XXXIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы межвузовской научно-технической конференции. Ч.VI: С.95-97, 2005.

УДК 518.683

А.А.Смирнов (6 курс, каф. ФЭ), Д.В.Григорьев, к.ф.-м.н., доц.

ВЫСОКОТОЧНЫЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ABSTRACT: A using of finite element method (FEM) for high precision computation of electric field is discussed. This works focuses on triangulation technique and solving large scale Finite Element Equation with iterative solution methods and multigrid methods. Special data structures for efficient storage of sparse matrix in memory are proposed.

Решение задачи оптимизации электронно-оптических систем обычно включает расчет электромагнитного поля, а затем – траекторий пучков электронов и ионов в нем. Для практически используемых конструкций энергоанализаторов или электронных (ионных) линз расчет электростатического поля даже в классической постановке в виде краевой задачи для уравнения Лапласа является нетривиальной проблемой. Среди численных методов решения таких краевых задач особое место занимает метод конечных элементов (МКЭ). Широкое применение МКЭ получил благодаря развитому математическому аппарату и высокой точности расчета, ограниченной лишь ресурсами ЭВМ.

Вариационные методы решения краевых задач были разработаны достаточно давно, в начале 20 века (метод Ритца и метод Галеркина). Однако, увеличивающиеся требования к точности расчета, а также новые области применения методов, ставят перед исследователями ряд практических и теоретических проблем. Для МКЭ сегодня наиболее актуальными являются:

- разработка быстрых методов качественной триангуляции расчетной области, позволяющих варьировать плотность разбиения на отдельных участках области;
- оптимизация численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) очень высокой размерности (больше, чем 10^6), но при этом имеющих разреженную матрицу или матрицу блочной структуры;
- эффективное использование памяти ЭВМ для решения задач, описанных в пунктах 1 и 2, за счет использования специальных алгоритмов и структур данных.

Высокая скорость решения СЛАУ достигается благодаря применению итерационных методов решения, адаптированных для работы с разреженными матрицами. Обычно адаптация алгоритмов и структур данных заключается в том, что в памяти ЭВМ хранятся только ненулевые элементы матрицы, с которыми и производятся все вычисления [1]. «Игнорирование» нулевых элементов значительно сокращает как время работы алгоритма, так и необходимый для вычислений объем оперативной памяти. Однако, поскольку мера обусловленности матрицы СЛАУ для МКЭ обычно порядка $O(m^2)$, где m – это размерность матрицы; сходимость итерационного процесса для решения СЛАУ больших размерностей оказывается чрезвычайно медленной. Для предотвращения подобного эффекта, в качестве начального приближения для решения исходной задачи берется решение, полученное на более грубой сетке. При этом грубая сетка является «виртуальной», поскольку не хранится в

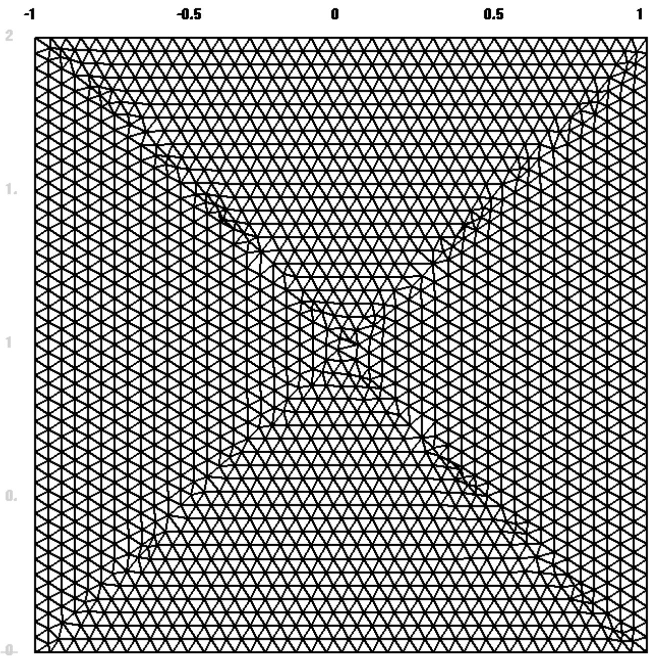

Рис. 1. Триангуляция модельной задачи.

памяти ЭВМ, а получается путем «игнорирования» части узлов точной сетки [2]. Такая техника получила название мультисеточной. В ходе данной работы на языке программирования C++ была реализована программа расчета электрического поля с помощью МКЭ, в том числе триангулятор, позволяющий варьировать плотность разбиения на отдельных участках области. В основу работы алгоритма легла идея продвижения фронта, предложенная в работе [3]. Для решения СЛАУ применен метод наискорейшего градиентного спуска, описанный в [1]. Метод был адаптирован для работы с разряженными матрицами, что на порядки увеличило его производительность, особенно при расчете СЛАУ большой размерности. Произведена проверка метода на модельной задачи (квадрат размером 2x2, нижний электрод находится под потенциалом 1, остальные заземлены – см. рис. 1), а также исследовано поведение погрешности в зависимости от плотности разбиения.

Полученные результаты (см. табл. 1) достаточно точно согласуются с теорией – при увеличении плотности разбиения, погрешность уменьшается приблизительно в такое же количество раз, что говорит о приемлемом качестве получаемой при триангуляции сетки.

Таблица 1. Зависимость погрешности численного решения от плотности узлов.

Плотность разбиения	Количество узлов	Погрешность
0.2	153	21.8%
0.1	527	7.4%
0.05	1981	4.4%
0.04	3051	3.3%

В ходе дальнейших исследований планируется реализовать мультисеточный метод, “улучшатель” сетки на основе алгоритма Делоне, а также добавить модуль расчета движения электронных (ионных) пучков в полученном поле.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. «Матричные вычисления», издательство «Мир», М: 1999.
2. Stefan Reitzinger «Algebraic Multigrid Methods for Large Scale Finite Element Equations», Johannes-Kepler-Universität Linz, 2001.

3. George P.L. «Automatic Mesh Generation Application to Finite Element Methods», John Wiley&Son, Masson: 1991.