

УДК 539.3

М.Ю.Горохов (5 курс, каф. ЦНИИ РТК),
Б.Е.Мельников, д.т.н., проф., А.С.Семенов, к.ф.-м.н., доц.

ЭФФЕКТ ЦИКЛИЧЕСКОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ МОДЕЛЕЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Описание неупругого поведения материалов с учетом геометрической нелинейности является одной из центральных проблем стоящих перед механикой деформируемого твердого тела. Прежде всего, это касается записи определяющих соотношений, так как именно в них заложен учет своеобразия поведения материала в зависимости от условий его деформирования. На данный момент не существует единой и общепринятой теории неупругого, и, в частности, упруго-пластического поведения материалов при конечных деформациях. Существует множество теорий, при использовании которых обнаруживаются эффекты противоречащие физической картине деформирования. Таким эффектом, например, является эффект ложной циклической неустойчивости, заключающийся в незамкнутости петли пластического гистерезиса при том, что от модели материала ожидается ее асимптотическая замкнутость.

Для решения вопроса о циклической стабильности модели материала простейшей задачей является задача о простом сдвиге при циклическом нагружении. На рис. 1 приведен график зависимости нормированного по модулю сдвига касательного напряжения σ_{12}/μ от деформации сдвига ω в задаче простого сдвига, который иллюстрирует эффект циклической неустойчивости.

В работе выполнено численное решение задачи о простом сдвиге для ряда моделей упругопластического материала с кинематическим упрочнением, отличающихся друг от друга как способом декомпозиции полной деформации на упругую и пластическую части, так и законом кинематического упрочнения.

В настоящее время конкурирующими являются два способа разложения (декомпозиции) конечной упругопластической деформации на упругую и пластическую части. Первый способ – аддитивное разложение тензора скоростей деформации. Типичным примером является реологическая модель Прандтля, обобщенная на случай конечных деформаций В.А.Пальмовым. Второй способ – мультипликативное разложение градиента движения (градиента деформации), предложенное Е.Н.Лее.

Упругая деформация определяется по закону нелинейной упругости, который записывают либо в классической голономной форме, либо в форме закона гипо-упругости с различными типами коротационных производных.

Для пластической деформации (для тензора скоростей пластических деформаций) практически во всех существующих моделях упруго-пластичности в той или иной форме принимается ассоциированный закон пластического течения. Отдельной проблемой является задание тензора пластического вихря (спина). Часто его или эквивалентный ему тензор полагают нулем.

В качестве законов кинематического упрочнения чаще всего выступают обобщенный на случай больших деформаций закон Прагера, или законы, основанные на различных способах соединения реологических моделей, например, закон нелинейной упругости.

Таблица 1

Декомпозиция деформаций	Декомпозиция напряжений	Закон упругости	Закон пластичности	Закон упрочнения	Результат
$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p$	$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}$	$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\mathbf{F}_e \cdot (\lambda \text{Etr} \mathbf{C}_e + 2\mu \mathbf{C}_e) \cdot \mathbf{F}_e^T$	$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$	$\boldsymbol{\rho} = 2J^{-1}\mathbf{F}_p \cdot (\lambda_p \text{Etr} \mathbf{C}_p + 2\mu_p \mathbf{C}_p) \cdot \mathbf{F}_p^T$	✓
	$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}$	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \text{Etr} \mathbf{D}_e + 2\mu \mathbf{D}_e$	$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}} = c \mathbf{D}_p$	✓
$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$	$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}_e - \boldsymbol{\rho}$	$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\mathbf{F}_e \cdot (\lambda \text{Etr} \mathbf{C}_e + 2\mu \mathbf{C}_e) \cdot \mathbf{F}_e^T$	$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$ $\mathbf{W}_p = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\rho} = 2J^{-1}\mathbf{F}_p \cdot (\lambda_p \text{Etr} \mathbf{C}_p + 2\mu_p \mathbf{C}_p) \cdot \mathbf{F}_p^T$	✓
	$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{F}_e \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{F}_e^{-1}$	$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\mathbf{F}_e \cdot (\lambda \text{Etr} \mathbf{C}_e + 2\mu \mathbf{C}_e) \cdot \mathbf{F}_e^T$	$\mathbf{d}_p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$ $\mathbf{w}_p = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\rho} = 2J^{-1}\mathbf{F}_p \cdot (\lambda_p \text{Etr} \mathbf{C}_p + 2\mu_p \mathbf{C}_p) \cdot \mathbf{F}_p^T$	✓
	$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\rho}$	$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\mathbf{F}_e \cdot (\lambda \text{Etr} \mathbf{C}_e + 2\mu \mathbf{C}_e) \cdot \mathbf{F}_e^T$	$\mathbf{d}_p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$ $\mathbf{w}_p = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\rho}^J = c \mathbf{d}_p$	✓
				$\boldsymbol{\rho}^{GN} = c \mathbf{d}_p$	✓
			$\boldsymbol{\rho}^{CR} = c \mathbf{d}_p$	●*	
			$\boldsymbol{\rho}^{Ol} = c \mathbf{d}_p$	●*	

