XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.III : С.62-63

УДК 621(075)

А.Н.Санжаревский (1 курс, каф. Автоматы), М.С.Кокорин, к.т.н., доц.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНВЕРСИЯ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В РЕШЕНИЯХ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

В практике машиностроительного черчения часто приходится сталкиваться с задачами на построение сопряжений, определяемых технологиями изготовления деталей. Особенно это характерно для чертежей деталей заготовительного производства (литых деталей и деталей, полученных технологиями кузнечно-штамповочного производства). Анализируя различные варианты построения сопряжений на рабочих чертежах деталей, мы пришли к выводу, что большинство этих вариантов являются частными случаями задачи, известной как задача Аполлония (задача о построении окружности, касающейся трех заданных окружностей). Наиболее эффективным методом решения задачи Аполлония является использование геометрического преобразования инверсии [1,2].

Целью работы является создание геометрического алгоритма, реализующего инверсию средствами компьютерной графики, оформление этого алгоритма в виде отдельной процедуры, расширяющей возможности системы геометрического моделирования “Симплекс” [3], и его использование для решения некоторых позиционных задач стереометрии.

Инверсией, или преобразованием обратных радиусов, называется такое геометрическое преобразование, когда точка M´, соответствующая данной точке M относительно окружности O, определяется следующими условиями: точка M´ лежит на прямой OM; произведение $OM \cdot OM' = R^2 = \text{const}$. Окружность O называется основной или базисной окружностью инверсии, R^2 – степень инверсии.

Геометрические построения, реализующие инверсию на плоскости элементарны, но приходится различать два варианта построений в зависимости от того, находится ли фигура прообраза f внутри окружности инверсии или нет. Это вызывает определенное неудобство, особенно если фигура прообраза пересекает окружность инверсии.

В этом случае геометрический алгоритм, реализующий преобразование инверсии мы построили на понятиях полярного преобразования плоскости. Тогда точку M можно считать полюсом, а точка M´, определяется как точка пересечения поляры точки M относительно окружности O с прямой, проходящей через центр инверсии и точку M.

Разработанный геометрический алгоритм показал свою эффективность при решении ряда задач планиметрии, в частности задачи Аполлония.

Реализация задачи Аполлония в общем виде использует следующие свойства инверсии:

1. Прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии, и обратно, окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии.
2. Произвольная окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность. Центр инверсии является при этом центром подобия обеих окружностей.

В общем случае задача Аполлония имеет восемь решений, но задача может иметь и частные случаи, когда накладываются какие-то дополнительные условия, и имеет девять предельных случаев, когда все или некоторые из заданных окружностей вырождаются в точки (радиус равен нулю) или в прямые линии (центр окружности в несобственной точке плоскости).

Общий алгоритм решения задачи Аполлония можно обобщить на случай построения сферы, касательной к трем заданным сферам. В этом случае необходимо преобразовать плоскость общего положения, определяемую центрами сфер в плоскость уровня, воспользовавшись методами начертательной геометрии.

В решениях позиционных задач стереометрии использование преобразования инверсии связано с решением задач, приводящих к уменьшению размерности рассматриваемых поверхностей, в частности, в работе представлена задача о преобразовании торовой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Яглом И.М. Геометрические преобразования, Том II. Линейные и круговые преобразования. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 612 с.
2. Бакельман И.Я. Инверсия. Популярные лекции по математике, выпуск 44. – М.: Наука, 1966. – 80 с.
3. Волошинов В.А., Волошинов Д.В. Система автоматизации конструирования проекционных геометрических моделей “Симплекс”// Вестник академии технического творчества. – 1997. – №2. – с. 19 – 70.