XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.12-13

УДК 611.71; 611.19; 591.4

А.А.Власов (4 курс, каф. МиПУ), Б.А.Смольников, к.ф.-м.н., проф.

ПЛОСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО СУСТАВА

Необходимость математического моделирования сустава человека обусловлено необходимостью выявления причин болезни суставов у спортсменов, а также конструирования новых протезов. Целью наших расчетов являлось нахождение приближенной геометрической и кинематической модели сустава.

С точки зрения аналитической геометрии сустав представляет собой непрерывное соединение двух пространственных тел. Геометрия этих тел описывает геометрию суставных поверхностей. В рамках этой работы мы будем рассматривать плоскую геометрию суставных поверхностей костей.

Суставные поверхности будут приближенно описываться кривыми, уравнения которых хорошо известны: прямая, окружность, парабола, эллипс. Предположим также, что суставные поверхности находятся в постоянном контакте друг с другом, т.е. между ними нет зазора, хотя в реальном суставе небольшой зазор есть, и толщина его составляет толщину суставного хряща.

В качестве первого приближения рассмотрим качение одного эллипса в полуэллипсе. Такая модель соответствует одноосному блоковидному суставу.

Записывая уравнения эллипсов в одной системе координат, получим:

$$F1(x,y)=\frac{\left((x-x1)*\cos(\Theta)-(y-y1)*\sin(\Theta)\right)^2}{a^2}+\frac{((x-x1)*\sin(\Theta)+(y-y1)*\cos(\Theta))^2}{b^2}-1$$

$$F2(x,y)=\frac{x^2}{c1^2}+\frac{y^2}{d^2}-1 \quad , \quad (1)$$

где x1,y1 – центр подвижной системы координат, Θ – угол поворота подвижной системы координат.

Условием касания двух эллипсов является принадлежность точки к эллипсам и равенство производных в этой точке:

$$F1(x0,y0)=0$$

$$\left.\frac{\partial F1(x,y)/\partial x}{\partial F1(x,y)/\partial y}\right|_{x=x0,y=y0}=\left.\frac{\partial F2(x,y)/\partial x}{\partial F2(x,y)/\partial y}\right|_{x=x0,y=y0}, \quad (2)$$

где x0 ,y0 – точка касания эллипсов.

Из уравнений (2) полностью решается геометрическая часть задачи, т.е. находится центр подвижной координаты в зависимости от x0, y0 и Θ.

При механическом расчете масса костей не учитывается. Предположим, что сустав укреплен двумя симметрично расположенными связками. В модели полагается, что связки остаются прямыми отрезками.

Связка моделируется линейным упругим элементом. Запишем выражение для потенциальной энергии растянутой преднапряженной пружины:

$$\Pi=\frac{c}{2}(\underline{\rho}*\underline{\sigma})+F\left[(\underline{\rho}*\underline{\sigma})+\frac{\underline{\rho}-(\underline{\rho}*\underline{\sigma})^2}{l^2}\right], \quad (3)$$

где $\underline{\sigma} = \frac{\underline{l}}{l}$ – единичный вектор направления пружины (связки) в начальном положении, $\underline{\rho}$ – вектор перемещения конца пружины (связки).

Формула (3) выведена в предположении, что |ρ|<<|l| [9], т.е. угловые и трансляционные смещения много меньше длины связки. Здесь $F=c\cdot(l-l_0)$ – сила натяжения пружины в состоянии ее равновесия. Сила F будет задаваться в наборе исходных данных.

Вектор относительного смещения точек эллипса представим в виде суммы двух составляющих: смещение полюса и поворот вокруг полюса ((·) B(x_1, y_1)) на угол Θ. Вектор $\underline{\rho}$ будет иметь вид:

$$\underline{\rho} = \underline{u} + \underline{t}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{\Theta} \times (\underline{r} + \frac{1}{2}(\underline{\Theta} \times \underline{r}))}{1 + \frac{\Theta^2}{4}}, \qquad (4)$$

где $\underline{\Theta}$ = $\Theta\underline{k}$ – вектор поворота эллипса, $\underline{u}$ – вектор смещения полюса относительно начального положения, $\underline{r}$ – радиус-вектор точки крепления связки, для представления вектора $\underline{t}$ использована точная формула Родрига.

Записывая выражение полной потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{c}{2l^2}\left[(\underline{u}\cdot\underline{l})^2 + ((\underline{\Theta}\times\underline{r})\cdot\underline{l})^2 + 2*(\underline{u}\cdot\underline{l})*((\underline{\Theta}\times\underline{r})\cdot\underline{l})\right] + \frac{F}{l}[(\underline{u}\cdot\underline{l}) + (\underline{\Theta}\times\underline{r})\cdot\underline{l} - \Theta^2 * (\underline{r}\cdot\underline{l}] + \frac{F}{2l}[u^2 +$$
$$+ 2\underline{u}\cdot(\underline{\Theta}\times\underline{r}) - \frac{(\underline{u}\cdot\underline{l})^2 - (\underline{u}\cdot\underline{l})(\underline{\Theta}\times\underline{r})\cdot\underline{l} + ((\underline{\Theta}\times\underline{r})\cdot\underline{l})^2}{l}] \qquad (5)$$

из условий ее минимума и принадлежности точки эллипсу можно найти точку касания эллипсов.

В результате расчетов мы получили зависимость точки касания и положения эллипса от угла поворота. Точка касания в течение всего поворота находится около начального положения, что говорит об активном проскальзывании в суставе.