XXX Юбилейная Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. IV: С.57-58, 2002.

УДК 621.87

В.В. Ремезова (6 курс, каф. ПТСМ), С.А. Соколов, д.т.н., проф.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Прогнозирование надежности технических объектов и систем производится с целью обоснования конструктивно-технологических решений на стадии проектирования и выявления наиболее эффективных и экономичных путей повышения надежности, определения показателей надежности изделий, которые невозможно испытать на надежность целиком. Для прогнозирования надежности технических объектов используются математические модели, которые часто являются вероятностным описанием процессов или явлений, приводящих к отказам (разрушения, усталости, износа и т.п.) или зависимостей показателей надежности объекта от каких-либо факторов (нагрузки, времени и т.п.).

В данной работе рассматриваются инженерные математические модели процессов повреждения, представляющие собой детерминированные функции (условия разрушения, накопления усталостного повреждения и пр.) нескольких случайных аргументов. Аргументами этих моделей являются случайные величины, которые характеризуют соответствующие физические величины (нагрузки, механические характеристики и пр.). Причем для нахождения значения функции с заданной вероятностью необходимо в модель подставить значения аргументов, соответствующие определенной вероятности (квантили).

Цель работы состоит в том, чтобы определить порядок квантилей аргументов (P_z), которые следует подставить в выражение для функции, чтобы получить ее квантиль заданного порядка (P_Y). Применительно к проверке работоспособности это означает, что необходима методика нахождения расчетных значений аргументов, обеспечивающая вероятность возникновения отказа конструкции не более заданной ($P_Y \le [P]$).

В общем виде условие работоспособности конструкции можно представить как

$$W_*(f_1,f_2,..,f_n) - U_*(x_1,x_2,..,x_v) \le 0,$$

где $W_*(f_1,f_2,..,f_n)$ и $U_*(x_1,x_2,..,x_v)$ – значения детерминированных функций случайных аргументов, первая из которых является характеристикой рабочего состояния объекта (например, действующим напряжением, расчетным усилием), а вторая – характеристикой предельного состояния (соответственно, критическое напряжение, предельное усилие). Аргументами этих функций служат значения физических величин (нагрузок, механических характеристик, размеров конструкций и пр.), которые являются случайными величинами. При расчете в это выражение подставляются квантили случайных величин (f_i, x_i).

Задачу данной работы можно сформулировать следующим образом: необходимо найти порядок квантилей аргументов, которые должны быть подставлены в функцию, для получения ее квантиля заданного порядка (в данном случае в области малых вероятностей $[P] = 0.01…0.05$). Для решения этой задачи разработана приближенная методика [1]. В основе этой методики лежат следующие основные положения и допущения:

1. Все аргументы, присутствующие в исследуемой функции, статистически независимы и каждый из них может являться повышающим, возрастание которого в пределах области их вероятностного разброса не зависимо от значений других аргументов ведет к монотонному увеличению значений функции, или понижающим, возрастание которого ведет к монотонному снижению значений функции.
2. Аргументы распределены по нормальному закону, усеченному с соответствующих сторон по значениям, отстоящим от математического ожидания на три средних квадратических отклонения ($\pm 3S$), т.е. в зоне пренебрежимо малых вероятностей. В области малых вероятностей нормальный закон распределения заменен на распределение Релея.

3. Для вычисления значения функции, соответствующего заданной вероятности, в выражение для функции следует подставлять квантили всех аргументов одного порядка (P_z).

В данной методике дан алгоритм вычисления приведенного количества аргументов (w), как обобщенной структурной характеристики функции, и выведено выражение для вычисления порядка расчетных квантилей аргументов в зависимости от w.

Для проверки данной приближенной методики выполнено исследование ряда функций методом статистического моделирования, в результате которого найдены фактические значения порядка расчетных квантилей аргументов (P_z). Исследованы функции вида:

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{k} z_i \ ,$$

а) при k = 1,2,3,4,5 и одинаковых параметрах распределения всех аргументов;
б) при k = 2,3,5 и при разных параметрах распределения всех аргументов.

$$Y_2 = z_1 \cdot z_2; \qquad Y_3 = z_1 - z_2.$$

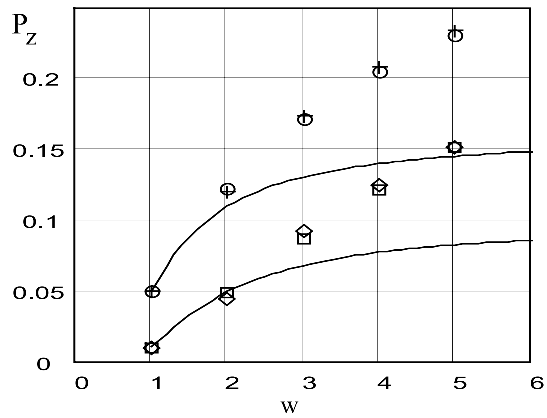

Рис.1. Зависимость P_z от w.

Для функций Y_2, Y_3 произведен анализ при разных параметрах распределения аргументов. Для данных функций рассмотрена методика получения квантилей малого порядка (P = 0.01 - 0.05). Все аргументы распределялись по нормальному закону. Для получения статистической оценки для каждой функции производилось разыгрывание 10000 комбинаций всех аргументов, по которым вычислялось такое же количество значений функции. После этого подбиралось значение квантиля аргументов, которое обеспечивало прямое вычисление значения функции с заданной вероятностью (P). Кроме того выполнена оценка P_z методом теории вероятности.

На рис.1 показан пример сопоставления результатов расчета P_z различными методами. Значения порядка квантилей аргументов, полученные в результате статистического моделирования функций, обозначены: ромбики при P_Y = 0.01 и крестики при P_Y = 0.05, методом теории вероятности – квадратики при P_Y = 0.01 и кружки при P_Y = 0.05. Эти результаты сопоставлены с приближенными аналитическими оценками порядка квантилей аргументов, показанной сплошной кривой. Как видно из представленного графика, приближенная теоретическая зависимость является оценкой нижней границы зоны разброса порядка квантилей аргументов.

По полученным результатам можно сделать следующие *выводы*:

1. Метод статистического моделирования функции сходится с вероятностным методом, так как при статистическом моделировании функции реализовано большое число разыгрываний случайных аргументов.

2. Сопоставление точных методов с приближенным методом показывает, что эта методика дает оценку квантиля с погрешностью в запас надежности.

3. Чем больше в математической модели случайных аргументов, рассеяние которых существенно влияет на изменение значений результирующей функции, тем с меньшей вероятностью обеспечения можно задавать их значения (квантили) для получения результатов расчета с установленной надежностью.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Соколов С.А. Вероятностные основы расчета ресурса металлических конструкций по методу предельных состояний. Проблемы машиностроения и надежность машин. 1997, №4, с.105-112.