XXXI Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научной конференции. Ч. I: С.121-123, 2003.

А.А.Постников (аспирант, каф. СмиТУ), В.В.Лалин, д.т.н., проф.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ В СКОРОСТЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

При расчетах задач динамики стержневых систем современными методами окончательное решение задачи получается в перемещениях. При переходе от перемещений к деформациям и усилиям используется метод пошагового дифференцирования, так как значения перемещений получены в виде численных значений. Значения усилии, вычисленные таким образом, имеют погрешности. Если поставить задачу в скоростях и деформациях, которые прямо пропорциональны значениям усилий, то можно более точно вычислить значения усилий.

Целью данной работы является постановка задачи в скоростях и деформациях для свободных поперечных колебаний стержня.

Запишем уравнения движения стержня в классическом виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}M = \rho * \frac{d^2}{dt^2}W \\ M = -E * I * \frac{d^2}{dx^2}W \end{cases},$$

где M - изгибающий момент в некоторой точке стержня; W - поперечные перемещения в той же точке стержня; E*I - жесткость элемента; р - погонная масса элемента.

Заменим:

$$\chi = \frac{d^2}{dx^2}W,\ V = \frac{d}{dt}W,\ M = -E * I * \chi,$$

где χ - кривизна, V - скорость и M - изгибающий момент.

Запишем уравнения движения стержня в скоростях и деформациях:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\chi = \frac{d^2}{dx^2}V \\ E * I * \frac{d^2}{dx^2}\chi = \rho * \frac{d}{dt}V \end{cases}.$$

В качестве начальных условий данной задачи задаются начальные кривизна и скорость в момент времени t = 0:

$$\chi(0,x) = -\frac{d^2}{dx^2}W_0(x)$$
$$V(0,x) = V_0(x)$$

где $W_0(x)$ и Vo(x) - заданные начальные прогиб и скорость соответственно.

Решать систему уравнений будем с помощью метода Галеркина. Разложим функции χ и V в ряд по линейным координатным функциям φ.

$$\chi(x,t) = \chi_1(t) * \varphi(x)_1 + \chi_2(t) * \varphi(x)_2 + \ldots + \chi_n(t) * \varphi(x)_n = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(t) * \varphi(x)_i$$
$$V(x,t) = \sum_{i=1}^{n} V_i(t) * \varphi(x)_i ,$$

где *n* - число разбиений стержня на элементы. Для упрощения записи
введем коэффициент $c = \frac{\rho}{E * I}$

В результате интегрирования системы уравнений с последующими преобразованиями система будет иметь вид:

$$\begin{cases} C * \dot{V} + \frac{1}{c^2} * A * X = 0 \\ C * \dot{X} + A * V = 0 \end{cases}$$

где С и А - квадратные матрицы, характеризующие геометрию и жесткость стержня соответственно; V,X,V,X - матрицы-столбцы, состоящие из скоростей и кривизн и их производных по времени соответственно.

Систему уравнений приведем к уравнению вида:

$$B*S + D*S = 0,$$

где $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathrm{X} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mathbf{c}^2} * \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathrm{X} \end{pmatrix}$ - получены путем объединения матриц, входящих в систему уравнений.

Решение уравнения такого вида подробно изложено в [1] и его решением уравнения будет матрица - столбец S, включающая в себя кривизну % во всех точках стержня. Зная кривизну легко можно вычислить изгибающий момент, который прямо пропорционален ей.

В результате реализации предложенного способа решения задачи, отпадает необходимость в численном дифференцировании, так как в результате решения системы уравнений будет получена величина, прямо пропорциональная изгибающему моменту в стержне. Так же решение задачи облегчается тем, что дифференциальное уравнение четвертого порядка заменяется системой уравнений второго порядка, что позволяет использовать линейные координатные функции.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.
2. Постнов В.А.. Численные методы расчета судовых конструкций.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний.