

УДК 531.8

С.А.Кузнецов (6 курс, каф. МиПУ), А.С.Семенов, к.ф.-м.н., доц.

### ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ОБЛАСТИ ОСРЕДНЕНИЯ НА НЕЛОКАЛЬНУЮ МЕРУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Корректный анализ поведения усталостных трещин приводит к необходимости учета микроструктуры материала. В этом случае предполагается, что элементарный акт разрушения затрагивает некоторый представительный объем материала в целом (зерно, структурный элемент), а не одну материальную точку, и процесс разрушения определяется всем напряженно-деформированным состоянием этого объема. Математически это отражается в применении при формулировке критерия разрушения осредненных по представительному объему величин – нелокальных мер напряженного или деформированного состояния.

В работе в качестве нелокальной меры напряженного состояния  $\bar{B}$  рассматривается осредненное по некоторой области  $S$  окружное напряжение  $\bar{B} = \frac{1}{S} \iint_S \sigma_\varphi dS$ , и исследуется влияние формы области осреднения при вычислении нелокальных мер напряженного состояния для задачи об одноосном растяжении плоскости ослабленной прямолинейной трещиной длины  $2a$  (задача Гриффитса – см. рис. 1). Растягивающее напряжение –  $\sigma$ ,  $x$  и  $y$  – декартовы координаты,  $r$  и  $\varphi$  – полярные координаты.

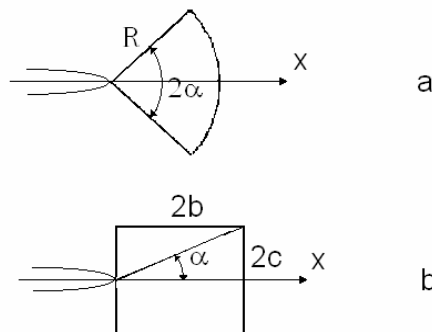
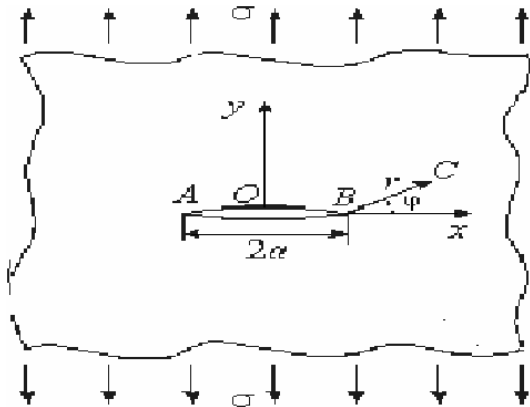


Рис.1. Условия нагружения и локальные системы координат в задаче о растяжении плоскости с трещиной

Рис. 2. Области осреднения

Точное решение этой задачи взято из [1]:

$$\sigma_\varphi = \sigma \left( -\sin^2 \varphi + \operatorname{Re} \left\{ \frac{re^{i\varphi} + a}{\sqrt{re^{i\varphi}(re^{i\varphi} + 2a)}} + \frac{ia^2 r \sin \varphi e^{2i\varphi}}{[re^{i\varphi}(re^{i\varphi} + 2a)]^{3/2}} \right\} \right).$$

Асимптотическое представление для  $\sigma_\varphi$  при  $r/a \ll 1$  имеет вид:  $\sigma_\varphi = \frac{\sigma \cos^3(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{r}}$ .

Осреднение проводилось по следующим областям:

Сектор круга (см. рис. 2а), симметричный относительно оси  $x$ , вершина которого лежит в конце трещины. Радиус сектора -  $R$ , угол раствора -  $2\alpha$ .

Прямоугольник (см. рис. 2б), симметричный относительно оси  $x$ . Длина прямоугольника -  $2b$ , высота -  $2c$ .

Для асимптотически приближенного решения получены следующие аналитические зависимости:

$$- \text{осреднение по сектору круга: } \bar{B} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \sigma \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2)}{\alpha};$$

- осреднение по прямоугольнику:

$$\begin{aligned} \bar{B} = & \frac{\sqrt{2}\sigma}{6} \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \left( \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\cos(\alpha)}} - \frac{\arcsin(2\cos(\alpha)-1)}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}\sigma}{6} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\operatorname{tg}(\alpha)} \left[ \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \pi + \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) \right) - 2 \right. \\ & \left. + 2\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln\left(\frac{1+\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{1+\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sqrt{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1}\right) \right]. \end{aligned}$$

На рис. 3 и 4 представлены графики зависимости  $\bar{B}(\alpha)$  при следующих значениях параметров:  $\sigma = 1$ ,  $2b = 0.001a$ ,  $R = 0.001a$ .

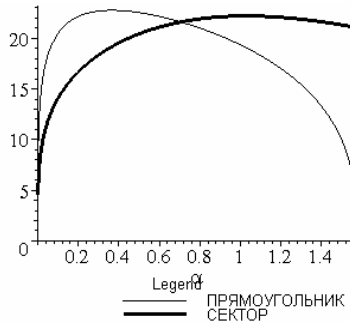


Рис. 3.  $\bar{B}(\alpha)$ ,  $S = \text{Const}$

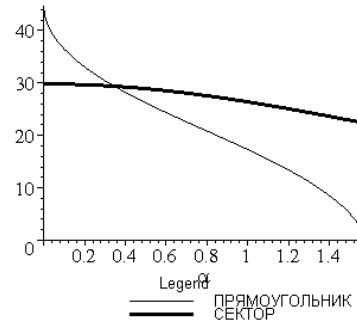


Рис. 4.  $\bar{B}(\alpha)$ ,  $2b = R = \text{Const}$

Выпишем значения  $\bar{B}$  для отрезка длиной  $d_{omp}$  (одномерное осреднение), квадрата со стороной  $d_k$  и для сектора с радиусом  $R$  и углом раствора  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  (двумерные осреднения):

$$\text{отрезок} - \bar{B} = 1.414\sigma \sqrt{\frac{a}{d_{omp}}}; \quad \text{квадрат} - \bar{B} = 0.851\sigma \sqrt{\frac{a}{d_k}}; \quad \text{сектор} - \bar{B} = 0.874\sigma \sqrt{\frac{a}{R}}.$$

Значения  $\bar{B}$  для отрезка и квадрата будут равны при  $d_{omp} = 2.76d_k$ ; значения  $\bar{B}$  для отрезка и сектора будут равны при  $d_{omp} = 2.62R$ .

**Выводы.**

1) В задаче об одноосном растяжении плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной длины  $2a$ , вычислена нелокальная мера напряженного состояния  $\bar{B} = \frac{1}{S} \iint_S \sigma_\varphi dS$

для различных областей осреднения и показано, что форма области осреднения влияет на значение нелокальной меры напряженного состояния.

2) Сравнение 1D и 2D осреднений показало, что при равенстве значений  $\bar{B}$   $d_{omp} = 2.76d_k$  и  $d_{omp} = 2.62R$ , что согласуется с результатами экспериментов [2].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения / Разрушение под ред. Г. Либовиц / Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир. 1975. 763 с.
2. Sähn S. Technische Bruchmechanik. TU Dresden. 1997. 138 p.