

УДК 662.642: 621.926.7

А.С.Алексашкин (5 курс, каф. МПУ), Л.В.Штукин, к.ф.-м.н., доц.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО ИЛЛЮСТРАЦИИ ЯВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

В теории колебаний много внимания уделяется явлению, называемому параметрический резонанс. Параметрический резонанс в системе, т.е. резонанс с возрастающими амплитудами колебаний, возбуждаемых параметрически, а именно периодическим изменением некоего параметра системы, существенно отличается от обычного резонанса и в силу возрастания амплитуд колебаний является зачастую более опасным. Однако исследовать это явление на наглядном примере нелегко: экспериментальные исследования параметрически возбуждаемых колебаний выходят, как правило, за рамки демонстрационных опытов и проводятся сравнительно редко ввиду их высокой стоимости. Ввиду этого предлагается создать простое наглядное пособие для проведения лабораторной работы по иллюстрации параметрического резонанса, состоящее из нити, перекинутой через блок и стенда – измерителя угла отклонения нити. Предполагается, что привод нити в движение осуществляет сам экспериментатор.

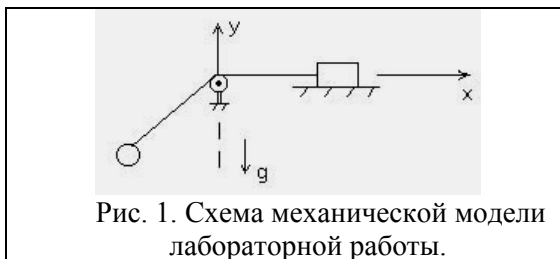


Рис. 1. Схема механической модели лабораторной работы.

На рис.1 изображена схема механической модели, используемой в лабораторной работе.

Будем полагать, что длина нити меняется по следующему закону:

$$l(t) = L + \Delta L, \quad \Delta L = Lh \cos(2\omega t),$$

где  $\omega$  - задаваемая скорость перемещения нити,  $h$  - безразмерная глубина пульсации (причём  $h \ll 1$ ).

Кинетическая и потенциальная энергия данной системы имеет вид:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot \left[ (\dot{l}(t))^2 + l^2(t) \cdot \dot{\varphi}^2 \right], \quad \Pi = mg \cdot l(t) \cdot (1 - \cos \varphi),$$

где  $\varphi$  - угол отклонения нити от вертикали,  $m$  – масса груза.

Дифференциальное уравнение движения маятника было получено с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода. Было решено включить в математическую модель трение. Дифференциальное уравнение движения с учётом трения выглядит следующим образом:

$$(1 + h \cos(2\omega t))\ddot{\varphi} - 4\omega \cdot h \dot{\varphi} \cdot \sin(2\omega t) + 2n\dot{\varphi} + \lambda^2 \sin \varphi = 0,$$

где  $n$  – коэффициент трения,  $\lambda = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

Уравнение нелинейное и отличается от классического уравнения Матье тем, что при второй производной стоит изменяющийся во времени множитель (параметр) – это резко усложняет задачу нахождения области устойчивости решения. Область устойчивости отличается от приведённой для уравнения Матье в [1]. Область устойчивости решения данного уравнения приближённо определяется из линейного (без учёта трения):

$$(1 + h \cos(2\omega t))\ddot{\varphi} - 4\omega \cdot h \dot{\varphi} \cdot \sin(2\omega t) + \lambda^2 \sin \varphi = 0.$$

На рис. 2 представлена зависимость амплитуды установившихся колебаний маятника от безразмерной частоты  $z$  ( $z = \frac{\omega}{\lambda}$ ) при разных значениях коэффициента трения  $n$  и глубины пульсации  $h$  (фактически, область возникновения параметрического резонанса). Верхние ветви устойчивы, нижние – неустойчивы.

На рис. 3 представлен диапазон частот, в котором возможно возникновение параметрического резонанса без учёта силы трения при “реальных” значениях  $h$ : 0, ..., 0.1.

При учёте трения область возникновения параметрического резонанса (на рис. 3 – тёмная область) поднимается по оси  $h$ . Это значит, что при очень малых значениях  $h$  (и тем больших, чем больше трение в системе), параметрический резонанс невозможен ни при каких частотах колебаний.

Было проведено исследование силы натяжения нити маятника в режиме установившихся колебаний. На периоде она меняется по сложному нелинейному закону, а максимальное её значение примерно втрое превышает значение силы натяжения нити в покое. Это создаёт сложности с подбором двигателя для привода системы в движение, так как требуется электродвигатель с очень высоким значением крутящего момента. В свою очередь, человек, осуществляющий привод системы рукой, может в первом приближении смоделировать гармонический закон возбуждения нити и таким образом получить возникновения параметрического резонанса. Опыт, осуществлённый на описанной выше лабораторной установке, показал, что данная установка позволяет качественно увидеть явление параметрического резонанса и оценить установившуюся амплитуду колебаний маятника. С помощью опыта по моделированию затухающих колебаний была произведена оценка трения в системе, для этой величины было аналитически получено значение установившейся амплитуды колебаний. Отклонение экспериментальных результатов от теоретических не превысило 10%.

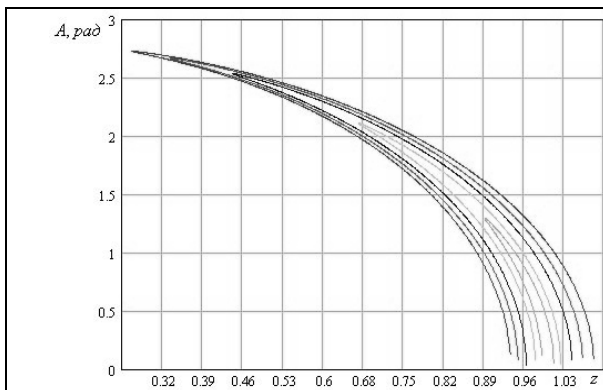


Рис. 2. Область возникновения параметрического резонанса.

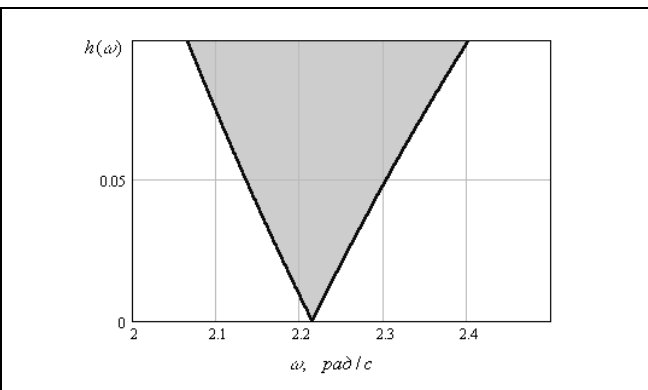


Рис. 3. Область возникновения параметрического резонанса при “реальных” значениях  $h$ .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с.