XXIX Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч.V: С.64-65, 2001.

УДК 517. (075)

А.Е. Жлудов (4 курс, каф. САиУ), Р.И. Ивановский, д.т.н., проф.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При анализе динамических систем широко используются программные системы компьютерной математики. Возможности MathCAD 7Pro, MathCAD 2000Pro позволяют с успехом решать весь спектр задач исследования детерминированных и стохастических систем во временной области. Именно во временной области могут быть рассмотрены многомерные, нестационарные и нелинейные динамические системы, как в переходных, так и в установившихся режимах. Рассмотрим основные приемы анализа систем на простом примере непрерывной одномерной линейной динамической системы, заданной своей передаточной функцией W(p). Без потери общности будем считать, что W(p) является правильной и соответствует устойчивой системе, т.е. $W(\infty) = 0$, $W(0) = y(\infty)$. Здесь $y(\infty)$ – константа, установившееся значение переходной характеристики системы

Пусть задана передаточная функция системы:

$$W(p) = \frac{0.4\cdot p^2 + 0.6\cdot p + 0.1}{4.0\cdot p^3 + 6.4\cdot p^2 + 3.4\cdot p + 1}$$

Поставим задачу проанализировать динамические свойства этой системы, ее реакцию на единичный скачок и на другие детерминированные воздействия, а также на входной случайный процесс типа белого шума. Для анализа стандартными методами осуществляется переход к форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = Ax + Bu;\ \ y = Hx;\ \ x(0) = x0\ , \qquad (1)$$

с последующим использованием одной из встроенных функций MathCAD для интегрирования систем дифференциальных уравнений. Динамические свойства детерминированной системы определяются собственными числами матрицы A, или, что то же, корнями полинома знаменателя W(p):

$$p^3 + 1.6\cdot p^2 + 0.85\cdot p + 0.25 \text{ solve}, p \rightarrow \begin{bmatrix} -1. \\ -.3 + .4i \\ -.3 - .4i \end{bmatrix}$$

Ориентировочное время затухания составляет для нашей системы три–пять постоянных времени Тэ экспоненты, которая соответствует значению Тэ = 1 : 0.3 = 3.33. Таким образом, система затухает до 5%-ной зоны примерно за 10 единиц времени, до 1%-ной зоны – примерно за 17 единиц. Колебательность переходного процесса определяется мнимой частью комплексных корней. Для нашего случая период колебаний определяется величиной 2π : 0.4 = 15,708 единиц времени. Структура системы может быть выявлена символьной командой factor.

Реакция системы на белый шум w(t) с интенсивностью q будет определяться, по крайней мере, двумя первыми моментами распределения вероятностей, т.е. математическим ожиданием и дисперсией. Наибольший интерес представляет анализ дисперсионных свойств системы и ее выходной переменной y(t).

Характер изменений во времени всех вторых моментов вектора x и выходной переменной y линейной динамической системы (1) полностью определяется так называемыми ковариационными уравнениями:

$$\dot{P} = AP + PA + BQB^T; \; P_y = HPH^T; \quad P(0) = P_0. \tag{2}$$

Здесь P – ковариационная матрица для вектора x, содержащая дисперсии элементов вектора x на своей главной диагонали; Q – матрица интенсивностей (в нашем случае Q = q); $\mathbf{P_y}$ – дисперсия выходной переменной системы.

Численное интегрирование ковариационного уравнения с помощью встроенных функций MathCAD возможно лишь при переформировании его в форму Коши типа (1). Число ковариационных уравнений, подлежащих интегрированию для системы n-го порядка равно n(n + 1)/2. Необходимые выражения получаются символьными преобразованиями правой части ковариационного уравнения:

dp/dt = ARp + BR; r = HRp; p(0).

Здесь r – дисперсия выходной переменной, p(0) – (6 x 1)-вектор начальных значений элементов ковариационной матрицы P. Структура матриц AR, BR, HR приведенной системы дифференциальных уравнений будет зависеть от порядка перечисления элементов матрицы P в векторе p, например pT = | p00, p01, p02, p11, p12, p22 | (ORIGIN = 0).

Собственные числа матрицы AR в нашем примере равны:

$$(-0.6 + 0.8i \quad -0.6 - 0.8i \quad -2 \quad -1.3 + 0.4i \quad -1.3 - 0.4i \quad -0.6)$$

Первые три собственных числа матрицы AR динамики ковариационного уравнения соответствуют удвоенным собственным числам матрицы A исходной системы. Остальные три собственных числа AR образуются попарными суммами корней исходной системы. Для нашего случая процесс изменения дисперсии r выходной переменной системы будет затухать ровно вдвое быстрее, чем переменная y(t), т.е. за 5–8.5 единиц времени. Выявленный факт удвоения темпа переходного процесса необходимо учитывать при выборе интервалов дискретности (шагов по времени) при численном интегрировании ковариационных уравнений или использовании эквивалентных разностных уравнений. Применение символьных преобразований облегчило выявление этого свойства уравнений Ляпунова.