XXXI Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. VII: С.96-99, 2003.

УДК 535.32:620.171.5:621.373.826

Д.К.Карцева (4 курс, каф. ПФОТТ), Д.Д.Каров, ст. преп.,
А.Ш.Тухватулин, к.ф.м.н., доц.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ В МОДЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Целью данной работы являлось тестирование алгоритмов неразрушающей диагностики распределения остаточных напряжений (ОН) в цилиндрических стержнях с градиентом показателя преломления применительно к исследованиям стержневых трансляторов изображения (граданов), синтезируемых по технологии высокотемпературного обмена щелочных катионов в системе стекло – расплав соли.

ОН в стеклянных изделиях после их формирования могут быть обусловлены градиентом температуры по их сечению во время охлаждения или градиентом теплофизических свойств, в частности, температурного коэффициента линейного расширения (ТКЛР) в неоднородных композициях, или и тем и другим. ОН могут влиять на передаточные характеристики оптических стеклянных элементов и приводить к разрушению изделий. Отсюда ясна необходимость диагностики ОН и управление их распределением.

Поляризационно-оптический метод (метод фотоупругости) является неразрушающим методом исследования ОН. Он основан на использовании явления оптической анизотропии (ОА), возникающей в изначально изотропном теле под действием механических напряжений.

В случае однородного распределения ОН для слоя толщиной dl ,разность фаз $d\Delta$ между двумя ортогонально поляризованными компонентами луча, которые распространяются в среде с ОА, имеет вид:

$$d\Delta = C_0(\sigma_1 - \sigma_2)dl \qquad (1)$$

где C_0 -оптический коэффициент напряжений, $\sigma_{1,2}$-напряжения в плоскости фронта волны.

В большинстве случаев, однако, распределение ОН пространственно неоднородно. В этих случаях просвечивающий луч несет <u>интегральную</u> информацию об ОН, что резко усложняет диагностику ОН в таких объектах. Соответственно, метод исследования таких структур называется методом интегральной фотоупругости или оптической томографии напряжений.

В ряде оптических приложений используются элементы, имеющие форму длинного кругового цилиндра. В общем случае в таких цилиндрах имеет место сложное напряженное состояние; в длинном цилиндре оно характеризуется тремя компонентами напряжений $\boldsymbol{\sigma}(r)$: осевым - $\sigma_z(r)$, тангенциальным $\sigma_\theta(r)$ и радиальным - $\sigma_r(r)$; r – радиальная координата.

Для исследования ОН в таких цилиндрах может быть использован метод интегральной фотоупругости. Идея метода: цилиндр просвечивается перпендикулярно оси симметрии и на множестве лучей измеряется интегральная разность фаз $\Delta(x)$ «на луче» для каждого параметра просвечивания x. Далее решается задача реконструкции распределения $\sigma_z(r)$ из массива проекционных данных $\Delta(x)$, так называемая обратная задача фотоупругости, состоящая в восстановлении эпюр ОН по результатам измерений интегральной разности фаз при различных параметрах просвечивания.

Обычные соотношения метода интегральной фотоупругости были разработаны для случаев, когда просвечивающие лучи распространяются в объекте по прямолинейным траекториям (без рефракции). В объектах с градиентом химического состава существенным является наличие градиентов показателя преломления (ПП) $n=n(r)$, которые приводят к искривлению зондирующих лучей. При наличии рефракции, распределения $\Delta(x)$ и компоненты ОН

$\sigma_z(r)$ связаны интегральным уравнением типа Абеля (2) [1], где $u=n(r)r$, $a=xn_R$ - постоянная для луча, параметр просвечивания которого равен x; R - радиус градана, n_R - значение показателя преломления на поверхности цилиндра.

Решение (инверсия) уравнения (2) имеет вид. (3).

$$\Delta(a)=2\int_a^{u_R} C_0\sigma_z \frac{dr}{du}\frac{udu}{\sqrt{u^2-a^2}}. \tag{2}$$

$$\sigma_z(r)=-\frac{1}{\pi C_0(r)}\frac{du}{dr}\int\limits_{u(r)}^{u_R}\frac{d\Delta}{da}\frac{da}{\sqrt{a^2-u^2}}. \tag{3}$$

Противоположная по постановке ("прямая") задача интегральной фотоупругости возникает в тех случаях, когда по известным (например, вычисленным в результате моделирования) эпюрам ОН требуется определить распределение ОА в исследуемом объекте. Для этого удобно использовать соотношение (4), следующее из (2):

$$\Delta(\varsigma)=2C_0R\int\limits_{\rho'}^{1}\sigma(\rho)\frac{n(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{n^2(\rho)\rho^2-\varsigma^2 n_R^2}} \tag{4}$$

где $\rho=r/R$ – относительная радиальная координата, ρ' - координата точки траектории луча, ближайшей к центру просвечиваемого сечения цилиндра для данного параметра просвечивания, определяемая из условия:

$$n(\rho')\rho'=a, \tag{5}$$

$\varsigma=x/R$ – относительный параметр просвечивания.

Если задано распределение показателя преломления (РПП) $n(\rho)$, то соотношение (5) представляет собой трансцендентное уравнение для ρ' и может быть использовано для вычисления ρ'.

