

УДК 539.3

Д.А.Соболев (5 курс, каф. МиПУ), А.С.Семёнов, к.ф.-м.н., доц.,
Б.Е Мельников, д.т.н., проф. (каф. сопротивления материалов СПбГПУ)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ МНОГОПОВЕРХНОСТНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ В СЛУЧАЕ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ

В работе проведено исследование и выполнена программная реализация трёх вариантов многоповерхностной теории пластичности. Интерес к многоповерхностной теории вызван тем, что в практике численных исследований наиболее рациональным является многомодельный подход, заключающийся в построении иерархической последовательности моделей, области надёжного применения которых взаимно дополняют друг друга, полностью покрывая исследуемый класс путей нагружения и деформирования. Данные теории позволяют производить уточненное описание пассивного нагружения, и это определяет их место в иерархической последовательности применяемого многомодельного анализа.

Теория Mroz с кинематическим упрочнением и теория Chu с анизотропным упрочнением.

В исследуемых многоповерхностных теориях Mroz и Chu обобщаются правила упрочнения введением понятий “поле модулей упрочнения” в теории Mroz и “поле тангенциальных модулей” в теории Chu. Эти понятия предназначены для более точного описания поведения металлов при сложных путях нагружения, в частности, для циклических нагружений.

В исследуемых теориях диаграмма деформирования аппроксимируется n линейными участками, имеющими постоянные значения модуля упрочнения $K_1, K_2, \dots, K_n$ (теория Mroz) или постоянные значения тангенциальных модулей $E_{t1}, E_{t2}, \dots, E_{tn}$ (теория Chu). В пространстве напряжений эта аппроксимация может быть изображена n гиперповерхностями $f_0, f_1, \dots, f_n$, где f_0 – поверхность текучести, а $f_1, f_2, \dots, f_n$ определяют поверхности постоянных модулей упрочнения. На начальной стадии изотропного материала все поверхности $f_0, f_1, \dots, f_n$ являются подобными и концентрическими, имеющими общий центр. Принимаем, что все поверхности перемещаются в пространстве напряжений без изменения формы и размеров.

Основное отличие рассматриваемых теорий состоит в том, что в теории Mroz рассматривается конечное число поверхностей, т.е. диаграмма деформирования разбивается конечным числом линейных участков, в то время как в варианте Chu рассматривается непрерывное поле поверхностей, которым соответствуют бесконечное число точек на диаграмме деформирования.

Определяющие соотношения обеих теорий представлены в табл. 1.

Таблица 1

Mroz	Chu
$f_i = \sqrt{\frac{3}{2}} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}^i) \cdot (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}^i) - \sigma^i = 0$ $\boldsymbol{\alpha}^i$ и σ^i – центр и радиус i-ой поверхности, соответственно	$f = \sqrt{\frac{3}{2}} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) - k = 0$ $\mathbf{s}$ - девиатор тензора напряжений
$d\epsilon^p = \frac{1}{K_i} \frac{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}^i) \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}^i) \cdot (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}^i)} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}^i) \quad i = \overline{1, n}$	$d\epsilon^p = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)_k \frac{(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{k^2} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})$

Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью и её модификации.

Данная модель пластичности ориентирована на уточненное описание процессов сложного пассивного нагружения, сопровождающегося многократными промежуточными полными и частичными разгрузками. Для описания этих процессов вводится ряд поверхностей равных пластических податливостей, положение и размер которых определяют направление и величину скорости пластической деформации.

Определяющие уравнения многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью в случае принятия критерия Мизеса запишутся в виде:

$$f_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{A_{k+1}} \cdot \mathbf{S}_{A_{k+1}}} - Y_{k+1} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{S}_{A_{k+1}} = \mathbf{S} - \mathbf{S}_{O_{k+1}}$ – девиатор активных напряжений; $\mathbf{S}_{O_{k+1}}$ – тензор, соответствующий $k+1$ ой поверхности.

Закон течения записывается следующим образом:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} C_{k+1} \frac{\mathbf{S}_{A_{k+1}} \cdot d\mathbf{S}}{\mathbf{S}_{A_{k+1}} \cdot \mathbf{S}_{A_{k+1}}} \mathbf{S}_{A_{k+1}}, \quad (2)$$

где C_{k+1} – модуль пластической податливости, классифицирующий разновидности данной теории.

Выполнены расчёты для 8-ми различных вариантов путей нагружения. Результаты некоторых расчетов представлены на рис. 1-4.

