XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.64-65

УДК 532.5:51

А.Н.Лобанов (5 курс, каф. КТиЭТ), В.А.Талалов, к.т.н., доц.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решение задач физики с помощью численных методов рассматривается как самый экономичный и быстрый способ получения результата. Преимущества численных методов состоят в том, что они наиболее точно описывают реальные процессы. В отличие от аналитических методов, численные хорошо справляются и с нелинейными задачами, и с задачами со сложной геометрией.

Основа численных методов состоит в замене дифференциального уравнения на алгебраические путем создания для каждого члена уравнения численного аналога. В результате этих преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Для решения СЛАУ обычно обращаются к итерационным методам: метод Зейделя, Метод Якоби, различные методы расщепления.

Рассмотрим пример дискретизации двумерного уравнения теплопроводности, создание его численного аналога для одного из методов расщепления (метода стабилизирующей поправки):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - L_x T - L_y T = 0 \text{, где } L_x \text{, } L_y \text{ – операторы: } L_x = a_x \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_y = a_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

При этой схеме расщепления конечно-разностный аналог для первого полушага выглядит как

$$\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} - \widetilde{L}_x T^{n+1/2} - \widetilde{L}_y T^{n} = 0, \quad \text{где } \widetilde{L}_x = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{dx^2}, \widetilde{L}_y = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{dy^2};$$

для второго полушага:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} - \widetilde{L}_y (T^{n+1} - T^{n}) = 0 \text{, где } \widetilde{L}_y = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{dy^2}.$$

В уравнениях числовых аналогов i, j – номера координатных узлов для осей x,y, соответственно, n – номер временного слоя (шага).

Преимуществами данных методов являются экономичность в вопросе использования машинной памяти и скорость шаговых расчетов. Недостатками являются необходимость итераций (изначально нельзя сказать, сколько действий будет произведено на данном шаге) и возможное искажение граничных условий на конкретном шаге при решении многомерных задач.

Для нахождения решения СЛАУ также используют прямые методы: метод Томсона, метод Гаусса, матричная прогонка и т.д. Главным преимуществом таких методов является то, что обрабатывается сразу весь массив, вся система. Существенными недостатками являются использование больших объемов машинной памяти для хранения массивов данных и затраты времени на обработку нулевых элементов, которые не вносят вклад в решение.

Цель данной работы – доказательство оптимальности выбора схемы матричной прогонки (МП) из всего класса конечно-разностных схем для построения программы решения заданного уравнения.

Были поставлены задачи реализации и последующей оптимизации алгоритма в условиях сильно разряженных массивов СЛАУ, а также исследования программы матричной прогонки. Исследование состояло из двух этапов: тестирование самой программы, созданной на основе алгоритма МП, и сравнение параметров ее работы с параметрами программы, созданной на основе итерационного метода (метод ПВР), и не оптимизированной программы МП.

Результаты тестировались на сетке 50×50 узлов. При описании линейных задач теплопереноса метод дает относительную невязку точного и численного решения для одномерной задачи порядка величины 10^{-5}, для двумерной – 10^{-8}. Характер зависимости невязки от числа шагов степенной. При описании нелинейных процессов при условии корректного построения сетки (увеличение числа расчетных узлов пропорционально градиенту поля) метод дает относительную невязку точного и численного решения для одномерной задачи порядка величины 10^{-5}, которая может быть уменьшена путем увеличения узлов сетки, но может возрастать до величин порядка 10^{-3} при неправильном построении сетки в области больших градиентов. Относительная невязка для двумерной задачи порядка 10^{-6}.

Все вычисления производились на ЭВМ AMD K6-II 400Гц, 98Мб ОП для двумерного стационарного уравнения теплопроводности с сеткой 50×50 узлов и максимально допустимым значение относительной невязки 10^{-6} %. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

	Метод ПВР	Неоптимизированная МП	МП
Время вычисления, сек	89	29	16
Объем памяти для хранения данных, Кб	17	221	157
Значение невязки, %	10^{-6}	10^{-9}	10^{-9}

Видно, что программе МП потребовался значительно больший объем машинной памяти, но для получения решения с заданной точностью программе ей понадобилось намного меньше времени.

Выводы. При громоздких вычислениях задач сложной геометрии метод МП будет давать огромный выигрыш по временным затратам на вычисления, но требовать больших ресурсов машинной памяти. С учетом того, что в программе МП объем требуемой памяти для хранения данных может быть еще более сокращен путем дальнейшей оптимизации алгоритма, можно сделать вывод, что метод матричной прогонки самый предпочтительный среди прямых и итерационных методов решения СЛАУ для быстрого получения точного результата.