«Высокие интеллектуальные технологии образования и науки».
Материалы X Международной научно-методической конференции.С.356-358, 2003.© Санкт-Петербургский государственный технический университет, 2003

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ПОТРЕБНОСТИ В СПЕЦИАЛИСТАХ

Быстров И.Е., Козлов В.Н., Козлов Ю.В.
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Развитие образовательных услуг в регионе с учетом его ресурсного потенциала и технологий представлено моделью экономической динамики:

$$p_{k+1} = Ap_k + b\frac{u_k}{S_k}$$

$$S_k^- \le S_k \le S_k^+$$

$$p_k^- \le p_k \le p_k^+$$

$$J = J(p_k, \frac{u_k}{S_k}) \to \text{extr -}$$

где p – потенциал специалиста, S_k – сырье. Аппроксимирующими задачами для (1) являются модели вида:

$$J = \|x\|^2 \wedge cx, \quad Ax = b, \quad \|x - c\|^2 \le r^2$$

где $\|x\|^2$ – норма вектора в евклидовом пространстве. Решение задачи: найти

$$z^* = \arg\min\left\{ = c^t z \,\middle|\, AZ = b,\ A \in R^{mn},\ m \le n \text{ rang } A = m,\ (Z-d)^t Q(Z-d) \le r^2 \right\} \in$$

$$\in R_z^n,\ \text{rang } Q = n$$

можно получить аналитически, если ввести замену переменной:

$$Z = Q^{-1/2}X + d \Rightarrow X = Q^{+1/2}(Z+d) \Rightarrow \text{тогда } (Z-d)^t Q(Z-d) =$$

$$= (Q^{-1/2}X + d - d)^t Q(Q^{-1/2}X + d - d) = X^t Q^{-1/2} Q Q^{-1/2} X \le r^2,\ X^t X \le r^2$$

В результате задача (1) примет вид: найти

$$X^* = \arg\min\left\{ = c^t Q^{-1/2} X + c^t d \,\middle|\, AZ = A(Q^{-1/2}X + d) = AQ^{-1/2}X + Ad = b \right. \quad \text{или}$$

$$\left. A_0 X = b_0,\ A_0 = AQ^{-1/2},\ b_0 = Ad + b,\ \text{rang } A_0, x^t X \le r^2 \right\} \in R_x^n$$

$$J = c^t X,\ Ax = b,\ x^t x \le r^2$$

Необходимые условия в случае перехода от ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств представляются в форме

(1) $L = c^t x + \lambda_0 (Ax - b) + \lambda (x^t x - r^2)$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = c + A^t \lambda_0 + 2\lambda x = 0$ (3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_0} = Ax - b = 0 \left\| \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^t x - r^2 = 0 \right.$

Первый множитель Лагранжа равен $\lambda_0 = (AA^t)^{-1}\left[-2\lambda b - AC\right]$

Оптимальное решение представляется равенством

$$x^* = x^*(\lambda) = \frac{c + A^t(AA^t)^{-1}\left[-2\lambda b - Ac\right]}{-2\lambda}.$$

После подстановки $x^* = x^*(\lambda^{-1})$ в (3) и выполнения преобразований можно получить квадратное уравнение

$$\alpha\lambda^2 - \beta = 0, \text{ где } \alpha = 4b^t(AA^t)^{-1}b + 4r^2, \beta = c^t\widetilde{P}^0c.$$

имеющее два решения λ^- и λ^+, одно из которых соответствует максимуму, а другое минимуму функционала. Для отыскания точек минимума можно воспользоваться процедурой построения вписанного в шар параллелепипеда,
который имеет вид:

$$x^- \le x \le x^+ \quad (*), \quad \text{где } x^- = \min\left[x^*(\lambda^-), x^*(\lambda^+)\right], \quad x^+ = \max\left[x^*(\lambda^-), x^*(\lambda^+)\right],$$

причем минимум вычисляется поочередно для соответствующих координат.
Ортогональный проектор на параллелепипед задается равенством [1]:

$$P^1(z) = (\left|z - z^-\right| - \left|z - z^+\right| + z^- + z^+)/2,$$

а оператор конечномерной оптимизации представляется равенством:

$$x^* = P^1(c), \qquad z^* = Q^{-1/2}x^* + d.$$

Литература:

1.Козлов В.Н. Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем.- Л.: изд. ЛГУ им. А.А. Жданова,1986.