XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.IV : С.97-98

УДК 532.595

Н.В.Резник (2 курс, каф. ГАД), Г.А.Кутеева, к.ф.-м.н., ст. преп. (СПбГУ)

МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ И ПРОГИБА СТЕНКИ ВНУТРИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДВИГАЮЩЕГОСЯ БАКА С УПРУГОЙ ВСТАВКОЙ НА СТЕНКЕ

Работа принадлежит к разделу задач о волновом движении жидкости в сосуде, который совершает заданное движение. Этой тематике посвящено множество публикаций. Развитие теории колебаний жидкости внутри неподвижных и двигающихся как твердых, так и упругих тел стимулировалось появлением разнообразных задач прикладного характера. Сюда, в частности, относятся задачи динамики ракет, содержащих жидкое наполнение, и задачи прочностных расчетов резервуаров и емкостей, подвергающихся действию сейсмических нагрузок. Целый ряд подобных задач связан с проблемами гидростроительства и теории корабля. При транспортировке жидкостных грузов жидкость оказывает влияние на динамику конструкции (цистерны, отсека судна). Накопленный опыт свидетельствует о том, что наличие жидкости может служить причиной возникновения в системе параметрических колебаний и динамической неустойчивости, вплоть до повреждения конструкции. Поэтому большой интерес, как теоретический, так и прикладной, представляют исследования систем «жидкость в двигающемся сосуде». Ранее рассматривались сосуды в виде твердых тел или оболочек различной формы. В данной работе формулируется модель для изучения поведения жидкости в твердом баке, одна из стенок которого содержит упругую вставку. Особенностью постановки задачи является наличие у жидкости двух свободных поверхностей – на границе с воздухом и на границе с упругой вставкой.

Рассматривается плоская задача о колебаниях идеальной несжимаемой жидкости внутри двигающегося по прямой (и могущего совершать колебания в пределах этой прямой) прямоугольного сосуда с упругой вставкой (балкой) на стенке.

Основным соотношением для построения модели колебаний жидкости является функционал, сформулированный в работе [1]:

$$G = \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt$$

$$L = \int_{Q(t)} p(x,z,t)dq + \int_{-h}^{0} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} + \widetilde{v}_{0x} \right)^2 - \frac{1}{2} EJ \left(\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial z} \right)^2 \right) dz \cdot$$

$$p(x,z,t) = \rho \left(-\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(grad\, \widetilde{\Phi} \right)^2 + U + grad\, \widetilde{\Phi} \cdot \widetilde{v}_0 \right)$$

Здесь $Q(t)$ – область, занятая жидкостью, $\widetilde{\Phi}(x, z, t)$ – потенциал скоростей, $\widetilde{w}(z, t)$ – прогиб упругой вставки, $p(x,z,t)$ – давление жидкости без учета атмосферного, ρ – плотность жидкости, U – потенциал массовых сил, EJ – жесткость балки на изгиб, $\widetilde{v}_{0x}$ – скорость подвижной системы координат, жестко связанной с центром дна бака, t_0, t_1 – время начала и конца рассматриваемого процесса, соответственно.

Кинематические и динамические условия на свободной поверхности жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n} = \tilde{v}_0 \cdot n + \frac{\tilde{f}_t}{\sqrt{1+\tilde{f}_x^{\,2}}}$$
.
$$-\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(grad\tilde{\Phi}\right)^2 + U + grad\tilde{\Phi}\cdot\tilde{v}_0 = 0$$

где $\tilde{f}$ – возвышение свободной поверхности жидкости.

На упругой вставке:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n} = \tilde{v}_0 \cdot n + \frac{\tilde{w}_t}{\sqrt{1+\tilde{w}_x^{\,2}}}$$
.
$$m\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4\tilde{w}}{\partial z^4} = \rho\left(-\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(grad\tilde{\Phi}\right)^2 + U + grad\tilde{\Phi}\cdot\tilde{v}_0\right)$$

Данные условия могут быть получены в результате варьирования функционала (1), другой способ их получения описан в [2]. Задача дополняется требованием решения уравнения Лапласа

$$\Delta\tilde{\Phi} = 0$$

с условиями непротекания на жестких поверхностях:

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n} = \tilde{v}_0 \cdot n\,.$$

Для нахождения координатных функций использовался метод Бубнова–Галеркина. В результате было получено выражение для L через искомые обобщенные координаты:

$$L = A_1T(t) + \tilde{A}_2\tilde{v}_{0x}R(t) + (A_3 + \tilde{A}_3\tilde{v}_{0x} + \tilde{\tilde{A}}_3\dot{\tilde{v}}_{0x})G(t) + A_{1,2}T(t)R(t) + A_{1,3}T(t)G(t) +$$
$$+ (\tilde{A}_{2,2}\tilde{v}^2{}_{0x} + A_{2,2})R^2(t) + \tilde{\tilde{A}}_{3,3}\dot{\tilde{v}}_{0x}G^2(t) + \tilde{A}_{2,3}\tilde{v}_{0x}R(t)G(t) + A_1^2T(t)\dot{R}(t) + A_3^2\dot{R}(t)G(t) + A^{3,3}\dot{G}^2$$

где $A_{i,j}^{n,m}$ – постоянные коэффициенты, а *R(t)*, *G(t)*, *T(t)* – обобщенные координаты для $\tilde{w}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{f}$, соответственно. Исходя из данного выражения, была получена система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для проведения расчетов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кутеева Г.А. Функционал задачи о прямоугольном двигающемся сосуде с упругой вставкой, частично заполненном идеальной несжимаемой жидкостью // Вестник СПбГУ, Сер.1, 2002. Вып.3 (№ 17). С.90- 94.
2. Ньюмен Д. Морская гидродинамика. – М.: Мир, 1985.