XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.V: С.60-61, 2005.

УДК 518.9

М.О.Насурова (6 курс, каф. САиУ), В.Н.Козлов, д.т.н., проф.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ КОНЕЧНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе формулируются предельные возможности аналитической оптимизации, использующие необходимые условия Лагранжа. В качестве одной из задач рассматривается экстремальная задача: найти вектор – решение задачи математического программирования:

$$X^* = \arg\min \left\{ \varphi(x) = (X - X^0)^T (X - X^0) \left| \begin{array}{l} X \in D^0 = \{x | AX = b\} \neq 0 \\ X \in D^4 = \{x | X^T X \leq r^2\} \neq 0 \\ D^0 \cap D^4 \neq 0 \end{array} \right. \right\} \in R^n \cdot \qquad (1)$$

Необходимые условия экстремума получаются с помощью функции Лагранжа.

В результате преобразований необходимых условий получаем квадратное алгебраическое уравнение относительно множителя Лагранжа λ в стандартной форме:

$$L\lambda^2 + M\lambda + N = 0 , \qquad (2)$$

введя обозначения

$$L = b^T (AA^T)^{-1} b - r^2,\ M = 2b^T (AA^T)^{-1} b - 2r^2,\ N = X^{0^T} \widetilde{P}^0 X^0 + b^T (AA^T)^{-1} b - r^2 . \qquad (3)$$

Следуя данному методу, удается прийти к знакомому виду уравнения относительно множителя Лагранжа.

Вектор оптимального решения $X^* = X^*(\lambda)$ как функция множителя Лагранжа λ определится равенством

$$X^* = X^*(\lambda) = \left[\widetilde{P}^0 x^0 + P^A b(1+\lambda)\right]/(1+\lambda) , \qquad (4)$$

где $\widetilde{P}^0 = E - A^T (AA^T)^{-1} A$ – оператор проецирования на линейное подпространство $\widetilde{D}^0 = \{x | AX = 0\}$, связанное с линейным многообразием AX = b, $P^A = A^T (AA^T)^{-1}$.

Из уравнения (3) можно найти два значения λ^- и λ^+, одно из которых соответствует максимуму, а другое − минимуму квадратичного функционала (4).

Для решения данной задачи на практике обычно используют симплексный метод. Представленный метод отличается простотой и наглядностью; сходится к экстремальному значению за одну итерацию.

Применение метода в задачах управления.

В описанную модель можно погружать задачи управления объектами. Пусть уравнение состояния дискретного объекта управления задано в виде:

$$y_{t+1} = ay_t + bu_t .$$

Тогда искомым по заданным ограничениям может выступать вектор:

$$X = (y_{t+1} \mid u_t)^T \rightarrow X^* = (y_{t+1}^* \mid u_t^*)^T .$$

Приведем исходное уравнение к принятым в методе решения обозначениям:

$$y_{t+1} - bu_t = ay_t ,\ AX = \underbrace{(1 \mid -b)}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ u_t \end{pmatrix}}_{X} = b = \underbrace{ay_t}_{b} .$$

Если заданы ограничения на управление и управляемый параметр:

$$u^- \leq u_t \leq u^+, \quad y^- \leq y_{t+1} \leq y^+ ,$$

то формулируется задача:

$$\varphi = (y_{t+1} - y)^2 + (u_t - u)^2 \to \min,$$

которую и возможно решить рассмотренным методом конечномерной оптимизации.

Достоинством данного метода является то, что при отыскании значения неизвестного вектора X, который может состоять из нескольких неизвестных, решая одну задачу, в результате находим требуемые искомые значения нескольких неизвестных величин. При стандартном подходе к решению задач управления потребовалось бы для отыскания каждого неизвестного решать отдельную задачу по управлению.

В случае различных целевых условий получается широкий спектр задач:

$$\varphi(X) \to \min(\max), X \in D\left\{x \middle| X^- \le X \le X^+\right\}.$$