XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.23-25

УДК 662.642:621.926.7

К.Ю.Макеева (5 курс, каф. МиПУ), Л.М.Яковис, д.т.н., проф.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ОСТАНОВКИ ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ УСРЕДНИТЕЛЬНОЙ ЕМКОСТИ

Для сглаживания неоднородности характеристик материальных потоков с целью получения стабильных по свойствам материалов во многих отраслях промышленного производства применяются усреднительные системы. Для многотоннажных технологических процессов усреднительные системы представляют собой емкости большого объема с принудительным перемешиванием поступающего в них материала [1]. Традиционный путь повышения усреднительной способности накопительных емкостей состоит в увеличении их объема, но это сопряжено со значительными издержками. В данной работе предлагается другой, существенно более экономичный, способ повышения стабильности показателей усредняемого материального потока. Он связан с выбором оптимального в вероятностном плане момента остановки процесса заполнения усреднителя.

Рассматривается специфический алгоритм управления с обратной связью, заключающийся в том, что на каждом шаге заполнения усреднительной емкости в зависимости от данных текущего контроля интересующего показателя, поступающего в емкость материала принимается решение о целесообразности или нецелесообразности дальнейшего заполнения. Суть алгоритма состоит в проверке статистической гипотезы [2]: улучшится ли вероятностный показатель стабильности по сравнению с достигнутым на текущем шаге. Если - да, то процесс заполнения стоит продолжить, в противном случае имеет смысл завершить заполнение.

Задача формализована при допущениях, что вариации усредняемого показателя представляют собой дискретный белый шум, а усреднение в емкости производится идеально. Эти упрощающие допущения позволили обосновать достаточно простую структуру оптимального алгоритма и на основе метода динамического программирования построить численную процедуру нахождения его параметров.

Пусть нежелательное отклонение среднего показателя качества материала, находящегося в усреднителе после k шагов его заполнения, составляет:

$$x(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u(i)\,, \tag{1}$$

где $u(i)$ – случайное отклонение от заданного значения контролируемого показателя материала, поступившего в усреднитель на i-ом шаге.

Необходимо найти правило выбора момента остановки $\tilde{k}$ в допустимом диапазоне $\tilde{k} \in [\underline{k}, \overline{k}]$, минимизирующее дисперсию $D_x(k)$ случайной величины $x(k)$ в момент остановки процесса заполнения усреднительной емкости. Таким образом, задача заключается в определении $\tilde{k}$ из условия

$$D_x(\tilde{k}) = \min_{k \in [\underline{k}, \overline{k}]} D_x(k). \tag{2}$$

Поскольку в соответствии с (1)

$$x(k+1) = \frac{1}{k+1}[x(k) + u(k)]\,, \tag{3}$$

то ясно, что изменения показателя x в будущие моменты k+1, k+2 и т.д. определяются лишь текущим значением $x(k)$ и будущими значениями отклонений u.

Введем в рассмотрение функцию $D_x(k,\ x(k))$, представляющую собой наименьшее достижимое значение дисперсии показателя $x(\tilde{k})$ в момент остановки при условии, что после k шагов заполнения усреднителя отклонение указанного показателя составляет $x(k)$. Согласно общей теории оптимальных остановок марковских случайных последовательностей [3], решение задачи (2) дает правило, заключающееся в том, что процесс заполнения следует остановить при выполнении условия

$$[x(k)]^2 < D_x(k,\ x(k)), \tag{4}$$

что эквивалентно неравенству

$$|\ x(k)\ | < \tilde{x}\,(k), \tag{5}$$

где $\tilde{x}\,(k)$ - положительный корень уравнения

$$\tilde{x}\,(k) = D_x(k,\ \tilde{x}\,(k)). \tag{6}$$

Для нахождения зависимости $D_x(k,\ x(k))$ используется метод динамического программирования [4], приводящий к функциональному уравнению:

$$D_x(k, x(k)) = \min\{[x(k)]^2, M\{D_x(k+1, x(k+1)\ |x(k)\}\}\,. \tag{7}$$

Фигурирующее в (7) условное математическое ожидание в предположении, что случайные вариации $u(i)$ подчиняются нормальному распределению с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением σ, определяется по формуле:

$$M\{D_x(k+1, x(k+1)\ |x(k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} D_x(k+1, x(k+1))\left\{\frac{k+1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-[\frac{(k+1)x(k+1)-kx(k)}{\sqrt{2}\sigma}]^2\right\}dx(k+1)\,. \tag{8}$$

Согласно схеме динамического программирования уравнение (7), (8) решается с конца, т.е. для $k = \bar{k}-1, \bar{k}-2, ..., \underline{k}$ при начальных условиях:

$$M\{D_x(\bar{k}, x(\bar{k})\ |x(\bar{k}-1)\} = \frac{1}{\bar{k}^2}\left\{\sigma^2 + [(\bar{k}-1)x(\bar{k}-1)]^2\right\}. \tag{9}$$

Построена численная процедура определения параметров закона управления, в качестве которых выступают заранее рассчитываемые пороговые значения решающих правил остановки $\tilde{x}\,(k)$. Разработанная процедура доведена до программной реализации, позволяющей определить последовательность пороговых значений $\tilde{x}(\underline{k}), \tilde{x}(\underline{k}+1), ..., \tilde{x}(\bar{k}-1)$.

Реализована также процедура компьютерного имитационного моделирования процесса заполнения в традиционном варианте, когда емкость заполняется полностью, и в предлагаемом варианте, когда момент остановки определяется путем применения на каждом шаге заполнения оптимального решающего правила. Важно отметить, что имитация и аналитические расчеты дали практически идентичные результаты и показали существенное преимущество предлагаемого способа ведения процесса усреднения. Например, относительная разница двух способов заполнения емкости для случая, когда $\underline{k} = 20,$ а $\bar{k} = 30$ составляет: $\delta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2}100\% = 49\%,$ где σ_1 и σ_2 – среднеква-дратичные отклонения от задания показателя x при традиционном способе заполнения усреднителя “доверху” и при предлагаемом способе управления моментом остановки соответственно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Яковис Л.М. Многокомпонентные смеси для строительства. Расчетные методы оптимизации состава. Л.: Стройиздат, 1988.
2. Вальд А. Последовательный анализ, М.: Физматгиз, 1960.
3. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ, М.: Наука, 1976.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.