В табл. 1 в графе "Результат" представлен ответ на вопрос о циклической стабильности различных моделей упруго-пластичности (знаком "✓" отмечены циклически стабильные, а знаком "●*" циклически нестабильные модели соответственно).

В табл. 1 приняты следующие обозначения: $\mathbf{F} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^T$ – градиент деформации; $J = \det \mathbf{F}$, $\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^S$ – тензор скоростей деформаций; $\mathbf{W} = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^A$ – тензор вихря; \mathbf{C} – тензор деформации Коши-Грина; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши; $\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_p)}{Y}$; Y – предел текучести; $(\dots)^{\circ \log}$ – логарифмическая коротационная производная; $(\dots)^{J,GN,CR,Ol}$ – коротационные производные Яуманна, Грина-Нахди, Коттер-Ривлина и Олдройда соответственно; $\mathbf{d}_p = (\mathbf{F}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1})^S$; $\mathbf{w}_p = (\mathbf{F}_e \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^{-1})^A$; $\boldsymbol{\rho}$ – тензор, отвечающий за кинематическое упрочнение. В качестве критерия текучести использовался критерий Мизеса $\sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_p) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}_p)} = Y$.

На рис. 2 представлен типичный график зависимости нормированного касательного напряжения σ_{12}/μ от степени сдвига ω получаемый по циклически стабильной модели упруго-пластического материала.

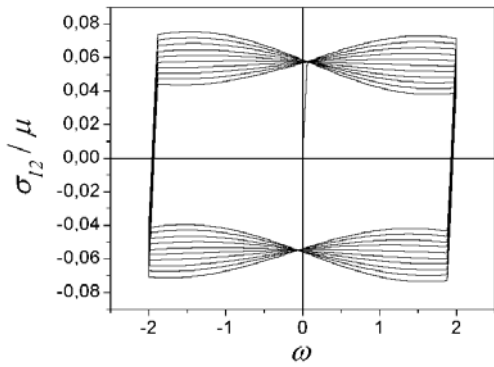


Рис. 1

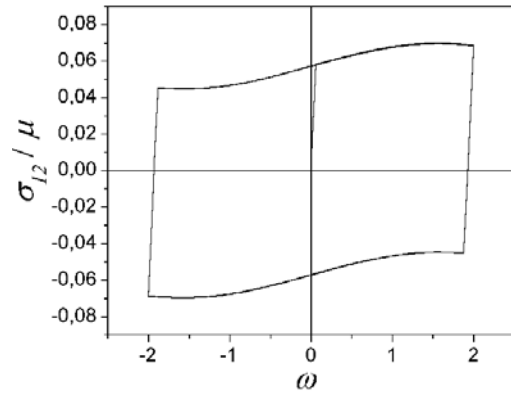


Рис. 2

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о том, что свойство циклической определяется законом кинематического упрочнения. Показано, что при использовании двух последних в таблице 1 законов упрочнения не удовлетворяется второй закон термодинамики. Это позволяет высказать гипотезу о том, что свойство циклической неустойчивости связано с термодинамической несостоятельностью модели. В дальнейших исследованиях предполагается обратить внимание именно на этот аспект проблемы.