XXXII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.VI: С. 124-125

УДК 662.642: 621.926.7

Н.В.Жуков (4 курс, каф. ПКС, СПбГУИТМО), В.Л.Ткалич, д.т.н., проф.

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ УПРУГИХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Целью данной работы являлся анализ динамики электромеханических упругих чувствительных элементов (э/м УЧЭ).

Нелинейные колебания э/м УЧЭ можно описать в эллиптических функциях Якоби I и II рода, что позволяет получить точные математические модели (ММ) динамики коммутационных групп магнитоуправляемых контактов (МК) и микросенсоров. С этой целью проведен анализ прототипных вариантов расчетных моделей э/м УЧЭ: модели Софи Жермен-Лагранжа, описывающей прогиб тонких пластинок, уравнений упругих кривых Эйлера, уравнений кривых, полученных при качении шаров Бобылева-Жуковского, моделей и допущений Кирхгоффа-Лява [1,2].

В основе разработанной модели лежит система, которая описывается привлечением математического аппарата Абелевой функции в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = b\{-u + 2[E(u+K) - E(K)]\} \\ y = -2 \cdot b \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{cn}(u+K) \end{cases},$$

где b – безразмерный коэффициент, зависящий от приложенной осевой силы; K – полный эллиптический интеграл I рода; E – полный эллиптический интеграл II рода; ε - эксцентриситет кинематического эллипса, отображением на который спрямляется упругая кривая, равный модулю эллиптического интеграла k; $\mathrm{cn}(u)$ – эллиптический косинус; u – аргумент эллиптической функции Якоби.

Для изучения полей напряжений получено аналитическое описание изменения кривизны поверхности или радиуса кривизны, посредством абелевых функций второго порядка от двух переменных $\frac{1}{R} = \frac{2}{b}\varepsilon \cdot \mathrm{cn}(u+K)$, где $\frac{1}{R}$ - кривизна, R – радиус кривизны. Закон изменеия длины дуги ζ описывается формулой: $\varsigma = b \cdot \mathrm{am}u$, где am$u$ – обозначение Якоби аргумента тригонометрической функции эллипса $\varphi = \mathrm{am}u$.

В предложенном подходе к описанию геометрии профиля э/м УЧЭ получено полное аналитическое выражение идеального изучаемого объекта. Для изучения вынужденных колебаний, а так же для анализа распределения напряжений и деформаций, вызванных осевыми нагрузками, необходимо и достаточно определить упомянутые функции, следуя Якоби.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\left(\frac{1}{R}\right)}{d\varepsilon^2}\left(\dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 + 2\dfrac{d^2\left(\frac{1}{R}\right)}{d\varepsilon du}\left(\dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)\left(\dfrac{du}{dt}\right) + \dfrac{d^2\left(\frac{1}{R}\right)}{du^2}\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2 = F[u(t), \varepsilon(t)] \\ \dfrac{d^2\,\mathrm{am}u}{d\varepsilon^2}\left(\dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 + \dfrac{d^2\,\mathrm{am}u}{d\varepsilon}\left(\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}\right) = \Phi[u(t), \varepsilon(t)] \end{cases},$$

где F[u(t), ε(t)], Φ[u(t), ε(t)] – внешние осевые нагрузки, прикладываемые к э/м УЧЭ.

В алгебраической форме выражения правых частей волновых уравнений примут вид:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{R}\right)}{d\varepsilon^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2=\frac{1}{b}\left\{\frac{1}{2\varepsilon(1-\varepsilon^2)^5}[\varepsilon^4\left(23-24\varepsilon^2\right)\mathrm{sn}^5 u+\varepsilon^2\left[18\varepsilon^4+7\varepsilon^2-23-8\left(Z(u)-\varepsilon^2 u\right)\right]\mathrm{sn}^3+\right.$$

$$+\left[3\varepsilon^2(3-4\varepsilon^2)+2+4(1+\varepsilon^2)\left(Z(u)-\varepsilon^2 u\right)\right]\mathrm{sn}\,u+[8\varepsilon^4(1-\varepsilon^2)\mathrm{sn}^4 u+$$

$$+\varepsilon^2((Z(u)+\varepsilon^2 u)-4(\varepsilon^2+1-\varepsilon^4))\mathrm{sn}^2 u+$$

$$-2(\varepsilon^2(\varepsilon^2+6)-2\varepsilon^2\mathrm{sn}^2 u(3\varepsilon^2+1)-3)(Z(u)-\varepsilon^2 u)-$$

$$-\varepsilon^2(Z(u)-u-4\varepsilon u(1-\varepsilon^2))]\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u-$$

$$-2\varepsilon^2(Z(u)-\varepsilon^2 u)(1-\varepsilon^2\mathrm{sn}^2 u)\mathrm{cn}\,u]\frac{d^2\varepsilon}{dt^2};$$

$$\frac{d^2\,\mathrm{am}\,u}{d\varepsilon^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2=\frac{1}{2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)^2}[2(Z(u)-5\varepsilon^2 u)\mathrm{dn}^3 u-2\varepsilon^2(Z(u)-\varepsilon^2 u)\mathrm{dn}^2 u+$$

$$+[2(\varepsilon^2-3)(Z(u)-\varepsilon^2 u)+3\varepsilon^2(Z(u)-2\varepsilon^2 u)+2\varepsilon^2 u(6-2\varepsilon+4\varepsilon^3-2\varepsilon^5-5\varepsilon^4)]\mathrm{dn}\,u+$$

$$[2\varepsilon^2\mathrm{dn}^2 u+2\varepsilon^4(2-\mathrm{dn}\,u)-2\varepsilon^2(1+(Z(u)-\varepsilon^2 u)^2)]\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u]\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2,$$

где $Z(u)$ – функция II рода, представляющая собой эрмитрову модификацию Z-функции Якоби, определяющую обращение эллиптического интеграла II рода вида:

$$Z(u)=\int_0^u k^2\,\mathrm{sn}^2\,u du=u-E(u),$$

где u=am$u$ – аргумент или интеграл I рода; k – модуль эллиптического интеграла; $u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{u}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$; $E(u)$ – нормальный эллиптический интеграл II рода; $E(u)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi=\int_0^{u}\frac{u^2du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$; sn($u$) – эллиптический синус; dn(u) – третья эллиптическая функция.

Выводы. Движение контактной группы газонаполненных и ртутных герконов представимо уравнением движения маятника, колеблющегося в среде с сопротивлением под действием внешней периодической силы, решением которого является функция двух переменных – аргумента и эксцентриситета кинематического эллипса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. – М.: Машиностроение, 1981. – 455 с.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука. Главное издательство физ.-мат. литературы, 1970. – 304 с.
3. Бидерман В.А. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
4. Жуков Н.В., Ткалич В.Л.. Проблемы надежности магнитоуправляемых контактов в системах управления. Сборник научных трудов молодых ученых и аспирантов. Под редакцией д.т.н., проф. Ю.А. Гатчина – СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2003, с.51 – 54.
5. Харазов К.И. Устройства автоматики с магнитоуправляемыми контактами. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 260 с.