Т.о. в случае «прямой задачи» требуются просто вычисление интеграла в правой части (4), используя выражения для распределения $\sigma_z(\rho)$ и $n(\rho)$.

Основной физической причиной возникновения напряжений при синтезе граданов по технологии высокотемпературной ионнобменной диффузии является радиальный градиент ТКЛР. Поэтому для создания соотношений для тестирования алгоритма реконструкции естественным представляется использовать соотношения теории термоупругости. В частности, при охлаждении цилиндра в безградиентном температурном поле имеем:

$$\sigma_z(\rho)=\frac{E\Delta T}{1-\mu}[2\int\limits_0^1\alpha(\rho)\rho d\rho-\alpha(\rho)], \tag{6}$$

На основе соотношения (6), задавая различные радиальные зависимости ТКЛР, соответствующие конкретным градиентным структурам, можно получать аналитические выражения для компонентов напряжений и соответствующих им распределений $\Delta(x)$. Соответствующие пары массивов численных данных удобно использовать в качестве тестовых при отработке алгоритмов решения прямой и обратной задач интегральной фотоупругости.

Ранее [2] для тестирования были выведены соответствующие соотношения при предположении параболического хода ОН:

$$\sigma_z(\rho) = \frac{E\Delta T\alpha_0}{2(1-\mu)}(1-2\rho^2), \qquad (7) \qquad \Delta(\varsigma) = \frac{C_0 E\Delta T\alpha_0}{3(1-\mu)}\sqrt{1-\varsigma^2}(1-4\varsigma^2), \qquad (8)$$

Однако известно, что зависимость ОН в ряде случаев из-за процессов частичной релаксации напряжений в процессе синтеза и охлаждения изделия имеет немонотонный характер, в частности, характеризуется кривой с максимумом вблизи контура.

Задача заключалась в моделировании ситуации, когда есть эти особенности. Подходящим является выбор косинусоидальной радиальной зависимости ТКЛР:

$$\alpha(\rho) = \alpha_0[2 - \cos(m\pi\rho)], \qquad (9)$$

где $\alpha_0 = \alpha(0)$ - ТКЛР на оси цилиндра; m-вещественное число. Подставляя (9) в соотношение (6), и затем полученное выражение для $\sigma_z(\rho)$ – в (4) получим соответственно:

$$\sigma_z(\rho) = \frac{E\Delta T\alpha_0}{1-\mu}[\cos(m\pi\rho) + 2S],$$

$$\Delta(\varsigma) = \frac{2C_0 RE\Delta T\alpha_0}{1-\mu}\left[\sqrt{1-\varsigma^2}[2S + \cos(m\pi)] + m\pi\int_{\varsigma}^{1}\sin(m\pi\rho)\sqrt{\rho^2-\varsigma^2}\,d\rho\right], \qquad (10)$$

где

$$S = \frac{1-\cos(m\pi) - m\pi\sin(m\pi)}{(m\pi)^2}$$

Такое представление ТКЛР дает вполне адекватную зависимость для осевых ОН, в частности, выполняется условие равновесия для $\sigma_z(\rho)$. Ввиду ограниченного объёма тезисов, в соотношениях (8, 10) даются выражения для интегральной разности фаз в безградиентном пределе (конкретные соотношения для градиентного случая получаются из (4) без особых затруднений).

Принималось, что РПП в градиентных стержнях является самофокусирующим: имеет параболический вид:

$$n(\rho) = n_0\sqrt{1-K\rho^2}, \quad K = \frac{2\Delta n}{n_0}, \qquad (11)$$

где $n_0 = n(0)$ – ПП на оси цилиндра, $\Delta n = n_0 - n_R$; n_R – ПП на поверхности цилиндра, K – постоянная распространения. В этом случае соотношение (5) принимает вид:

$$\rho^{`}\sqrt{1-K\rho^{`}} = \frac{n_R}{n_0}\varsigma, \qquad (12)$$

На основе полученных аналитических соотношений для $\sigma_z(\rho)$ рассчитывались зависимости $\Delta(\varsigma)$ при различных значениях перепада ПП Δn (прямая задача); полученные массивы численных данных ς_i - $\Delta(\varsigma_i)$, в свою очередь, использовались в качестве входных данных для моделирования обратной задачи: реконструкции радиальных распределений $\sigma_z(\rho)$. С целью выяснения влияния величины градиента ПП на точность реконструкции распределения ОН в градиентном стержне, реконструкция ОН проводилась двумя способами: с учётом и без учета искривления зондирующих лучей при различных величинах Δn.

Результаты моделирования и расчётов показали, что реконструкция ОН на основе соотношений, учитывающих криволинейностью распространения лучей даёт хорошее согласие с распределениями ОН, рассчитанными из аналитических соотношений, в том числе – в приповерхностной области, где моделируется экстремум ОН Пренебрежение радиальной зависимостью ПП приводит к качественным и количественным искажениям реконструированных распределений ОН, которые могут быть существенными при перепадах Δn>0.05.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Каров.Д.Д., Макушкин Б.В., Сивко С.П. и др. В сб.: Тез. докл. 4 Всес. симп. по вычислительной томографии, Новосибирск, 1989 г.,ч.1, с. 202-203.
2. Мельников Н.Ю. Магистрская работа. С.-Петербург. СПбГТУ. 1997.