XXX Юбилейная Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. IV: С 51-52, 2002.

УДК 514.18

М.А. Иванов (1 курс, каф. МиТОМД), М.С. Кокорин, к.т.н., доц.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЧЕТВЕРКИ

Четыре точки A, B, C и D, лежащие на одной прямой называются гармонической четверкой точек, если AC:CB=AD:DB, т. е. точки C и D делят отрезок AB в одном и том же отношении (одна внутренним, другая внешним). При этом также CA:AD=CB:BD, т. е. и точки A и B делят отрезок CD в одном и том же отношении. Говорят также, что пары(A,B)(C,D) делят друг друга гармонически или что точка C гармонически сопряжена точке D относительно пары (A,B).

Целью настоящей работы является создание геометрических алгоритмов, реализующих теорию гармонических четверок для построения касательных к линиям второго порядка.

Приведем примеры гармонических четверок точек:

1. К двум окружностям разных радиусов, расположенных вне друг друга, проведены две внешние и две внутренние общие касательные. Точки пересечения этих касательных, внешних и внутренних соответственно, и центры двух окружностей, будут образовывать гармоническую четверку точек.

2. Рассмотрим четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой, и соединим их попарно отрезками. Полученная фигура, состоящая из шести отрезков, называется четырехвершинником или полным четырехугольником. Точки пересечения противоположных, то есть не проходящих через одну вершину, сторон называются его диагональными точками, а соединяющие их прямые – его диагоналями.

Из проективной геометрии известны следующие два факта:

1. Любые две диагональные точки, делятся гармонически точками пересечения диагонали проходящей через эти точки со сторонами проходящими через третью диагональную точку;.

2. любые две вершины полного четырехугольника, гармонически делятся диагональной точкой, лежащей на стороне проходящей через эти две вершины, и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.

Два последних утверждения можно доказать используя теоремы Чевы и Менелая, теоремы-леммы. В них говорится об условиях взаиморасположения точек пересечения сторон треугольника с прямыми, проходящими через его вершины. В теореме Чевы говорится об условии взаиморасположения точек, лежащих на сторонах треугольника или на их продолжениях таким образом, чтобы прямые, проходящие через эти точки и противолежащие вершины треугольника, пересекались в одной точке. А в теореме Менелая говорится об условии взаиморасположения этих же точек в том случае, когда они лежат на одной прямой.

Итак, доказав эти два утверждения, мы смело можем сказать, что построение гармонических четверок точек можно осуществлять с помощью четырех вершинников.

С понятием гармонических четверок связаны геометрические задачи на построения касательных к линиям второго порядка. Например, можно построить касательные к окружности проходящие через точку, лежащую вне этой окружности, и точно определить точки соприкосновения касательной с окружностью. Выполняя подобные построения, мы снова сталкиваемся с понятием – четырехвершинник. Точки касания прямых и окружности будут принадлежать поляре заданной точки относительно заданной окружности.

Рассмотренный геометрический алгоритм применим и к построениям касательных к иным линиям второго порядка: эллипсу, параболе и гиперболе.

Выводы: На основе теории гармонических четверок создан геометрический алгоритм построения касательных к линиям второго порядка. Решение данной задачи позволило расширить возможности системы геометрического моделирования “Симплекс” в области решений задач планиметрии.