

УДК 681.3 (075.8)

А.В.Макарчук (СПбГУАП), Н.В.Макарчук, к.т.н.

## МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ПЛОТНОЙ УПАКОВКИ КРУГОВ

При термической резке листового материала [1,2] актуальной задачей является экономия материала. В связи с этим автоматизация раскроя с целью уменьшения отходов становится одной из главных задач.

Пусть имеется произвольный набор кругов с радиусами, записанными в вектор  $R$ . Необходимо наиболее плотно разложить данные круги на плоскости. Вначале проводится сортировка кругов в порядке возрастания размера их радиуса, от меньшего к большему. Далее необходимо задать комбинаторику их касаний. Комбинаторика  $K$  является схемой касаний кругов, в которой каждый узел  $i$  обозначает круг, а ребра, соединяющие узлы, обозначают касание кругов, находящихся в данных узлах. Построение плотной упаковки кругов будем проводить на простых комбинаториках, которой является, например, гексагональная, т.е. каждый внутренний круг касается шести кругов. Из данного набора радиусов кругов возьмем самые наименьшие и самые крупные круги и разместим их в граничных узлах комбинаторики, причем количество крупных и мелких кругов должно быть примерно равным и они располагаются поочередно - сначала все упорядоченные крупные, а затем все мелкие. После этого производится расчет плотной упаковки кругов для заданных граничных кругов [3].

Решение удовлетворяет следующей нелинейной системе  $N$  уравнений, записанных для каждого внутреннего узла  $i$ .

$$\left\{ \sum_j \alpha(r_i; r_j, r_{j+1}) = A \quad : i = 1, \dots, N \right\} \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$R(w) = g(w) \quad (2)$$

где  $\alpha(r_i; r_j, r_{j+1})$  – центральный угол вокруг узла для трех смежных кругов;  $A$  – целевая функция;  $j$  – узлы, соседние с  $i$ -тым;  $w$  – граничный узел.

Полученные из расчета радиусы кругов для внутренних узлов записываются в вектор  $R'$  и сортируются в порядке возрастания. Из вектора  $R$  первоначально заданных кругов исключаются круги, вошедшие в число граничных узлов. Каждому радиусу рассчитанного вектора  $R'$  сопоставляется радиус круга из заданных  $R$ . Поскольку оба вектора упорядочены по размерам радиусов, сопоставляемые радиусы имеют один и тот же индекс, то есть  $r'_j \sim r_j$ . Так как очевидно, что  $r'_j \neq r_j$  нам необходимо для тех кругов, которые превышают размер расчетных, освободить им место среди других кругов. Это можно сделать следующим образом: раздвинув граничные узлы друг от друга в районе данного круга.

Таким образом, задача размещения набора  $R$  кругов в плотной упаковке  $R'$  сводится к нахождению значений параметра  $\eta$  (косинус угла пересечения кругов) для граничных узлов, при которых выполняется условие  $r'_j \geq r_j$ . Искомое значение параметра  $\eta_k$ , где  $k$  - количество сторон многоугольника в комбинаторике  $K$ , соответствует минимальному значению следующей целевой функции:

$$\Phi(\eta_k) = |\min(r'_j(\eta_k) - r_j)|, \quad \Phi(\eta_k^*) = \min \Phi(\eta_k) \quad (3)$$

где  $\eta_k^*$  – оптимальное значение параметра. Минимум функции  $\Phi$  находится методом сопряженного градиента.

После определения  $\eta_k^*$  набор расчетных кругов  $R'$  заменяется на набор заданных кругов  $R$ , которые помещаются в комбинаторику  $K$ , в соответствии с местоположением каждого круга. Так как  $r'_j \geq r_j$ , то круги  $R$  могут располагаться в данной комбинаторике либо с касанием, либо с зазором. Поэтому необходимо каким-либо образом уплотнить данную компоновку кругов. Это осуществляется следующим простым способом. Какая-либо из границ комбинаторики выбирается в качестве базовой линии. Берется ближайший внутренний круг к данной линии и сдвигается в сторону границы так, чтобы он касался граничных кругов минимум в двух точках. Такая операция проводится со всеми кругами, расположенными вдоль этой границы. При этом отслеживается, чтобы каждый последующий круг в этом ряду, не пересекал предыдущий в этом же ряду. Если такое происходит, то для этого круга в качестве одной из точек касания берется предыдущий круг. Затем базовая линия переносится во вновь уложенный ряд, и данная операция повторяется для следующего ряда кругов. Так осуществляется сдвиг кругов к одной из границ комбинаторики. В качестве первой базовой линии лучше выбрать границу, для которой  $\eta_k^*$  будет минимальна. Это приведет к тому, что уплотнение пойдет в сторону наиболее плотно лежащих кругов.

Таким образом, суммируя вышесказанное, данная методика состоит из последовательности следующих шагов:

1. Размещаем набор наибольших и наименьших кругов в граничные узлы комбинаторики  $K$ .
2. Ищутся оптимальные значения  $\eta_k^*$  для границ комбинаторики  $K$ .
3. Для внутренних узлов комбинаторики  $K$  проводится расчет радиусов кругов  $R'$  плотной упаковки.
4. Набор расчетных кругов  $R'$  заменяется набором из заданных кругов  $R$  и уплотняется.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Макаручук Н.В., Макаручук А.В., Пиль Э.А. Компьютерная программа оптимизации холостых проходов и раскроя при лазерной резке листового материала.- Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, №10, 2003 с.25-26.
2. Макаручук Н.В., Макаручук А.В., Пиль Э.А. Оптимизация лазерного раскроя листового материала. СТИН, №6, 2004, с.39-40.
3. Collins C.R., Stephenson K. A circle packing algorithm. - Computational Geometry: Theory and Application, 25 (2003), pp.233-256.