XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.III: С.33-34, 2005.

УДК 539.3

В.А.Востриков (асп., каф. КТМ), В.В.Елисеев, д.ф.-м.н., проф.,
Н.Н.Шабров, д.т.н., проф.

НОВЫЙ ВАРИАНТ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК В ПРИМЕНЕНИИ К МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящее время теория тонких оболочек является одним из наиболее актуальных разделов теории упругости. Это связано с тем, что конструкции, созданные на основе таких оболочек, сочетают в себе легкость и высокую прочность.

Оболочками в теории упругости принято называть тела, ограниченные двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами тела. Оболочки называют также кривыми пластинами. Этот последний термин звучит весьма удачно в применении к незамкнутым оболочкам и, наоборот, мало говорит, будучи применен к замкнутым. Однако имеется аналогия между пластинами и оболочками,, позволяющая называть последние кривыми пластинами. Это дает основание заимствовать при построении теории оболочек ряд приёмов из теории пластин.

Классическая теория пластин знает два основных метода решения своих задач. Первый был предложен А. Коши и С. Пуассоном, а второй – Г. Кирхгофом. Метод Коши и Пуассона основывается на разложении всех перемещений и напряжений пластины в ряды по степеням расстояния точек от средней плоскости пластины. Однако вокруг этого метода возникла оживленная полемика и споры. Поэтому другой метод, предложенный Г. Кирхгофом и сразу внесший в теорию пластин физическую ясность, быстро завоевал общее признание, сохраняя его и до сих пор; Кирхгоф пошёл по линии принятия некоторых гипотез, аналогичных тем, которые используются в теории балок. В то же время нельзя не отметить и один недостаток этого метода, а именно – его ограниченность: теория Кирхгофа является лишь приближенной и не может быть развита в теорию точную. Описанные выше два метода теории пластин могут быть использованы и фактически использовались для построения теории оболочек.

Ранее при использовании моментной теории оболочек частицы материальной поверхности считались твердыми телами с шестью степенями свободы – векторы перемещения и поворота могли быть произвольно направлены в пространстве. Соответственно, баланс сил и моментов выражался шестью уравнениями в компонентах. Однако у этой теории нашлись уязвимые места. Большей логической стройности теории можно добиться, считая частицы поверхности материальными нормалями с пятью степенями свободы. Вектор поворота при этом лежит в касательной плоскости, как и все моменты.

В этой работе исследовались оболочки тел вращения. Данному классу оболочек было посвящено много исследований, причём наиболее далеко удалось продвинуться в направлении расчёта круговых цилиндрических и сферических оболочек. Была построена программа-решатель, в которой были реализованы широко распространенный метод конечных элементов и новый вариант классической теории тонких оболочек, появившийся сравнительно недавно. Был рассмотрен лишь класс осесимметричных задач, статических и динамических – расчет собственных частот и форм колебаний. Предполагалось, что оболочка гладкая, постоянной толщины. Материал, из которого она сделана – однороден и изотропен.

Построение нового варианта классической теории опирается на принцип виртуальной работы. Для рассматриваемой модели очевидна следующая формулировка принципа

$$\int\limits_{O}(\underline{f}\cdot\delta\underline{u}+\underline{m'}\cdot\delta\underline{\varphi}-\delta\Pi)dO+\oint\limits_{\partial O}(\underline{F}\cdot\delta\underline{u}+\underline{M}^{0}\cdot\delta\underline{\varphi})dl=0\,.$$

Здесь $\underline{f}$ и $\underline{m}'$ – силовая и моментная нагрузки на единицу площади (в динамике содержат инерционные добавки), $\underline{F}$ и $\underline{M}^0$ – нагрузки на граничном контуре ∂O, Π – плотность энергии деформации.

При использовании метода конечных элементов (МКЭ) для исследования напряженно-деформированного состояния деформируемых твёрдых тел задача решается в перемещениях. Узловые перемещения определяются на основе вариационного принципа Лагранжа, который из всех кинематически допустимых полей перемещений выделяет действительное поле, т.е. поле перемещений, которое удовлетворяет уравнениям равновесия.

На основании всего вышеизложенного, был написан решатель для расчета статического деформированного состояния, собственных частот и форм колебаний для осесимметричных оболочек. Программа содержит основные блоки: обработка входных данных (включая преобразователь входных файлов известных решателей), построитель сетки, формирование глобальных матриц жесткости, динамических составляющих и узловых нагрузок, решения статической и динамической задач. В случае необходимости программа может перед формированием сетки предварительно интерполировать геометрию меридиана по нескольким заданным точкам. Программа составлена таким образом, что может быть легко добавлена в код ранее созданного решателя, а также может существовать как отдельная программа – имеется блок обработки выходных данных.

На основе построенного решателя были проведены исследования в области устойчивости решения при стремлении толщины оболочки к нулю, а также оценки скорости сходимости. Основной же вывод всей работы заключается в том, что при расчетах конструкций следует использовать решатели построенные следующим образом: во всей конструкции используются конечные элементы, построенные на общей теории упругости, а там, где это возможно – переходить к оболочечной модели, что несомненно приведет к уменьшению времени счета и гораздо более рациональному использованию оперативной памяти.