«Высокие интеллектуальные технологии образования и науки».
Материалы X Международной научно-методической конференции.С.359-361, 2003.

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Козлов В.Н., Магомедов К.А.
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Для формулировки кусочно-линейных задач теплопроводности предлагается введение кусочно-линейных операторов в классические уравнения. Если исходные уравнения без учета функционально-операторных преобразований переменных имеют вид [1]

$$\Psi\left[\partial u/\partial t,\ \ \partial u/\partial x,\ \ \partial^2 u/\partial x,\ \ f(x,t)\right]= 0,\quad 0<x<1,\ 0<t<T, \quad (1)$$

то при выполнении операторно-функциональных преобразований аргументов можно получить уравнения [2]:

$$\Psi\left[\Phi_u(\partial u/\partial t),\ \ \Phi_1(\partial u/\partial x),\ \ \Phi_2(\partial^2 u/\partial x),\ \ f(x,t)\right]=0,\quad 0<x<1,\ 0<t<T. (2)$$

Для процессов с сильными изменениями коэффициентов уравнений теплопроводности имеет смысл рассмотреть разностные схемы для уравнений, в которых изменение коэффициентов описывается кусочно-линейными функциями от первых производных температуры по времени и от вторых производных температуры по координатам. В результате можно получить кусочно-линейное уравнение теплопроводности в первой, второй и третьей канонических формах, которые имеют вид [2]:

$$\Phi_1(\frac{\partial u}{\partial t}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t),\ 0<x<1,\ 0<t<T \qquad (3.а)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi_2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+f(x,\ t),\ 0<x<1,\ 0<t<T \qquad (3.б)$$

$$\Phi_1(\frac{\partial u}{\partial t}) = \Phi_2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+f(x,\ t),\ 0<x<1,\ 0<t<T \qquad (4)$$

Разностные схемы для кусочно-линейных уравнений теплопроводности приведены в табл. 1 и 2 [2].

Таблица 1

Разностные схемы для первой канонической формы кусочно-линейных одномерных уравнений теплопроводности

1. Явные двухслойные кусочно-линейные разностные схемы:
$y_i^{j+1} = y_i^j + \tau\ \Phi_1^{-1}[(\ y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j)/h^2 + \ {}_i^j]$

2. Неявные двухслойные кусочно-линейные разностные схемы: $\Psi_1(\frac{y_i^{j+1}-y_i^{j+1}}{\tau}) = \Phi_1\left(\frac{y_i^{j+1}-y_i^{j}}{\tau}\right)+\frac{2\tau}{h^2}\frac{y_i^{j+1}-y_i^{j}}{\tau} =$ $= \ b_0 + \ \alpha_0\left(\frac{y_i^{j+1}-y_i^{j}}{\tau}\right)+\frac{2\tau}{h^2}\frac{y_i^{j+1}-y_i^{j}}{\tau}+\sum_{s=1}^{3}\alpha_s\left\lvert\frac{y_i^{j+1}-y_i^{j+1}}{\tau}\right\rvert.$
3. Двухслойные частично-неявные разностные схемы: $y_i^{J+1} = y_i^{j} + \ \tau\ \Psi_1^{-1}\left(\frac{\hat{y}_{i-1}^{j+1}-\hat{y}_i^{j+1}}{h^2} + \ {}_i^j\right)$
4. Двухслойные разностная схема «предиктор-корректор»: $y_i^{j+1} = y_i^{j} + \tau\ \Phi_1^{-1}(\ \frac{\hat{y}_{i-1}^{j+1}-2\hat{y}_i^{j+1}+\hat{y}_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \ {}_i^j)$
5. Трехслойный кусочно-линейный аналог разностной схемы Дюфорта-Франкела: $y_i^{j+1} = \Psi_1^{-1}\left[\frac{y_{i+1}^{j}+y_{i+1}^{j}-2y_i^{j-1}}{h^2}\right]$

Вычисление обратных операторов в разностных схемах выполняется на основе методик, разработанных в [3].

Аналогично формулируются двумерные, трехмерные задачи теплопроводности и соответствующие разностные схемы. Для этого используются классические процедуры расщепления [1] и формулируются условия сходимости [2]. Предлагаемые модели соответствуют многослойным задачам теплопроводности и другим вариантам задач Коши и краевых задач.

Таблица 2

Однородные двухслойные разностные схемы для второй канонической формы одномерных уравнений теплопроводности

1. Явная разностная схема: $y_m^{n+1} = y_m^n + \tau\ \Phi_2\left[\frac{\left(y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n\right)}{h^2}\right] + \tau \qquad (x_m, t_n),$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., n = 0, 1, ..., N-1, Nh = T.$

2. Неявная разностная схема:

$$L_h^2\left(y^{(h)}\right)=\begin{cases} \dfrac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau} - \quad \Phi_2\left[\dfrac{y_{m+1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right] \\ y_m^0,\ m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\ n=0,1,\ldots,N-1. \end{cases}$$

$$f^{(h)}=\begin{cases} \quad (x_m,\ t_n), \\ \psi(x_m). \end{cases}$$

3. Частично-неявная разностная схема:

$$y_m^{n+1} \quad = -\frac{1}{2}\psi_2^{-1}\left[2 \quad (x_m,\ t_n) \ -\frac{1}{\tau}[y_{m+1}^n - 2 \ \ y_m^n + y_{m-1}^n]\right] + (y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)/2$$

Литература:

1. Самарский А.А. Устойчивость разностных схем.- М.: Наука, 1973.

2. Козлов В.Н., Магомедов К.А. Негладкие операторы и распределенные системы.- СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003.

3. Козлов В.Н. Метод нелинейных операторов в автоматизированном проектировании динамических систем.- Л.: Изд-во ЛГУ им. А.А. Жданова, 1986.