XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.34-35

УДК 330.115(075.8)

А.В.Глечик (5 курс, каф. ПМ), Н.О.Вильчевский, д.т.н., проф.

ОЧЕРЕДИ С ПРИОРИТЕТАМИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В работе рассматривается система массового обслуживания с конечной очередью и двумя классами поступающих требований [1,2]. Вводятся два типа приоритетов: приоритет в обслуживании и приоритет вытеснения из накопителя в случае, когда в буфере нет мест. Предполагается, что механизм вытеснения из очереди является случайным. Подобные системы часто можно встретить в компьютерных сетях.

Постановка задачи. Требования класса 1 имеют более высокий приоритет в обслуживании, то есть если в очереди находятся требования обоих классов, то на обслуживание берется требование 1 класса. В тоже время требования 2 класса с вероятностью α вытесняют из буфера (если он полон) требования класса 1. Интервалы между поступлениями требований обоих классов имеют экспоненциальное распределение с параметром λ_1 и λ_2, соответственно. Длительность времени обслуживания обоих классов требований распределена по экспоненциальному закону с параметром μ.

Обозначим за $P(i,n)$ стационарную вероятность того, что в очереди находятся $n \le N$ заявок, и i из них принадлежат классу 1. И пусть P_0 - постоянная вероятность того, что в системе нет требований. Эти вероятности являются решением системы уравнений Колмогорова порядка $N^2/2$.

Введем производящую функцию этих вероятностей:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{n} P(i,n) \cdot x^i \cdot y^n .$$

В работе доказана **теорема 1:**

Производящая функция $\Phi(x,y)$ удовлетворяет соотношению:

$$\Phi(x,y) = \frac{y \cdot (x-1) \cdot A(y) + (x \cdot y - 1) \cdot \rho \cdot P_0 + y^N \cdot (1 - x \cdot y - (x-1) \cdot \alpha \cdot \rho_2 \cdot y) \cdot V_{N-1}(x)}{(x \cdot y \cdot (\rho+1) - x \cdot y^2 \cdot (\rho_1 \cdot x + \rho_2) - 1)} +$$

$$+ \frac{P(0,N) \cdot (1 - x \cdot y) \cdot y^N}{(x \cdot y \cdot (\rho+1) - x \cdot y^2 \cdot (\rho_1 \cdot x + \rho_2) - 1)}, \text{где } V_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{N} P(i,N) \cdot x^i ,$$

$$A(y) = \rho \cdot \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} P(i,N) \cdot U_{i-1}(t) \cdot \frac{y^{N-i}}{\rho_1^{i/2}} - \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} P(i,N) \cdot U_{i-2}(t) \cdot \frac{y^{N-i}}{\rho_1^{(i-1)/2}} ,$$

$$t = \frac{(\rho + 1 - \rho_2 \cdot y)}{2 \cdot \rho_1^{1/2}}, \ \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}, \rho = \rho_1 + \rho_2 .$$

Теорема 2. Вероятности $P(i,N)(V_{N-1}(x))$ определены системой линейных уравнений:

- s=0
- $(\rho - \alpha \cdot \rho_2) \cdot C_{N-1}^1(t_0) \cdot P(N,N) \cdot \frac{1}{\rho_1^{N/2}} - \rho_1 \cdot C_N^1(t_0) \cdot P(N,N) \cdot \frac{1}{\rho_1^{(N+1)/2}} + \rho \cdot P_0 \cdot \rho_1^{1/2} = 0$

- <u>0<s<N</u>

$$(\rho-\alpha\cdot\rho_2)\cdot\sum_{k=0}^{s}\frac{C_{N-1-s}^{s-k+1}(t_0)\cdot{\rho_1}^k}{(-\rho_2)^k}\cdot P(N-k,N)+\alpha\cdot\rho_2\cdot\rho\cdot{\rho_1}^{1/2}\cdot\sum_{k=0}^{s-1}\frac{C_{N-s}^{s-k}(t_0)\cdot{\rho_1}^k}{(-\rho_2)^{k+1}}\cdot P(N-k,N)-$$
$$-\rho_1\cdot\sum_{k=0}^{s}\frac{C_{N-1-s}^{s-k+1}(t_0)\cdot{\rho_1}^{k+1}}{(-\rho_2)^k}\cdot P(N-k,N)=0$$

- <u>s=N</u>

$$\alpha\cdot\rho_2\cdot\rho\cdot{\rho_1}^{1/2}\cdot\sum_{k=0}^{s-1}\frac{C_0^{N-k}(t_0)\cdot{\rho_1}^k}{(-\rho_2)^{k+1}}\cdot P(N-k,N)-P(0,N)\cdot{\rho_1}^{1/2}=0$$

Здесь $C_n^k(x)$ – полиномы Гегенбауэра [3].

В работе показано, что потоки потерянных требований равны:

$P_{loss}^{(1)}=\lambda_1\cdot F_N(1)+\alpha\cdot\lambda_2\cdot(F_N(1)-P(0,N))$; $P_{loss}^{(2)}=P(0,N)+(1-\alpha)\cdot(F_N(1)-P(0,N))$.

Таким образом, основным результатом работы является замена системы уравнений Колмогорова порядка $N^2/2$ на систему уравнений, имеющую порядок N (см. теорему 2).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Wagner, D., and Kreiger, U.R., “Analysis of a finite buffer with non-preemptive priority scheduling”, Comm.Stat.-Stohastic Models, 1999, pp. 345 - 365.
2. Kleinrock, L., “Queueing systems”, v.2.: Computer Applications, Wiley, 1976.
3. Erdelyi, A., and Bateman, H., “Higher transcendental functions”, 2nd ed., v.1,2, “Robert E.Krieger Publishing Company”, 1985.