При решении задач упругопластического анализа в линейной области применение процедуры конечно-элементной аппроксимации приводит, как правило, к хорошо обусловленным системам алгебраических уравнений. В пластической области наблюдается серьезное расхождение между решениями, полученными по различным методикам и на различных конечно-элементных сетках (см., например, [1]). Это свидетельствует о сильной неустойчивости решений МКЭ в пластической области. Рассмотрим некоторые вопросы оценки точности и устойчивости решения задач упругопластического анализа МКЭ применительно к обработке металлов давлением, а именно, априорные оценки упругопластического анализа МКЭ, носящие, как правило, приближенный характер и не учитывающие специфики моделируемого процесса, но позволяющие оценить слабые звенья методики расчета и устранить их влияние. При реализации МКЭ на ЭВМ с практической точки зрения наибольшее значение имеет оценка двух видов погрешности: погрешности аппроксимации и наследственной погрешности исходных данных. В дальнейшем используется одна и та же математическая модель – теории течения с изотропным упрочнением, справедливая в случае траекторий малой кривизны и широко применяемая при анализе процессов обработки давлением [2].

Начнем с погрешности аппроксимации. Адаптируем ранее используемые подходы [3...6] и полученные результаты к решению задач упругопластического анализа. Задача упругопластического анализа для приращений нагрузки решается с использованием итерационных методов, они позволяют получить решение со сколь угодно малой заданной точностью. Однако, даже при точном решении разрешающей системы уравнений МКЭ, мы не получим точного решения задачи по причине использования дискретной модели. При проведении расчетов именно шаг дискретизации подлежит коррекции, и оценка внешней при этом погрешности имеет большое практическое значение. Согласно [4, 6] на каждом шаге итерации верхней оценкой погрешности можно считать величину δU

$$\delta U \le \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\Phi}{\lambda_{\min}}} \tag{1}$$

где $\Delta\Phi$ - погрешность аппроксимации функционала в области минимума; λ_{min} - наименьшее по модулю собственное значение положительно определенной матрицы жесткости $[K]$. Величина $\Delta\Phi$ может быть найдена из анализа конечно-элементной аппроксимации искомого поля перемещений как остаточный член разложения в степенной ряд по координатам в окрестности центра тяжести элемента. Окончательно ([1], [3], [4]), верхняя оценка погрешности аппроксимации функционала в предположении, что внешние силы заданы точно, имеет вид [6]:

$$2 \cdot \Delta\Phi \le l_x l_y \cdot \frac{1}{2}\left[2 \cdot d_{11}\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} l_y\right)^2 + 2d_{22} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} l_x\right)^2 + 3d_{33}\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} l_x - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} l_y\right)^2\right] \tag{2}$$

где l_x , l_y - размеры прямоугольника вдоль осей x и y соответственно; d_{11}, d_{22}, d_{33} - диагональные элементы матрицы пластичности $[D^p]$ для случая плоской деформации [1]. Для оценки наследственной погрешности исходных данных необходимо рассмотреть проблему обусловленности разрешающей системы алгебраических уравнений МКЭ

$$\left[K + \Delta K\right] \cdot \left\{U + \Delta U\right\} = \left\{P\right\}, \tag{3}$$

где $[\Delta K]$ - погрешность матрицы жесткости, оцениваемая матричной нормой $\|\Delta K\|$, U - перемещения, ΔU - погрешность перемещения, оцениваемая векторной нормой $\|\Delta U\|$.Условие корректности системы (3) можно выразить следующими условиями:

$$\left.\begin{array}{l} \det K \neq 0, \\ \|\Delta K\| \cdot \|K^{-1}\| < 1 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Зависимость (4) позволяет при известных погрешностях исходных данных определить погрешность решения задачи. Важной является и обратная задача - определение предельной погрешности исходных данных, при которой система уравнений (3) является корректной. Однако решение данной задачи в аналитическом виде не представляется возможным, что определяет решающую роль в данном случае вычислительного эксперимента. Если система (3) корректна, то возможна оценка предельной наследственной погрешности данных. Матрица жесткости задается с погрешностью. Вектор нагрузки (условия нагружения) задаем точно, что близко к реальному случаю. Тогда верхнюю оценку наследственности можно выразить в виде

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} = \frac{\|K\| \cdot \|K^{-1}\|}{1 - \|\Delta K\| \cdot \|K^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta K\|}{\|K\|} \tag{5}$$

Из (5) видно, что устойчивость решения к изменению исходных данных зависит как от числа обусловленности матрицы жесткости cond $K = \|K\| \cdot \|K^{-1}\|$, так и от погрешности исходных данных выраженных через погрешность $\|\Delta K\|$. Для учета взаимного влияния указанных факторов используем число обусловленности системы уравнений m, m=cond $K \cdot \|\Delta K\| / \|K\|$.

В расчетах имеет смысл рассматривать системы, для которых оценка m заметно меньше единицы.

Представленный выше аппарат ни в коем случае не может быть использован для точной оценки погрешности упругопластического анализа МКЭ, а лишь позволяет оценить влияние различных видов погрешностей при различных условиях деформирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Теория пластических деформаций металлов / Е.П. Унксов и др.; Под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.М.: Машиностроение,1975. 400 с.
3. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.
4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
6. Бакунин В.М., Рассоха А.А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов. М.: Машиностроение. 1987. 312 с.