XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.IV: С.7-8, 2001.

А. А. Копытин (5 курс, каф. ПМ), И. Н. Костин, к.ф.-м.н., с.н.с. ПОМИ им. Стеклова

ТЕОРЕМА ГРОБМАНА–ХАРТМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Задача: Теорема Гробмана – Хартмана – классический результат о топологической сопряженности нелинейного отображения в окрестности гиперболической неподвижной точки с его дифференциалом.

Будем далее рассматривать Банахово пространство, и обозначим его X. Пусть S – непрерывное дифференцируемое отображение в пространстве X, и пусть 0 – гиперболическая неподвижная точка отображения S, т. е. такая, что $S(0) = 0$ и $(DS)(0)\colon X \to X$, где $(DS)(0)$ – обратимый линейный оператор, спектр которого не пересекается с единичной окружностью.

В классической формулировке теорема Гробмана – Хартмана представляет собой следующее утверждение: Пусть V – окрестность 0 в Банаховом пространстве X и пусть $S\colon V \to X$ - отображение, которое является C^1 диффеоморфизмом между V и SV, причем 0 – гиперболическая неподвижная точка отображения S.

Тогда существует окрестность 0 U такая, что $U \subset V$ и гомеоморфизм h окрестности U на некоторую другую окрестность 0 в X такие, что для всех $z \in U$

$$h(L(z))=S(h(z)), \qquad \text{где } L=(DS)(0).$$

Предполагается обобщение этого результата на случай, когда $(DS)(0)$ – оператор, не имеющий непрерывного обратного.

План доказательства таков: аппроксимировать отображение S его сужениями на конечномерные инвариантные многообразия в окрестности 0, для каждой аппроксимации применить классический вариант теоремы и затем перейти к пределу.

2. Классическая теорема Гробмана – Хартмана подробно изучена и доказана в [1].

Для инвариантных многообразий используются сведения из [2].

План доказательства аналогичный доказательству теоремы изложенной в [3].

3. Доказательство состоит из трех частей. Первая часть в нашей работе сформулировать и доказать теорему Гробмана – Хартмана для всей области (заметим, что в классическом виде теорема Гробмана – Хартмана сформулирована и доказана для окрестности гиперболической неподвижной точки).

Вторая часть включает в себя теорему (формулировку и доказательство этой теоремы можно посмотреть в [2]), утверждающую, что Банахово пространство можно разложить на инвариантные множества. Для доказательства этой теоремы оператор S разлагается на линейную (L) и нелинейную части (Φ).

В третьей части предполагается переход к пределу, причем оказывается, что единственное $\Phi(\cdot)$, удовлетворяющее всем оценкам, это - 0. Поэтому от ограничений на $\Phi(\cdot)$ приходится отказаться и наложить более тонкие ограничения, а затем с новыми условиями доказать теорему, указанную во второй части работы.

4. *Заключение.* К сожалению, пока не удалось наложить, необходимые для дальнейшей работы, ограничения на нелинейную часть оператора S. Но, возможно, уже в скором времени эти ограничения будут получены и доказана теорема Гробмана - Хартмана для уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нитецки З. *Введение в дифференциальную динамику*. Москва. "Мир", 1975.
2. Kostin I. N. *Relatively unstable invariant sets of nonlinear operators.* Записки научных семинаров ПОМИ, том 243. Санкт-Петербург. 1997.

3. Kenning Lu *A Hartman – Grobman theorem for scalar reaction – diffusion equations*. J. Differential Equation 93 (1991). № 2.