XXX Юбилейная Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. V:
С. 27-28, 2002.

УДК 533.6.011

Д. Р. Магидов (5 курс, каф. гидроаэродинамики),
А.В.Гарбарук, к.ф.-м.н., доц.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСЧЕТНЫХ ДЕКАРТОВЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

С целью повышения возможностей промышленного гидродинамического пакета COOLIT, использующего неравномерные декартовы сетки, при решении двумерных задач применяется новый подход, в котором ячейка сетки может быть разделена диагональю. Изначально геометрические объекты в расчетной области определяются набором отрезков (элементов). Требуется, чтобы все отрезки в расчетной области лежали как можно ближе к диагоналям, либо к граням ячеек, через которые они проходят. Идеальной является сетка, в которой отрезки пересекают ячейки только в узлах. В общем случае построение такой сетки невозможно, поэтому образом отрезка на сетке является ломаная, состоящая из граней и диагоналей ячеек, через которые он проходит.

Прежде всего, необходимо сформулировать количественные критерии качества построенной сетки (сетку, удовлетворяющую таким критериям, в дальнейшем будем называть *оптимальной сеткой*). Очевидно, что эти критерии должны быть безразмерными, так как они не должны напрямую зависеть от размеров рассматриваемых элементов (отрезков). В качестве искомых критериев были приняты следующие величины:

1. Сумма расстояний R_Σ от концов отрезков до ближайших к ним узлов сетки, отнесенных к длинам соответствующих отрезков. Очевидно, что чем меньше величина R_Σ, тем ближе построенная сетка к идеальной.

2. Величина погрешности сетки $\Delta_\Sigma = \sum \Delta_i$, где Δ_i – разность между числом линий сетки, пересекающих i-ый отрезок в направлениях x и y (вводится только для наклонных отрезков). В идеальном случае, когда отрезок совпадает с диагональю ячеек сетки, эта величина равна нулю.

Назовем *дефектом отрезка на сетке* сумму расстояний от точек, принадлежащих образу отрезка, отнесенную к длине отрезка:

$$D = \sum_i \left| \frac{(y_i - y_s)(x_e - x_s) - (x_i - x_s)(y_e - y_s)}{(y_e - y_s)^2 + (x_e - x_s)^2} \right|,$$

где x_s, y_s – координаты начала отрезка; x_e, y_e – координаты конца отрезка; i – номер точки в последовательности точек, составляющих образ отрезка. В качестве третьего критерия сетки используется значение суммы дефектов всех отрезков, D_Σ.

Опираясь на введенные критерии, введем следующее определение *оптимальной сетки*. Будем называть *оптимальной сеткой* такую сетку, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- $R_\Sigma = 0$;
- Δ_Σ принимает минимально возможное значение при выполнении заданных ограничений;
- D_Σ принимает минимально возможное значение при выполнении заданных ограничений.

Кроме того, сетка должна удовлетворять задаваемым пользователем ограничениям на количество линий, размер шагов и отношение соседних шагов.

Поскольку непосредственное решение задачи минимизации вышеприведенных критериев не представляется возможным в силу существенной нелинейности и большого числа переменных, решение задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых решается линейная задача.

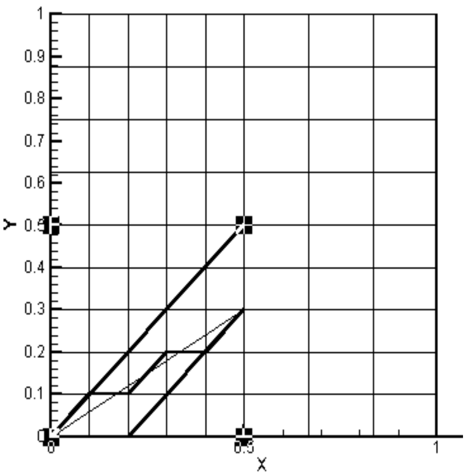
Основные этапы разработанного алгоритма состоят в следующем:

1. Построение сетки, удовлетворяющей критерию $R_\Sigma = 0$ (в дальнейшем такая сетка называется *базовой сеткой*). Построение базовой сетки не представляет труда и состоит в проведении линий двух семейств, соответствующих концам всех отрезков и границам области.

2. Определение числа дополнительных линий, которые следует провести между каждыми двумя соседними линиями *базовой сетки* для минимизации Δ_Σ. При составлении минимизируемой целевой функции на данном этапе, учитываются также требования минимизации размерности и максимальной равномерности сетки.

3. Определение координат дополнительных (не принадлежащих к базовой сетке) линий, количество которых определено на предыдущем этапе, таким образом, чтобы минимизировать критерий D_Σ. Целевая функция составляется с учетом требования получения максимально равномерной сетки.

При решении задачи на этапах 2 и 3 применялись прямой и двойственный симплекс-методы линейного программирования, причем на этапе 2 применялся также метод Гомори решения линейных задач целочисленного программирования [1…3].



В ходе настоящей работе была составлена программа, работа которой была проверена на наборе тестовых задач. На рисунке иллюстрируется пример решения одной из тестовых задач. Строилась сетка для трех элементов, по каждой оси допустимое количество линий — от 7 до 100, допустимый шаг сетки — от 10^{-5} до $5\cdot10^{-1}$, допустимое отношение соседних шагов сетки — от 1 до 1,5. Видно, что на построенной сетке образы двух отрезков совпадают с самими отрезками, а образом третьего отрезка является ломаная, идущая достаточно близко к отрезку. Следует отметить, что данное решение, как и требовалось, минимизирует размерность сетки.

Применение изложенного метода к решению тестовых задач дало удовлетворительные результаты, на основании чего можно сделать вывод об эффективности данного подхода к оптимизации декартовых расчетных сеток.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука. 1975.
2. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир. 1967.
3. Т. Ху. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир. 1974.

УДК 533.6.011