XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.IV: С.21-22, 2001.

УДК 531.391.1:598.12

М.В.Вайндрах (5 курс, каф. МПУ), Ю.Г.Исполов, д.ф-м.н., проф.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗМЕИ

Змея является необычным сухопутным живым существом как с точки зрения биологии, так и механики, ибо оно не имеет конечностей и, следовательно, не может передвигаться, отталкиваясь ими от земли. Целью этой работы является изучение принципа движения змеи посредством построения и анализа адекватной математической модели движения.

Замечено, что остающийся за змеёй след (например, на песке), как правило, имеет чёткий, “неразмытый” вид (змея ползёт по своему же следу). Это может быть лишь в том случае, если в каждой точке змеи скорость направлена только вдоль тела. Силы, обеспечивающие такие неголономные связи и являются движущими для змеи силами.

Тело змеи представляется в виде нерастяжимого гибкого стержня, причём, внутренний момент не является функцией кривизны стержня в данной точке, а является управляющим, задаваемым независимо. Это утверждение можно интерпретировать следующим образом: змея, согласованно напрягая боковые мышцы вдоль позвоночника, создаёт внутренние моменты, вызывающие необходимые для движения реакции неголономных связей со стороны поверхности (на рис. 2 эта сила обозначена буквой R).

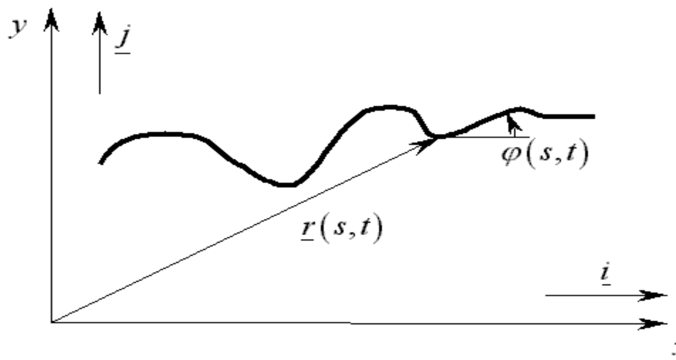

Рис. 1

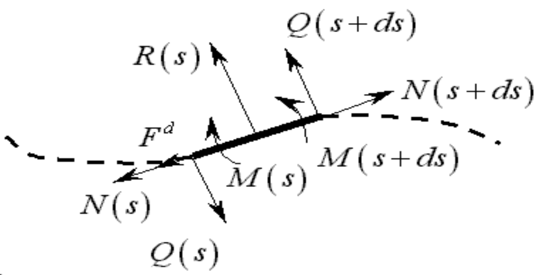

Рис. 2

Из условия нерястяжимости

$$\underline{r}' = \underline{e} \tag{1}$$

и уравнения неголономных связей

$$\underline{V} \cdot \underline{n} = 0 \tag{2}$$

($\underline{e}$ - орт касательной, $\underline{n}$ - орт нормали) следует важный факт: модуль вектора скорости точек змеи не зависит от координаты s, т.е.

$$\underline{V} = V(t)\underline{e} \tag{3}$$

Смоделируем силы сопротивления с поверхностью законом обычного вязкого трения

$$\underline{F}^d = -b\underline{V} \tag{4}$$

Уравнения движения змеи в проекциях на подвижные оси (см. рис. 2):

$$\rho \dot{V}_\tau = N' - Q\varphi' - bV \tag{5}$$

$$\rho V_\tau \dot{\varphi} = Q' + N\varphi' + R \tag{6}$$

$$M' + Q = 0\,, \tag{7}$$

где $\rho = m/L$ - линейная плотность змеи.

Граничные условия: $N(0) = Q(0) = M(0) = 0$, силовым факторам со стороны головы - $N(L), Q(L), M(L)$ - допускается быть ненулевыми, так как змея при движении может подкручивать головой. Однако в последующих построениях будем полагать $N(L) = Q(L) = 0$, ненулевым остаётся лишь момент $M(L)$.

Из уравнений (5), (7) и из однородных граничных условий на N, получаем уравнение

$$m\dot{V} = -bLV + \int_0^L M'\varphi' ds, \tag{8}$$

которое можно назвать "уравнением разгона" змеи. Видно, что соответствующим подбором управляющих моментов M можно обеспечить тягу.

Рассмотрим движение змеи по слабо извилистой синусоиде:

$$\underline{r}(s,t) = \underline{i}\left(s_0 + s + \int_0^t V(\tau)\,d\tau\right) + \underline{j}\varepsilon \sin\left(k\left(s_0 + s + \int_0^t V(\tau)\,d\tau\right)\right), \qquad 0 \le s \le L \tag{9}$$

Выберем закон управления таким образом, чтобы интеграл в уравнении (8) был бы неотрицательным при любой конфигурации змеи:

$$M' = \frac{4\alpha}{L^2} s(L-s)\varphi' \to M = \frac{4\alpha}{L^2}\int_0^s \varphi' s(L-s)\,ds \tag{10}$$

При таком выборе управляющих моментов обеспечивается не только стабильная движущая сила, но и выполнение граничных условий на перерезывающую силу Q на обоих концах и на момент M в хвосте змеи.

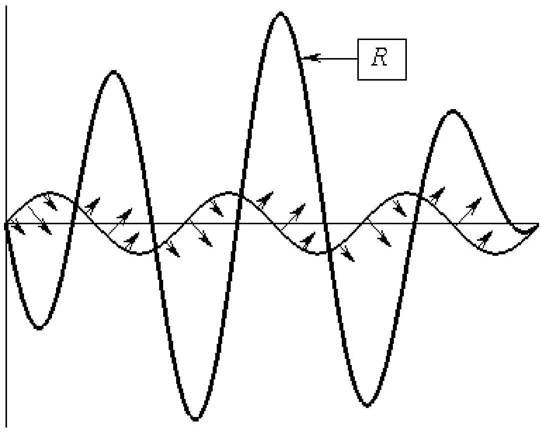

Рис. 3

Приближённое решение уравнения (8) даёт:

$$V(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty)e^{-\frac{bL}{m}t}, \tag{11}$$

где V_0 - начальная скорость, $V_\infty = \alpha k^4 \varepsilon^2 / 3b$ - скорость, на которую выходит змея при достижении баланса движущих сил и сил сопротивления.

Зная закон изменения скорости, из уравнений движения простым интегрированием определяются внутренние силы $Q(s,t)$, $N(s,t)$ и реакции неголономных связей $R(s,t)$. На рис. 3 изображено распределение реакций неголономных связей при постоянной скорости движения V_∞ в определённый момент времени. Схожее распределение (в смысле фаз реакций) будет наблюдаться и в любой другой момент времени. Видно, что существует суммарная продольная составляющая, работающая против сил трения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.
2. Ispolov Yu. G., Smolnikov B. A., Skateboard dynamics, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 131 (1996) 327-333.