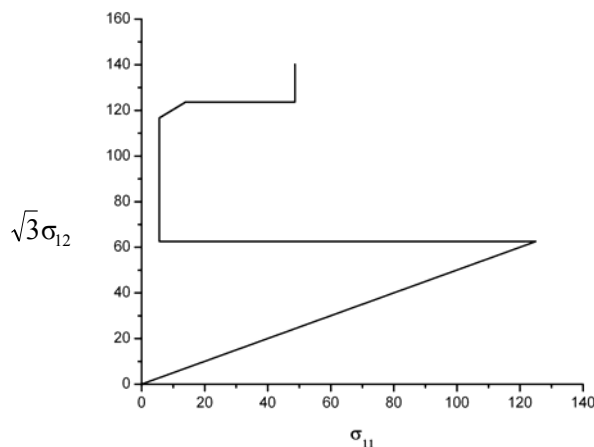


Рис. 1. Заданный путь нагружения

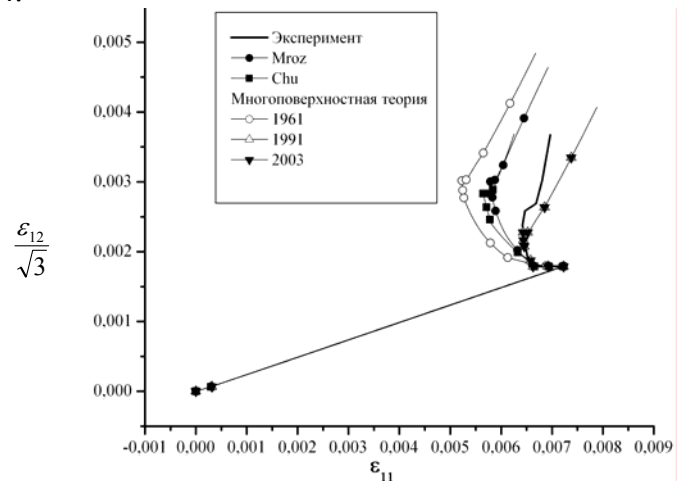


Рис. 2. Расчётные траектории деформирования

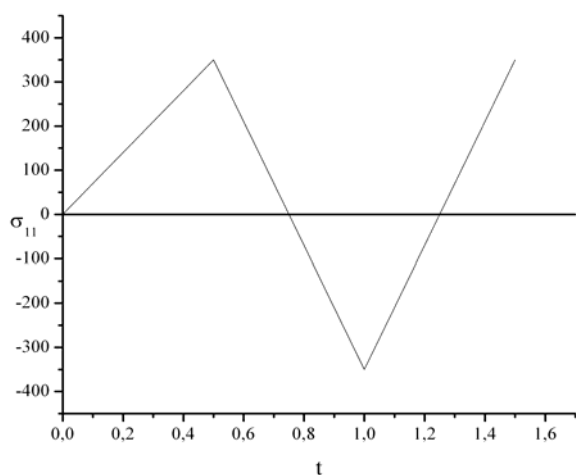


Рис. 3. Заданная история нагружения

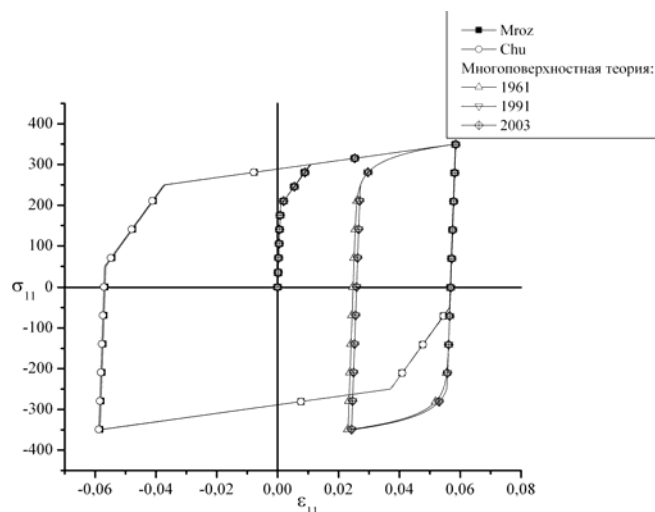


Рис. 4. Расчётные петли гистерезиса

Выводы.

1. На основании имеющихся соотношений рассматриваемых теорий был разработан алгоритм и программное обеспечение для расчёта упруго-пластического деформирования в случае однородного напряжённо-деформируемого состояния.
2. Исследованы свойства многоповерхностных теорий пластичности при пропорциональном и непропорциональном нагружении.
3. Установлено, что при описании пассивного нагружения многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью демонстрирует преимущество.
4. Для решения краевых задач выполняется внедрение представленных моделей в КЭ программный комплекс PANTOKRATOR.